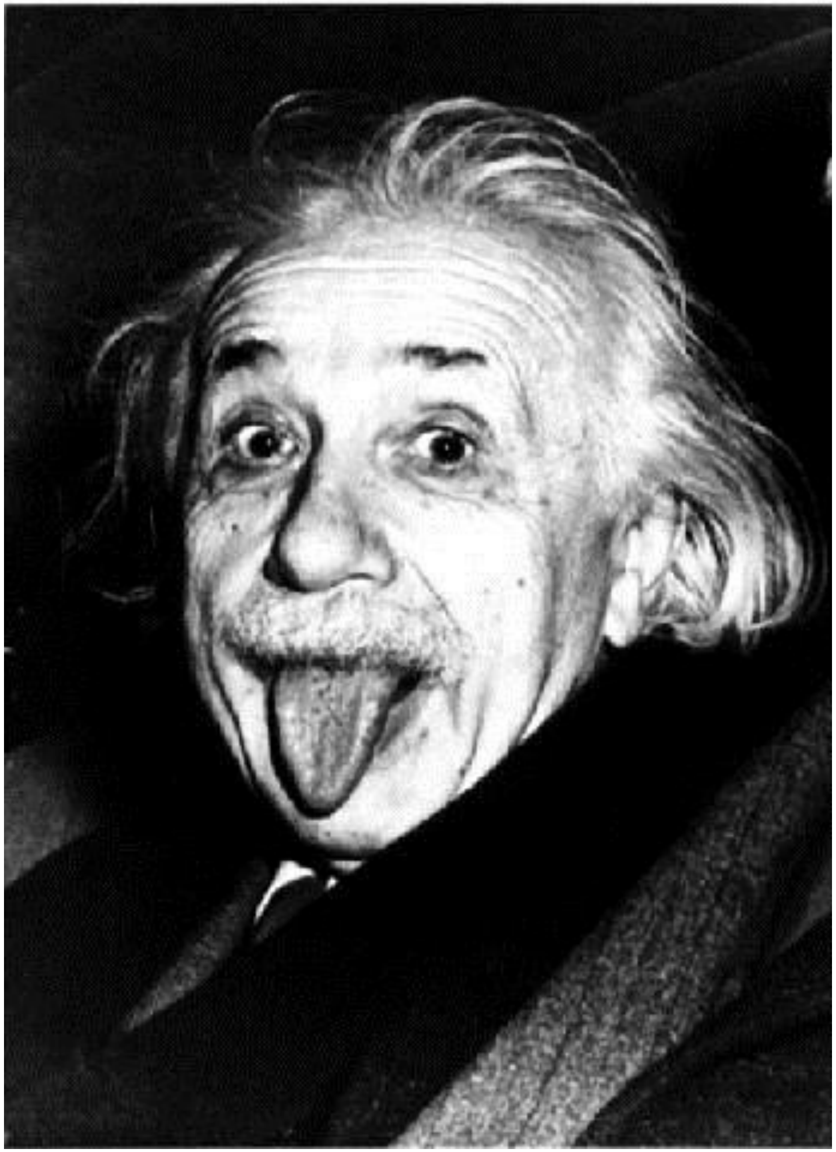
第十一章　狭义相对论



爱因斯坦(Einstein):现代时空的创始人, 二十世纪的哥白尼

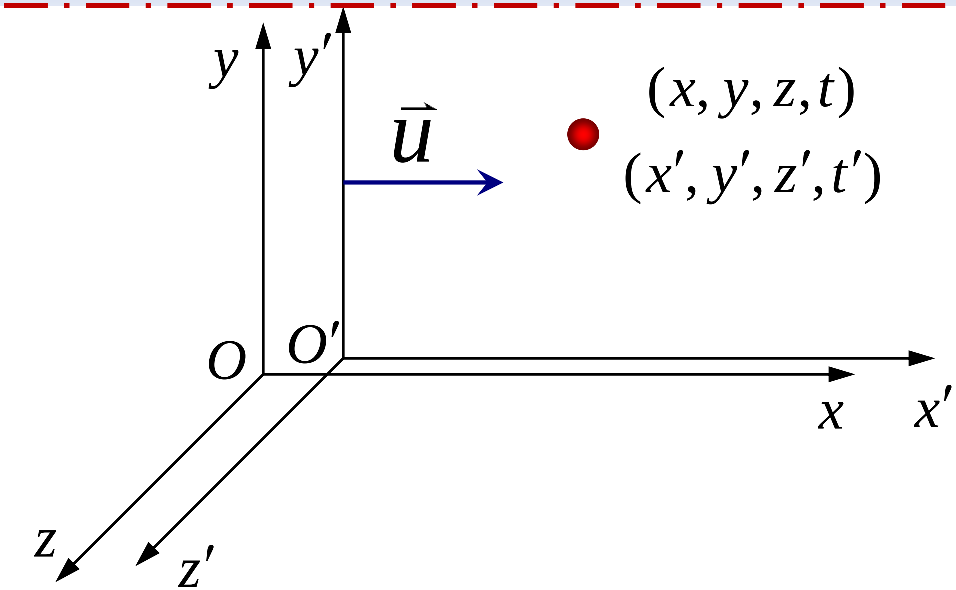
§11.1 狭义相对论基本原理

1. 事件

描述物体的运动需要选择参考系，并在参考系中建立坐标系。

事件:任意一个具有确定的发生时间和确定的发生地点的物理现象。

一个事件发生的时间和地点，称为该事件的时空坐标。



事件的时空坐标: (x, y, z, t) (x', y', z', t')

选择不同的参考系，对同一事件的描述是不同的。

●在讨论时空的性质时，我们总是用事件的时空坐标，或用事件的时空点来代表事件，而不去关心事件的具体物理内容，即不去关心到底发生了什么事情。

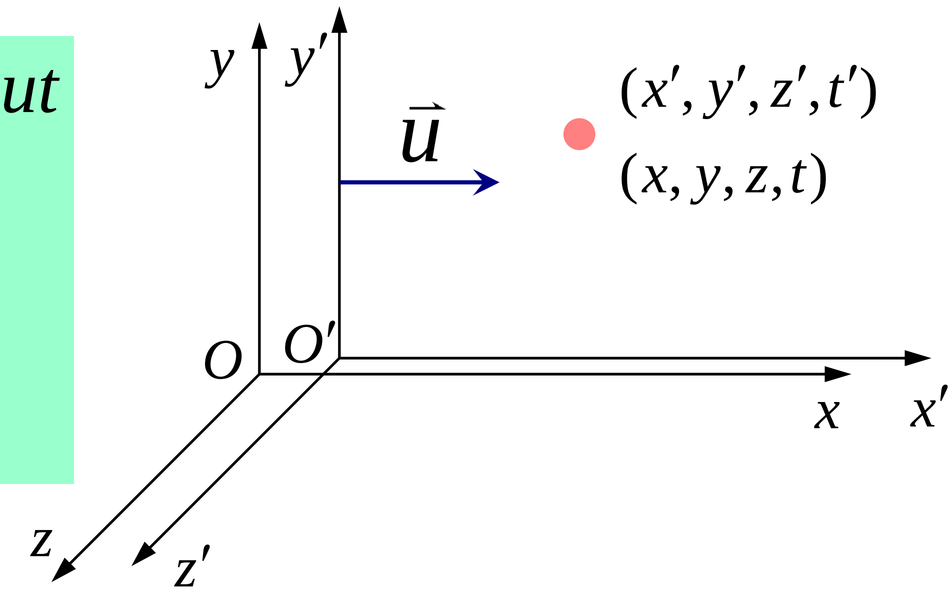
2. 伽利略变换(回顾)

伽利略变换:

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

●伽利略变换蕴含的时空观

同时性的绝对性: $t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad t_1' = t_2'$

时间间隔的绝对性: $\Delta t' = \Delta t$

长度间隔的绝对性: $\Delta l' = x_2' - x_1' = \Delta l = x_2 - x_1$

伽里略变换的实质就是牛顿力学所持的经典时空观，认为存在与物质的运动无关的绝对时间和绝对空间。

3. 牛顿力学的困难

①电子加速的速率不能无限增加。

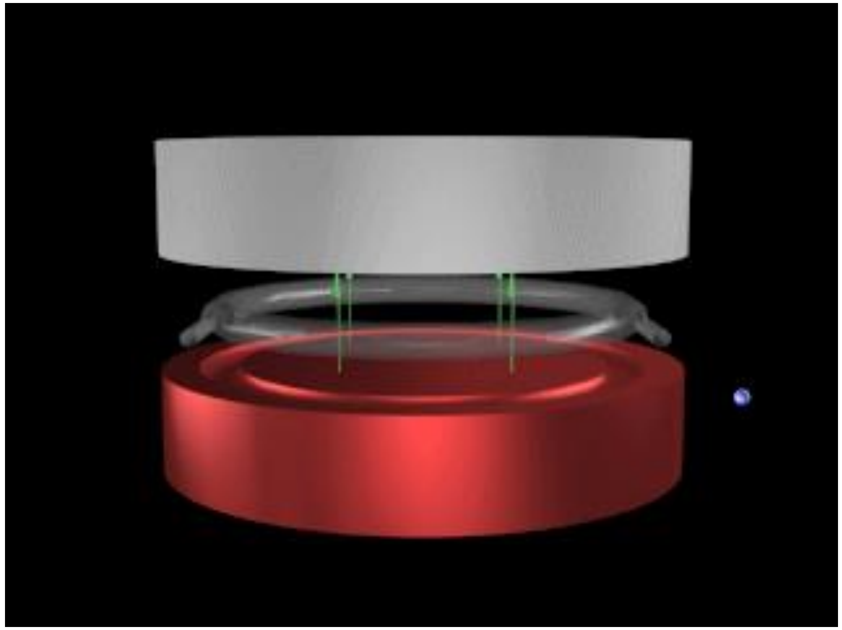


表 10.1　电子动能和速率的关系

动能 E_k/MeV	电子速率/(m/s)	由 $v=(2E_k/m)^{1/2}$ 计算值/(m/s)
0.5	2.60×10^8	4.20×10^8
1.0	2.73×10^8	5.93×10^8
1.5	2.88×10^8	7.27×10^8
4.5	2.96×10^8	12.59×10^8
15	$\approx3.00\times10^8$	22.98×10^8

