多项式模上全次数除法在 CAGD 中的应用

冯玉瑜 * 陈长松 邓建松 †
(中国科技大学数学系)

摘要 几何连续性的求解是计算机辅助几何设计 (CAGD) 中的一个关键问题. 本文利用在 [5] 文中提出的一元多项式模上的全次数除法, 讨论了几何连续性中跨边界导数的自由度问题, 最后提供了一个示例.

关键词 计算代数几何, 几何连续性, Syzygy 模, 全次数除法
中图法分类号 O187.1
AMS Classification(1991) 14Q10, 68U07

§1 几何连续简介

在计算机辅助几何设计和计算机图形学中, Bézier 曲面造型是一个重要的研究方向. 在曲面造型中, 一张曲面的构成, 往往是由许多小曲面片组成. 每个小曲面片则是三角形或矩形的 Bézier 曲面. 为使所构造的曲面具有一定的光滑性, 人们一般通过限制曲面片方程的可微性来保证, 即在两张小曲面片的公共处, 偏导数是共线的. 但是, 这种严格的光滑条件就应用而言有时是不必要的, 特别是要把三角曲面片和矩形曲面片组合起来的时候.

从本世纪六十年代开始, 人们就开始在曲线、曲面设计中应用几何连续的思想. 如 1962 年 Geise 用 n 阶接触 (Contact of order n) 来定义光滑曲线的拼接 ([6]). 1972 年后, Bézier , Faux 和 Pratt 等人讨论了切线和曲率连续曲线 ([1, 4]). 而对曲面的情形, 1977 年 Bézier 就考虑了切平面连续问题 ([1]). 由于几何连续的曲线, 增加了控制形状的参数, 这在外形设计中有很大应用价值. 进入八十年代以后, 几何连续的重要性日益被人们所认识, 在这方面已有大量的理论和应用成果, 见文献 [2, 7, 10, 11, 12].

设 p_1 和 p_2 为两张三角 Bézier 曲面片或矩形 Bézier 曲面片, Γ 为其公共边界曲线 (这时称两张曲面片是零阶几何连续 (G^0), 当然也是连续的). 如果两曲面在公共边界曲线上有统一的表示, 不妨就设为 $\Gamma(u)$, 则 $D\Gamma(u)$ 为沿曲线 Γ 的切向量. 同时在公共边界曲线上两张曲面分别存在着两个跨边界 (Cross-boundary) 导数 $\Xi_1(u), \Xi_2(u)$. 注意这里我们要求对任意的 u, $\Xi_i(u)$ 与 $D\Gamma(u)$ 不共线. 我们称曲面 p_1 和 p_2 是 **一阶几何连续**(GC^1) 的, 如果在 Γ 上的切平面重合, 即任意固定一个参数值 u, 向量 $\Xi_2(u)$ 位于由 $\Xi_1(u)$ 和 $D\Gamma(u)$ 张成的平面内.

*973 项目 "数学机械化"(No. G1998030600)、国家自然科学基金与教委博士点基金资助
†中国科大校内青年基金资助

这也就是说多项式

$$\det[D\Gamma(u), \Xi_1(u), \Xi_2(u)] = 0 \tag{1.1}$$

对公共边界 Γ 上的任意一点都成立. 一阶几何连续也称为切平面连续. 很自然地, (1.1) 等价于存在多项式 $\alpha(u), \beta(u)$ 和 $\gamma(u)$, 使得对公共边界 Γ 上的任一点, 成立

$$\alpha(u)D\Gamma(u) + \beta(u)\Xi_1(u) + \gamma(u)\Xi_2(u) = 0. \tag{1.2}$$

针对 $\alpha(u), \beta(u)$ 和 $\gamma(u)$ 的不同取法, 可以得到不同的切平面连续曲面构造方法. 1982 年, Farin([3]) 给出了一个很好的条件: 取 $\beta(u)$ 和 $\gamma(u)$ 等于常数, 而 $\alpha(u)$ 为线性函数, 此方法有很好的几何解释. Sarraga([13, 14]) 则选择 $\alpha(u) = 0$, $\gamma(u) = 1$, $\beta(u)$ 为二次函数. 这时, 曲面 p_2 的次数要高一些, 可以增加自由度, 且可解决 Farin 方法的缺陷. 1986 年到 1989 年间, 刘鼎元 ([10]) 讨论了一般的切平面连续条件.

