

平面多边形 Newell 公式的运用与推广

王睿旻, 吴 梦, 邓建松

(中国科学技术大学数学科学院, 安徽 合肥 230000)

摘 要: Newell 公式在计算机图形学中常被用于计算多边形面积和平面法向量。论文主要讨论了 Newell 公式的运用与推广。首先将其推广三维空间中用于计算多面体体积的公式。其次讨论了在异面多边形的情况下, Newell 公式的几何意义。最后, 从数值计算的角度分析了 Newell 公式的计算方法。

关 键 词: Newell 公式; 多面体体积; 异面多边形; 数值计算

中图分类号: TP 391.41

文献标识码: A **文章编号:** 2095-302X (2012)02-0062-06

The application and promotion of the Newell formula

Wang Ruimin, Wu Meng, Deng Jiansong

(Academy of Mathematics, University of Science and Technology of China., Hefei Anhui 230000, China)

Abstract: The application and promotion of the Newell formula in CAGD are discussed in this paper. This formula is used to calculate the area of a plane polygon and the normal vector of the plane the polygon lies on. Firstly, it is promoted to calculate the volume of a polyhedron. Secondly, the meaning of the Newell formula is discussed if the vertices are not on the same plane. Finally, some methods are proposed to simplify the calculation of the formula.

Key words: Newell formula; polyhedron volume; polygon with vertices not in the same plane; numerical calculation

图形学中, 有时候会使用大量的多边形片对模型进行拟合和绘制, 如复杂场景的网格模型表示。因此, 求解多边形所在平面的法向量、多边形面积以及多面体体积是其中的基本问题。在图形学中, 通常使用 Newell 公式来计算多边形的面积以及其所在平面的法向量。该公式形式简洁而且计算量不大。在计算多面体体积的时候, 除了一些特殊的多面体一般没有什么特别好的普适方法, 一般对于比较复杂的多面体可能会采取一些分割的方法。另外对于任意给定若干点后我们同样能定义 Newell 向量, 而不知道这个向量

的意义。基于 Newell 公式的形式, 通过本文的工作将其推广为可以用来计算多面体体积的 Newell 公式, 并且在计算不在同一平面的多边形时, 解释了 Newell 向量的意义。

1 平面多边形 Newell 公式

在图形学中, Newell 公式是计算一个多边形的面积以及其所在平面的法向量的一种常用方法, 作为本文的讨论基础, 首先在这一节中介绍 Newell 公式^[1-2]。

定理 1 给定一个平面多边形 P , 其顶点依次为 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ 其中 $P_{n+1} = P_1$, Q 为空间内任意一点 (见图 1), 定义 P 的 Newell 向量 $N(P)$ 为

$$N(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (P_k - Q) \times (P_{k+1} - Q)$$

有

$$area(P) = \|N(P)\| \quad (1)$$

$area(P)$ 是平面多边形 P 的面积, 而且 $N(P)$ 垂直于平面 P 。

证明 如果这个多边形是凸多边形, 先选取 Q 在多边形内部, 这时可以把这个多边形分成 n 三角形 $\Delta P_1 Q P_2, \Delta P_2 Q P_3, \dots, \Delta P_n Q P_{n+1}$ 。得到

$$area(P) = \sum_{i=1}^n area(\Delta P_i Q P_{i+1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |(P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q)| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q) \right| \quad (2)$$

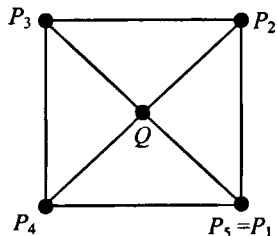


图 1 一个四边形的示例

由上式知对于任意 Q 在多边形内, 结论是正确的。如果是空间内任意一点 R , 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (P_i - R) \times (P_{i+1} - R) &= \\ \sum_{i=1}^n (P_i - Q + Q - R) \times (P_{i+1} - Q + Q - R) &= \\ \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q) + \sum_{i=1}^n (Q - R) \times (Q - R) + \\ \sum_{i=1}^n ((P_i - Q) \times (Q - R) + (Q - R) \times (P_{i+1} - Q)) &= \\ \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q) \end{aligned} \quad (3)$$

所以 $N(P)$ 向量和 Q 点和 R 点的选取无关。而对于凹多边形, 可以将其分割为几个凸多边形, 每一个凸多边形定理成立, 而加起来之后对于凹多边形也是成立的。这样就证明了定理的成立。