②麦克斯韦波动方程不服从伽里略变换

1865年麦克斯韦建立了描述电磁现象的麦克斯韦方程组，它的一个重要推论是存在电磁波。真空中电磁波满足的波动方程为：

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0$$

式中 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3.0 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$ 是真空中的电磁波传播速度。

以一维为例，电势满足麦克斯韦方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

进行伽利略变换：$\begin{cases} x' = x - ut \\ t' = t \end{cases}$

于是有：$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-u\frac{\partial \varphi}{\partial x'}+\frac{\partial \varphi}{\partial t'}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t}&=-u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial x'}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial t'}\\
&=-u\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'\partial x'}\frac{\partial t'}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\partial t'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}\frac{\partial t'}{\partial t}\\
&=-u\left(-u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'\partial x'}\right)-u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\partial t'}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}\\
&=u^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}-2u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\partial t'}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}\end{aligned}$$

所以麦克斯韦方程在S'参考系中变为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}-\frac{u^2}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}+\frac{2u}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\partial t'}=0$$

此式表明：在不同的惯性系中，波动方程呈现不同的形式，即光速在不同的惯性系中有差异，力学相对性原理在电磁学中不再成立，可以利用电磁学实验来区分不同的惯性系。

③光的“以太”理论及其困难

十九世纪上半叶，光具有波动性被大多数物理学家承认，设想光波象机械波一样，需要在介质中传播，这种介质称为以太(ether)，光波就是以太中振动的传播的。以太学说认为有一种到处存在的、能穿透一切的介质，并充满所有物质的内部和它们之间的空间，它的作用是作为传播光波的基础。

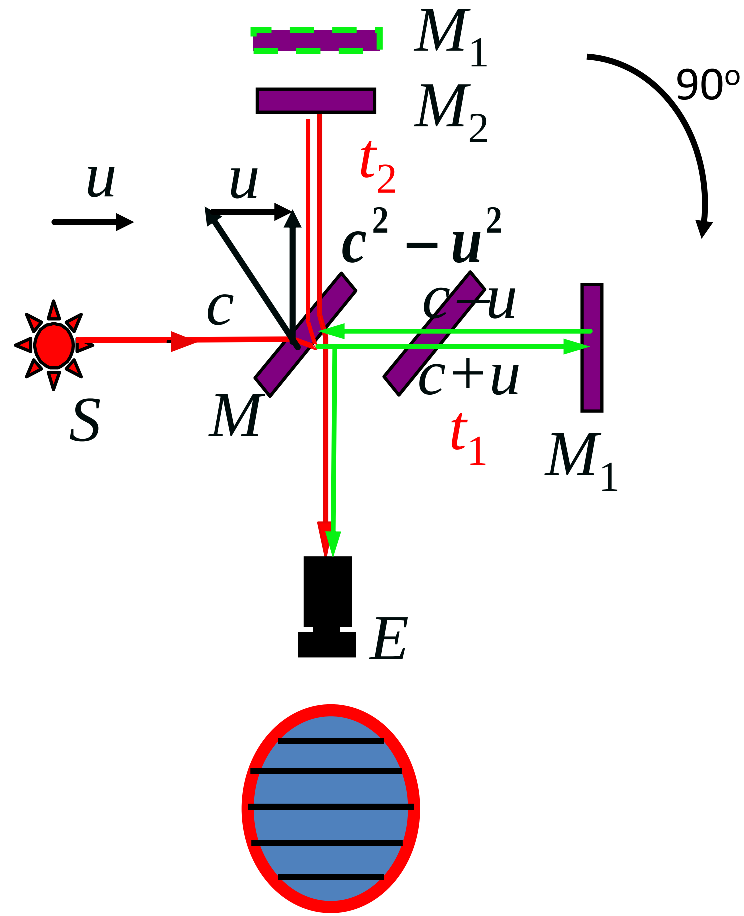
- “以太”理论的困难

a) 无法解释光为什么没有纵波；

b) 波速 $u=\sqrt{G/\rho}$，因为光的传播速度很大，因此要求切变模量很大，即介质刚性很强（很硬）。如果这样的介质（宇宙以太）充满了我们周围整个空间的话，我们怎么能在地上跑来走去，行星又怎能千百万年地绕太阳转动而丝毫不受阻力呢？

③迈克尔孙—莫雷实验

实验目的：用电磁学或光学的实验方法找出这一绝对惯性系，或测出我们的地球参考系相对绝对参考系（以太系）的速度有多大。



实验原理如图，光源发出的光束被分成两束后，被镜片反射，其往返时间分别为

$$t_1=\frac{l}{c-u}+\frac{l}{c+u}=\frac{2l}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right]$$

