# 基于模态分析的三维模型全局结构优化

刘 源[1)], 刘雪峰[2)], 邓建松[1)], 杨周旺[1)*]

[1)] (中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026)
[2)] (日本国立新潟大学自然科学研究科 新潟 951-8550)
(yangzw@ustc.edu.cn)

**摘 要:** 传统的结构优化方法需要预先给定受力条件, 所得结构只保证在所给条件下最优, 而在其他外力下可能较为脆弱. 实际应用中物体可能受到各种外力, 这时在单个受力条件下的优化方法无法保证结构的全局性能, 一般通过加大材料的使用量来满足应用需求. 文中提出的优化方法能够加强物体在各种可能受力条件下的全局强度, 使物体的强度趋于各向同性以抵御各种不同的外力. 该方法基于物体结构的模态分析检测结构中的脆弱区域, 并通过刚度矩阵特征值的优化实现脆弱区域的加强; 同时基于瑞利商的概念, 提出一种高效可行的求解算法. 实验结果表明, 该方法可有效地提高物体的全局强度.

**关键词:** 结构优化; 模态分析; 特征值优化; 瑞利商
**中图法分类号:** TP391

# Global Structural Optimization of 3D Models Based on Modal Analysis

Liu Yuan[1)], Liu Xuefeng[2)], Deng Jiansong[1)], and Yang Zhouwang[1)*]

[1)] (*School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei,* 230026)
[2)] (*Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata,* 951-8550)

**Abstract:** Traditional structural optimization methods require predefined load conditions. The resulting structure is optimal under the given condition, but can be weak under different loads. Objects can suffer from various forces in practical applications. The overall performance of objects cannot be guaranteed and thus more material than actually needed is used. In this work we propose a novel approach to enhance the global strength of 3D objects under all possible load distribution, which make the strength of the object isotropic to resist different forces. The method is based on modal analysis. We first detect the weak region of the object and then reinforce it by optimizing the eigenvalue of the stiffness matrix. Based on the concept of Rayleigh Quotient, an efficient algorithm is also presented. Experiments show that our method can effectively improve the global strength of 3D objects.

**Key words:** structure optimization; modal analysis; eigenvalue optimization; Rayleigh Quotient

三维模型的结构优化是计算机辅助设计(CAD)的重要课题之一, 将其用于加工制造的三维模型在设计之后, 需要经过大量的力学分析测试和调整, 以满足实际应用中的物理性能需求, 如飞机、船舶制造等. 有限元方法是目前使用最为广泛的分析方法, 而最近兴起的等几何分析方法则避免了设计与分析中几何表示的不同, 为计算机辅助设计和计算机辅助工程的结合架起了桥梁. 设计

收稿日期:2014-05-05; 修回日期:2015-04-02. 基金项目:国家自然科学基金(11171322, 11371341), 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-11-0881), 中央高校基本科研业务费专项资金资助. 刘 源(1988—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 刘雪峰(1980—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为微分算子特征值估计、有限元方法的误差估计; 邓建松(1971—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为几何造型; 杨周旺(1974—), 男, 博士, 副教授, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算几何、最优化理论与算法.

人员根据力学分析的结果不断调整模型, 使其最终满足应用需求的过程, 即是结构优化的最初方式.

随着计算机技术的发展, 自动化的结构优化方法逐渐出现. 这些方法使设计人员省去了烦琐的经验性调整, 并且能够得到更加精确的结果. 结构优化方法近年来取得许多成果：Simon 等[1-3]提出的形状灵敏度分析法(shape sensitive analysis)是一种一般的求解方式, 它可以用于各种不同的模型和目标函数, 其缺点是重新网格化的计算量较大且容易陷入局部最优解[4]. Bendsøe 等[5]提出的匀质化(homogenization)方法和它的一些变形, 由于形式上的简单和计算上的高效使得其得到广泛的应用, 如实体各向同性材料惩罚模型(SIMP)[6-8]. 但这类方法主要是针对线性弹性模型[4], 且 SIMP 方法可能会出现数值上的不稳定性[9]. 水平集(level-set)方法[10-11]由于其处理界面追踪和拓扑变化上的优势, 也在结构优化中得到大量使用[4,9,12]. 最近, 等几何分析也被应用到结构优化中来, 并体现出处理拓扑变化上的优势[13].

