

代数曲面上测地线的计算

欧阳宏, 金良兵, 邓建松

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: 给出了求解代数曲面上两点之间测地线的一种算法. 在算法中, 把决定代数曲面测地线的微分方程组离散为一个非线性方程组, 然后采用迭代数值方法求解. 为此, 给出了一种基于细分的初值生成方法. 最后给出了一些数值算例用来验证算法的有效性.

关键词: 代数曲面; 测地线; 测地曲率

中图分类号: TP391; O241.5 **文献标识码:** A

AMS Subject Classification (2000): Primary 65D18; Secondary 68U05

Computation of geodesic lines between two points on algebraic surfaces

OUYANG Hong, JIN Liang-bing, DENG Jian-song

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: An algorithm for computing the geodesic line between the two points of an algebraic surface was presented. The system of differential equations for a geodesic line on an algebraic surface was discretized into a nonlinear system. Then it was solved numerically based on iterative methods. In order to get a better convergence, a method based on subdivision was designed to specify initial values for the iterations. Examples show the efficiency of our method.

Key words: algebraic surface; geodesic line; geodesic curvature

0 引言

外形分析是从几何模型中提取有用信息的过程^[1], 它是计算机辅助几何设计与制造 (CAD/CAM) 系统的基本组成部分. 外形分析主要包括非线性多项式求解、曲面求交问题、交线的微分几何、距离函数、曲线和曲面的外形分析、脐点和曲率线、测地线、等距线和等距面等内容. 为应对日益激烈的市场竞争, CAD/CAM 技术在工业产品开发中得到广泛应用, 外观设计在产品开发中越来越得到重视, 外形分析也变得越来越重要.

测地线是几何模型外形分析的重要内容之一. 测地线是测地曲率为零的曲线, 即曲面上测地线的密切平面包含曲面的法向. 在一张曲面 S 上任意取两点 P 和 Q , 在 S 上由点 P 到达点 Q 的路径有无数条, 但是在局部范围内最短的路径一般只有一条, 称为 P 到 Q 的测地线.

自由曲面上最短距离的计算是辅助几何设计和外形分析中的一个重要问题. Euler 在 1732 年首先给出了隐式曲面上的测地线方程. Kimmel 等^[2] 通过从曲面上一点或者一个区域开始计算等测地线的扩散, 给出了一种寻找曲面上最短路径的方法, 该算

收稿日期: 2007-04-28; 修回日期: 2007-09-05

基金项目: 国家自然科学基金 (60533060, 60473132, 10626049), 教育部博士点专项科研基金和高等学校学科创新引智计划 (b07033) 资助.

作者简介: 欧阳宏, 男, 1979 年生, 硕士. 研究方向: 计算机辅助几何设计.

通讯作者: 邓建松, 博士/教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn

法是在矩形网格上采用有限离散逼近来实现的. Maekawa 等^[3,4]通过将控制微分方程在网格点上离散逼近的方法计算测地线,将问题转化为非线性方程组而采用二次收敛的 Newton 迭代进行求解. 1989 年, Patrikalakis 等^[5]提出了参数曲面测地线的数字逼近形式,通过对曲面上曲线的测地法向的初值问题进行积分,得到有理 B 样条曲面上的测地等距线,其形式十分简洁且精确,但是非常耗时.

2003 年, Kumar 等^[6]详细地比较了关于曲面上测地线的研究工作的优劣性,并指出所要遵循的原则. 关于求测地线的算法,已有的方法大致有以下 3 个方面:①参数曲面测地线的直接计算和网格面最短路径的离散逼近之间的比较;②利用网格面的法向计算网格面上的测地线;③关于计算 NURBS 曲面上测地线的算法的优化.

由此可见,目前测地线的大多数工作主要是关于参数曲面和网格曲面上的测地线算法,而有关代数曲面的工作很少. 本文也正是受到 Maekawa 等的相关研究的启发,将其推广到代数曲面上.

1 参数曲面上测地线的研究

本节介绍参数曲面上测地线的相关研究以及算法.

1.1 参数曲面上测地微分方程的推导

假设参数曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 是正则的和非周期的 NURBS 曲面片, Wolter^[7]证明了正则 NURBS 曲面上两点之间,总是存在一条最短路径. 一般情况下假设除端点外最短路径与曲面边界不相交.