$$t_2=\frac{2l}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]$$

其中u设定为地球相对“以太”速度

仪器转动90度所引起的两光束的时间差的变化为

$$\Delta t = 2\left(t_1 - t_2\right) \approx 2lu^2/c^3$$

根据干涉原理，由此引起的干涉条纹的移动数目为

$$\Delta N = c\Delta t/\lambda \approx 2lu^2/\lambda c^2$$

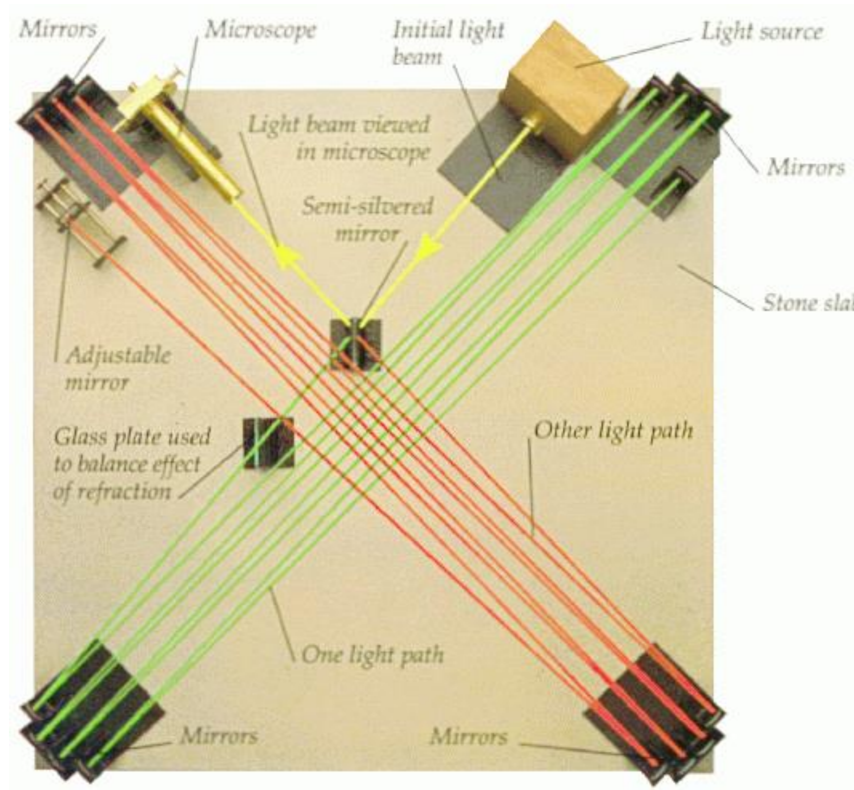
实验中采用的数据大致如下：

$$l = 1.2\mathrm{m},\ \lambda = 5.9\times 10^{-7}\,\mathrm{m},$$

$$u \simeq 30\mathrm{km/s} \Rightarrow \Delta N = 0.04$$

这是1881年迈克耳孙干涉仪的实验精度。1887年迈克耳孙和莫雷合作改进了干涉仪，光路多次反射达到

$$l = 11\mathrm{m} \Rightarrow \Delta N = 0.4$$



实验结果：没有观测到条纹的移动

□ 爱因斯坦的选择

修改电磁学定律，还是修改伽利略变换？

电磁学定律：实验验证是正确的

伽利略变换：适用于低速情况。高速情况？

爱因斯坦：修改伽利略变换

低速→高速

绝对时空观→相对论时空观

伽利略变换→洛仑兹(Lorentz)变换

§11.2　洛伦兹变换

1. 狭义相对论的基本假设

(1) 光速不变假设： 在所有的惯性系中测量到的真空光速恒为c，与光源或观察者的运动无关。

$$c = 2.99792458 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2) 相对性原理：

物理规律（包括力学规律）在一切惯性参考系中都具有相同的形式，即对物理规律来说，一切惯性系都是平等的。不存在任何一个特殊的惯性系，例如绝对静止的惯性系。

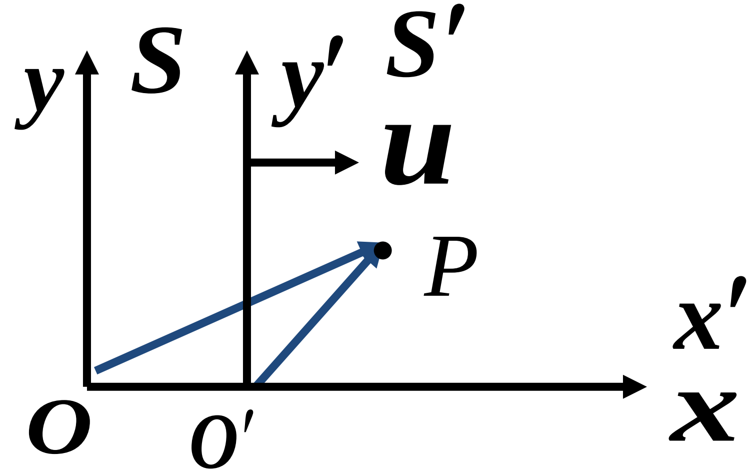
或：物理定律在所有惯性系中具有数学形式不变性，即协变性。

- 伽里略变换与光速不变性假设不相符。
- 狭义相对论的基本假设否定了绝对空间的存在。

2. 洛伦兹变换

$t = t' = 0$ 时，O 和 O' 重合，

同时发出闪光，经一段时间光传到 P点



$S: \quad P(x, y, z, t)$ 目标

$S': \quad P(x', y', z', t')$

两个参考系相应的坐标值之间的关系

(x, t) 和 (x', t') 的变换基于下列两点：

（1）时空是均匀的，因此惯性系间的时空变换应该是线性的。

（2）新变换在低速下应能退化成伽利略变换。

有 $\boxed{y' = y, \quad z' = z}$

设 $S' \to S$ 的变换为： $\boxed{x = k(x' + ut')}$

根据Einstein相对性原理:

$S \to S'$ 的变换为： $\boxed{x' = k(x - ut)}$

由光速不变原理：

原点重合时，从原点发出一个光脉冲，其空间坐标为：

对 S 系： $x = ct$ 对 S' 系： $x' = ct'$

$$x = k(x' + ut') \qquad x' = k(x - ut)$$

$$ct = k(c + u)t' \qquad ct' = k(c - u)t$$

相乘

$$c^2 tt' = k^2 (c + u)t'(c - u)t$$

$$\boxed{\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$x = k(x' + ut') \qquad x' = k(x - ut)$$

$$\underbrace{x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

综上可知，两惯性系 S 与S'之间的时空坐标变换关系:

$$S \rightarrow S' \qquad\qquad S' \rightarrow S$$

正变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x / c) \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \beta x' / c) \end{cases}$$

$$\beta = u/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

●几点说明:

①在洛伦兹变换中时间和空间密切相关，它们不再是相互独立的。

② $u>c$ 变换无意义 ⟹ 速度有极限

③伽利略变换是洛仑兹变换的低速近似:

洛仑兹变换
（相对论时空）

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma(x-\beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma(t-\beta x/c) \end{cases}$$

$u \ll c$

伽利略变换
（绝对时空）

$$\begin{cases} x' = x-ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

3. 洛仑兹速度变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx' = \gamma(dx - udt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \frac{u}{c^2}dx) \end{cases}$$

正变换:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

逆变换:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

例题1： 一短跑选手，在地球上以10*s*的时间跑完100*m*，在飞行速率为0.98*c*的飞船中观测者看来，这个选手跑了多长时间和多长距离（设飞船沿跑道的竞跑方向航行）？

解： 设地面为*S*系，飞船为*S'*系。

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\begin{cases} x_2' - x_1' = \dfrac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ t_2' - t_1' = \dfrac{(t_2 - t_1) - u(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\because \Delta x = x_2 - x_1 = 100m,\ \Delta t = t_2 - t_1 = 10s,\ u = 0.98c$$

$$\therefore\ x_2' - x_1' = \frac{100 - 0.98 \times 10}{\sqrt{1 - 0.98^2}} \approx -1.47 \times 10^{10} m$$

$$t_2' - t_1' = \frac{10 - 0.98c \times 100/c^2}{\sqrt{1 - 0.98^2}} \approx 50.25s$$

例题2： 飞船*A*中宇航员观察到飞船*B*正以0.4*c*的速度尾随而来。已知地面测得飞船*A*的速度为0.5*c*。
求：① 地面测得飞船*B*的速度；②飞船*B*中测得飞船*A* 的速度。

分析：求解这类题的关键是要分清各个已知量之间与未知量之间的关系，不要把坐标系搞混；只要掌握住这一点，就显得容易了。

解： ①设地面为*S*系，飞船*A*为*S′*系。则已知量为$u=0.50c$，$v'_x=0.40c$；求v_x；根据速度变换公式有

$$v_x=\frac{v_{x'}+u}{1+\dfrac{u}{c^2}v_{x'}}=\frac{0.40c+0.50c}{1+\dfrac{0.50c}{c^2}\times 0.40c}=0.75c$$

即地面参考系测得飞船*B*的速度为0.75*c*。

②设地面为参照系S，飞船B为S'系。则已知量为：$u=0.75c$，$v_x=0.50c$。需要求解的是v'_x。根据速度变换公式可得

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}=\frac{0.50c-0.75c}{1-\frac{0.75c}{c^2}\times 0.5c}$$

$$=-0.40c$$

即飞船B测得飞船A的速度为$-0.40c$。由解题过程可以看出：若求在B中测得飞船A的速度，就必须先求出地面测得的飞船B的速度。

例题3：从S'系坐标原点沿轴正向发出一光波，而S'系相对于S系以$0.5c$的速率沿x轴负向运动。求K系测得的光速。

解法一：用速度变换公式求解

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \frac{c - 0.5c}{1 + \frac{-0.5c}{c^2} \cdot c} = \frac{0.5c}{0.5} = c$$

§ 11. 3狭义相对论的时空观

1. 同时的相对性

	S'	S
事件1	$(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{t}_1')$	(x_1, t_1)
事件2	(x_2', t_2')	(x_2, t_2)

两事件同时发生

$$t_1' = t_2'$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

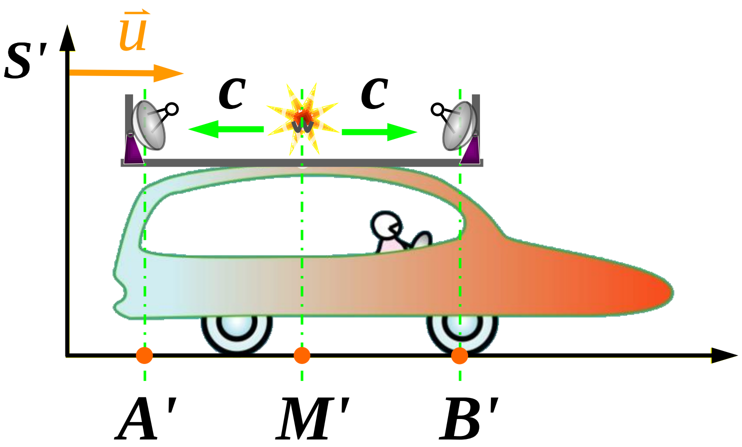
?