结构优化方法的发展为工业应用提供了很多有力的工具. 总体来看, 这些方法都在已知物体的具体受力方式下进行处理, 即对于某个给定的受力条件求解最优的结构. 然而物体在真实世界中会受到各种各样的力, 如工艺品可能受到各个方向的抓握, 护拦扶手会受到各个方向的拉压, 意外情况下物体可能受到来自各种未知方向的冲击. 因此很多物体在设计时需要考虑全局结构的加强, 而不仅限于某种固定的受力条件. 传统的优化方法不易处理该问题, 因为对于不同的受力条件, 其优化的结果可能相差很大, 而不同的优化结果也难以整合到同一个设计中来; 所以, 一般使用超过实际所需量的材料来达到应用的全局强度需求, 这在很多情况下造成了材料的浪费.

本文针对三维模型的全局结构优化问题提出一个有效的方法. 该方法基于这样的观察, 即物体的全局强度取决于其中最脆弱的部分, 通过不断地加强物体中的脆弱区域, 可以使物体的全局强度得到提升. 物体的脆弱区域可以通过模态分析进行检测, 而这些区域的加强可以通过物体刚度矩阵的特征值优化实现.

本文主要包括如下内容：传统结构优化问题及模态分析、本文方法的数学模型和求解算法、实验结果和分析, 最后进行了总结.

## 1　预备知识

### 1.1　线性弹性问题

弹性物体在外力下的形变遵循弹性力学方程. 这里简介线性弹性问题, 但本文算法并不局限于线性问题. 对于弹性物体 $\Omega$, 在外力 $f,g$ 下达平衡状态时满足方程

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\sigma(\epsilon(u))) = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_D \\ \sigma(\epsilon(u))\cdot n = g, & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u$ 是形变, $\epsilon(u) = 1/2(\nabla u + \nabla u^{\mathrm{T}})$ 为应变, $\sigma(\epsilon) = 2\mu\epsilon + \gamma(\mathrm{tr}(\epsilon))I$ 为应力, $\gamma$ 和 $\mu$ 是物体材料的拉梅常量(Lame moduli). 该问题可以通过有限元方法(finite element method, FEM)进行数值求解.

### 1.2　给定受力条件的结构优化

结构优化中应用最为广泛的目标函数是柔度模型[4]

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} fu\mathrm{d}v + \int_{\Gamma_N} gu\mathrm{d}s \tag{2}$$

这里 $u$ 是满足方程式(1)的形变. 优化问题还可包括设计上的几何约束和物理约束, 如限制物体所用材料的总体积, 则问题可描述为

$$\begin{cases} \min\ J(\Omega) \\ \text{s.t. } \int_{\Omega}\mathrm{d}v \leqslant V_{\max}\ \text{ and } (1) \end{cases}$$

针对不同的问题, 模型可以使用不同的设计变量. 最直观的设计变量是在区域上定义一个在每点取值为 0 或 1 的标记函数, 以表示该点处的材料是否保留. 如图 1 所示的二维悬臂梁设计问题, 梁左端固定, 右端中部受到向下的拉力. 从填满加工材料的方形区域作为初始(左图), 优化过程中不断更新标记函数, 最终得到需要保留的区域(右图)即是所需结构.

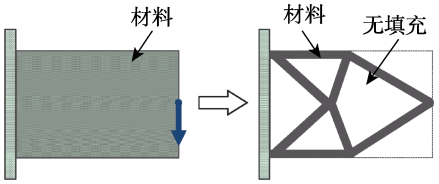



图 1　二维悬臂梁优化示意图

这样大规模的整数规划问题难以求解, 因此 SIMP[6-8]和基于水平集的方法[4]在区域上定义取值在[0,1]的连续密度函数, 并在后处理中用复合材料填充密度介于 0~1 之间的区域或将密度小于域值的区域丢弃.

