Bézier 曲线细分收敛定理的推广

冯文月，吴　梦，邓建松*
（中国科学技术大学数学科学学院　合肥　230026）
（dengjs@ustc.edu.cn）

摘　要：在 CAGD 中，基于 de Casteljau 算法对 Bézier 曲线进行迭代细分时收敛定理成立，即假设每一次在相同的位置参数 $r(0<r<1)$ 处对曲线进行细分，那么迭代得到的控制多边形收敛到初始控制多边形定义的 Bézier 曲线. 文中对这一定理进行推广，给出了允许在每一次细分时采用不同的位置参数，得到了细分后产生的控制多边形收敛到初始控制多边形所定义的 Bézier 曲线的充要条件，并讨论了收敛速度.

关键词：De Casteljau 算法；细分收敛；Bézier 曲线
中图法分类号：O242

Generalization of Subdivision Convergence of Bézier Curves

Feng Wenyue, Wu Meng, and Deng Jiansong*
(*Academy of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract: In computer aided geometric design, based on the de Casteljau algorithm, the theory of subdivision convergence is established by subdividing Bézier curve iteratively. The control polygon converges to the original Bézier curve after the iterative subdivision at the same local parameter r, $0<r<1$. In this paper, the theory above is extended and generalized. Different parameters associated with different steps of subdivision iteration are permitted and the necessary and sufficient condition that the control polygon converges to the original Bézier curve is obtained. Furthermore, the speed of convergence is discussed.

Key words: the de Casteljau algorithm; subdivision convergence; Bézier curves

在 CAGD 的经典理论中，de Casteljau 算法可以计算 Bézier 曲线在参数区间内某一点的值[1]，不仅如此，它在给定的位置参数下进行一次迭代就可以把原来的 Bézier 曲线细分成为 2 段，同时给出它们的控制顶点. 基于 de Casteljau 算法的细分（简称 de Casteljau 细分算法）是分析 Bézier 曲线和曲面的主要数学工具，应用细分技术可以建立关于 Bézier 曲线和曲面的快速稳定的显示和求交算法[2]. De Casteljau 细分算法反复细分时采用的是相同的位置参数，这种递归方法所产生的每层控制多边形形成的折线序列会收敛于原 Bézier 曲线[3-6]，这里每次细分是指对原 Bézier 曲线或对原 Bézier 曲线细分后产生的每段 Bézier 曲线分别进行细分. 当进行 m 次细分后产生 2^m 段 Bézier 曲线，其中 $m\in\mathbf{N}$. 为了推广基于 de Casteljau 细分算法细分 Bézier 曲线的理论，本文讨论了在递归使用 de Casteljau 细分算法每次细分用不完全相同的位置参数 r_k，$0<r_k<1$，$k=1,2,\cdots$时，控制多边形形成的折线序列收敛到原 Bézier 曲线的收敛情况以及收敛速度.

收稿日期：2011-09-08. 基金项目：国家自然科学基金（61073108）. 冯文月（1983—），女，博士研究生，主要研究方向为 CAGD；吴　梦（1985—），女，博士研究生，主要研究方向为 CAGD；邓建松（1966—），男，博士，教授，博士生导师，论文通讯作者，主要研究方向为几何造型.

1　Bézier 曲线的 de Casteljau 算法

De Casteljau 算法是一种计算 Bézier 曲线在某点处取值并且可以用来细分 Bézier 曲线的方法. 作为本文讨论的基础，下面具体介绍这种算法.

定义 1[1]. 一条 Bézier 曲线定义为 $C(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iC_i^nt^i(1-t)^{n-i}, 0\leqslant t\leqslant 1$，其中 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 是控制顶点.

记 $\rho_0=[P_0,P_1,\cdots,P_n]$ 表示由 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 依次用线段相连接形成的该 Bézier 曲线的控制多边形. 给定位置参数 $r_0\in(0,1)$，利用 de Casteljau 算法可以给出 Bézier 曲线在 r_0 处的函数值，同时可以把原曲线分成 2 段 Bézier 曲线并且给出它们的控制顶点.