切平面连续曲面看起来虽然很光滑, 但在边界上折射线仍然有折点, 所以有时候有必要考虑曲率连续曲面. 进一步, 现在人们已对一般的几何连续拼接条件进行了广泛的讨论. 有关二阶以上的几何连续的结果, 请见文献 [8, 9] 等.

我们这里的工作与以前常见情形相比, 不同之点在于探讨了给定曲面片, 如何充分利用一阶几何连续性的自由度, 来构造相邻曲面片. 而以往常见结果是如何验证两曲面片的几何连续性, 或者是如何简化几何连续的条件, 从而部分应用了几何连续的 "自由度".

在 [5] 中给出了一元多项式模上的全次数除法, 这里要把该方法运用到一阶几何连续条件的求解中. 在第 2 节得出了一个算法, 用它可以计算当给定曲面片 p_1 的表示时, 曲面片 p_2 要在公共边界 Γ 处与 p_1 一阶几何连续的条件 (即在 Γ 上 p_2 的跨边界导数可能的取值全体). 并给出了几种特殊情形下 p_2 跨边界导数的取值显式表达. 在最后, 我们给出了一个算例, 用以演示我们算法的有效性.

§2 两曲面片一阶几何连续的完整条件

正如在上一节中所说, 现在已有了两曲面片几何连续的一般条件, 但这些结果都是着重于如何检验已有的两曲面片是否几何连续, 而没有给出如何从已有的曲面片, 充分利用几何连续所赋予的自由度, 来构造相邻曲面片. 我们在这一节的目标就是在相当广泛的程度上研究一下一阶几何连续到底有多大 "自由度".

曲面片 p_1 完全给定, 曲线 $\Gamma(u)(u_0 \leqslant u \leqslant u_1)$ 为其一条边界曲线, 我们现在的目标就是给出一种算法, 来完全确定出要在 $\Gamma(u)$ 上与曲面片 p_1 达到一阶几何连续, 到底 p_2 要满足何种条件.

由于 p_1 和 p_2 在 $\Gamma(u)$ 上满足 GC^1 的条件, 那么两者在公共边界上是连续的, 所以我们假定 $\Gamma(u)$ 也为 p_2 的一条边的表示. 由于两曲面片在公共边界上切平面连续, 所以 p_1 在 $\Gamma(u)$ 上每一点的法向也是 p_2 在该点的法向, 即

$$(D\Gamma(u) \times \Xi_1(u)) \cdot \Xi_2(u) = 0,$$

设 $D\Gamma(u) \times \Xi_1(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$, $\Xi_2(u) = (\xi_1(u), \xi_2(u), \xi_3(u))$, 则这个方程就相当于

$$f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0. \tag{2.1}$$

所以曲面片 p_2 的公共边界上的跨边界导数 $\Xi_2(u)$ 的所有可能取值，就是矩阵 $[f_1, f_2, f_3]$ 的 Syzygy. 如果我们根据不同的情形，取定多项式环 A 为 $\mathbb{R}[u]$ 、 $\mathbb{Q}[u]$ 或 $\mathbb{Z}[u]$, 则 $\Xi_2(u)$ 的所有可能取值构成 A^3 的一个子模，用 M 表示该子模. 应用 [5] 中定理 2.2 的推论可以求出 M 的一组生成集. 对此生成集，我们还可以利用 [5] 中的全次数辗转相除法，得到相对于一步除法是简化的生成元，从而使得很容易确定是否可以构造给定次数的曲面片 p_2, 以及可能时如何构造.

有了上述分析，我们给出如下算法：

算法

输入 一个矩形或三角曲面片 p_1, 并指定其一边 Γ, 作为公共边界.

输出 A^3 的一个子模的相对于一步除法为简化的生成元，该子模为与 p_1 在 Γ 上 GC^1 的曲面片 p_2 的跨边界导数的所有可能取值.