### 1.3 模态分析与脆弱区域

线性弹性问题的运动方程为

$$\mathrm{div}(\sigma)+f=\rho\ddot{u} \tag{3}$$

其中 $\rho$ 为密度. 对于静态问题最后一项为零, 这里在中间过程用到模态分析, 因此保留该项. 结合式(1), 式(3)可写成关于形变 $u$ 的形式

$$\mathrm{div}(\sigma(\epsilon(u))):=Lu=-f+\rho\ddot{u} \tag{4}$$

计算模态分析即对算子 $L$ 进行特征分解[14]

$$Lu_i=\lambda_i u_i,\quad i=1,2,\ldots$$

模态分析广泛应用于计算物体在振荡下可能出现较高应力值或较大形变量的区域, 在静态问题中也得到有效应用[14]. 图2第1行所示为 $L$ 的第1, 3, 5 个最小非零特征值对应的特征向量在三维网格模型上的体现, 其中颜色值表示形变量的大小.

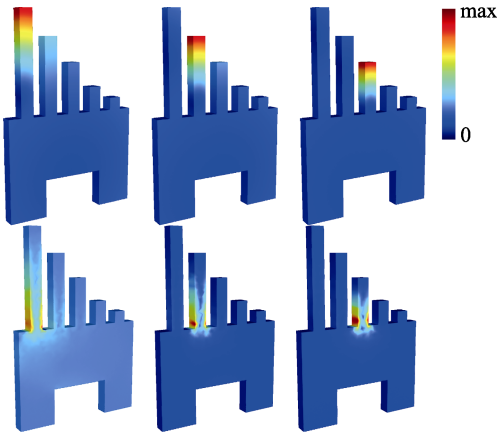



图 2 模态分析形变(上)与应力(下)分布示意图

由图2可见, 形变量分布与该模型各部位的易形变程度相符, 即算子 $L$ 的较小非零特征值对应的特征向量可以有效地标示物体中的易形变区域. 图2第2行所示为在上述形变下物体中的应力分布, 颜色值表示应力的大小. 从应力分布可以看出, 3个示例中的最大应力均出现在模型相应的易断裂部位. 因此, 通过减小模型易形变区域的形变量可增强模型的脆弱区域, 提高模型的全局强度, 而这一目标可通过算子 $L$ 的特征值优化实现.

## 2 全局优化模型

由于要优化物体在所有可能受力下的形变量, 除使物体平衡外, 这里不对外力作其他假设. 因此, 我们优化物体在外力作用下的全局平均形变量

$$\|u\|^2/\|f\|^2,$$

物体在平衡状态下由式(4)有 $Lu=f$, 则全局优化问题可描述为

$$\min_{\theta}\max_{f}\frac{\left\|L^{-1}f\right\|^2}{\|f\|^2} \tag{5}$$

其中 $\theta$ 为决定模型结构的设计变量.

### 2.1 模型的离散化与求解算法

弹性力学问题通常在离散后用有限元方法求解. 对于不同的离散方式, 设计变量的选择也不尽相同. 如 Allaire 等[4]对模型进行体剖分并定义分片密度函数. 用简单结构对原模型进行近似以简化设计变量也可以取得良好的效果, 如 Wang 等[15]使用框架结构并将内部结点位置和杆的半径作为设计变量, 而 Lu 等[16]则使用了蜂窝结构并用胞腔的数目和尺寸作为设计变量.

本文方法与离散方式和设计变量的选取无关, 这里用 $\theta$ 表示设计变量. 于是, 弹性问题式(1)可以用 FEM[17-19]离散为

$$\boldsymbol{K}(\theta)\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是刚度矩阵, $\boldsymbol{F}$ 为所有结点处的外力组成的向量, $\boldsymbol{D}$ 为所有结点处的形变组成的向量. 为使物体保持平衡, $\boldsymbol{F}$ 需满足

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}\cdot F_i=0,\\&F_i\cdot(X_{i+1}-X_{c,i+1})-F_{i+1}\cdot(X_i-X_{c,i})=0,\ i=1,2,3\end{aligned}$$

即总外力和总力矩均为0, 其中 $F_i$ 为外力 $\boldsymbol{F}$ 在 $x,y,z$ 方向的分量, $X_i$ 为结点在 $x,y,z$ 方向的坐标, $X_c=(X_{c,1}, X_{c,2}, X_{c,3})$ 是物体的中心. 于是问题(6)的离散形式为

$$\min_{\theta\in\Theta}\max_{\boldsymbol{F}\in\mathcal{F}}\frac{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}} \tag{7}$$

其中 $\Theta$ 和 $\mathcal{F}$ 分别为设计变量 $\theta$ 和外力 $\boldsymbol{F}$ 的取值空间.