图 1 所示为 de Casteljau 算法的示意图，其中 $P_j^i=(1-r_0)P_j^{i-1}+r_0P_{j+1}^{i-1}$；$i=0,1,\cdots,n$，$j=0,1,\cdots,n-i$，$P_k^0=P_k$，$k=0,1,\cdots,n$. 由 de Casteljau 算法产生的 $P_0^0,P_0^1,\cdots,P_0^n$ 以及 $P_0^n,P_1^{n-1},\cdots,P_n^0$ 是由原曲线分成的 2 段 Bézier 曲线的控制顶点. 实际上，de Casteljau 算法给出的是一个对原来由控制多边形形成的折线的一个割角的算法[7-8]. 图 2 所示为具有控制点 P_0,P_1,P_2,P_3 的三次Bézier曲线的deCasteljau细分算法的几何阐述.

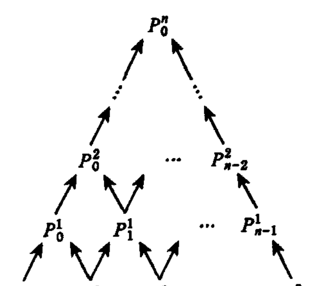


图 1　n 次 Bézier 曲线的 de Casteliau 算法

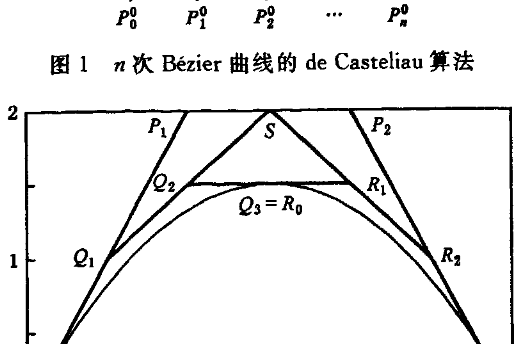


图 2　三次 Bézier 曲线在 $r=1/2$ 的 de Casteljau 细分算法示意图

其中，点 Q_0,Q_1,Q_2,Q_3 是 $t=0$ 到 $t=1/2$ 这段 Bézier 曲线的控制点；点 R_0,R_1,R_2,R_3 是 $t=1/2$ 到 $t=1$ 这段 Bézier 曲线的控制点.

显然，经过一次细分后生成的控制多边形比原控制多边形更靠近 Bézier 曲线. 由文献[2]可得到经典的细分收敛定理.

定理 1[7]. 由递归细分生成的控制多边形收敛到初始控制多边形对应的 Bézier 曲线.

为了讨论在不同位置参数细分下的收敛情况，首先引入一些记号. 由第 k 次细分产生的所有 Bézier 曲线段的控制多边形组成的折线记为 ε^kP. 设第 k 次细分对应的位置参数为 r_k，$k=1,2,\cdots$，本文中将讨论在某个位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 下，当 $k\to\infty$ 时，ε^kP 是否会收敛到原 Bézier 曲线 C 以及在收敛情况下的收敛速度. 收敛是指 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^kP$ 的几何位置与 C 的几何位置重合. 也就是说，当它们作为 2 个点集时是相同的集合，其中 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^kP$ 是指任意收敛点列 $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的极限点组成的集合，$p_k\in\varepsilon^kP$.

2　细分收敛的定义

为了便于分析 $\{\varepsilon^kP\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到原曲线的过程，下面给出细分收敛严格的数学定义以及该定义合理性的分析.