步骤

第一步 计算 p_1 在边界 Γ 处的切向导数 $D\Gamma$ 和跨边界导数 Ξ_1 ;

第二步 计算向量外积 $(f_1, f_2, f_3) = D\Gamma \times \Xi_1$;

第三步 计算 Syz (f_1, f_2, f_3) 的生成集，并且若有必要的话，应用全次数辗转相除法得出简化生成元.

若给定的曲面片为矩形域或三角域上的 Bézier 纵标形式曲面，则此时公共边界上的切向量为 $D\Gamma = (1, 0, D\gamma)$, 跨边界导数向量为 $\Xi_1 = (0, 1, \xi)$, 因此此时法向具有形式 $(-D\gamma, -\xi, 1)$, 所以 $\gcd(-D\gamma, -\xi, 1) = 1$, 而且矩阵

$$M = [-D\gamma, -\xi, 1], \quad T = [0, 0, 1]^T.$$

所以

$$I_3 - TM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D\gamma & \xi & 0 \end{bmatrix}.$$

当规定模 A^3 中位置的大小顺序为 $1 > 2 > 3$, 项序选择 POT 生成类型时，我们知道 $\{(1, 0, D\gamma), (0, 1, \xi)\}$ 构成 A^3 一个子模的 Gröbner 基 , 由模上 Gröbner 基定义可知：曲面片 p_2 要与一 Bézier 纵标形式曲面 GC^1 连续的充要条件是其跨边界导数 Ξ_2 的三个分量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 满足 $\xi_1 D\gamma + \xi_2\xi = \xi_3$. 由此我们有如下结论：

定理 2.1 给定用 Bézier 纵标形式表示的曲面片 p_1, Γ 为其一边， $(1, 0, D\gamma)$ 和 $(0, 1, \xi)$ 为 Γ 上的切向导数和跨边界导数，则在 Γ 处与 p_1 有相同表示的曲面片 p_2 在 Γ 上与 p_1 达到 GC^1 连续的充要条件是 p_2 的跨边界导数 Ξ_2 三个分量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 满足 $\xi_3 \in \langle D\gamma, \xi \rangle$, 而 ξ_1 和 ξ_2 就分别是 ξ_3 相应于 $D\gamma$ 和 ξ 的组合系数.

定理 2.2 当 (f_1, f_2, f_3) 的三个分量（作为一元多项式）有两个是互素时，曲面片 p_2 跨公共边界的导数所有可能取值是 A^3 中的一个由两个元素生成的子模.

证明 由于 f_1, f_2 和 f_3 中有两个多项式是互素的，不妨设 $\gcd(f_1, f_2) = 1$, 则存在多项式 k_1 和 k_2 使得

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 = 1. \tag{2.2}$$

所以此时变换矩阵为

$$M = [f_1, f_2, f_3], \quad t = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

从而有

$$I_3 - TM = \begin{bmatrix} 1 - k_1 f_1 & -k_1 f_2 & -k_1 f_3 \\ -k_2 f_1 & 1 - k_2 f_2 & -k_2 f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取 $I_3 - TM$ 的第三列作为一个生成元，下面说明前两列可以化简为一个生成元. 事实上，由 (2.2) 可知

$$\begin{bmatrix} 1 - k_1 f_1 \\ -k_2 f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 f_2 \\ -k_2 f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

而

$$\begin{bmatrix} -k_1 f_2 \\ 1 - k_2 f_2 \\ 0 \end{bmatrix} = -k_1 \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$f_1 k_1 \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-f_2)(-k_2) \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在前两列生成的子模中，而且原来两个生成元可以用其表示出来，所以

$$\mathrm{Syz}\ (f_1, f_2, f_3) = \langle [f_2, -f_1, 0]^T, [-k_1 f_3, -k_2 f_3, 1]^T \rangle. \tag{2.3}$$

这就完成了证明.

§3 曲面片的表示

在有了曲面片沿一条边界曲线的表示和跨边界导数之后，下面我们讨论一下如何求出曲面的完整表示. 事实上，容易知道在给定上述条件下，一般可以找到相当多的曲面满足已知条件. 我们下面就给出一个简单的构造过程.

