

平面上有噪音散乱点集的参数化

王平^{1,2}, 刘轩昊¹, 邓建松¹

(1. 中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026; 2. 苏州大学数学系, 江苏苏州 215006)

摘要: 散乱点集曲线重建关键步骤是参数化. 提出了一种对平面上有噪音散乱点集参数化的新算法. 算法中, 首先求出点集的 Delaunay 三角化的最小生成树, 继而对最小生成树的最长路径进行参数化. 通过把其他点投影到最长路径上, 对最长路径以外的点进行参数化. 还给出了提高参数化的准确度的方法. 以圆盘控制顶点 B 样条拟合为例展示了该算法的应用.

关键词: 参数化; 噪音; 散乱点; 拟合

中图分类号: TP391.72; O241.5 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2010.12.002

AMS Subject Classification (2000): 68U07

Parameterization of planar unorganized points with noise

WANG Ping^{1,2}, LIU Xuanhao¹, DENG Jiansong¹

(1. Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

2. Department of Mathematics, Soochow University, Suzhou 215006, China)

Abstract: Parameterization is a crucial step in curve reconstruction from unorganized points. An algorithm for parameterizing planar unorganized points with noises was described. In the algorithm, the minimum spanning tree of the Delaunay triangulation of the points was constructed first. Then, the longest path of the minimum spanning tree was parameterized. Finally, the other points which were not on the longest path were parameterized by projecting them onto the longest path. Some procedures were discussed to improve the accuracy of the algorithm. As an application, an example of disk B-spline fitting was provided.

Key words: parameterization; noise; unorganized points; fitting

0 引言

计算机辅助几何设计和逆向工程中, 曲线/曲面的重建问题是一类常见但很重要的问题. 给定一组数据点 $p_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 要求重建一条曲线通过这些数据点, 称为对这些数据进行插值, 所构造的曲线称为插值曲线. 参数插值曲线中, 数据点的参数化

对曲线的形状和性能有很大影响, 不同的参数化方法所得到的插值曲线差别很大, 所以由给定点集进行曲线重建时点集的参数化是关键的一步. 有序无噪音点集的参数化方法很多, 有经典的均匀参数化、累积弦长参数化、向心参数化^[1]、Foley 参数化^[2], 采用优化方法的参数化^[3], B 样条基函数最大值参数化方法^[4]. 散乱点集曲线重建一般无需找到一条

收稿日期: 2009-09-10; 修回日期: 2009-12-16

基金项目: 国家自然科学基金(60873109, 61073108), 新世纪优秀人才支持计划(NCET-08-0514)资助.

作者简介: 王平, 女, 1972 年生, 博士/讲师. 研究方向: 计算机辅助几何设计与计算机图形学. E-mail: pingwang@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 邓建松, 博士/教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn

曲线通过所有的采样点,只需拟合出一条反映出原始数据点集的形状与走向的曲线. Lee 等^[5]使用移动最小二乘法细化数据点集, Pottmann 等^[6]采用图像细化的方法来实现, Fang, Taubin 等^[7-8]分别利用弹力模型与隐式曲线模型,把已知数据点作为约束条件直接求解曲线参数得到重构曲线,但这些方法适合处理数据噪音比较小(通常说的细数据)的无序点集的曲线重建,然而在实际问题中,给定的数据点多是通过设备或某些采集技术从某些实体模型上获得的,由于数据采样方式的不同及采集技术的限制,采集得到的数据点集是带有噪音的散乱点,在重建的曲线方向上数据有一定的宽度,对这些数据点使用细数据点集的参数化方法是不合适的,所以研究有噪音散乱点集参数化有很重要的意义.

本文提出一种对平面上有噪音散乱点集进行参数化的新算法. 首先对点集进行 Delaunay 三角化,构造带权的无向连通图,用 Kruskal 算法求出图的最小生成树,然后采用有序点集的参数化方法对最小生成树的最长路径进行参数化,通过把不在最长路径上的其他点投影到最长路径上进行参数化.

1 图和最小生成树

平面上散乱点集 $V = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, E 为 V 中顶点偶对(称为边)的集合,则图是由顶点集 V 和边集 E 组成,记为 $G = (V, E)$. 若图 G 中的每条边都是没有方向的,称图 G 为无向图. 在无向图中,某个顶点 p 的度为图中与该顶点相连的边的数目. 若图中任意两顶点之间都有路径,称该图为连通图. 给图中的每一个边都赋予一个权,称为带权图. 若图 H 的顶点和边都是图 G 的顶点和边,称 H 为 G 的子图. 连通图 G 的一个子图如果是一棵包含 G 的所有顶点的树,称该子图为 G 的生成树^[9].