如图 3 所示，用树结构分别表示在 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 下细分过程中所产生的控制多边形与任意 2 个相邻控制顶点之间的距离，其中 $\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 是第 k 次细分后产生的某段 Bézier 曲线的控制多边形，$i_1,\cdots,i_k\in\{0,1\}$. 例如 ρ_2^{01} 是指由第一次细分后产生的 Bézier 曲线段（其控制多边形为 ρ_1^0）在第二次细分后生成的 2 条 Bézier 曲线段中的某一条 Bézier 曲线段的控制多边形. $L_k^{i_1,\cdots,i_k}=\{l_1^{i_1,\cdots,i_k},l_2^{i_1,\cdots,i_k},\cdots,l_n^{i_1,\cdots,i_k}\}$ 表示 $\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 每个边的边长. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n-1}\in L_{n-1}^{i_1,\cdots,i_{n-1}}$ 且 $a_n\in L_n^{i_1,\cdots,i_{n-1},i_n}$，则称该数列是沿着 L 树取的数列. 当按照位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 对一条给定的 Bézier 曲线进行细分，若所有沿着 L 树的数列都一致

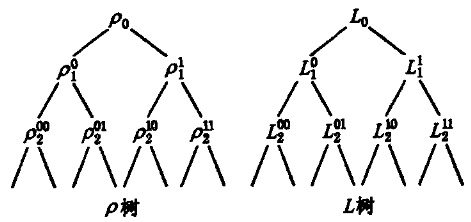


图 3　ρ 树与 L 树

收敛于 0，此时称按照位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 对给定的 Bézier 曲线进行细分的过程是收敛的，简称为细分收敛.

定理 2. 对于给定的 Bézier 曲线 C，若按照位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$，$0<r_k<1$ 对其进行细分且细分收敛，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^k P$ 与 C 几何位置重合.

证明. 由 de Casteljau 算法，Bézier 曲线 C 上的任意一点 c，对任意 $k\in \mathrm{N}$ 存在第 k 次细分后生成的某个控制多边形 $\bar{\rho}_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 使得 c 在 $\bar{\rho}_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 中的控制顶点所决定的 Bézier 曲线上. $\bar{L}_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 为 $\bar{\rho}_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 的边长的集合. 考虑 $\bar{\rho}_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 的凸包 δ_k，由 Bézier 曲线的凸包性，$c\in\delta_k$. 记

$$a_k=\max\{l_j^{i_1,\cdots,i_k}\mid l_j^{i_1,\cdots,i_k}\in\bar{L}_k^{i_1,\cdots,i_k}\},$$

可以选取 $\{\bar{\rho}_k^{i_1,\cdots,i_k}\}_{k=0}^{\infty}$ 使得 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是沿着 L 树取得的数列，由细分收敛的定义 $a_k\to 0$（当 $k\to\infty$ 时），则 δ_k 的周长 $c_k\to 0$. 若在平面上引入任意一个直角坐标系，考虑包含 δ_k 的最小矩形 $\Delta_k=[x_1^k,x_2^k]\times[y_1^k,y_2^k]$. 由于 $c_k\to 0$，$x_1^k-x_2^k\to 0$，$y_1^k-y_2^k\to 0$，分别对 $\{[x_1^k,x_2^k]\}$ 和 $\{[y_1^k,y_2^k]\}$ 应用区间套定理，则存在唯一的 $p=(x_0,y_0)\in\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\Delta_k$；而 $c\in\delta_k\subseteq\Delta_k$，$k=0,1,\cdots$，由唯一性，$p=c\in C$. 则 $C\subseteq\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^k P$.