●通过特例说明同时性的相对性

以一个假想火车为例

S 地面参考系

S' 假想火车



(车上放置一套装置)

A'、B' 处分别放置一光信号接收器

中点 M' 处放置一光信号发生器

$t = t' = 0$ 时，M' 发出一光信号

事件1：A' 接收到光信号

事件2：B' 接收到光信号

$\overline{A'M'} = \overline{B'M'}$ ⟹ A'、B' 同时接收到光信号

1、2 两事件同时发生

S 闪光发生在M 处

光速仍为 c

而这时， A'、B' 处的接收器随 S' 运动。

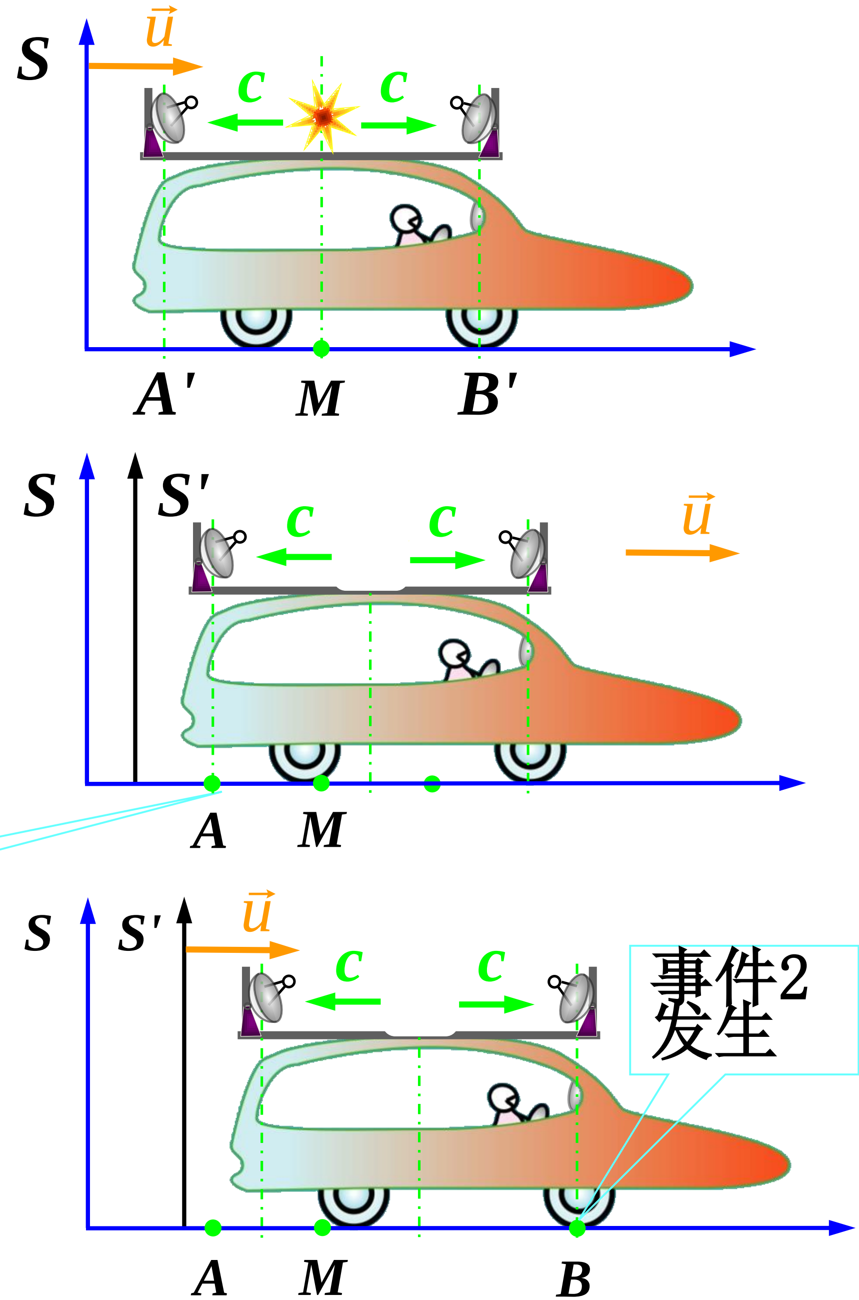
$$\overline{AM} < \overline{A'M'}$$

$$\overline{BM} > \overline{B'M'}$$

事件1发生

A' 比 B' 早接收到光信号

1事件先于2 事件发生



●由洛仑兹变换看同时性的相对性

考虑两个物理事件1和2，它们在两个惯性系S和S'中的时空坐标分别为(x_1,t_1)、(x_2,t_2)与(x_1',t_1')、(x_2',t_2')，根据洛伦兹变换：

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2-t_1=\frac{(t_2'-t_1')+\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

➢若两个事件在S系中同时发生，即$t_1=t_2$，则在S'中

$$t_2'-t_1'=\frac{-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}<0,\text{如果}x_2>x_1$$

$$t_2'-t_1'=\frac{-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}>0,\text{如果}x_2<x_1$$

➢若两个事件在S'系中同时发生，即 $t_1'=t_2'$ ，则在S中

$$t_2-t_1=\frac{\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}>0,\text{如果}x_2'>x_1'$$

$$t_2-t_1=\frac{\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}<0,\text{如果}x_2'<x_1'$$

在S'系不同空间点同时发生的两事件，在S系测量则不是同时；反之亦然，这就是同时的相对性。

结论

沿两个惯性系相对运动方向上发生的两个事件，在其中一个惯性系中表现为同时的，在另一个惯性系中观察，则总是在前一个惯性系运动的后方的那一事件先发生。只有在同一地点，同一时刻发生的两个事件，才是在所有惯性系中同时发生。

讨论

(1) 同时性的相对性是光速不变原理的直接结果。

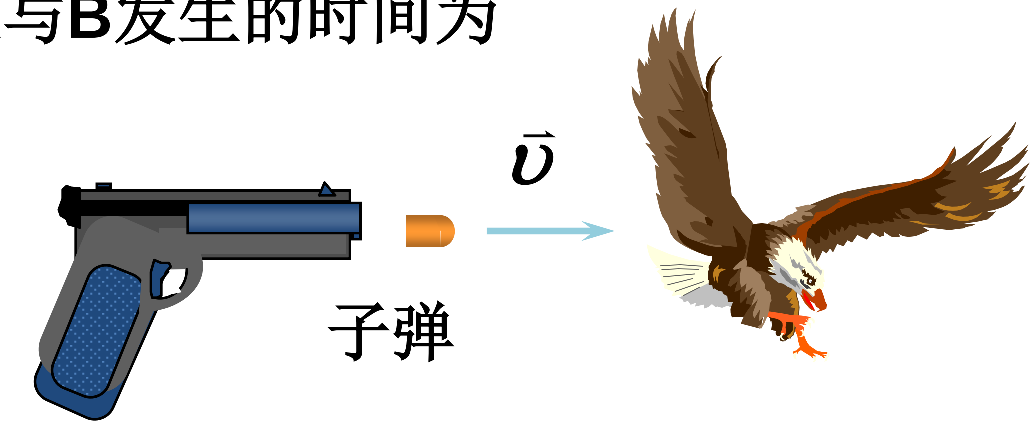
(2)相互运动的惯性系不再有统一时间，不同惯性系的各时钟只能在各自惯性系作同步操作。即否定了牛顿的绝对时空观。

2. 时序的相对性与因果性

两个物理事件 A和B，对S系来说,发生的地点和时间分别是 (x_1,t_1) 和 (x_2,t_2) ，假定事件A是事件B发生的原因，因发生在果前，即 $t_2>t_1$ 。则对于S系，事件A与B发生的时间为

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2'=\frac{t_2-\frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$



$$t_2'-t_1'=\frac{t_2-t_1-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{t_2-t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[1-\frac{u}{c^2}\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right]$$

一切物质或者信息的传递速度不能超过c，所以 $\left|\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right|<c$

$$t_2'-t_1'>=\frac{t_2-t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[1-\frac{u}{c}\right]>0$$

有因果联系的事件不会发生时序的颠倒。

3. 时间间隔的相对性（时间延缓）

设S'系中同一地点先后发生两个物理事件：

$$A:\ (x',y',z',t_1') \qquad B:\ (x',y',z',t_2')$$

在S系中，这两个事件发生的时刻为

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

故有

$$t_2-t_1=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\equiv\gamma(t_2'-t_1')>t_2'-t_1',\ \text{因为}\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\geq 1$$

固有时间：一个物理过程用相对于它静止的惯性系上的标准时钟测量到的时间（原时）,通常用 τ_0来表示。即$\Delta t'=t_2'-t_1'=\tau_0$ 为固有时

运动时间：一个物理过程用相对于它运动的惯性系上的标准时钟测量到的时间（两地时）。

①从惯性系S中的观测者来看，运动着的物体中发生的过程所费的时间变长了，变为固有时间的γ 倍。
②对事件发生地点（同一地点）相对静止的惯性系中测得的固有时间最短（即时钟变慢），称该现象为**钟慢效应**。