本节中主要介绍了经典的 Newell 公式。根据这个公式, 平面多边形的 Newell 向量可以用

来表示一个该多边形所在平面的法向量而且 Newell 向量的模是这个多边形的面积。

2 三维 Newell 公式

在这一节中将平面多边形的 Newell 公式推广, 使得推广后的三维 Newell 公式可以用于计算多面体体积。首先介绍一个引理。

引理 1 给定一个锥体 T , 如图 2 所示, 底面多边形为 P , 顶点为 R , 锥体 T 的体积

$$V(T) = \frac{1}{3} |N(P) \cdot (R_p - R)| \quad (4)$$

其中, $N(P)$ 向量是底面 P 的 Newell 向量, 而 R_p 是底面 P 的任意一个顶点。

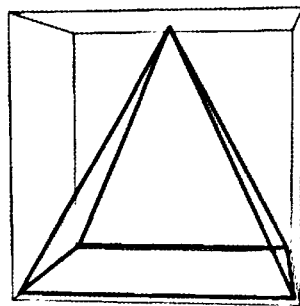


图 2 锥体 T

证明 一个锥体的计算公式为: $V(T) =$

$\frac{1}{3} area(P) \cdot h$, 其中 $area(P)$ 是底面的面积, h 是锥体的高。由第 1 节知道 $N(P) \perp P$ 以及 $area(P) = |N(P)|$, 所以 $h = \left| \frac{N(P)}{|N(P)|} \cdot (R - R_p) \right|$ 。

代入到上面的体积公式中得到

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{1}{3} area(P) \cdot h = \\ \frac{1}{3} |N(P)| \cdot \left| \frac{N(P)}{|N(P)|} \cdot (R_p - R) \right| &= \\ \frac{1}{3} |N(P) \cdot (R_p - R)| \end{aligned}$$

从而引理得证。

下面我们来证明本节的主定理。

定理 2 一个多面体 U , P 是 U 的多边形表面, M 是 U 内所有表面组成的集合, R 为空间内任意一点, R_p 为表面 P 内任意一个顶点, $N(P)$ 为多边形 P 的 Newell 的 Newell 向量, 并且 $N(P)$ 的方向一致, 即一致朝向多面体内部或者外部。此时 U 的体积公式为

$$V(U) = \frac{1}{3} \left| \sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - R) \right| \quad (5)$$

证 明 由于一个凹的多面体可以通过凸分解将其分解为凸多面体^[3], 若对于凸多面体等式(5)成立即可。

对于一个凸多面体 U , P 为 U 的表面多边形, M 是所有表面组成的集合, $N(P)$ 为表面 P 的 Newell 的 Newell 向量。可以通过选取 P 上顶点的顺序使得所有 $N(P)$ 都朝向凸多面体的外侧。选取 R 在 U 的内部, 则可以将凸多面体 U 分成若干个锥体, 而每个锥体的底面依次为 U 的表面 P , 如图 3 所示。则根据引理 1 有

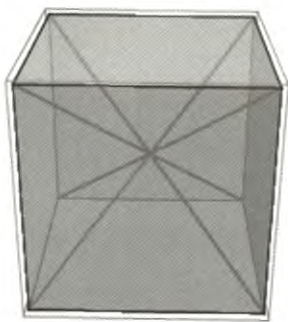


图 3 将一个凸多面体分为若干锥体

$$V(U) = \sum_{P \in M} \frac{1}{3} |N(P) \cdot (R_p - R)| \quad (6)$$

而在前面, 通过选取平面 P 上顶点的定向使得 $N(P)$ 均朝向 U 的外侧, 所以

$$N(P) \cdot (R_p - R) > 0, \forall P \in M \quad (7)$$

即式(6)可以转化为

$$V(U) = \frac{1}{3} \left| \sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - R) \right|$$

即是等式(5)。下面证明等式(5)和 R 的选取无关。

假设 S 为空间内任意一个点

$$\sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - S) = \sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - R + R - S) =$$

$$\sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - R) + \left(\sum_{P \in M} N(P) \right) \cdot (R - S) \quad (8)$$