§3.1 矩形域上的 Bézier 曲面

当要求的曲面片 p_2 为矩形域上的参数曲面片（注意这并没要求 p_1 也必须为矩形域上的曲面片）时，不妨取其 Bernstein-Bézier 表示：

$$p_2(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{b}_{ij}B_i^m(u)B_j^n(v),0\leqslant u,v\leqslant 1, \tag{3.1}$$

其中

$$B_i^m(u)=\binom{m}{i}u^i(1-u)^{m-i},\quad i=0,\ldots,m$$

为 Bernstein 基函数，而 $\boldsymbol{b}_{ij}$ 为控制点. 从表达式可以知道，一张 $m\times n$ 次的矩形域上 Bézier 曲面片有 $(m+1)(n+1)$ 个自由的控制点可用来控制其形状.

对 (3.1) 中的曲面片，有

$$\frac{\partial}{\partial u}p_1(0,v)=m\sum_{j=0}^{n}(\boldsymbol{b}_{1j}-\boldsymbol{b}_{0j})B_j^n(v). \tag{3.2}$$

设 $u=0$ 所对应的边为公共边 Γ, 则由于曲面片 p_1 已给定，所以易知 (3.1) 中的 $\boldsymbol{b}_{0,j}$, $j=0,\ldots,n$ 也相应被固定，以满足在公共边界上的重合条件. 这同时也满足了边界切向量一致的要求. 下面看看为了满足给定的跨边界导数，还要固定哪些控制点.

设应用上述算法得到的 p_2 跨边界导数有如下表示：

$$\Xi_2(v)=\sum_{k=0}^{l}\mathbf{a}_k B_k^l(v), \tag{3.3}$$

其中 $l\leqslant n$, 由于有升阶公式，我们可不妨设 $l=n$. 所以为了满足跨边界导数，我们需要 $m(\boldsymbol{b}_{1j}-\boldsymbol{b}_{0j})=\mathbf{a}_j$, $j=0,\ldots,n$. 由于 $\boldsymbol{b}_{0j}$ 已被固定，所以由此式 $\boldsymbol{b}_{1j}$ 被固定为 $\boldsymbol{b}_{1j}=\frac{1}{m}\mathbf{a}_j+\boldsymbol{b}_{0j}$, 就可以满足跨边界导数的要求.

总之，一旦应用上一节中的算法，得到了切向导数和跨边界导数的表示，在曲面片 p_2 的表示中在公共边上以及与公共边邻近的那排控制点就被固定，这样为了修改曲面的形状，尽可以调整其它的控制点，而不会破坏已有的一阶几何连续性.

§3.2 三角域上的 Bézier 曲面

当要求的曲面片 p_2 为研三角域上的参数曲面片时，不妨取其 Bernstein-Bézier 表示：

$$p_2(u,v,w)=\sum_{i+j+k=m}\boldsymbol{b}_{i,j,k}B_{ijk}^m(u,v,w),\quad u,v,w\geq 0,u+v+w=1, \tag{3.4}$$

其中

$$B_{ijk}^m(u) = \frac{m!}{i!\,j!\,k!}u^i v^j w^k, \quad i+j+k=m$$

为 Bernstein 基函数，而 $\boldsymbol{b}_{i,j,k}$ 为控制点. 从表达式可以知道，一张 m 次的三角域上 Bézier 曲面片有 $(m+1)(m+2)/2$ 个自由的控制点可用来控制其形状.

对 (3.4) 中的曲面片，有

$$\frac{\partial}{\partial u}p_1(0,v,w) = m\sum_{j=0}^{n-1}(\boldsymbol{b}_{1,j,n-1-j} - \boldsymbol{b}_{0,j,n-j})B_j^{n-1}(v). \tag{3.5}$$

设 $u=0$ 所对应的边为公共边 Γ, 则由于曲面片 p_1 已给定，所以易知 (3.4) 中的 $\boldsymbol{b}_{0,j,n-j}$, $j=0,\ldots,m$ 也相应被固定，以满足在公共边界上的重合条件. 这同时也满足了边界切向量一致的要求.