最小生成树^[9]:使无向带权的连通图 G 各边权之和达到最小的生成树.

最小生成树的性质^[9]:无向带权的连通图 G 的最小生成树必定存在.

对于给定的平面散乱点集为 $V = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, 令 $G = \{p_i: i=0, 1, \dots, n\} \cup (\{p_i, p_j\}, \|p_i - p_j\|): j \neq i, i=0, 1, \dots, n, j=1, \dots, n, \|p_i - p_j\|$ 为两点之间的欧氏距离, $(\{p_i, p_j\}, \|p_i - p_j\|)$ 指连接 p_i 与 p_j , 权重为 $\|p_i - p_j\|$ 的无向边,则 G 为带权无向连通图,由最小生成树的性质, G 的最小生成树必定存在. Prim 算法、Kruskal 算法广泛用来求图的最小生

成树. 然而,直接对图求最小生成树,会导致超大的时间复杂度. 为了降低求最小生成树的代价,构造平面点集的一个优化图.

2 Delaunay 三角化和图的优化

定义 2.1(平面点集的三角剖分)^[10] 平面散乱点集 V 的一个三角剖分 D 是一个平面图 G ,该平面图满足条件:

(I) 除了端点,平面图中的边不包含点集中的任何点.

(II) 没有相交边.

(III) 平面图中所有的面都是三角面,且所有三角面的合集是散点集 V 的凸包.

对于一个给定的平面点集,满足定义的三角剖分不是唯一的.

定义 2.2(平面 Delaunay 三角剖分)^[10] 给定 $\{p_0, p_1, \dots, p_n\} (n \geq 3)$ 为平面上的不全共线的点集,令

$$V(p_i) = \{x \mid \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \\ i \neq j, x \in \mathbb{R}\},$$

p_i 称为 $V(p_i)$ 的内核,将点集的所有相邻 $V(p_i)$ 的内核相连,形成点集 $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ 的三角剖分,这样的剖分称为点集 $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ 的 Delaunay 三角剖分,也称点集的 Delaunay 三角化.

定理 2.3^[10] 图 G 的最小生成树为 Delaunay 三角剖分的一个子集.

对于给定的平面散乱数据点集先进行 Delaunay 三角化,用 Delaunay 三角剖分的边的集合代替原来图 G 的边的集合,得到一个优化的带权无向连通图,对该优化的图来构造其最小生成树,使 Kruskal 算法的复杂度降低.

3 算法

对于给定的平面散乱点集,噪音或噪音很小,则点集 Delaunay 三角化的最小生成树将构成散乱点集的对应曲线的多边重建. 散乱点集的参数化就是对其最小生成树进行参数化. 但在有明显噪音的情况下,最小生成树不再是链状,无法进行参数化,但其所有边仍在所需重建的曲线附近. 本文通过对最小生成树构造一个形似重建曲线的链状子图,以其代替最小生成树而被参数化,对不在该链状子图上的点,则可依据它在该链状子图中离其最近的边上的投影的参数进行参数化.

本文给出一个新算法,先构造最小生成树的链状子图——最小生成树的最长路径;然后对最长路径采用有序点集的参数化方法进行参数化,再把其他点投影到最长路径上,实现最长路径以外的点的参数化;最后给出了一个提高参数化准确度的光滑化 k 阶(k 为正整数)的再参数化方法。

3.1 最小生成树的最长路径算法

定义 3.1 最长路径:对图 G 中的任意顶点,过该顶点的所有路径中,各边权之和达到最大的路径称为过该顶点的最长路径。

定义 3.2 最小生成树的最长路径:最小生成树的所有顶点的最长路径中的最大者称为最小生成树的最长路径。

给定树 T 的最长路径的算法描述如下:

算法

- ①令 p_0 为 T 的任意一某顶点;
- ②令 c_1 为 T 中以 p_0 为顶点的最长路径, c_2 为 T 中以 p_0 为顶点的次长路径;
- ③令子图 $S=c_1 \cup c_2$;
- ④在 S 中搜索度为 3 的顶点,记为 q ;若无,则令 q 为 p_0 ;
- ⑤令 $h_1=(c_1 \setminus c_2) \cup \{q\}$, $h_2=(c_2 \setminus c_1) \cup \{q\}$;
- ⑥令 h_3 为 T 中以 q 为顶点的且与 $h_1 \cup h_2$ 无公共边的最长路径;
- ⑦令 s_1 及 s_2 为 $\{h_1, h_2, h_3\}$ 中最长的两个元素,令 $s=s_1 \cup s_2$;
则 s 为 T 的最长路径。