进而有

$$\begin{aligned} \sum_{P \in M} N(P) &= \frac{1}{2} \sum_{p \in M} \sum_{i=1}^{n_p} (PW_i - Q) \times (PW_{i+1} - Q) = \\ \sum_{WV \in L} ((W - Q) \times (V - Q) + (V - Q) \times (W - Q)) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中, n_p 是表面 P 的顶点数, PW_i 是表面 P 上的顶点, L 是多面体 U 的所有边组成的集合,

WV 为 U 上的边。第 2 个等号之所以成立是由于每条边属于两个表面, 所以在计算过程中一条边正好出现两次, 而由于所有表面的定向都是朝向多面体的外侧, 所以两次差乘的符号正好相反。

从而最后 $\sum_{P \in M} N(P) = 0$ 。则式(8)可以化为

$$\sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - S) = \sum_{P \in M} N(P) \cdot (R_p - R) \quad (10)$$

即式(5)的值与 R 的选取无关, 所需要做的只是保证表面的顶点定向一致。定理证毕。

根据定理 2, 计算一个多面体的体积时只需要所有顶点的信息和表面的信息即可。

3 异面多边形的 Newell 公式

对于空间中多于 3 个的点构成的封闭折线图形很可能并不能位于同一个平面上。通常在使用边数大于 3 的多边形网格的时候, 可能由于计算误差或者其他原因并不能保证所有点都在同一平面, 所以引入异面多边形及其 Newell 向量。首先提出异面多边形的定义。

定义 1 任意给定 n 个点, $P_1, P_2, \dots, P_n$, $P_{n+1} = P_1$, 其中 $P_1, \dots, P_n$ 互不相同, 将这些点依次用线段连接得到图形 P , 如果这些点不全在一个平面内, 称 P 是异面多边形。

例如图 4 即为两个异面四边形。

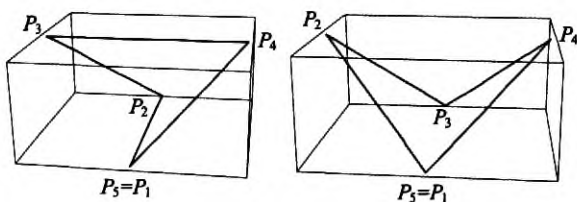


图 4 两个异面四边形

由定义 1, 异面多边形是非常普适的一个图形, 任意给一些不在同一平面上的点就存在一个异面多边形。可以定义异面多边形 P 的 Newell 向量。

定义 2 给定一个异面多边形 P , 其顶点依次为 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1} = P_1$, P 的 Newell 向量

$$N(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (P_k - Q) \times (P_{k+1} - Q)$$

下面分析异面多边形的 Newell 向量的特征。

定理 3 设异面多边形 P 的顶点分别为

$P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1} = P_1$, $N(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (P_k - Q) \times (P_{k+1} - Q)$ 。平面 X 为垂直于 $N(P)$ 的某一平

面, $XP_1, XP_2, \dots, XP_n, XP_{n+1}$ 是将 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ 投影到 X 上得到的 $n+1$ 个点, 这些点构成了一个平面多边形 P' 。有

$$N(P') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (XP_i - Q) \times (XP_{i+1} - Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q) = N(P) \quad (11)$$

证 明 由定义知道 $N(P')$, $N(P)$ 均垂直于平面 X , 所以 $N(P')$ 平行于 $N(P)$ 。下面将 $N(P')$ 进行分解

$$\begin{aligned} N(P') &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (XP_i - Q) \times (XP_{i+1} - Q) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P_i - Q + XP_i - P_i) \times (P_{i+1} - Q + XP_{i+1} - P_{i+1}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (XP_i - P_i) \times \\ & \quad (XP_{i+1} - P_{i+1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((P_i - Q) \times (XP_{i+1} - P_{i+1}) + \\ & \quad (XP_i - P_i) \times (P_{i+1} - Q)) \end{aligned} \quad (12)$$

由于 XP_i 是 P_i 的投影, 所以 $(XP_i - P_i), i=1, \dots, n$ 垂直于平面 X , 即 $(XP_i - P_i)$ 互相之间平行并且平行于 $N(P)$ 和 $N(P')$ 。所以, 可以知道

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (XP_i - P_i) \times (XP_{i+1} - P_{i+1}) = 0 \quad (13)$$

并且

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((P_i - Q) \times (XP_{i+1} - P_{i+1}) + \\ & \quad (XP_i - P_i) \times (P_{i+1} - Q)) \perp N(P') \end{aligned} \quad (14)$$