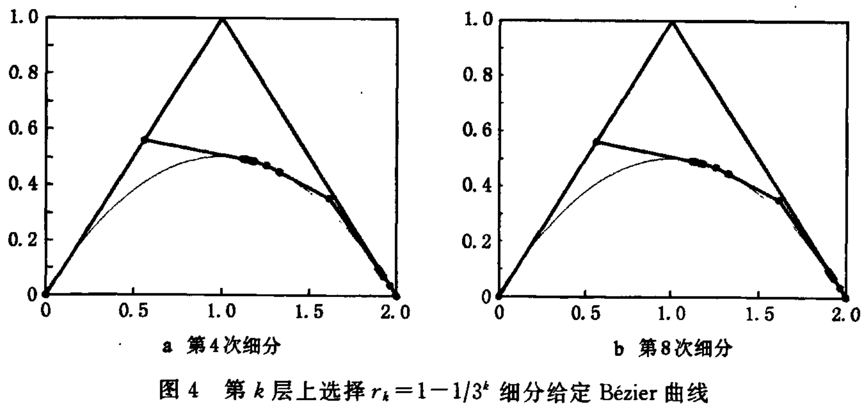
另外，若存在一个收敛点列 $\{p_k\}$，其中 $p_k\in\varepsilon^k P$，使得 $p_k\to p$ 且 p 不在 C 上. 设 p 到 C 的距离为 $d(p,C)=d(d>0)$. 则对于 $d/2$ 存在 N，当 $k>\mathrm{N}$ 时，$d(p_k,p)<d/2$. 考虑 p_k 所在的控制多边形 $\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$. 由于控制多边形的 2 个端点在曲线 C 上而 $p_k\in\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 且 $d(p_k,C)\geqslant d(p,C)-d(p,p_k)>d/2$，故 $\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 的最大的边长 $a_k\geqslant d(p_k,C)/n>d/2n$，其中 n 是给定 Bézier 曲线的次数. 而由于细分收敛是沿着 L 树的数列一致收敛，故产生矛盾. 所以 p 在 C 上，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^k P\subseteq C$. 证毕.

因此在本文所给的“细分收敛”的意义下，如果细分是收敛的，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^k P=C$，也就是直观上折线 $\varepsilon^k P$ 随着细分次数 k 的增加会逼近给定 Bézier 曲线 C.

3 细分收敛条件

3.1 每层细分定参的细分收敛条件

通常，基于 de Casteljau 算法对给定 Bézier 曲线细分都是在同一个位置参数下进行的，而且当位置参数 $r\in(0,1)$ 时该细分过程是收敛的. 但是这种情况对每次细分在不同位置参数下的细分过程却不总是成立的，如图 4 所示，对基于 de Casteljau 算法细分图中的 Bézier 曲线，第 k 次细分的位置参数为 $r_k=1-1/3^k$.



a 第4次细分　　b 第8次细分

图 4 第 k 层上选择 $r_k=1-1/3^k$ 细分给定 Bézier 曲线

从图 4 中可以看到，进行到如图 4 a 所示的第 4 次细分与如图 4 b 所示的第 8 次细分后的结果几乎没有差别，尽管这并不能说明在无穷次细分后就不会细分收敛.

下面讨论在不一定完全相同的位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$，$0<r_k<1$ 下对 Bézier 曲线进行细分所得控制多边形的收敛情况. 设第 k 次细分后生成的其中一个控制多边形 $\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 对应的位置参数为 r_k，为了后续讨论的方便，根据 $\{r_k\}$ 引入 2 个数列 $\{t_k\}$ 和 $\{s_k\}$，其中，$t_k=\min\{r_k,1-r_k\}$，$s_k=\max\{r_k,1-r_k\}$. 易得 $s_k+t_k=1$. 对于细分收敛，可以得到如下结论.

定理 3. 位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$，$0<r_k<1$ 对任意 Bézier 曲线进行细分且细分收敛的充要条件是 $\prod\limits_{k=0}^{\infty}\{r_k,1-r_k\}=0$，其中 $\{r_k,1-r_k\}$ 表示 r_k 或 $1-r_k$ 中的任意一个元素.

证明. 首先证明必要条件. 若用位置参数列 $\{r_k\}$ 对任意 Bézier 曲线的控制多边形进行细分且细分收敛，则考虑一个特殊的控制多边形 $\rho_0=[P_0,P_1,\cdots,P_n]$，其中 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 位于同一条直线

上，并且 L_0 中的元素两两相等（不妨设为 l）. 则在位置参数 r_0 细分下生成 ρ_1^0,ρ_1^1，且 L_1^0,L_1^1 中的元素分别为 $l(1-r_0)$ 和 lr_0，此时，$\rho_1^0(\rho_1^1)$ 中的控制顶点也位于同一条直线上并且相邻顶点之间的距离相等，为 $l(1-r_0)(lr_0)$.