● 如何理解时间膨胀的概念

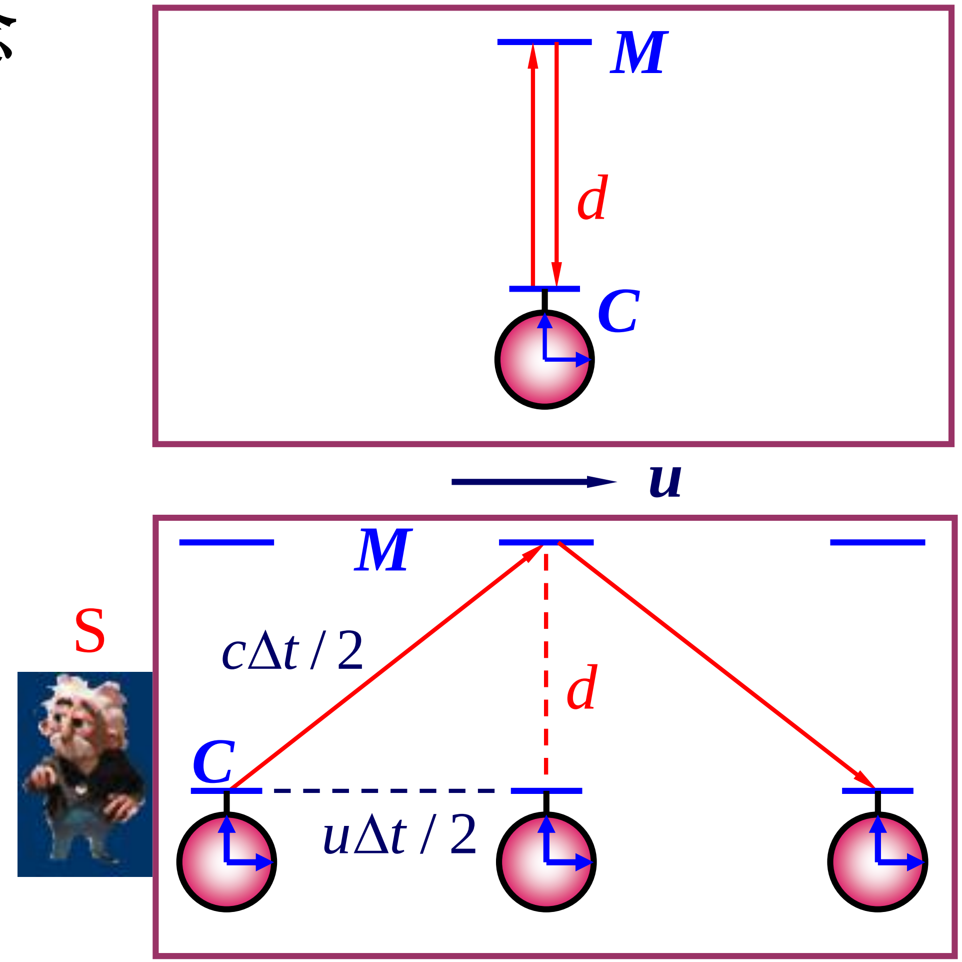
S'(钟静止)：

$$\Delta t' \equiv \tau_0 = \frac{2d}{c}$$

S(钟以速度u运动)：

$$\frac{1}{2}c\Delta t = \sqrt{d^2 + \frac{1}{4}u^2\Delta t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

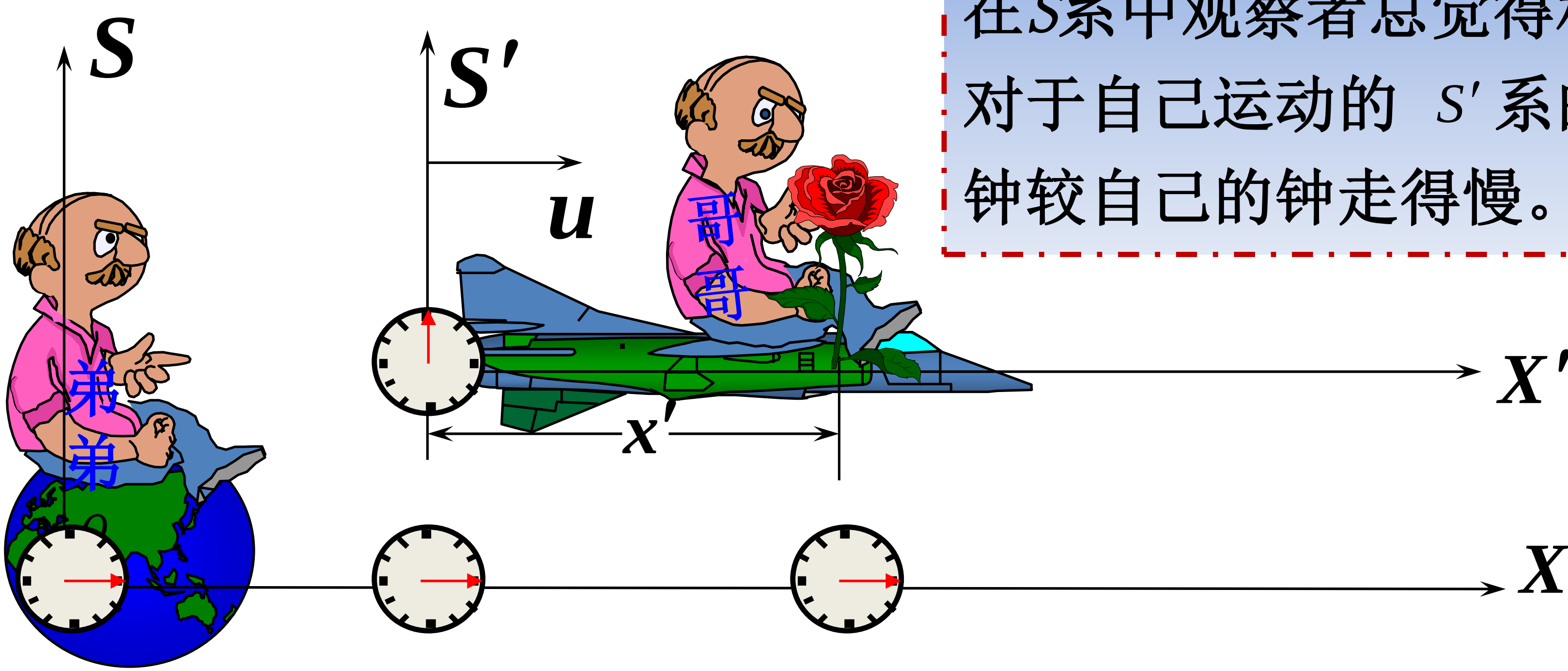


●时间膨胀或相对观测者运动的钟变慢的效应与钟的具体结构天关。

●因为任何过程都是由一系列相继发生的事件构成的，所以时间延缓效应表明**在一个惯性系中观测，运动惯性系中的任何过程（包括物理、化学和生命过程）的节奏变慢。**

●孪生子佯谬：一对孪生兄弟，哥哥告别弟弟，登上访问牛郎织女的旋程.归来时阿哥仍是风度翩翩一少年，而胞弟却是白发苍苍一老翁。

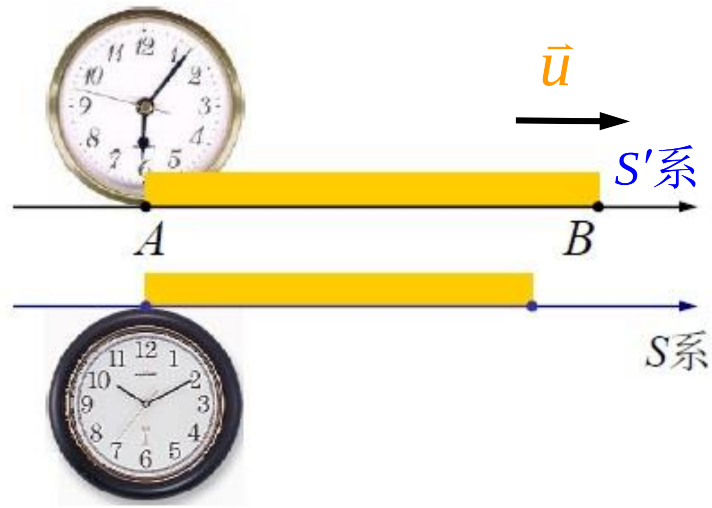
在S系中观察者总觉得相对于自己运动的 S' 系的钟较自己的钟走得慢。



解释：从逻辑上看，这种佯谬并不存在，因为天、地两个参考系是不对称的。原则上讲，“地”可以是一个惯性参考系，而“天”却不能，否则它将一去不复返，兄弟永别了。**这一问题的严格求解要用到广义相对论，计算结果是，兄弟相见时哥哥比弟弟年轻。这种现象，被称为孪生子效应。**

4. 长度的相对性

假定有一直尺相对于 S' 系是静止的，并且放置在沿 x 方向。如果直尺两端的坐标分别是 x_1' 及 x_2'，则对于 S' 系中的观察者，直尺的长度是 $L_0=|x_2'-x_1'|$（**称为固有长度**）。如果在 S 系中有一个观察者，在时刻 t，**同时测量**直杆两端坐标的坐标为 x_1 及 x_2。根据洛伦兹变换可得，



$$x_1'=\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad x_2'=\frac{x_2-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

所以对于S系，直尺的长度为:

$$L=x_2-x_1=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,(x_2'-x_1')=L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=L_0/\gamma<L_0$$