如果在等式(12) 两边点乘 $N(P')$ 的话, 可以将上面式子简化为 $\|N(P')\|^2 = N(P) \cdot N(P')$ 。而 $N(P')$ 和 $N(P)$ 相互平行, 有 $N(P') = N(P)$ 从而定理成立。

根据这个定理, 一个异面多边形 P 的 Newell 向量 $N(P)$ 是将这个异面多边形投影到与 $N(P)$ 垂直的平面得到平面多边形的 Newell 向量。这个结论将异面的情形转化成了平面的情形, 下面将说明这个 Newell 向量的模是所有投影多边形里面积的最大值。

定理 4 异面多边形 P 的顶点依次为 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} = P_1$, 则 P 的 Newell 向量 $N(P)$ 是将 P 投影到与 $N(P)$ 垂直的平面 X 得到的平面多边形 P' 的 Newell 向量。并且向量的模是将 P 投影

到平面得到的多边形的面积的最大值。

证 明 该定理的前半部分就是定理 3, 已经得到了证明, 这里只需要考虑后半部分的问题。假设任意一个平面 X' , 将异面多边形 P 投影到 X' 上, 得到的顶点依次为 $XP'_1, XP'_2, \dots, XP'_{n+1}$, 这些点组成的平面多边形为 P'' 。这里将依旧用到式(12)

$$\begin{aligned} N(P'') &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q) + \\ & \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (XP'_i - P_i) \times (XP'_{i+1} - P_{i+1}) + \\ & \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((P_i - Q) \times (XP'_{i+1} - P_{i+1}) + \\ & \quad (XP'_i - P_i) \times (P_{i+1} - Q)) \end{aligned} \quad (15)$$

这里同样有 $(XP'_i - P_i), i=1, 2, \dots, n+1$ 垂直于平面 X' 。所以说同样有

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (XP'_i - P_i) \times (XP'_{i+1} - P_{i+1}) = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((P_i - Q) \times (XP'_{i+1} - P_{i+1}) + \\ & \quad (XP'_i - P_i) \times (P_{i+1} - Q)) \perp N(P'') \end{aligned} \quad (17)$$

与前面不同的是, 这里不再有 $N(P)$ 平行于 $N(P'')$, 所以这里没有相等的结论, 为了证明 $|N(P)| \leq |N(P'')|$, 尝试在 (15) 两边同时点乘 $N(P'')$, 由于前面的垂直关系, 可以得到

$$\begin{aligned} \|N(P'')\|^2 &= \langle N(P''), N(P'') \rangle = \langle N(P''), \\ & \quad N(P) \rangle \leq \|N(P'')\| \|N(P)\| \end{aligned} \quad (18)$$

所以有

$$\|N(P'')\| \leq \|N(P)\| \quad (19)$$

即是说投影多边形 P'' 的面积不会大于 $N(P)$ 的模长。而若投影平面垂直于 $N(P)$ 的话, 面积等于 $\|N(P)\|$ 。所以 $N(P)$ 的模长是将异面多边形投影到平面得到的多边形的面积的最大值。从而定理得证。

可以看到, 异面多边形的 Newell 向量和投影面积有关系而且得到的向量的模长为投影面积的最大值。需要注意的是, 向量的值和点的排序有关。异面多边形的 n 个点是空间内的任意 n 个点, 投影到平面后不一定是一个平面多边形, 有可能会有交叉 (如图 5)。如果改变点的排序, 向量的值也会改变, 所以求得的投影多边形的最大值是指在当前的顶点排序下投影异面多边形

得到的面积的最大值,而不是将异面多边形投影到平面后那个闭包多边形的面积的最大值。

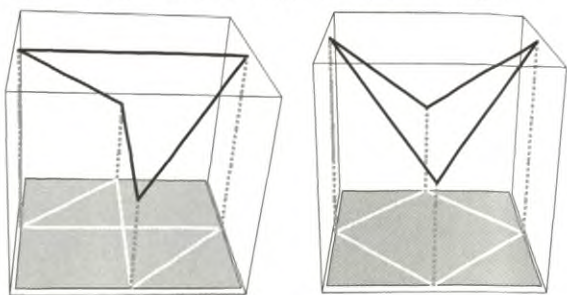


图 5 异面多边形的点序改变后, 投影到一个平面的结果不同

4 二维和三维 Newell 公式的计算

4.1 二维 Newell 公式的计算

在计算图形学当中,一个精确的模型往往会使用非常多的面片,例如斯坦福的数字米开朗基罗计划中著名的大卫雕像的三角面片达到了 20 亿之多。因此,需要研究 Newell 向量的算法以便节省计算时间。对于二维的情形已经有非常好的计算方法,文献[2]中法向量的计算就是使用这种方法。