任意取定 $\lambda_k=\{r_k,1-r_k\}$，$k=0,1,2,\cdots$，令 τ：$\{r_k,1-r_k\}\to\{0,1\}$，其中 $\tau(r_k)=0$，$\tau(r)=1(r\neq r_k)$. 沿着 L 取一个对应的数列 $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$，其中 $a_k=L_k^{\tau(\lambda_0)\tau(\lambda_1)\cdots\tau(\lambda_{k-1})}$，则 $a_k=\prod_{i=0}^{k-1}\lambda_i$. 由于细分收敛，因此 $a_k\to 0$，$\prod_{k=0}^{\infty}\lambda_k=0$. 由于 λ_k 的任意性，因此 $\prod_{k=0}^{\infty}\{r_k,1-r_k\}=0$.

然后证明充分条件. 记

$$L_k^{\max}=\max\{l_i\mid l_i\in\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_k\in\{0,1\}}L_k^{i_1,i_2,\cdots,i_k}\},$$

$$L_k^L=\max\{l_i\mid l_i\in\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1},0\in\{0,1\}}L_k^{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1},0}\}$$

以及

$$L_k^R=\max\{l_i\mid l_i\in\bigcup_{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1},1\in\{0,1\}}L_k^{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1},1}\},$$

则 $L_{k+1}^L\leqslant(1-r_k)L_k^{\max}$，$L_{k+1}^R\leqslant r_kL_k^{\max}$. 又由 $L_{k+1}^{\max}=\max\{L_{k+1}^L,L_{k+1}^R\}$ 及前面 t_k,s_k 的定义，得到 $L_{k+1}^{\max}\leqslant s_kL_k^{\max}$. 由此递推下去，得

$$L_{k+1}^{\max}\leqslant s_ks_{k-1}\cdots s_0L_0^{\max}=L_0^{\max}\prod_{i=0}^{k}s_i.$$

由 $\prod_{i=0}^{\infty}\{r_i,1-r_i\}=0$，$L_k^{\max}\to 0$，而沿着 L 树的任意数列 $\{a_k\}$，$a_k\leqslant L_k^{\max}$，故它们一致收敛于 0. 即细分收敛.　　证毕.

推论 1. 位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$，$0<r_k<1$，当 $\lim_{k\to\infty}r_k=r$，$0<r_k<1$ 时，Bézier 细分必定收敛.

从定理 3 中可以得到细分收敛与位置参数的无穷乘积之间的关系. 下面利用无穷乘积与数项级数之间的关系，把这个无穷乘积条件是否成立的验证等价转化为正项级数的发散性与收敛性的检验.

定理 4. $\prod_{k=0}^{\infty}\{r_k,1-r_k\}=0$，$0<r_k<1$ 的充要条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}t_k$ 发散，其中 $r_k,1-r_k,t_k$ 的定义如前所述.

证明. $s_k=\max\{r_k,1-r_k\}$，则 $s_k\in[1/2,1)$ 且

$$\prod_{k=0}^{\infty}\{r_k,1-r_k\}=0\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\ln s_k=-\infty;$$

而当 $s_k\in[1/2,1)$ 时，

$$1\leqslant\frac{\ln s_k}{s_k-1}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^n}<+\infty.$$

故

$$\sum_{k=0}^{\infty}\ln s_k=-\infty\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(1-s_k)\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}t_k=+\infty,$$

而 $1-s_k=\min\{r_k,1-r_k\}=t_k$，即得到所要的结果.　　证毕.

由定理 3，4 可得如下推论.

推论 2. 位置参数列 $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$，$0<r_k<1$ 对任意 Bézier 曲线进行细分且细分收敛的充要条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}t_k$ 发散，其中 $r_k,1-r_k,t_k$ 的定义如前所述.

由 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛，根据推论 2，图 4 中 ε^kP 随着 $k\to\infty$ 不会收敛于原 Bézier 曲线.