物体沿运动方向的长度比其固有长度短。这种效应叫做洛仑兹收缩，或尺缩效应。注意：与运动垂直方向上的长度不变。

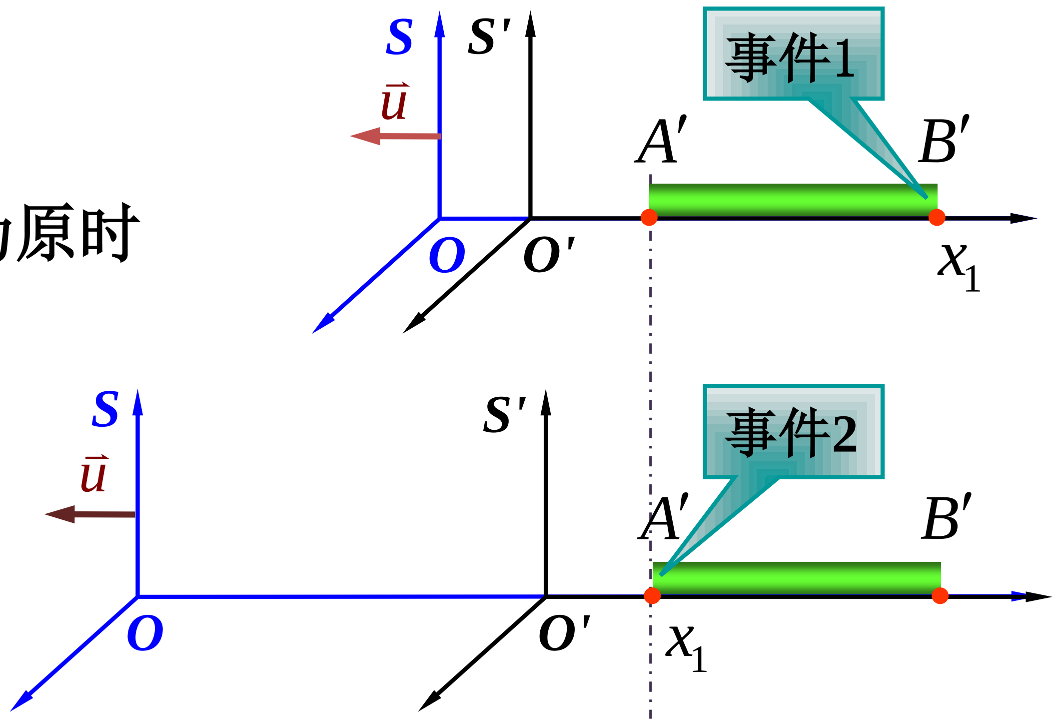
●通过特例说明空间间隔的相对性

$S:$ $L = u\Delta t$

两事件同地发生，Δt 为原时

$S':$ $L_0 = u\Delta t'$

由 $\Delta t' = \gamma \Delta t$



得 $\dfrac{L_0}{u} = \dfrac{\gamma L}{u}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L = L_0/\gamma}$

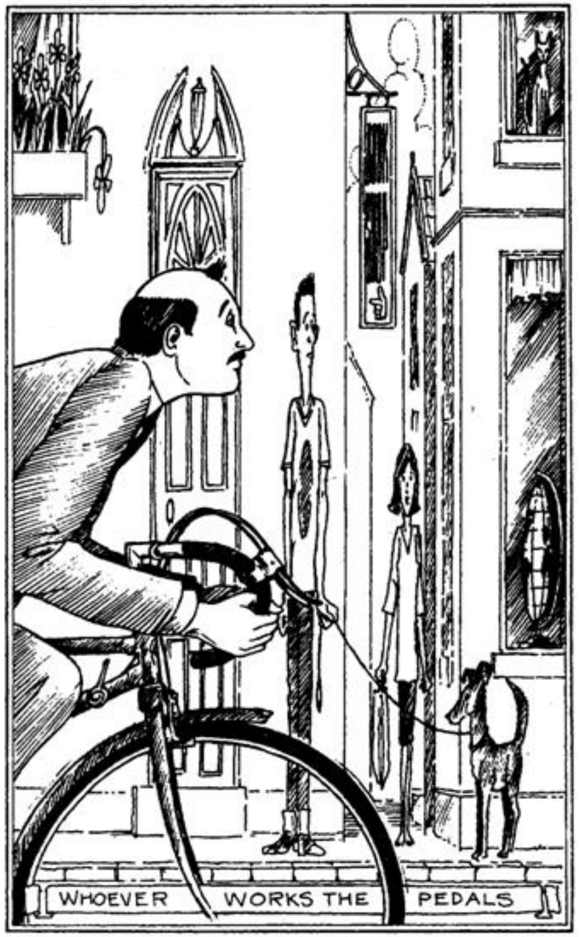
长度收缩效应是同时性相对性的直接结果。

●测量形象（观测者）和视觉形象（观看者）

测量形象：测量运动杆长度必须同时测量其两端点坐标，才能由坐标差得出长度的测量值。

视觉形象：是由物体上各点发出后“同时到达”眼睛或“照相机”的光线所组成，这些光线不是同时从物体发出的。

尺缩效应的形象是人们观测物体上各点对观察者参考系同一时刻的位置构成的“测量形象”，而不是物体产生的“视觉形象”，相对论中的“观测者”指的就是这种“测量者”。而作为“观看者”看到的高速运动的物体，除了应考虑由相对论效应引起的畸变外，还应考虑到由光学效应引起的畸变，故看到的物体仍是原有的形状，不过转过了一个角度。



5. 时空间隔的绝对性

设 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2) 是S系发生两个物理事件A和B

定义时空间隔

$$\Delta s = \sqrt{c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$$

则在S'系看到的事件A和B为 (x_1', y_1', z_1', t_1') 和 (x_2', y_2', z_2', t_2')

$$\Delta s' = \sqrt{c^2(t_1' - t_2')^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2}$$

由洛伦兹变换可得：

$$\begin{cases} t_2' - t_1' = \dfrac{(t_2 - t_1) - \dfrac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ x_2' - x_1' = \dfrac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y_2' - y_1' = y_2 - y_1 \\ z_2' - z_1' = z_2 - z_1 \end{cases}$$

$$(\Delta s')^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$$

$$= \frac{c^2\left[(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)\right]^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{\left[(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)\right]^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$= \frac{(c^2 - u^2)(t_2 - t_1)^2 - (1 - \frac{u^2}{c^2})(x_2 - x_1)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = (\Delta s)^2$$