设 C 是曲面上过点 P 的弧长参数化正则曲线:

$$\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}(u(s),v(s)). \quad (1)$$

记 $\mathbf{t}$ 为 C 在点 P 处的单位切向量, $\mathbf{n}$ 为 C 在点 P 处的单位法向量, $\mathbf{N}$ 为曲面 S 在点 P 处的单位法向量, $\mathbf{w}=\mathbf{N} \times \mathbf{t}$ 是位于曲面的切平面内且垂直于 $\mathbf{t}$ 的单位向量. 曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的曲率向量 $\mathbf{\kappa}$ 在 $\mathbf{w}$ 方向上的分量就是测地曲率 κ_g , 即

$$\kappa_g=(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}. \quad (2)$$

经过计算,测地曲率又可以写为

$$\begin{aligned} \kappa_g = & \left[\Gamma_{11}^e \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^e - \Gamma_{11}^l) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right) + \right. \\ & \left. (\Gamma_{22}^e - 2\Gamma_{12}^l) \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^l \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + \right. \\ & \left. \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right] \sqrt{EG - F^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中用到 Christoffel 记号 $\Gamma_{jk}^i(j, k=1, 2)$ ^[8]:

$$\Gamma_{11}^l = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^e = \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^l = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^e = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^l = \frac{2GF_v - GG_u + FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^e = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$

而 E, F, G 为曲面第一基本形式的系数.

最后得到一个二阶常微分方程组,为了降低阶次,转化成下面的一阶常微分方程组^[9]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= p, \\ \frac{dv}{ds} &= q, \\ \frac{dp}{ds} &= -\Gamma_{11}^l p^2 - 2\Gamma_{12}^l pq - \Gamma_{22}^l q^2, \\ \frac{dq}{ds} &= -\Gamma_{11}^e p^2 - 2\Gamma_{12}^e pq - \Gamma_{22}^e q^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这样就得到了参数曲面的测地常微分方程组,它决定了参数曲面上测地线的形状.

1.2 参数曲面测地线算法

一阶常微分方程组 (4) 可以作为初值问题 (IVP) 求解,它的四个初始条件定义在一个点处. 一般情况下,应用最广泛的是求曲面上两个点之间的最短路径,这样该微分方程组就将作为边值问题 (BVP) 求解,此时它的四个边界条件定义在两个不同的点上.

为简便起见,下面将测地常微分方程组改写成向量形式. 记 $s \in [A, B]$, 且

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T,$$

其中, y_i 和 g_i 为函数, α_i 和 β_i 为常数.

则关于原方程组的边值问题可以写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{ds} &= \mathbf{g}(s, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(A) &= \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}(B) = \boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对如上 BVP 问题,欲求其数值解,一般采用松弛法.

首先在 m 个网格点上对控制方程进行有限差分离散,然后根据初始值进行迭代求解,这个过程也称为松弛求解^[3,10]. 考虑曲面上连接 A 和 B 的弧长

参数化曲线, 并且该曲线在参数空间离散为 $A = s_1 < s_2 < \dots < s_m = B$. 则可以如下逼近式(5)中常微分方程组^[11]:

$$\frac{\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} = \frac{1}{2}[\mathbf{G}_k + \mathbf{G}_{k-1}], \quad k = 2, 3, \dots, m. \quad (6)$$

边界条件为

$$\mathbf{Y}_1 = \alpha, \mathbf{Y}_m = \beta, \quad (7)$$

式中, $\mathbf{Y}_k$ 和 $\mathbf{G}_k$ 是 $\mathbf{y}(s_k)$ 和 $\mathbf{g}(s_k)$ 的逼近. $\mathbf{Y}_1$ 具有 n_1 个已知分量, 而 $\mathbf{Y}_m$ 具有 $n_2 = n - n_1$ 个已知分量. 最后得到了一个有 mn 个未知量, $(m-1)n$ 个非线性方程所组成的方程组, 另外 n 个方程来自边界条件. 将方程记为如下形式:

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{F}_{1,k}, \mathbf{F}_{2,k}, \dots, \mathbf{F}_{n,k})^T = \frac{\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} - \frac{1}{2}[\mathbf{G}_k + \mathbf{G}_{k-1}] = 0, \quad (8)$$

式中, $k=2, 3, \dots, m$. 把边界条件记为

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}_{1,1}, \mathbf{F}_{2,1}, \dots, \mathbf{F}_{n_1,1})^T = \mathbf{Y}_1 - \alpha = 0, \quad (9)$$

$\mathbf{F}_{m+1} = (\mathbf{F}_{1,m+1}, \mathbf{F}_{2,m+1}, \dots, \mathbf{F}_{n_2,m+1})^T = \mathbf{Y}_m - \beta = 0$. 这样就得到了 mn 个非线性方程:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T, \dots, \mathbf{F}_{m+1}^T)^T = \mathbf{Y}_m - \beta = 0. \quad (10)$$

如果已知足够逼近真实解的初始向量 $\mathbf{Y}^{(0)} = (\mathbf{Y}_1^T, \mathbf{Y}_2^T, \dots, \mathbf{Y}_m^T)^T$, 那么该线性方程组可以通过二次收敛的 Newton 迭代进行求解, 即

$$\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + \Delta \mathbf{Y}^{(i)}, \quad (11)$$

$$[\mathbf{J}^{(i)}] \Delta \mathbf{Y}^{(i)} = -\mathbf{F}^{(i)}, \quad (12)$$

式中, 上标 (i) 表示第 i 步迭代, $[\mathbf{J}^{(i)}]$ 表示 $\mathbf{F}^{(i)}$ 在点 $\mathbf{Y}^{(i)}$ 处的 $mn \times mn$ 的 Jacobian 矩阵. Jacobian 矩阵的定义如下:

$$[\mathbf{J}^{(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Y}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Y}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{Y}_m} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{Y}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{Y}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{Y}_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{Y}_m} \end{bmatrix}_{mn \times mn}. \quad (13)$$

如果问题是高度非线性化的, 那么 Newton 迭代也可能发散. 为了提高迭代的稳定性和扩大初值的选取范围, 采用如下校正过程:

$$\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + \mu \Delta \mathbf{Y}^{(i)}, \quad (14)$$

式中, $0 < \mu \leq 1$, μ 的选择满足 $\|\Delta \mathbf{Y}^{(i+1)}\|_1 < \|\Delta \mathbf{Y}^{(i)}\|_1$, $\|\Delta \mathbf{Y}\|_1$ 为向量模, 其定义为

$$\|\Delta \mathbf{Y}\|_1 =$$

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{|\Delta u_k|}{M_u} + \frac{|\Delta v_k|}{M_v} + \frac{|\Delta p_k|}{M_p} + \frac{|\Delta q_k|}{M_q} \right). \quad (15)$$

经过数值测试, 取 $M_u = M_v = 1$ 和 $M_p = M_q = 10$ 比较合理. 当解向量的模满足规定值时, 迭代终止. 迭代所需的初值主要通过采用线性逼近或者圆弧逼近这两种办法得到^[3].

2 代数曲面上测地线的研究

早期的几何造型技术基本上都是围绕着参数表示来展开研究的. 参数表示有其自身的优点, 但是另一方面, 参数表示也存在着不易判定给定点是否在曲线或曲面上和不易判定任意给定点与曲线或曲面的相对位置关系等局限性. 作为参数方法的典型代表, NURBS 的局限性和一些不足也非常明显, 比如微分运算相当繁琐、积分运算无法控制误差等, 而在诸如曲线曲面拼接等的应用中, 这些都是不可避免的.

但是实际应用领域却对此有着强烈的需求, 譬如影视动画中对角色形象的表现、医学可视化中对复杂人体结构的描述等. 与参数曲面相比, 隐式曲面在复杂形体构造、形体表示、形状控制等方面具有不可替代的优势. 因此, 隐式方法逐渐受到研究者的重视, 并开始被应用于几何造型实践之中. 因而隐式曲面上外形分析的研究也变得越来越重要, 尤为重要是关于代数曲面上测地线的求解.