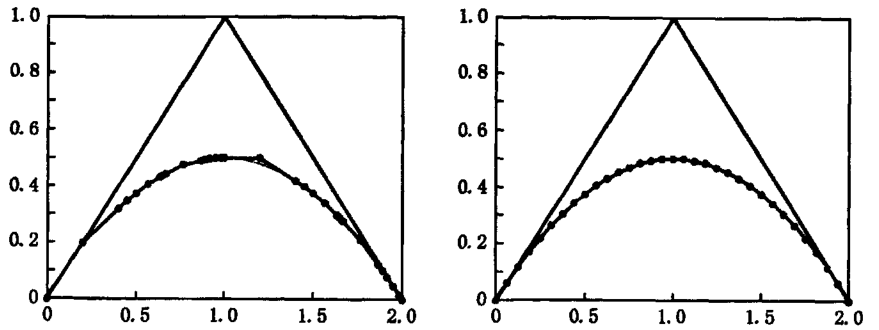
3.2　每层细分变参的细分收敛条件

若第 k 次细分对第 $k-1$ 次细分生成的每段 Bézier 曲线段在不同的位置参数细分得到有限条 Bézier 曲线段，可以给这有限条 Bézier 曲线段排一个序，则在第 $k+1$ 次细分时这些 Bézier 曲线的位置参数在这个排序下形成一个有限数列. 由前面的讨论可知，ε^kP 收敛的性质以及收敛速度均与所取的这个排序方式无关，故仅讨论这些位置参数形成的有限集合，将其记为 R_k. 于是对给定的 Bézier 曲线，基于 de Casteljau 算法进行细分的过程就对应于一个集合列 $\{R_k\}_{k=0}^{\infty}$，本文称这个集合列为该细分过程的细分集合列. 通过前面的分析可以得到与定理 3、推论 1 类似的结果，证明过程也类似.

4　细分收敛下的收敛速度

当把 Bézier 曲线不断细分看成相互独立的过程（位置参数没有相互依赖的关系）时，从定理 3 可以得到这些位置参数需要满足的条件，而对于不同的位置参数其收敛速度可能不同. 对于相同的 Bézier 曲线分别在第 k 层上用位置参数 $r_k=1/2$ 以及 $r_k=1-1/(k+1)$ 进行细分，图 5 所示为细分 4 次后的结果.

由定理 3，如果细分无限进行下去，它们的 ε^kP 最终都会收敛于原 Bézier 曲线. 但是，从图 5 中可以发现，图 5 a 中的 $r_k=1-1/(k+1)$ 在第 4 次细分后 ε^4P 与原 Bézier 曲线的距离远大于选择图 5 b 中的 $r_k=1/2$ 细分 4 次后 ε^4P 与原曲线的距离. 下面从理论上分析由控制多边形组成的折线序列收敛到原 Bézier 曲线的收敛速度.



a $r_k=1-1/(k+1)$　　b $r_k=1/2$

图 5　不同位置参数细分同一条 Bézier 曲线的收敛速度对比

设 $R=\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是满足 $\prod_{k=0}^{\infty}\{r_k,1-r_k\}=0$ 条件的一个位置参数列. 由 de Casteljau 算法,当细分收敛时,对于一个给定的原 Bézier 曲线上一点,都有一个沿着 ρ 树的某个控制多边形列 $\{\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}\}_{k=0}^{\infty}$ 使得该点为在这些控制多边形上取的点列 $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的极限点,其中 $p_k\in\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$. 故当衡量收敛时,对于原 Bézier 曲线上的每一点都用这个控制多边形序列与其“距离”的变化来衡量收敛的快慢,该距离定义为控制多边形上的点与给定曲线上的点距离的极大值. 不同于一些经典文献[3-4]中距离的定义,这个距离仅仅取决于控制多边形与 Bézier 曲线的几何位置,与控制多边形的参数化无关. 定义一个控制多边形 ρ 到其对应 Bézier 曲线之间的距离

$$D=\sup_{t\in[0,1]}\sup_{P\in\rho}\|C(t)-P\|.$$

记控制顶点为 $P_0,P_1,\cdots,P_n$,则 Bézier 曲线为

$$C(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_i^n(t),$$

其中 $B_i^n(t)=C_n^it^i(1-t)^{n-i}$.