### 2.2 模型的几何解释与有效性证明

首先我们介绍瑞利商的概念. 给定埃尔米特矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和非零向量 $\boldsymbol{x}$, 则瑞利商[20]定义为

$$R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{x}):=\frac{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

且具有性质

$$\begin{cases}\lambda_{\min}\leqslant R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{x})\leqslant\lambda_{\max}\\ R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{v}_{\min})=\lambda_{\min}\\ R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{v}_{\max})=\lambda_{\max}\end{cases} \tag{9}$$

其中, $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 分别为 $\boldsymbol{M}$ 的最小、最大特征值, $\boldsymbol{v}_{\min}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\max}$ 是对应的特征向量.

由瑞利商的性质(9)可知, 能够最大化目标 $(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F})/\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ 的向量 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}$ 的最大特

征值对应的特征向量. 由于 $\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}$ 对称且 $\boldsymbol{K}$ 正定，我们有

$$\max_{\boldsymbol{F}}\frac{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}}=\lambda_{\max}(\boldsymbol{K}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1})=\lambda_{\max}^{2}(\boldsymbol{K}^{-1})=\frac{1}{\lambda_{\min}^{2}(\boldsymbol{K})}$$

即目标函数(8)等价于

$$\max_{\theta}\lambda_{\min}^{*}(K(\theta)) \tag{10}$$

其中 $\lambda_{\min}^{*}$ 表示 $\boldsymbol{K}$ 的最小非零特征值.

优化刚度矩阵的特征值对极小化形变的作用有如下证明：

由 $\boldsymbol{K}$ 实对称及离散平衡方程(6)，对外力 $\boldsymbol{F}$ 有

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交阵，$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵且对角元素为 $\boldsymbol{K}$ 的特征值. 于是

$$\|\boldsymbol{F}\|^{2}=\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\|^{2}=\|\Lambda\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\|^{2}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}^{2}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D})_{i}^{2}\geqslant\lambda_{\min}^{2}\|\boldsymbol{D}\|^{2},$$

即 $\|\boldsymbol{D}\|^{2}\leqslant\|\boldsymbol{F}\|^{2}/\lambda_{\min}^{2}$，其中 $n$ 为矩阵维数. 因此增大刚度矩阵的最小特征值可有效地减小物体在外力下的形变量. 在未设定受力条件时，物体的刚性运动(平移和旋转)在 $\boldsymbol{K}$ 的核空间内，但刚性运动不会在物体内部产生应力，可添加约束将其消除[14]，这时优化 $\boldsymbol{K}$ 的最小非零特征值具有相同效果.

结合 1.3 节模态分析的相关内容，我们可以看到目标函数的几何含义非常直观：最小非零特征值对应的特征向量标示了物体最易形变的部位，而对它的优化可减小物体在外力下的形变量，使物体中对应的脆弱区域得到加强.

### 2.3　基于瑞利商的求解算法

由于涉及刚度矩阵的逆 $\boldsymbol{K}^{-1}$，对模型式(5)的直接求解较为困难. 其等价模型式(10)的求解需要特征值关于设计变量的梯度，也不易于计算. 对于特征值的优化求解问题，Achtziger 等[21]详细讨论了其中的困难，并将该问题重塑为一个半定优化问题. 类似地，Kanno 等[22]将其转变为序贯半定优化问题进行求解. 这 2 种方法在刚度矩阵线性依赖于设计变量的前提下，考虑了物体在自由振荡下的设计问题. 本文由于考虑物体在平衡状态下的形变问题，因此式(4)中最后一项为零[14]，没有涉及质量矩阵的计算. 但是，刚度矩阵的特征值优化会遇到同样的问题. 针对这一目标，我们再次使用瑞利商的概念重构目标函数. 与式(7)的形式类似，目标函数(10)可以重写成

$$\max_{\theta\in\Theta}\min_{\boldsymbol{F}\in\mathcal{F}}\frac{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\theta)\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}} \tag{11}$$

这时原模型(5)中的逆矩阵 $\boldsymbol{K}^{-1}$ 已被消去，目标函数被大大简化并可以用传统最优化算法求解. 算法步骤如下所述：

输入：初始设计变量 $\theta_0$，终止条件域值 $\epsilon$

输出：最优设计变量 $\theta^{*}$

Step1. 计算 $K(\theta_0)$ 的最小非零特征值 $\lambda_0^{*}$ 及其对应的特征向量 $\boldsymbol{F}_0$，取 $k=1$.