定理 5 给定平面多边形 P , 其顶点分别为 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} = P_1$, 它们的坐标为 $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, n+1$ 。假设 P 的 Newell 向量 $N(P) = (n_x, n_y, n_z)$, 如图 6 所示, 有

$$n_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i+1})(z_i + z_{i+1}) \quad (20)$$

$$n_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i+1})(x_i + x_{i+1}) \quad (21)$$

$$n_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) \quad (22)$$

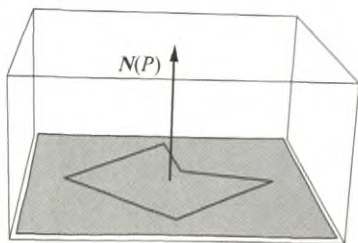


图 6 平面多边形的 $N(P)$ 向量

证 明 3 个式子的证明是相似的, 这里只需要证明一个式子成立就可以了。以式(20)为例

$$N(P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (P_i - Q) \times (P_{i+1} - Q)$$

取 Q 点为零点, 有

$$N(P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i \times P_{i+1}$$

$$n_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_{i+1} + y_{i+1} z_{i+1} - y_{i+1} z_i) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_{i+1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_{i+1} z_{i+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_{i+1} z_i$$

即

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i+1}) z_{i+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_{i+1} z_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i+1})(z_{i+1} + z_i) \end{aligned} \quad (23)$$

式(21), 式(22)也可以通过类似的方法证明, 这里就不赘述了。

如果直接计算的 n_x 的话

$$n_x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \quad (24)$$

根据式(24), 计算 n_x 的值需要进行 $3n$ 次乘法。

可以将 $\frac{1}{2}$ 移到求和外面可以直接节省很多运算

$$n_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \quad (25)$$

根据等式(25), 只需要 $2n+1$ 次乘法就可以求得所要值。同时不难观察到, 式(20)只需要 $n+1$ 次乘法就可以算出结果, 大大节省了运算时间。

以上是二维 Newell 公式的计算, 三维 Newell 公式也可以运用类似的方法进行一些简化。

4.2 三维 Newell 公式的计算

定理 6 给定多面体 U , P 是 U 的表面, M 是所有表面构成的集合。假设已经将所有表面的顶点顺序调好, 使得所有平面 P 的 Newell 的 Newell 向量都指向多面体的外侧, 同时表面 P 的顶点依次为 $PW_1, \dots, PW_{n_p+1} = PW_1$, 它们的坐标为 $PW_i = (x_{pi}, y_{pi}, z_{pi})$, $i = 1, \dots, n_p+1$, n_p 是表面 P 的顶点的个数。三维的 Newell 公式(5)与下式等价。

三维的 Newell 公式(5)与下式等价。

$$V(U) = \frac{1}{6} \left| \sum_{P \in M} (x_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (y_{pi} - y_{pi+1})(z_{pi} + z_{pi+1}) + \right.$$

$$y_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (z_{pi} - z_{pi+1})(x_{pi} + x_{pi+1}) +$$

$$\left. z_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (x_{pi} - x_{pi+1})(y_{pi} + y_{pi+1}) \right) \quad (26)$$

证 明 这里主要是用到了定理 5 的结论对公式进行简化。由第 2 节已经有

$$V(U) = \frac{1}{3} \left| \sum_{p \in M} N(P) \cdot (R_p - R) \right|$$

这里选取所有计算 Newell 向量的 Q 点都是零点, 所有的表面 P 上的 R_p 点都是该表面的第 1 个顶点, 从而可以将公式展开, 得到如下式子

$$\begin{aligned} V(U) &= \frac{1}{6} \left| \sum_{p \in M} \sum_{i=1}^{n_p} (PW_i \times PW_{i+1}) \cdot PW_1 \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \sum_{p \in M} \sum_{i=1}^{n_p} \det(PW_1, PW_i, PW_{i+1}) \right| \quad (27) \end{aligned}$$