由于从一个点到直线的距离最大值总是在端点处取得,因此

$$\sup_{P\in\rho}\|C(t)-P\|=\max_{i=0,\cdots,n}\|C(t)-P_i\|=$$
$$\max_{i=0,\cdots,n}\Big\|\sum_{j=0}^{n}P_jB_j^n(t)-P_i\Big\|=$$
$$\max_{i=0,\cdots,n}\Big\|\sum_{j=0}^{n}(P_j-P_i)B_j^n(t)\Big\|\leqslant$$
$$\max_{i,j\in\{0,\cdots,n\}}\|P_i-P_j\|\leqslant$$
$$n\max_{i\in\{0,\cdots,n-1\}}\|P_{i+1}-P_i\|;$$

故

$$D=\sup_{t\in[0,1]}\sup_{P\in\rho}\|C(t)-P\|\leqslant$$
$$n\max_{i\in\{0,\cdots,n-1\}}\|P_{i+1}-P_i\|.$$

因此在不同位置参数细分,第 k 次细分后记控制多边形 $\rho_k^{i_1,\cdots,i_k}$ 到其对应的那段 Bézier 曲线之间的距离为 $D_k^{i_1,\cdots,i_k}$, ε^kP 到原 Bézier 曲线之间距离定义为 $D_k=\max_{i_1,\cdots,i_k\in\{0,1\}}D_k^{i_1,\cdots,i_k}$. 由上述分析得

$$D_k\leqslant nL_k^{\max};$$

又由定理 3,

$$L_k^{\max}\leqslant s_kL_{k-1}^{\max},$$

即

$$D_k\leqslant n\prod_{i=0}^{k-1}s_iL_0^{\max}.$$

对于任意给定的 Bézier 曲线的控制多边形, $L_0^{\max}$ 都是一个有界量. 故在 R 下对任意 Bézier 曲线进行细分,其收敛速度为 $O(\prod_{i=0}^{k}s_i)$. 其中, $L_k^{\max}$ 是 ε^kP 中任意相邻顶点之间距离的最大值.

以图 5 为例, ε^kP 收敛到原 Bézier 曲线的收敛速度在图 5 a 的位置参数下为 $O(1/(k+1))$,而在图 5 b 的位置参数下为 $O(1/(2^k+1))$. 同样,在每层细分变参的情况下也可以得到类似的关于收敛速度的结果.

5 总　结

本文推广了基于 de Casteljau 算法的 Bézier 曲线细分收敛的理论,把原有的细分收敛理论从位置参数的角度拓展,并讨论了对应的理论结果——细分收敛充要条件. 与已有的细分收敛距离的定义不同,本文基于细分收敛的几何含义给出了新的距离的定义,并研究了在这种距离定义下的收敛速度,其收敛速度正是人们可以直观感受到的逼近速度. 鉴于本文中位置参数之间没有相互依赖性,在未来的工作中,我们将致力于该理论应用价值的发掘.

参考文献(References)：

[1] Farin G. Curves and surfaces for CAGD [M]. 5th ed. New York: Academic Press, 2002

[2] Goldman R. An integrated introduction to computer graphics and geometric modeling [M]. Boca Raton: CRC Press, 2009

[3] Morin G, Goldman R. On the smooth convergence of subdivision and degree elevation for Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(7): 657-666

[4] Lane M, Riesenfeld F. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surface [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1980, 2(1): 35-46

[5] Cohen E, Schumaker L. Rates of convergence of control polygons [J]. Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(1/3): 229-235

[6] Prautzsch H, Kobbelt L. Convergence of subdivision and degree elevation [J]. Advances in Computational Mathematics, 1994, 2(1): 143-154

[7] Goldman R. Pyramid algorithms: a programming approach to curves and surfaces for geometric modeling [M]. New York: Academic Press, 2002

[8] de Boor C. Cutting corners always works [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1/2): 125-131