证明 用反证法证明. 假设 s^* 为 T 的最长路径,其长度大于 s 的长度。

(I) $q \in s^*$, 则 s^* 被 q 分割成两段路径,分别记为 s_1^* 及 s_2^* . 若 s_1^* 及 s_2^* 与 h_1 及 h_2 皆无公共边,由于

$$\|s_1^* \cup s_2^*\| = \|s^*\| > \|s\| = \|s_1 \cup s_2\| \geq \|h_1 \cup h_3\| \geq \|h_1 \cup s_1^*\| (\|h_1 \cup s_2^*\|),$$

所以

$$\|h_1\| < \|s_1^*\|, \|h_1\| < \|s_2^*\|,$$

同样的可证得

$$\|h_2\| < \|s_1^*\|, \|h_2\| < \|s_2^*\|,$$

则 h_3 长度不小于 s_1^* 长度及 s_2^* 长度. s_1^* 与 s_2^* 中至少一者与 $c_1 \cap c_2$ 无公共边,设其为 s_1^* . 则路径 $s_1^* \cup (c_1 \cap c_2)$ 比 c_1 长,且以 p_0 为端点,与步骤②矛盾. 若 s_1^* 与 h_1 有公共边,而 s_2^* 与 h_2 无公共边,则 c_1 不短于 $s_1^* \cup (c_1 \cap c_2)$,从而 h_1 不短于 s_1^* . 若 s_2^* 与 h_1 无公共边,则 h_3 不短于 s_2^* . 所以

$$\|s\| = \|s_1 \cup s_2\| \geq \|h_1 \cup h_3\| \geq \|s_1^* \cup s_2^*\|,$$

与假设矛盾. 若 s_1^* 与 h_1 有公共边,且 s_2^* 与 h_2 有公共边,则 c_1 不短于 $s_1^* \cup (c_1 \cap c_2)$,从而 h_1 不短于 s_1^* . 类似地, c_2 不短于 $s_2^* \cup (c_1 \cap c_2)$,从而 h_2 不短于 s_2^* , $\|s\| = \|s_1 \cup s_2\| \geq \|h_1 \cup h_2\| \geq \|s_1^* \cup s_2^*\|$,与假设矛盾. 若 s_2^* 与 h_1 有公共边,而 s_1^* 与 h_2 无公共边,或 s_2^* 与 h_1 有公共边,且 s_1^* 与 h_2 有公共边,类似推出矛盾。

(II) $q \notin s^*$, 若 $s^* \cap (h_1 \cup h_2 \cup h_3)$ 非空,则令 $c=s^* \cap (h_1 \cup h_2 \cup h_3)$, 否则令 c 为连接 s^* 与 $h_1 \cup h_2 \cup h_3$ 的路径. 令 p^* 为 c 与 s^* 的交点,令 q^* 为 c 与 $h_1 \cup h_2 \cup h_3$ 的交点. s^* 则被 p^* 分隔成两段路径,分别记为 s_1^* 及 s_2^* , 设 h_i 包含 q^* , h_i 则被 q^* 分隔成两段路径. 记其中不含 q 者为 h^* , 含 q 者为 c^* . s_1^* 及 s_2^* 中至少一者长于 h^* , 设其为 s_1^* , 则路径 $h^* \cup c \cup s_1^*$ 长于 h_i , 且以 q 为顶点,与 h_i 有公共边,这与步骤②或⑥矛盾。

所以原假设在任何情形下皆导致矛盾,故 T 中无路径长于 s . 故 s 为 T 中最长路径. $\square$

3.2 参数化算法

求出最小生成树 T 的最长路径 s 后,参数化的步骤如下:

(I) 采用有序点的参数化方法参数化最长路径 s , 记其参数表达式为 $s(t)$;

(II) 对散乱点集 $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ 中每个点 p_i ,

①求出 s 中距 p_i 最近的边 e ;

②以 $s(t)$ 在 e 上为约束条件, 求出使 $\|p_i - s(t)\|$ 达到最小的 t ; 令 p_i 的参数 t_i 为 t ;

(III) 同时置换 $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ 与 $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, 使 t_i 随着 i 的增加而单调增加。