2.1 测地微分方程组的推导

类似于推导参数曲面的测地线曲率公式的过程, 可以得到代数曲面上的测地方程. 考虑弧长参数化曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 或者代数曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上的曲线 $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, 代数曲面上曲线的测地曲率公式为

$$\kappa_g = \frac{(\dot{y}z'' - \dot{z}y'')f_x + (\dot{z}x'' - \dot{x}z'')f_y + (\dot{x}y'' - \dot{y}x'')f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}. \quad (16)$$

同样, 非弧长参数化曲线的测地曲率的计算公式为

$$\kappa_g = \frac{(\ddot{y}z - \ddot{z}y)f_x + (\ddot{z}x - \ddot{x}z)f_y + (\ddot{x}y - \ddot{y}x)f_z}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}. \quad (17)$$

若 $\kappa_g = 0$, 则有

$$\begin{aligned} &(\dot{y}z'' - \dot{z}y'')f_x + (\dot{z}x'' - \dot{x}z'')f_y + \\ &(\dot{x}y'' - \dot{y}x'')f_z = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

对于测地线,由于单位切向量 (x', y', z') 和曲率向量 (x'', y'', z'') 相互垂直,因此

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0. \quad (19)$$

由于 $f(x(s), y(s), z(s)) = 0$,对 s 求一次导,可得

$$x'f_x + y'f_y + z'f_z = 0. \quad (20)$$

式(20)再对 s 求一次导,得到

$$\begin{aligned} f_x x'' + f_y y'' + f_z z'' + f_{xx} (x')^2 + f_{yy} (y')^2 + \\ f_{zz} (z')^2 + 2(f_{xy} x' y' + f_{yz} y' z' + f_{xz} x' z') = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

联立式(18), (19), (21), 得到关于 (x'', y'', z'') 的线性方程组. 假设 $(z'f_y - y'f_z)^2 + (x'f_z - z'f_x)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2$ 不为零, 可得到三个二阶微分方程. 同样为了降低阶次, 再将其改写成六个一阶微分方程, 组成如下方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= p, \quad \frac{dy}{ds} = q, \quad \frac{dz}{ds} = r, \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{(pf_z - rf_x)r + (pf_y - qf_x)q}{(rf_y - qf_z)^2 + (pf_z - rf_x)^2 + (qf_x - pf_y)^2} \Delta, \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{(qf_z - rf_y)r + (qf_x - pf_y)p}{(rf_y - qf_z)^2 + (pf_z - rf_x)^2 + (qf_x - pf_y)^2} \Delta, \\ \frac{dr}{ds} &= \frac{(rf_y - qf_z)q + (rf_x - pf_z)p}{(rf_y - qf_z)^2 + (pf_z - rf_x)^2 + (qf_x - pf_y)^2} \Delta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中,

$$\Delta = f_{xx} (x')^2 + f_{yy} (y')^2 + f_{zz} (z')^2 + 2(f_{xy} x' y' + f_{yz} y' z' + f_{xz} x' z').$$

接下来的问题就是如何求解微分方程组(22).

2.2 数值求解

显然, 想求得方程组(22)的解析解是不可能的, 因此只有采用数值方法计算其近似解. 对于代数曲面上两点之间的测地路径问题, 也同样可以将其转化为微分方程两点边值问题求解.

首先该微分方程组是关于弧长参数的, 所以在网格点上进行有限差分离散时, 分母必须是弧长. 具体计算时由于网格点比较密, 可以用两点之间的欧氏距离代替弧长. 而采用其他参数离散时, 将得不到想要得到的近似解.

然后利用向量形式, 方程写为如下形式:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T, \dots, \mathbf{F}_{m+1}^T)^T = \mathbf{Y}_m - \beta = 0. \quad (23)$$

一共有 $6m$ 个未知数和 $6m$ 个方程. 给定初始条件, 然后用Newton迭代求解.

$$\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + \Delta \mathbf{Y}^{(i)}, \quad (24)$$

$$[\mathbf{J}^{(i)}] \Delta \mathbf{Y}^{(i)} = -\mathbf{F}^{(i)}. \quad (25)$$

与参数曲面形式类似, 上标 (i) 表示第 i 步迭代, $[\mathbf{J}^{(i)}]$ 表示 $\mathbf{F}^{(i)}$ 在点 $\mathbf{Y}^{(i)}$ 处的Jacobian矩阵. 同样类似于参数曲面的方法, 为提高迭代的收敛效果和该方法的收敛半径, 也有必要采用校正过程:

$$\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + \mu \Delta \mathbf{Y}^{(i)}, \quad (26)$$