$$\boxed{\Delta s = \Delta s'}$$

即时空间隔Δs是不依赖于参考系的选择的，是一个绝对量。

例题4： 相对于μ 静止的坐标系中
2.15×10^{-6} s。在离地面6000m高空
速率垂直向地面飞来。试问它能否

解： 解法1： 设地面参考系为惯性
S'系相对于S系的运动速率为
为

$$\tau_0=2.15\times10^{-6}s$$

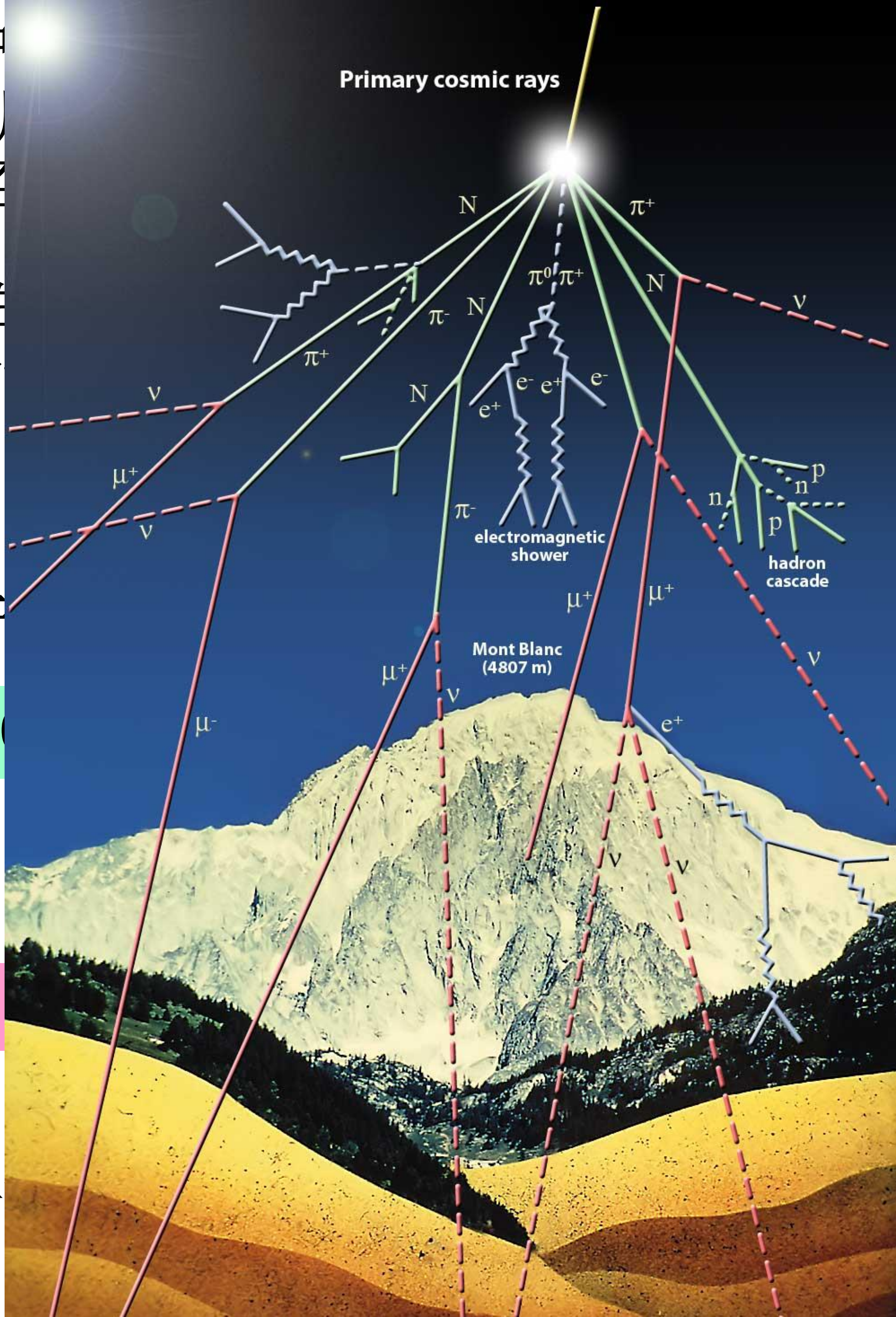
根据相对论时间延缓效应，对于

$$\tau=\gamma\tau_0=10\tau_0=2.15\times1$$

μ子在时间τ内运动的距离为

$$s=u\tau=10\tau_0 v=6418m$$

所以μ子在衰减之前，地面已经



解法2：在相对μ子静止的惯性系S' 中，μ子衰减之前地球朝μ 子运动的距离为

$$s' = u\tau_0 = 0.995c \times 2.15 \times 10^{-6} s$$
$$= 641.8\text{m}$$

然而，对S' 系来说，地面与μ子之间的距离存在长度收缩效应。也就是说，S'系中的观测者所测得的地面与 μ 子的距离为

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 599m$$

所以μ子在衰减之前，地面同样会碰上μ子。

§11.5 狭义相对论力学

在相对论中，动力学的一系列物理概念和规律都面临着重新定义的问题。重新定义新物理量的原则是：

①满足爱因斯坦相对性原理：粒子或粒子系统的动力学方程必须在洛伦兹变换下形式不变。

②对应原则的限制：即 $u \ll c$ 时，新定义的物理量必须趋于经典物理学中对应的物理量；

③尽量保持基本守恒定律继续成立。

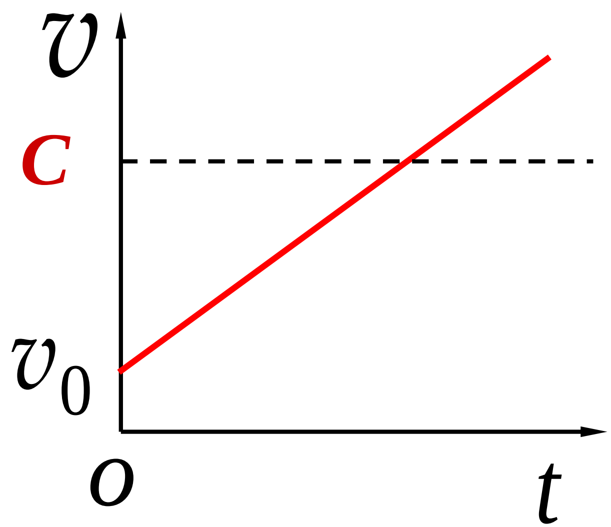
1. 相对论的质量和动量

由牛顿第二定律

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

若质量与运动无关，力为恒力，则

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow v(t)=v_0+at$$



牛顿定律与光速极限的矛盾！

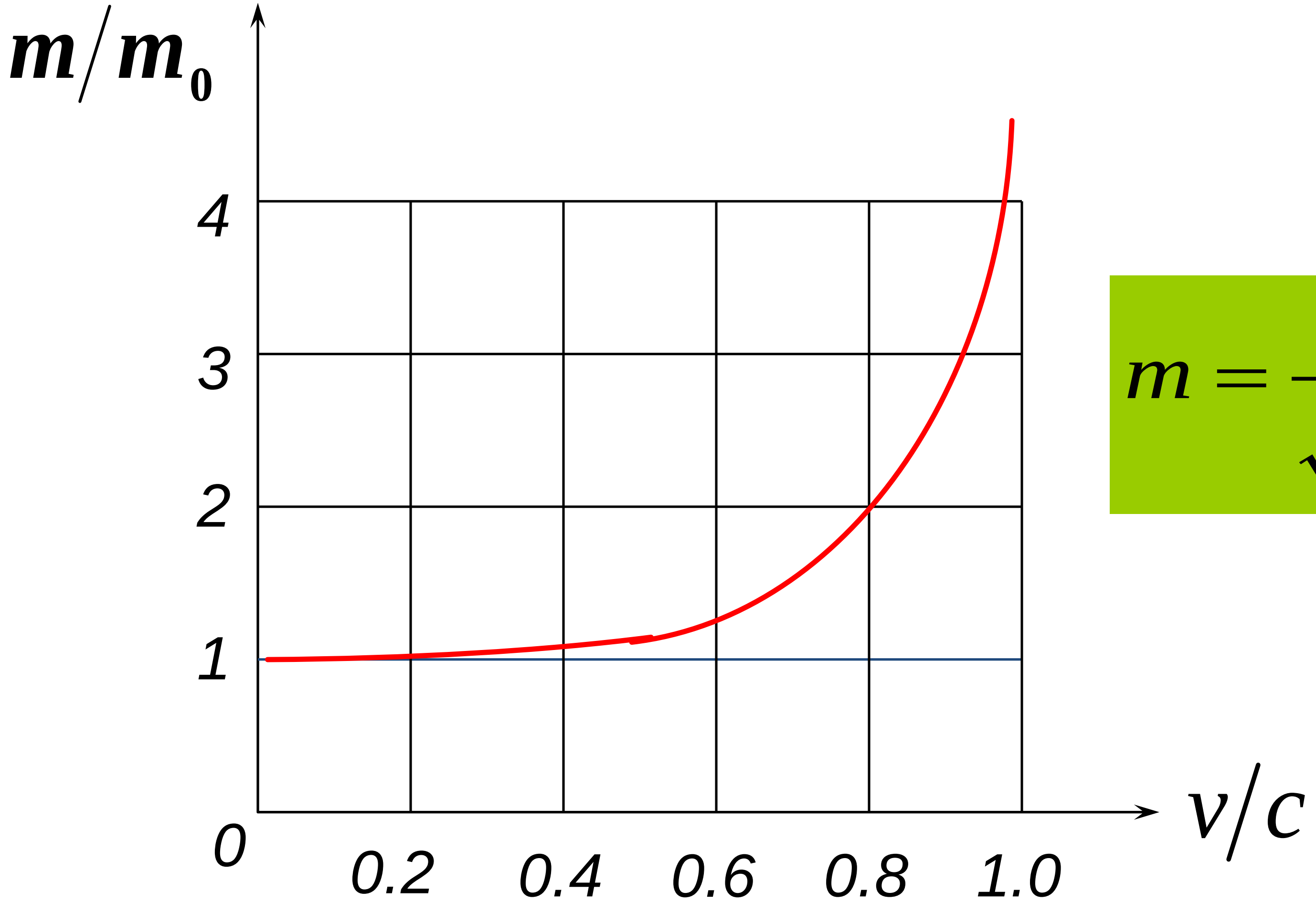
在相对论中，质量与时间、长度一样，与惯性系的选择有关。由动量守恒和洛仑兹变换可推导出（参见教材）：

物体对观察者有相对速度v时测出的质量，称为相对论质量

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

物体在相对静止的惯性系中测出的质量，或称静止质量

以上质速关系早在1905年考夫曼从放射性镭放出的高速电子的实验中发现。相对论问世以后再次由考夫曼、1909年由彼歇勒、1915年由盖伊拉范采由实验证实。



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

在相对论中，定义动量 $\vec{p}$ 为：

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{v}}$$

2. 相对论质点动力学方程

质点的相对论动量：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$$

相对论动力学方程：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}}$$

讨论：

①作用力不仅改变速度，同时还改变质量，恒力作用下，不会有恒定的加速度。

②低速时质量可视为恒量，则动力学方程过渡至牛顿第二定律。

3. 相对论动能以及质能关系

$$\boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r} = dE_k}$$

$$E_k = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\vec{v}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}(m\vec{v})$$

而

$$\vec{v} \cdot \mathrm{d}(m\vec{v}) = m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}\mathrm{d}m = mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m$$

由

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

上式两边求导得

$$\boldsymbol{mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m = c^2\mathrm{d}m}$$

于是可得

$$\boxed{\boldsymbol{E_k = \int_{m_0}^{m} c^2\mathrm{d}m = (m - m_0)c^2}}$$

质量变化和能量变化相联系，质量大小决定了能量大小。质量与能量相关，这是极其重要的结论。

故相对论动能等于因运动而引起质量增加量乘以光速的平方。

●非相对论极限：

$$v << c\text{时}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots \approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)m_0$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m_0 v^2$$