3.3 光滑化 k 阶的再参数化算法

最小生成树的最长路径可以反映重建曲线的走向,但其顶点仍是有噪音点集,所以直接对最长路径参数化重建的曲线与实际曲线还会有误差,为减少这种误差,提高参数化的准确度,可以用最小生成树的最长路径的顶点集替换原来散乱点集,再求其最小生成树中的最长路径,这个过程可以反复进行. 这里我们给出另一种提高参数化准确度的方法——光滑化 k 阶(k 为正整数)的再参数化方法,曲线上每个点用其前面的 $k+1$ 个点的平均值替代,通过这种方法,可以得到最小生成树的最长路径的折线的磨光折线,可以更好地反映重建曲线的走向,从而提高对原始有噪音散乱点集参数化的准确度,进而可以提高重建曲线的质量。

算法

- ①人工设定正整数 k (光滑化的阶, $k \ll n$);
- ②对负的 i , 定义 $p_i = p_0$. 对大于 n 的 i , 定义 $p_i = p_n$ (对封闭曲线, 定义 $p_i = p_{i \bmod n}$);
- ③对 $i = 0, 1, \dots, n+k$, 令

$$p_i^k = \frac{\sum_{j=i-k}^i p_j}{k+1};$$

- ④依次连接 $p_0^k, p_1^k, \dots, p_{n+k}^k$ (对封闭曲线则是 $p_0^k, p_1^k, \dots, p_n^k$), 得到折线 s^k ;
- ⑤采用有序点的参数化方法参数化 s^k , 记其参数表达式为 $s^k(t)$.
- ⑥ t_i 则根据 p_i 在 s^k 中距 p_i 最近边上的投影的参数被重赋值.

4 算例及分析

为说明本文算法的合理性和有效性, 给出了无噪音散乱点集和有噪音散乱点集的最小生成树的图形.

图 1 给出了无噪音散乱点最小生成树的图形, 说明了参数化其最小生成树实现对散乱点的参数化是合理的; 图 2 给出了有噪音散乱点集的最小生成树的图形, 该最小生成树不是链状, 无法直接参数化.

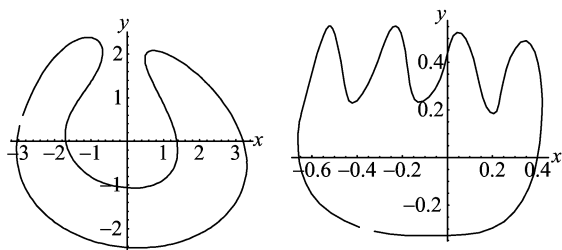


图 1 无噪音散乱点集的最小生成树

Fig. 1 The minimum spanning tree of the planar unorganized points without noises

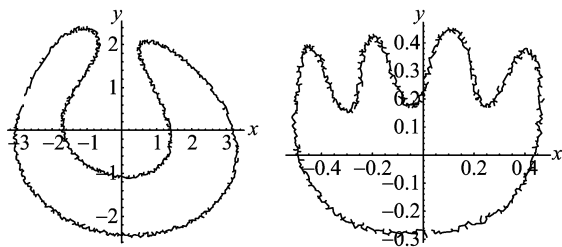


图 2 有噪音散乱点集的最小生成树

Fig. 2 The minimum spanning tree of the planar unorganized points with noises

图 3 给出了有噪音散乱点集最小生成树的最长路径的图形, 最长路径反映了重建曲线的走向, 说明本文算法的合理性和有效性.

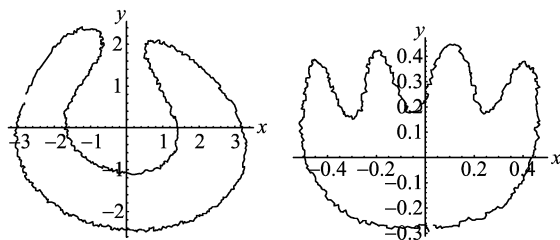


图 3 有噪音散乱点集的最小生成树的最长路径

Fig. 3 The longest path of the minimum spanning tree of the planar unorganized points with noises

图 4, 5, 6 分别给出给出不同光滑化阶再参数化的结果, 图中灰色折线表示磨光折线, 图 4 为光滑化 3 阶, 说明再参数化后, 参数化的准确度提高; 图 5 为光滑化 20 阶, 表明光滑化的阶过高时, 大曲率点附近会收缩, 参数化的准确度降低; 图 6 第一轮光滑化 3 阶, 第二轮光滑化 4 阶, 表明反复再参数化, 每