式中, $0 < \mu \leq 1$, μ 的选择满足 $\|\Delta \mathbf{Y}^{(i+1)}\|_1 < \|\Delta \mathbf{Y}^{(i)}\|_1$, $\|\Delta \mathbf{Y}\|_1$ 为向量模, 其定义为

$$\|\Delta \mathbf{Y}\|_1 = \sum_{k=1}^m \left(\frac{|\Delta x_k|}{M_x} + \frac{|\Delta y_k|}{M_y} + \frac{|\Delta z_k|}{M_z} + \frac{|\Delta p_k|}{M_p} + \frac{|\Delta q_k|}{M_q} + \frac{|\Delta r_k|}{M_r} \right). \quad (27)$$

经过数值测试, 取 $M_x = M_y = M_z = 1$ 和 $M_p = M_q = M_r = 10$ 比较合理.

2.3 初值生成算法

初值的合理选取是Newton方法收敛的关键. 下面讨论如何取得比较好的初值.

初值的选取可以采用类似于参数曲面的方法即线性逼近方法和圆弧逼近的方法. 对于参数曲面, 参数网格都是给定的, 只需要按照如上两种办法分别得到网格点坐标值和网格点对应的弧长参数导数值. 而对于代数曲面, 若采用参数曲面的办法, 网格点值可以顺利求出来, 而要正确求得其网格点对应的弧长参数导数值是比较麻烦的. 首先按照参数曲面的方法, 可以由隐函数定理来决定对变量 x, y, z 中把哪两个作为参数, 再按照参数的方式求出导数. 但由于 x, y, z 地位是一样的, 需要考虑到如何确定参数网格并求出导数值. 所以经过一定的数值实验, 发现采用下面的取初始值方法得到收敛的效果比较好.

初值采用细分方法得到, 具体过程如下:

(I) 对于 $A = (x_0, y_0, z_0), B = (x_1, y_1, z_1)$, 令方向 $p_1 = B - A$, C 为 A, B 的中点. 从 C 沿着垂直于 p_1 的方向 p_2 向曲面投影求交点 M , 若无交点, 再向与 p_1, p_2 都垂直的方向 p_3 投影. 得到交点后再连接 A, B 得到直线 MA, MB . 再分别对 MA, MB 的中点执行如上的操作, 以后每次都在第一次投影方向与直线方向张成的面内投影, 得到新的投影点, 连成一系列折线. 这样就得到了一系列初始点列.

(II) 步骤(I)相当于得到了初始的 (x_k, y_k, z_k) , 下面决定每个格点相对应的导数 (p_k, q_k, r_k) . 对代数曲面上的点暂时不考虑非正则点, 有以下几种情况:

①情况1 若曲面在该点参数表示形式只有一

种情形,比如说当同时有 $f_x(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$ 和 $f_y(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$, 也就是说代数曲面表示成显式形式时只能表示成 $z=h(x, y)$ 这样的形式, 那么 p_k, q_k 由格点的中心差分格式计算:

$$p_k = \frac{\frac{h_k}{h_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) - \frac{h_{k+1}}{h_k}(x_{k-1} - x_k)}{h_k + h_{k+1}},$$

$$q_k = \frac{\frac{h_k}{h_{k+1}}(y_{k+1} - y_k) - \frac{h_{k+1}}{h_k}(y_{k-1} - y_k)}{h_k + h_{k+1}},$$

$k=2, 3, \dots, m-1$, h_k 是折线相邻两点 P_k 和 P_{k-1} 之间的距离. 对于起始点, 采用向前差分格式, 得到:

$$p_1 = \frac{-\frac{h_2}{h_3}x_3 + \left(\frac{h_2}{h_3} + \frac{h_3}{h_2} + 2\right)x_2 - \left(2 + \frac{h_3}{h_2}\right)x_1}{h_2 + h_3},$$

$$q_1 = \frac{-\frac{h_2}{h_3}y_3 + \left(\frac{h_2}{h_3} + \frac{h_3}{h_2} + 2\right)y_2 - \left(2 + \frac{h_3}{h_2}\right)y_1}{h_2 + h_3}.$$