牛顿力学中定义的动能

$v \to c,\ E_k \to \infty$,说明将一个静质量不等于零的粒子加速到光速需做无穷大的功。或者说实物粒子速度有一极限速度c。

4. 相对论质能关系

爱因斯坦将动能表达式中出现 m_0c^2 的这一恒量，解释为粒子因静质量而具有的能量，称为静能 E_0 。而称 mc^2 为质点的总能量E。由此即得著名的质能关系

$$\boxed{E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E_k + E_0}$$

说明：

①静止能量实际上是物体的总内能，是组成该物质的诸微观粒子：分子、原子、电子、核子的动能及相互作用能之总和。静止能量是相当可观的，例如1千克的物体的静止能量为

$$E_0 = m_0c^2 = 1\times(3\times10^8)^2 = 9\times10^{16}\,J$$

相当于20吨汽油燃烧的能量。

②质能相互依存，且同增减

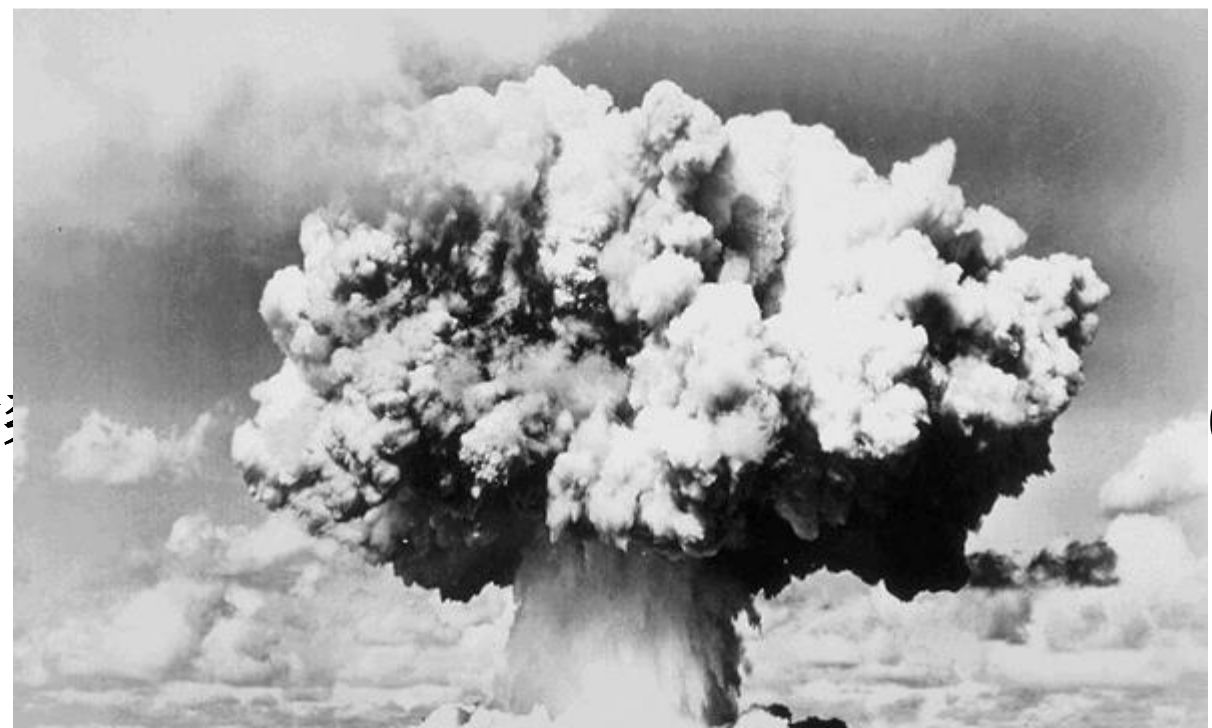
物质具有质量，必然同时具有相应的能量；如果质量发生变化，

则能量也伴随发生相应的变化，反之，如果物体的能量发生变化，那么它的质量一定会发生相应的变化。

$$\Delta E=\Delta mc^{2}$$

③尽管质能互相依存，但在一个孤立系统内总能量和总质量分别守恒。但可以有静质量与动质量的相互转化，相应地就有静能与动能的相互转化。

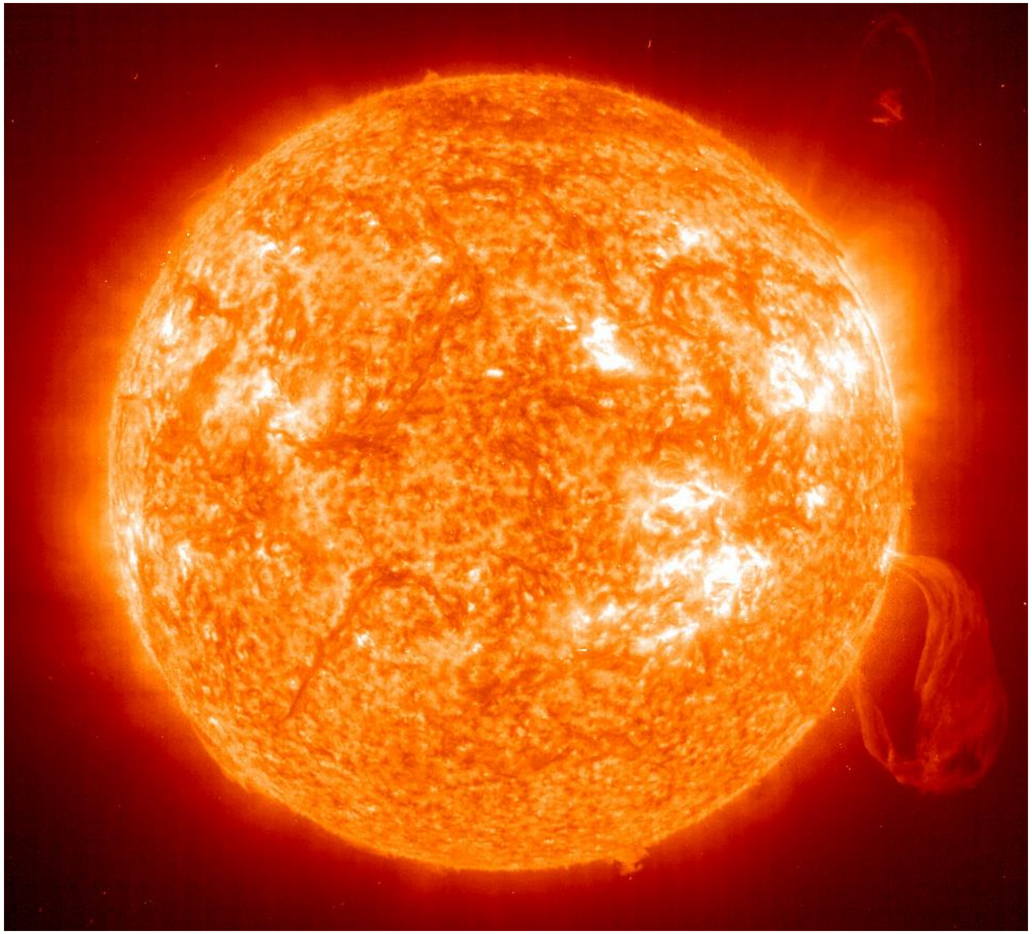
●**重核裂变:** $\mathrm{n}+{}^{235}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{236}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{140}_{64}\mathrm{Xe}+{}^{94}_{38}\mathrm{Sr}+2\mathrm{n}+180\mathrm{MeV}$



1kg的^{235}U核 **0吨优质煤。**

●轻核聚变 $${}_{1}^{2}\mathrm{H}+{}_{1}^{3}\mathrm{H}\rightarrow{}_{2}^{4}\mathrm{He}+\mathrm{n}+17.6\mathrm{MeV}$$

聚变反应是恒星发射巨大能量的来源



SOHO's Extreme ultraviolet Imaging Telescope.

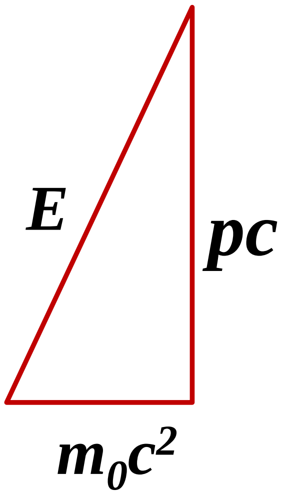
5. 能量动量关系

在狭义相对论中质量为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=m_0$$

两边平方得并乘以c^4可得

$$\boxed{E^2=p^2c^2+m_0^2c^4}$$



对于静止质量为零的粒子 $m_0=0$

$$E=pc=mvc\Rightarrow v=c$$

说明：一个静质量为零的粒子，在任一惯性系中只能以光速运动，永远不会停止，如光子、中微子等。

例题5：已知二质点A、B静止质量均为m_0，若质点A静止，质点B以$6m_0c^2$的动能向A运动，碰撞后合成一粒子，若无能量释放。求：合成粒子的静止质量。

解：二粒子的能量分别为

$$E_A = m_0c^2$$

$$E_B = E_{0B} + E_{kB} = m_0c^2 + 6m_0c^2 = 7m_0c^2 \qquad (1)$$

由能量守恒定律求合成后粒子的能量

$$E = E_A + E_B = 8m_0c^2$$

根据相对论质能关系

$$E = Mc^2 \qquad \therefore M = 8m_0$$

由质速关系求粒子的静止质量

$$M_0 = M\sqrt{1-(V/c)^2} = 8m_0\sqrt{1-(V/c)^2}$$

接下来关键问题是求复合粒子的速度V=?

由动量守恒定律 $P = P_A + P_B = MV$ (2)

由相对论能量与动量关系

$$E_B^2 = P_B^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (3)$$

由题已知 $P_A = 0$ (4)

联立(1)-(4)四式得：

$$V^2 = \frac{P_B^2}{M^2} = \frac{48 m_0^2 c^2}{64 m_0^2} = \frac{3}{4} c^2$$

$$M_0 = 8 m_0 \sqrt{1 - \left(V/c\right)^2} = 4 m_0$$