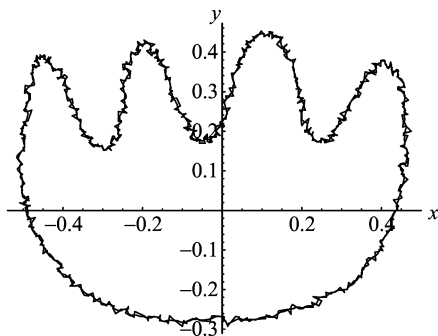


图 4 光滑化 3 阶, 灰色折线示磨光折线 s^k

Fig. 4 Smoothing level 3, gray line strip illustrates the smoothen one s^k

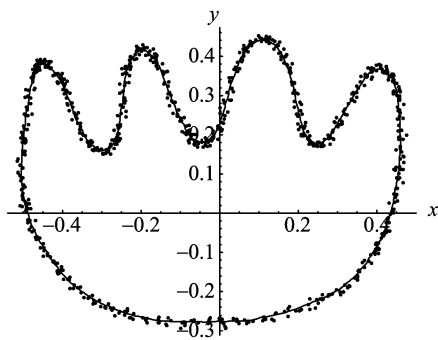


图 5 光滑化 20 阶, 灰色折线示磨光折线 s^k

Fig. 5 Smoothing level 20, gray line strip is the smoothen one s^k

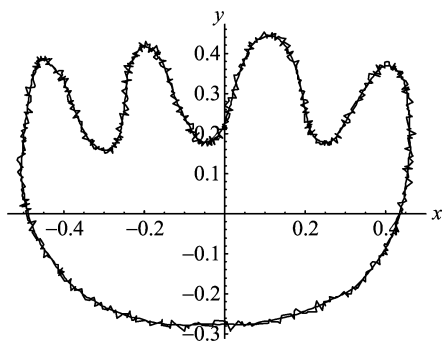


图 6 第一轮光滑化 3 阶, 第二轮光滑化 4 阶,
灰色折线示磨光折线 s^k

Fig. 6 First round smoothing level 3, second round
smoothing level 4, gray line strip is the smoothen one s^k

次每次选取适中的光滑化阶, 可以得到既光滑又不收缩的折线。

5 应用: 圆盘控制顶点曲线拟合

圆盘 B 样条可用来拟合有噪音点散乱点集^[11]。圆盘 B 样条是指控制顶点可以在某个圆盘内活动的 B 样条。设共有 $m+1$ 个控制顶点 $\{P_0^*, P_1^*, \dots, P_m^*\}$, P_j^* 的活动范围为 $B(P_j, R_j)$ (圆心为 P_j 半径为 R_j 的圆盘):

$$\{P^*(t)\} = \left\{ \sum_{j=0}^m P_j^* b_j^k(t) : \forall j = 1, 2, \dots, m, \right. \\ \left. P_j^* \in B(P_j, R_j) \right\}.$$

而 $R(t) = \sum_{j=0}^m R_j b_j^k(t)$ 为 t 处的误差估计, $P(t) =$

$\sum_{j=0}^m P_j b_j^k(t)$ 为“中央曲线”的表达式。此处 b_j^k 表示 B 样条基函数(对封闭曲线则为循环 B 样条基函数)。

用本文所提出的算法对输入点集进行参数化之后, 对其进行圆盘 B 样条拟合。图 7 展示了 30 个控制顶点的 3 阶均匀循环圆盘 B 样条拟合的结果。对有序点进行参数化使用 Foley 参数化算法, 该算法使得参数在大曲率点附近变化迅速, 从而可以将更多的控制点吸引至大曲率点附近。

6 结论

本文提出一种对平面有噪音散乱点集进行参数化的新算法。算法首先求出点集 Delaunay 三角化后的最小生成树, 继而对最小生成树的最长路径进行参数化, 最长路径以外的点将其投影到最长链上实现参数化, 为提高参数化的准确度, 还给出一种光滑

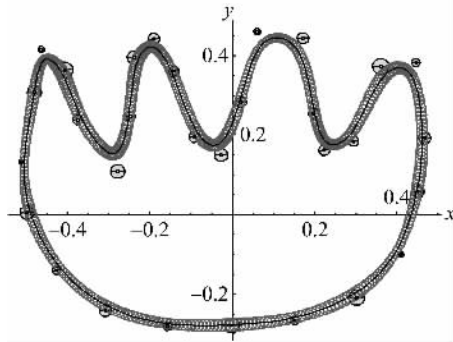


图 7 灰色圆盘示控制圆盘, 黑色曲线示中央曲线,
圆圈示估计误差

Fig. 7 Gray disks are the control disks,
black curve is the central curve,
circles shows the estimated error