与矩形时的情形一样，同样设应用上述算法得到的 p_2 跨边界导数有如下表示：

$$\Xi_2(v) = \sum_{k=0}^{l}\boldsymbol{a}_k B_k^l(v), \tag{3.6}$$

其中 $l \leqslant n-1$, 而且不妨设 $l=n-1$. 所以为了满足跨边界导数，我们需要 $m(\boldsymbol{b}_{1,j,n-1-j} - \boldsymbol{b}_{0,j,n-j}) = \boldsymbol{a}_j$, $j=0,\ldots,n$. 由于 $\boldsymbol{b}_{0,j,n-j}$ 已被固定，所以由此式 $\boldsymbol{b}_{1,j,n-1-j}$ 被固定为 $\boldsymbol{b}_{1,j,n-1-j} = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_{0,j,n-j}$, 就可以满足跨边界导数的要求.

总之，一旦应用上一节中的算法，得到了切向导数和跨边界导数的表示，在曲面片 p_2 的表示中在公共边上以及与公共边邻近的那排控制点就被固定，这样为了修改曲面的形状，尽可以调整其它的控制点，而不会破坏已有的一阶几何连续性.

§4 例子

我们在这一节考虑一个算例，以说明我们方法的有效性. 这里所考虑的曲面片 p_1 为定理 2.2 情形. 实际上从随机构造的例子来看，这时定理条件虽然显得比较苛刻，但往往曲面片一般都满足此条件.

例

取曲面片 p_1 为双二次参数型矩形域上的 Bézier 曲面，控制点为

$$\begin{aligned}
&P_{00}=\{0,0,0\}, && P_{01}=\{0,2,3\}, && P_{02}=\{0,4,2\},\\
&P_{10}=\{2,2,1\}, && P_{11}=\{2,3,4\}, && P_{12}=\{2,4,5\},\\
&P_{20}=\{4,-1,1\}, && P_{21}=\{4,2,3\}, && P_{22}=\{5,1,4\},
\end{aligned}$$

则曲面形状如图 1 所示.

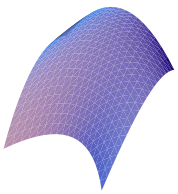

图 1: 曲面片 p_1

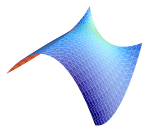

图 2: 一张示例曲面片 p_2

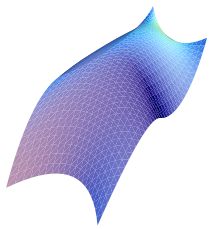

图 3: p_1 与 p_2 在公共边界处是光滑的

取 $v=1$ 所对应的一边为公共边 Γ, 则曲面片 p_1 沿 Γ 的切向量为 $(4+2u,-6u,6-8u)$, 跨边界导数为 $(2u^2,4-4u-2u^2,-2+8u-4u^2))$, 则在边界上的法向量为 $4(2u^3-17u^2+17u-6,-2u^3+3u^2-7u+2,2(u-2)(u-1)(u+1))$, 即

$$\begin{aligned} f_1 &= 2u^3-17u^2+17u-6, \\ f_2 &= -2u^3+3u^2-7u+2, \\ f_3 &= 2(u-2)(u-1)(u+1), \end{aligned} \tag{4.1}$$

这里略去了常数因子 4. 容易知道 $\gcd(f_1,f_2)=1$, 从而显然有 $\gcd(f_1,f_2,f_3)=1$. 若令

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{97}{196}+\frac{157}{784}u-\frac{65}{392}u^2, \\ k_2 &= -\frac{193}{196}+\frac{1067}{784}u-\frac{65}{392}u^2, \end{aligned}$$

则有

$$k_1f_1+k_2f_2=1.$$

由定理 2.2 及 (2.3), 我们所要构造的曲面片 p_2 的跨边界导数取值在由如下两个元素生成的子模中:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u^3+3u^2-7u+2 \\ -2u^3+17u^2-17u+6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -k_1f_3 \\ -k_2f_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{97}{49}-\frac{351}{196}u-\frac{359}{392}u^2+\frac{143}{98}u^3-\frac{417}{392}u^4+\frac{65}{196}u^5 \\ \frac{193}{49}-\frac{1453}{196}u-\frac{31}{56}u^2+\frac{347}{49}u^3-\frac{1327}{392}u^4+\frac{65}{196}u^5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对这两个元素应用 [5] 引进的辗转相除法，易知等价于如下两元素生成的子模：

$$g_1 = \begin{bmatrix} 4-4u+3u^2 \\ 12-18u+3u^2 \\ 7u \end{bmatrix}; \quad g_2 = \begin{bmatrix} 2+u \\ -3u \\ 3-4u \end{bmatrix}.$$