而对于最后一个点, 采用向后差分格式, 得到:

$$p_m = \frac{\frac{h_m}{h_{m-1}}x_{m-2} - \left(\frac{h_{m-1}}{h_m} + \frac{h_m}{h_{m-1}} + 2\right)x_{m-1} + \left(2 + \frac{h_{m-1}}{h_m}\right)x_m}{h_{m-1} + h_m},$$

$$q_m = \frac{\frac{h_m}{h_{m-1}}y_{m-2} - \left(\frac{h_{m-1}}{h_m} + \frac{h_m}{h_{m-1}} + 2\right)y_{m-1} + \left(2 + \frac{h_{m-1}}{h_m}\right)y_m}{h_{m-1} + h_m}.$$

$$r_k = \frac{f_x(x_k, y_k, z_k)p_k + f_y(x_k, y_k, z_k)q_k + f_z(x_k, y_k, z_k)r_k}{f_x(x_k, y_k, z_k)p_k + f_y(x_k, y_k, z_k)q_k + f_z(x_k, y_k, z_k)r_k} = 0. \quad (28)$$

对于其他情况, 即当同时有 $f_x(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$ 且 $f_z(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$, 或者同时有 $f_y(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$ 且 $f_z(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$ 时方法是类似的.

②情况 2 曲面在该点的参数形式有两种, 比如只有 $f_x(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$, 此时代数曲面可以有显式形式: $z=h(x, y)$ 或者 $y=g(x, z)$. 如果按第一种参数形式考虑, 按照情况 1 的方法得到 (p_k^0, q_k^0, r_k^0) . 同样按第二种参数形式考虑, 也按照情况 1 的方法得到 (p_k^1, q_k^1, r_k^1) . 实际上, 一般有 $(p_k^0, q_k^0, r_k^0) \neq (p_k^1, q_k^1, r_k^1)$, 所以取

$$(p_k, q_k, r_k) = \frac{1}{2}((p_k^0, q_k^0, r_k^0) + (p_k^1, q_k^1, r_k^1)).$$

③情况 3 曲面在该点的参数形式有三种, 即

$f_x(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0, f_y(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0, f_z(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 0$ 同时成立. 类似于前面的两种情况, 可以得到 $(p_k^0, q_k^0, r_k^0), (p_k^1, q_k^1, r_k^1), (p_k^2, q_k^2, r_k^2)$. 同样取

$$(p_k, q_k, r_k) = \frac{1}{3}((p_k^0, q_k^0, r_k^0) + (p_k^1, q_k^1, r_k^1) + (p_k^2, q_k^2, r_k^2)).$$

采用如上初值生成办法, 通过迭代就可以得到所需要的测地线. 需要注意的是, 在该算法中为了得到每个格点的导数, 分为三种情况来处理, 其目的主要是务必保证初值满足

$$f_x x'(s) + f_y y'(s) + f_z z'(s) = 0.$$

通过算例验证了原本不收敛的例子(初值不满足该式), 当初值满足上式后就收敛了.

首先本文中所考虑的隐式曲面都是假设比较光滑平坦的. 当曲面的形状比较复杂时, 也就是曲面形状不是光滑平坦的时候, 通过本文的初值生成方法所生成的初始曲线与真实的测地线之间可能相差比较远, 由于 Newton 方法是局部收敛的, 那么通过 Newton 方法就会无法收敛到真解, 本文的方法就可能失效. 另外在曲面形状比较复杂时, 由于问题本身变得非常复杂, 目前也还没有较好的解决办法. 当然是否可以在曲面形状比较复杂时考虑采用一些全局收敛的数值方法, 这个也是将来工作所要考虑的内容之一.

该初值生成办法中每相邻两个点之间的距离, 也就是步长是不相等的. 这里步长的选取是经验型的. 一般情况下, 不论曲面形状是光滑平坦的还是形状变化比较大的, 步长的选取都小于 0.05.