Step2. 使用内点法[23]求解

$$\theta_k=\arg\max_{\theta\in\Theta}R(\boldsymbol{K}(\theta),\boldsymbol{F}_{k-1}).$$

Step3. 计算 $\boldsymbol{K}(\theta_k)$ 的最小非零特征值 $\lambda_k^{*}$ 及其对应的特征向量 $\boldsymbol{F}_k$.

Step4. 若 $\left|\lambda_k^{*}-\lambda_{k-1}^{*}\right|<\epsilon$，令 $\theta^{*}=\theta_k$，退出；否则，令 $k=k+1$，转 Step2.

其中 $\theta^{*}$ 即为约束条件下使整体强度最优的设计变量.

## 3　实验结果与分析

本节算法的实验结果与分析. 本文算法不限于模型的离散方式. 这里采用与 Wang 等[15]类似的框架结构进行示例，其框架结构简单实用，且优化结果中杆半径的变化明显，便于直观地对比分析. 初始框架结构可通过对原始模型进行 Centroidal Voronoi Tessellation(CVT)剖分[24-26]，然后取剖分结构的边得到. 图 3 所示为模型 1 的输入模型和初始框架结构.

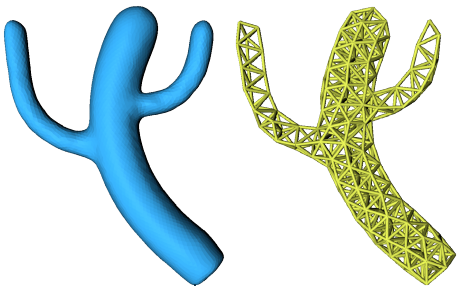
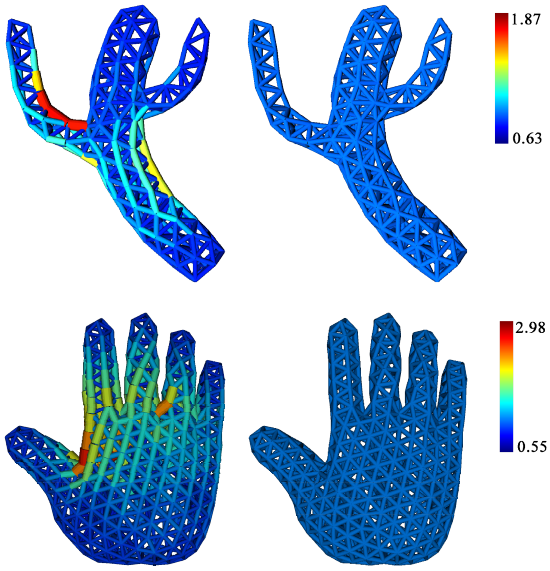


图 3　输入模型(左)与初始框架结构(右)

框架模型的设计变量为所有支杆的半径 $R$ 和模型内部结点的位置 $V$ [15]. 设计约束包括支杆半径的上下界 $r_{\min}\leqslant r_i\leqslant r_{\max}$，支杆长度与半径的比值 $r_i/l_i\geqslant\alpha$，以及模型的总体积 $V\leq V_{\max}$. 支杆半径的初始值设为 $r_{\min}$，并在优化的最后清除十分接近 $r_{\min}$ 的支杆，因为半径过细说明该处支杆对模型强度作用很小.

图 4 所示为模型 1 和模型 2 算法优化结果与具有相同体积但所有杆半径一致的均匀框架结构的对比，其中颜色表示半径的大小.




a 优化结果　　b 同体积均匀结构

图 4 2 个模型的对比

从图 4 中优化结果与均匀结构半径的对比可以看出，模型在分支处根部的脆弱区域基本都得到了有效的加粗，与全局优化的预期相吻合.

模型 1 在右侧分支处根部未得到明显加粗，通过图 5 中的侧面放大图可以看出，其左侧分支根部的上侧只有 1 根杆与主干部分相连，而右侧相应部位则有 3 根杆同时支撑，相比而言左侧更加脆弱. 因此，对左侧分支根部的支杆进行更为充分的加粗是合理的结果.