而这两个元素相对于一步除法是简化的．这样我们要构造的曲面片 p_2 的跨边界导数，必定有形式 $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ 的形式，这里的 α_1, α_2 为多项式．如取 $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = u/2$, 这样跨边界导数的次数为 2, 与 p_1 次数一致．即我们现在跨边界导数为

$$\begin{aligned} (1/2)g_1 + (u/2)g_2 &= \begin{bmatrix} 2-u+2u^2 \\ -3(-2+3u) \\ -u(-5+2u) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} B_0^2(u) + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} B_1^2(u) + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} B_2^2(u). \end{aligned}$$

由此可知 p_2 在 Γ 边上和相邻的控制点就被固定，我们可随意取第三排控制点，当然最好要保证曲面片的形状不要太古怪．如我们取 p_2 控制点为

$$\begin{array}{lll} Q_{00} = \{0,4,2\}, & Q_{01} = \{1,7,2\}, & Q_{02} = \{1/2,9,2\}, \\ Q_{10} = \{2,4,5\}, & Q_{11} = \{11/4,19/4,25/4\}, & Q_{12} = \{3,5,3\}, \\ Q_{20} = \{5,1,4\}, & Q_{21} = \{13/2,-1/2,11/2\}, & Q_{22} = \{5,4,5\}, \end{array}$$

则其形状如图 2 所示；当它把与曲面片 p_1 放在一起显示时 (见图 3)，可见构造的复合曲面是光滑的．

参考文献

[1] P. Bézier , Numerical control, Mathematics and Applications, John Wiley & Sons, New York, USA(1972).

[2] T. D. DeRose, Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of Bézier surfaces, Computer Aided Geom. Design, 7(1990), 165-179.

[3] —, A construction for visual C^1 continuity of polynomial surface patches, CG& TP, 20(1982), 272-282.

[4] I. Faux and M. Pratt, Computational geometry fro design and manufacture, Ellis Horwood, Chichester, UK(1979), 210-218.

[5] 冯玉瑜，王旭明，邓建松，多项式模上的全次数除法，已投稿．

[6] G. Geise, Über berührende Kegelschnitte einer ebenen Kurven, ZAMM, 42(1962), 297-304.

[7] J. A. Gregory, Geometric continuity, Mathematical methods in Computer Aided Geometric Design, T. Lyche and L. Schumaker(eds.), Academic Press, Boston(1989), 353-371.

[8] 姜献峰，梁友栋，有理 Bézier 曲线的几何连续条件及其应用，高等学校计算数学学报， 4(1992) ， 340-353 。

[9] 梁友栋，曲线和曲面的几何连续性，数学年刊， 11A(1990) ， 374-386 。

[10] 刘鼎元， Bézier 曲面片光滑连接的几何条件，应用数学学报， 9(1986), 432-442.

[11] D. Liu, GC^1 continuity conditions between two adjacent rational Bézier surface patches, Computer Aided Geom. Design, 7(1990), 151-163.

[12] D. Liu and J. Hoschek, GC^1 continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches, Computer Aided Design, 21(1989), 194-200.

[13] R. F. Sarraga, G^1: interpolation of generally unrestricted cubic Bézier curves, CAGD, 4(1987), 23-39.

[14] —, Errata: G^1 interpolation of generally unrestricted cubic Bézier curves (Short communication), CAGD, 6(1989), 167-171.

The Application in CAGD of Total Degree Division in Polynomial Module

Feng Yuyu Chen Changsong Deng Jiansong

(*Dept. of Mathematics of USTC*)

Abstract The computation of geometric continuity is one of key problems in Computer Aided Geometric Design(CAGD). In this paper, we discuss the freedom of cross-edge derivatives in geomeric continuity with the total degree division in [5]. At last, we give an examples.

Key words computational algebraic geometry, geometric continuity, syzygy module, total degree division