2.4 算例

下面是一些求测地线的具体例子. 计算机的主要配置如下: CPU 为 AMD XP1800+, 内存大小为 512 MB, 操作系统为 Windows XP.

例 2.1 代数曲面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

给定两点为 $(1, 0, 0), (-1, 0, 0)$. 相关示意图见图 1.

例 2.2 代数曲面方程为

$$(x^2(1-x^2) - y^2)^2 + 0.5z^2 - 0.025(1 + (x^2 + y^2 + z^2)) = 0.$$

给定两点为 $(-1, 0, -0.304\ 873), (1, 0, -0.324\ 443)$. 相关示意图见图 2.

例 2.3 代数曲面方程为

$$x^2 + y^3 + z^2 - 1 = 0.$$

给定两点为 $(1, -1, -1), (0, -2, 3)$. 相关示意图见图3.

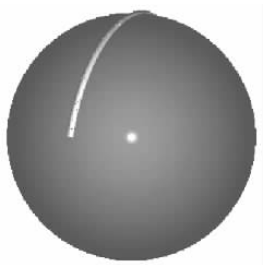


图1 例2.1的测地线

Fig. 1 The geodesic line of Example 2. 1

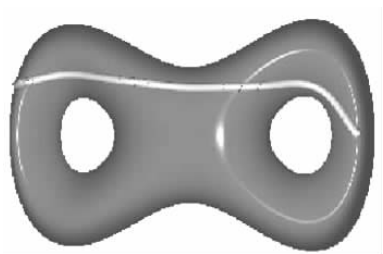


图2 例2.2的测地线

Fig. 2 The geodesic line of Example 2. 2

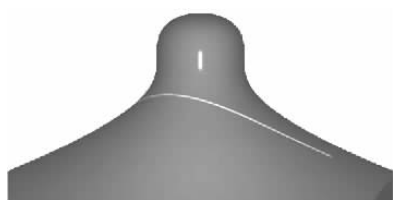


图3 例2.3的测地线

Fig. 3 The geodesic line of Example 2. 3

例2.4 代数曲面方程为

$$x^3 + y^3 + z^2 + 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

给定两点为 $(0, -1, -1.414), (1, 1, 1)$. 相关示意图见图4.

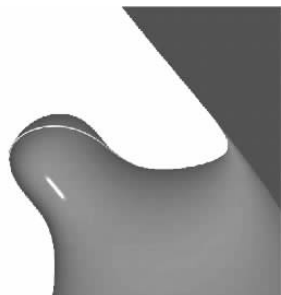


图4 例2.4的测地线

Fig. 4 The geodesic line of Example 2. 4

例2.5 代数曲面方程为

$$x^3 - y^3 - z^3 + 2z^2 + 5y^2 - 3 = 0.$$

给定两点为 $(2, -1, 1.843\ 57), (-2, 2, -1.137\ 3)$. 相关示意图见图5.

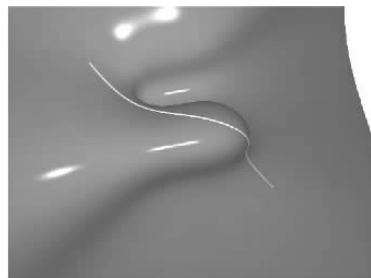


图5 例2.5的测地线

Fig. 5 The geodesic line of Example 2. 5

例2.6 代数曲面方程为

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2x^2 - 4y - 1 = 0.$$

给定两点为 $(2, -3, 0), (-2, 1, \sqrt[3]{4})$. 相关示意图见图6.

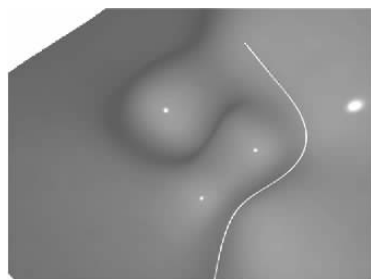


图6 例2.6的测地线

Fig. 6 The geodesic line of Example 2. 6

例2.7 代数曲面方程为

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0.$$

给定两点为 $(-1.7, -2.369\ 82, -0.4), (2, 2.173\ 88, 0.300\ 001)$. 相关示意图见图7, 图7(a)和图7(b)是从不同视点看得到的图像.