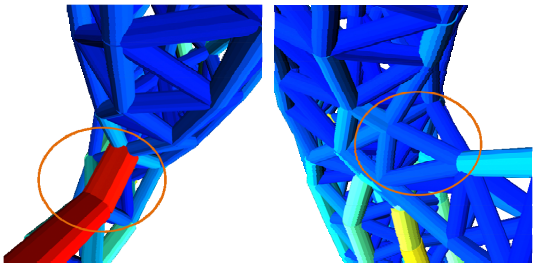
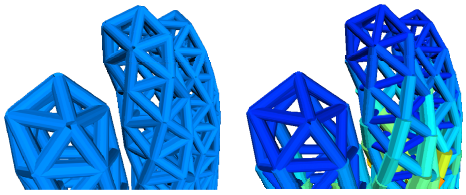


图 5 模型 1 左右两侧分支根部结构示意

由于总体积相同，与均匀结构相比，优化结果中必然有一部分杆被变细，如图 6 所示. 但这不会使模型的全局强度减弱，因为物体最易断裂的部位由其最脆弱的区域决定，从强度大的部位取走适量的材料并不会将它变成最脆弱区域，而这部分材料填入脆弱区域恰使全局结构增强. 这正是

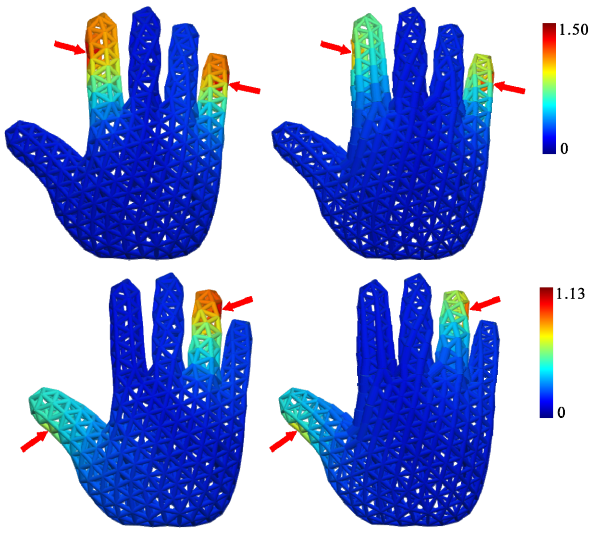


a 均匀结构　　b 优化结果

图 6 模型 2 指尖处加粗对比

由特征值优化的全局性所保证. 算法使材料在结构中得到全局优化配置，在相同的材料体积下即可有效地增加物体的全局强度，避免使用过多不必要的材料.

为进一步验证全局强度的增加，我们用 500 组随机外力对同样体积的优化结果和均匀结构进行受力测试，并通过线性弹性方程式(1)求解模型的形变. 表 1 记录了各模型形变量的平均值和最大值. 从 1 数据可见，优化结果的平均形变量和最大形变量均明显小于均匀结构，表明了优化结构的全局强度提升. 图 7 所示为其中 2 组受力情形的形变量分布示意图，红色箭头表示受力的方向和位置. 由图 7 可见，在多种外力条件下，优化结果都比均匀结构产生更小的形变量，因而展示了算法全局优化的有效性.



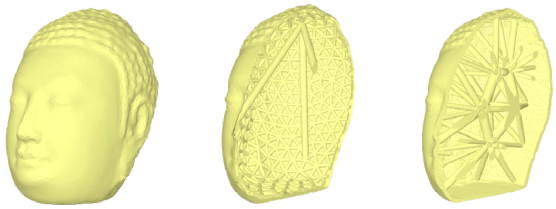

a 均匀结构　　b 优化结果

图 7 模型 2 受力测试形变分布示意图

表 1 随机受力测试形变量对比　　mm

| 对比模型 | 均匀结构 | | 优化结果 | |
|---|---|---|---|---|
| | 平均形变 | 最大形变 | 平均形变 | 最大形变 |
| 1 | 1.259 | 2.156 | 1.029 | 1.768 |
| 2 | 1.135 | 1.529 | 0.972 | 1.347 |