化的再参数化方法。本文以圆盘控制顶点 B 样条拟合为例展示了该算法的应用。

本文的参数化算法还有存在以下问题需要进一步改进, 文中再参数化的光滑化阶和重建封闭曲线还是重建开放曲线的过程是人工完成的, 如何定出某种评价其结果的光滑程度的标准, 并由此发展出自动选择光滑化阶的机制; 如何通过输入点的分布特征而自动的确定目标曲线是开放还是封闭的问题, 这将是下一步继续的工作。

参考文献 (References)

- [1] Lee E T Y. Choosing nodes in parametric curve interpolation [J]. Computer-Aided Design, 1989, 21 (6): 363-370.
- [2] Foley T A, Nielson G M. Knot selection for parametric spline interpolation [M]. Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, San Diego: Academic Press, 1989: 261-272.
- [3] Rida T, Farouki. Optimal parameterizations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14 (2): 153-168.
- [4] Lim C G. A universal parametrization in B-spline curve and surface interpolation [J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(5): 407-422.
- [5] Lee I K. Curve reconstruction from unorganized points [J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(2): 161-177.
- [6] Pottmann H, Randrup T. Rotational and helical surface approximation for reverse engineering [J]. Computing, 1998, 60(4): 307-322.
- [7] Fang L, Gossard D C. Multidimensional curve fitting

转化为抛物线所围成的无穷区域,即保凸区域.在该区域内构造对边界曲线的分段线性插值,可以得到 Bézier 三角曲面保凸的线性充分条件.最后实例表明,本文方法是可行、有效的.

参考文献(References)

- [1] Zhang Yunfeng, Duan Qi, Twizell E H. Convexity control of a bivariate rational interpolating spline surfaces[J]. Computers and Graphics, 2007, 31(5): 679-687.
- [2] Li Aidi. Convexity preserving interpolation [J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(2): 127-147.
- [3] Hu Qianqian, Wang Guojin. Optimal multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces with corners continuity in the norm L_2 [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 215(1): 114-126.
- [4] Xu Huixia, Wang Guojin. Approximating rational triangular Bézier surfaces by polynomial triangular Bézier surfaces [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 228(1): 287-295.
- [5] Chang G Z, Davis P J. The convexity of Bernstein polynomials over triangles [J]. Approximation Theory, 1984, 40: 11-28.
- [6] Chang G Z, Feng Y Y. An improved condition for the convexity of Bernstein-Bézier surfaces over triangles [J]. Computer Aided Geometric Design, 1984, (1): 279-283.
- [7] Chang G Z, Feng Y Y. A new proof for the convexity of Bernstein-Bézier surfaces over triangles [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1985, (6): 171-176.
- [8] Lai M J. Some sufficient conditions for convexity of multivariate Bernstein-Bézier polynomials and box spline surfaces [J]. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 1990, 28: 363-374.
- [9] Carnicer J M, Floater M S, Pefia J M. Linear convexity conditions for rectangular and triangular Bernstein-Bézier surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 15: 27-38.
- [10] Zhou Changzheng. The extension of the conditions of convexity for Bernstein-Bézier surfaces over triangles [J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 1991, 5(2): 87-91.

周昌政. 对函数 Bézier 三角片凸性条件的推广[J]. 应用数学与计算数学学报, 1991, 5(2): 87-91.

(上接第 1229 页)

- to unorganized data points by nonlinear minimization [J]. Computer Aided Design, 1995, 27 (1): 48-58.
 - [8] Taubin G, Ronfard R. Implicit simplicial models for adaptive curve reconstruction [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(3): 321-325.
 - [9] 唐策善,李龙澍,黄刘生,等. 数据结构:用 C 语言描述 [M]. 北京:高等教育出版社,1995.
 - [10] 周培德. 计算几何:算法分析与设计[M]. 北京:清华大学出版社,2000.
 - [11] Liu Haichen, Deng Jiansong. Fitting scattered data with disk/ball Bézier and B-spline curves/surfaces [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(2): 113-120.
- 刘海晨,邓建松. 圆盘/球域控制点曲线/曲面在散乱数据拟合中的应用[J]. 中国科学技术大学学报,2008, 38(2): 113-120.