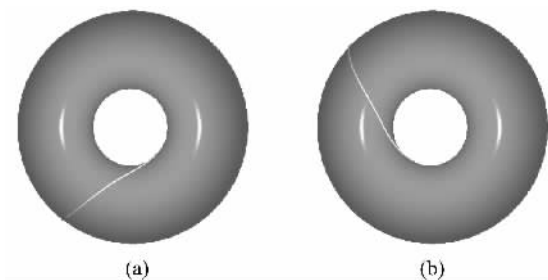


图7 例2.7的测地线

Fig. 7 The geodesic lines of Example 2. 7

经过数值测试,误差效果比较理想,点集对方程的误差率和点集到曲面的距离都在 10^{-3} 左右. 误差

分析见表 1. 离散点数目表示离散后点集的数目. 误差主要包括两项: 一项是方程符合程度, 这个是用来检验求解方程的有效性, 越低说明越有效; 另一项是曲面符合程度, 这个是比较曲线和原代数曲面的偏离度的, 越低说明偏离越小.

表 1 误差分析表
Tab. 1 Error analysis

算例	离散点	方程符合程度	曲面符合程度	迭代时间/s
例 2.1	129	0.000 172 754	0.000 145 376	1.359
例 2.2	257	0.004 567 89	0.000 123 7	709.6
例 2.3	129	0.000 140 668	0.000 366 951	4.469
例 2.4	129	0.000 639 989	0.000 412 341	99.078
例 2.5	129	0.002 069 34	0.006 492 8	231.69
例 2.6	129	0.001 201 61	0.001 029 6	1 419.7
例 2.7	498	0.001 199 81	0.005 652 4	8 790.7

3 结论

本文讨论了代数曲面上两点之间的测地线的求解问题. 在计算方法中, 把参数情况的松弛法应用到代数曲面的测地线计算中, 其中初始值的指定采用细分方法. 对代数曲面上的测地线满足的常微分方程, 先通过松弛迭代法将其转化成非线性方程组, 再采用 Newton 迭代求解该非线性方程组. 迭代初值的选取对 Newton 迭代的收敛性有重要影响.

对于代数曲面, 初值的选取更为复杂和困难, 这也是参数曲面上的测地线的求解与代数曲面上的测地线的求解的重要区别之一. 本文给出了一种初值选取方法, 并且应用该初值采用 Newton 迭代数值求解非线性方程组. 数值结果表明, 该计算方法是有效而且稳定的.

由于该微分方程转化成差分方程后形式比较复杂, 本文对于所讨论差分方程是否收敛性的问题并没有做严格的分析, 也没有相关方面的结论. 该问题是下一步的研究工作之一.

参考文献(References)

[1] Patrikalakis N M, Maekawa T. Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing[M]. Berlin Heidelberg:Springer, 2002.

[2] Kimmel R, Amir A, Bruckstein A M. Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1995, 17(6): 635-640.

[3] Maekawa T. Computation of shortest paths on free-form parametric surfaces[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 1996, 118(4): 499-508.

[4] Robinson D J, Armstrong C G. Geodesic paths for general surfaces by solid modelers[C]// Proceedings of the 6th IMA Conference on Mathematics of Surfaces. New York: Clarendon Press, 1996: 103-117.

[5] Patrikalakis N M, Badris L. Offsets of curves on rational B-spline surfaces [J]. Engineering with Computers, 1989, 5: 39-46.

[6] Kumar G V V R, Srinivasan P, Holla V D, et al. Geodesic curve computations on surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20: 119-133.

[7] Wolter F E. Interior metric, shortest paths and loops in Riemannian manifolds with not necessarily smooth boundary[D]. Berlin, Germany: Free University of Berlin, 1979.

[8] Struik D J. Lectures on classical differential geometry [M]. Cambridge, MA: Addison-Wesley, 1950, 19: 92-120.

[9] Lipschutz M M. Theory and Problems of Differential Geometry[M]. Schaum's Outline Series: McGraw-Hill, 1969.

[10] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes in C[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[11] Ferziger J H. Numerical Methods for Engineering Applications[M]. New York: Wiley, 1981.