为验证全局优化方法节省材料的效果, 我们与 cost-effective 方法[15]进行比较. 对如图 8a 所示的模型, 给定相同的体积约束, 用 cost-effective 和本文方法分别优化, 得到如图 8b, 8c 所示结果, 其中 cost-effective 方法设定的受力条件为由模型顶端向下大小为 20N 的力 $\boldsymbol{F}^*$. 为保持输入模型外观, cost-effective 方法在框架结构的表面添加一层蒙皮, 我们类似地将输入模型表面向内加厚, 厚度通过线性插值表面杆的直径来确定; 2 种结构表层加厚的体积均包含在体积约束内. 表 2 第 2 行给出了同体积的 2 种优化结果在几组外力条件下的形变量对比, 其中受力条件 1 对应 $\boldsymbol{F}^*$.



a　输入模型　　b　cost-effective　　c　本文方法

图 8　优化结果内部结构示意图

**表 2**　受力测试形变量**(mm)**和体积对比

| 对比指标 | 受力条件 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 同体积下形变量对比 (cost-effective/本文方法) | 0.16/0.21 | 0.27/0.22 | 0.23/0.18 | 0.18/0.16 | 0.20/0.17 |
| 同形变量下体积比值 (cost-effective/本文方法) | 0.75 | 1.23 | 1.21 | 1.18 | 1.15 |

由表 2 数据可见, 除受力条件 1($\boldsymbol{F}^*$)之外, 本文结果的形变量均较小. 在相同的受力条件下, 我们通过均匀放缩 cost-effective 结果中框架支杆的半径来调整其强度, 使其与全局优化结果有相同的形变量. 表 2 第 3 行给出了在达到相同形变量时, 2 种优化结果体积的比值. 该比值说明, 在固定受力条件下的优化结果, 除优化时使用的受力条件外, 在其他情形下通常需要使用更多的材料, 才能达到与全局优化结构相同的强度. 该实验表明, 本文方法在满足相同全局强度需求的同时, 可比固定受力条件的传统方法更加节省材料.

表 3 给出了模型 1 和模型 2 的框架结构信息以及优化算法的运行时间. Kanno 等提出的序贯半定优化方法中, 对结构为 6×6 且截面为圆形的平面

**表 3**　模型框架结构信息及运行时间

| 模型 | 顶点数 | 边数 | 优化时间/min |
|---|---|---|---|
| 1 | 160 | 669 | 0.9 |
| 2 | 500 | 1373 | 7.5 |

方形网格框架算例用时 8min[22], 而本文方法在超过 1300 个变量的三维框架算例中运行时间大约 7.5min（模型 2）.这一速度的获取, 除省去了质量矩阵相关的计算之外, 与目标函数的形式转化和设计变量的选择也有关系. 特征值对于设计变量的梯度可能不连续, 因此不宜直接使用基于梯度信息的求解算法.我们对转化后的目标函数式(11)进行交替迭代求解, 在给定 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 后, 子问题的目标函数 $R(\boldsymbol{K}(\theta),\hat{\boldsymbol{F}})$ 是对刚度矩阵特征值的近似. 由 Achtziger 等的分析可知, 特征值的不连续性与结构本身的退化有着直接关系, 即优化过程中出现半径为 0 的杆. 针对本文框架结构算例, 我们在优化过程中设定了半径的下界, 即在确定的拓扑结构下进行优化, 从而避免了退化情形的出现. 目标函数形式的转化和对拓扑结构的约束很大程度上允许了梯度信息的计算, 使得我们能够通过内点法快速取得局部最优解. 另外, 对半径的约束也使优化结果适于如 3D 打印等有最小精度要求的后续处理. 对于框架结构的强度作用较小而应该清除的杆, 在优化过程中其半径会趋于下界, 因此在优化一定步数(这里取 30 步)后, 我们将半径处于下界某个域值内的杆从结构中删去. 这种间隔性的清除策略, 使我们能够捕捉优化过程中框架结构拓扑的变化.

为了验证算法对不同初值的敏感程度, 我们给半径的初值添加最大幅度为 $0.1(r_{\max}-r_{\min})$的随机扰动, 表 4 给出其中 5 组的目标函数取值及 50 组结果的标准差. 从表 5 数据可见, 对于不同初值输入, 算法优化结果之间的差别很小, 即算法对初值没有明显的依赖性.