$\det(v_1, v_2, v_3)$ 是 3 个向量的行列式计算, 对式(27)里的行列式进行展开, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_p} \det(PW_1, PW_i, PW_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{n_p} \begin{vmatrix} x_{p1} & y_{p1} & z_{p1} \\ x_{pi} & y_{pi} & z_{pi} \\ x_{pi+1} & y_{pi+1} & z_{pi+1} \end{vmatrix} = \\ \sum_{i=1}^{n_p} (x_{p1}(y_{pi}z_{pi+1} - y_{pi+1}z_{pi}) &+ y_{p1}(z_{pi}x_{pi+1} - z_{pi+1}x_{pi}) + \\ z_{p1}(x_{pi}y_{pi+1} - x_{pi+1}y_{pi})) \quad (28) \end{aligned}$$

进一步由式(20), (21)和(22)知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_p} \det(PW_1, PW_i, PW_{i+1}) &= x_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (y_{pi} - y_{pi+1}) \\ (z_{pi} + z_{pi+1}) &+ y_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (z_{pi} - z_{pi+1})(x_{pi} + x_{pi+1}) + \\ z_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (x_{pi} - x_{pi+1})(y_{pi} &+ y_{pi+1}) \quad (29) \end{aligned}$$

代入式(27)即得

$$\begin{aligned} V(U) &= \frac{1}{6} \left| \sum_{p \in M} \sum_{i=1}^{n_p} \det(PW_1, PW_i, PW_{i+1}) \right| = \\ \frac{1}{6} & \left| \sum_{p \in M} (x_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (y_{pi} - y_{pi+1})(z_{pi} + z_{pi+1}) + \right. \\ y_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (z_{pi} - z_{pi+1})(x_{pi} &+ x_{pi+1}) + \\ z_{p1} \sum_{i=1}^{n_p} (x_{pi} - x_{pi+1})(y_{pi} &+ y_{pi+1})) \left. \right| \end{aligned}$$

即证明了定理。

直接计算 $\sum_{i=1}^{n_p} \det(PW_1, PW_i, PW_{i+1})$ 需要 $9n_p$ 次乘法, 这个由式(28)直接看出。若根据式

(26)需要 $3n_p + 3$ 次乘法, 所以一般来说简化了运算。但是当 $n_p = 3$ 时, 即如果说所有的表面都是三角形, 直接计算的效率更快。而如果用行列式计算的话

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \det(PW_1, PW_i, PW_{i+1}) &= \det(PW_1, PW_2, PW_3) = \\ x_{p1}(y_{p2}z_{p3} - y_{p3}z_{p2}) &+ y_{p1}(z_{p2}x_{p3} - z_{p3}x_{p2}) + \\ z_{p1}(x_{p2}y_{p3} - x_{p3}y_{p2}) \quad (30) \end{aligned}$$

只需要 9 次乘法, 而利用式(26)计算需要 12 次乘法。其他情况, 用式(26)进行计算会简便得多。

5 总 结

本文主要围绕 Newell 公式展开了一系列的思考, 旨在推广 Newell 公式并且将其运用。推广到了三维 Newell 公式, 并可以用其计算多面体的体积。对于异面多边形, Newell 向量是将异面多边形投影到与该向量垂直平面的平面多边形的 Newell 向量, 向量的模是所有投影多边形面积的最大值。接着简化了二维 Newell 公式和三维 Newell 公式的计算。

通过本文的工作, 我们可以有效地用计算机计算平面多边形的面积和多边形所在平面的法向量以及多面体的体积。

参 考 文 献

- [1] Angle E. Interactive computer graphics: a top-down approach using OpenGL, 4th Edn [M]. Addison Wesley, Boston, MA, 2006: 290-322.
- [2] Hearn D, Baker M. Computer graphics with OpenGL, 3rd end [M]. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2003: 24-50.
- [3] Bajaj C, Dey T K. Convex decomposition of polyhedra and robustness [J]. SIAM J. Comput, 1992, 21: 339-364.
- [4] Lien L, Amato N M. Approximate convex decomposition of polyhedra and its applications [J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(7): 503-522.
- [5] Lien L, Amato N M. Approximate convex decomposition of polyhedra [J]. Proceedings of the ACM Symposium on Solid and Physical Modeling, Beijing, China, 2007: 121-131.