**表 4**　随机初始下的目标函数取值信息

| 模型 | 随机初始 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 标准差(50 组) |
| 1 | 28.8049 | 28.8210 | 28.8265 | 28.8368 | 28.8221 | 0.0082 |
| 2 | 14.2932 | 14.1795 | 14.2319 | 14.3378 | 14.1558 | 0.0581 |

## 4　总结

本文讨论了三维模型的全局结构优化问题,

提出一种新的优化方法. 给定设计约束, 通过极小化物体在所有可能受力下的形变量,达到加强物体全局强度的目标. 算法通过模态分析检测易形变区域, 然后通过特征值优化重新配置材料的分布以加强脆弱区域. 算法的有效性得到数值实验的充分验证. 该算法有利于实际应用中材料的优化配置, 可避免多余材料的使用.

在目前的实验中我们发现, 不同的设计参数对算法的性能有一定影响, 而设计参数的选择在具体的应用和不同的结构中往往有着较大差别, 其最优选择策略是一个重要同时较为复杂的问题. 另外, 目前我们主要讨论了方法对模型的机械性能和材料用量的影响, 而在实际问题中, 模型的制造成本也是需要考虑的重要因素之一, 包括模型结构的可构造性、各模块间设计上的重复性等等. 这些将是我们今后要讨论的问题.

## 参考文献(References):


[1] Pironneau O. Optimal shape design for elliptic systems [M]// System Modeling and Optimization. Heidelberg: Springer, 1982: 42-66

[2] Simon J. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 1980, 2(7-8): 649-687

[3] Sokolowski J, Zolesio J P. Introduction to shape optimization [M]. Berlin: Springer, 1992

[4] Allaire G, Jouve F, Toader A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. Journal of computational physics, 2004, 194(1): 363-393

[5] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1988, 71(2): 197-224

[6] Bendsøe M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. Structural optimization, 1989, 1(4): 193-202

[7] Rozvany G I N, Zhou M, Birker T. Generalized shape optimization without homogenization[J]. Structural optimization, 1992, 4(3-4): 250-252

[8] Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 21(2): 120-127

[9] Wang M Y, Wang X, Guo D. A level set method for structural topology optimization[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2003, 192(1): 227-246

[10] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of computational physics, 1988, 79(1): 12-49

[11] Sethian J A. Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

[12] Wang S, Wang M Y. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2006, 65(12): 2060-2090

[13] Hassani B, Khanzadi M, Tavakkoli S M. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2012, 45(2): 223-233

[14] Zhou Q, Panetta J, Zorin D. Worst-case structural analysis[J]. ACM Transactions on Graphics , 2013, 32(4): Article No.137

[15] Wang W, Wang T Y, Yang Z, *et al.* Cost-effective printing of 3D objects with skin-frame structures[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): Article No.177

[16] Lu L, Sharf A, Zhao H, *et al*. Build-to-last: strength to weight 3D printed objects[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(4): Article No.97

[17] Zienkiewicz O C, Taylor R L, Zienkiewicz O C, *et al*. The finite element method[M]. London: McGraw-hill, 1977

[18] Hughes T J R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis[M]. Courier Corporation, 2012.

[19] Chandrupatla T R, Belegundu A D, Ramesh T, *et al*. Introduction to finite elements in engineering[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997

[20] Parlett B N. The symmetric eigenvalue problem[M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1980

[21] Achtziger W, Kočvara M. On the maximization of the fundamental eigenvalue in topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, 34(3): 181-195

[22] Kanno Y, Ohsaki M. Maximization of minimal eigenvalue of structures by using sequential semidefinite programming[OL]. [2015-03-15]. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.204.5906&rep=rep1&type=pdf

[23] Nocedal J, Wright S. Numerical optimization, series in operations research and financial engineering[M]. Berlin:Springer, 2006

[24] Wang X, Ying X, Liu Y J, et al. Intrinsic computation of centroidal Voronoi tessellation (CVT) on meshes[J]. Computer-Aided Design, 2015, 58: 51-61

[25] Xu C, Liu Y J, Sun Q, *et al*. Polyline sourced Geodesic Voronoi Diagrams on Triangle Meshes[C]//Computer Graphics Forum. 2014, 33(7): 161-170

[26] Yan D M, Wang W, Lévy B, *et al*. Efficient computation of 3d clipped voronoi diagram[M]//Advances in Geometric Modeling and Processing. Springer Berlin Heidelberg, 2010: 269-282