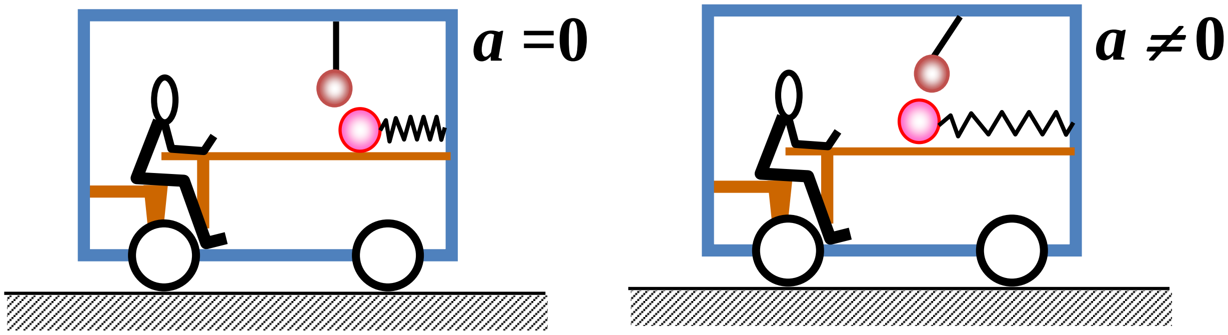
第三章　非惯性参考系

从一个问题开始：



车的$a=0$时单摆和小球的状态符合牛顿定律，

$a\neq0$时单摆和小球的状态不符合牛顿定律，为什么？

因为在非惯性系中牛顿定律不再成立！

如何讨论非惯性系中的质点运动的动力学？

§3.1 平动非惯性参考系

●**非惯性参照系**:牛顿定律不成立的参照系称为非惯性系。

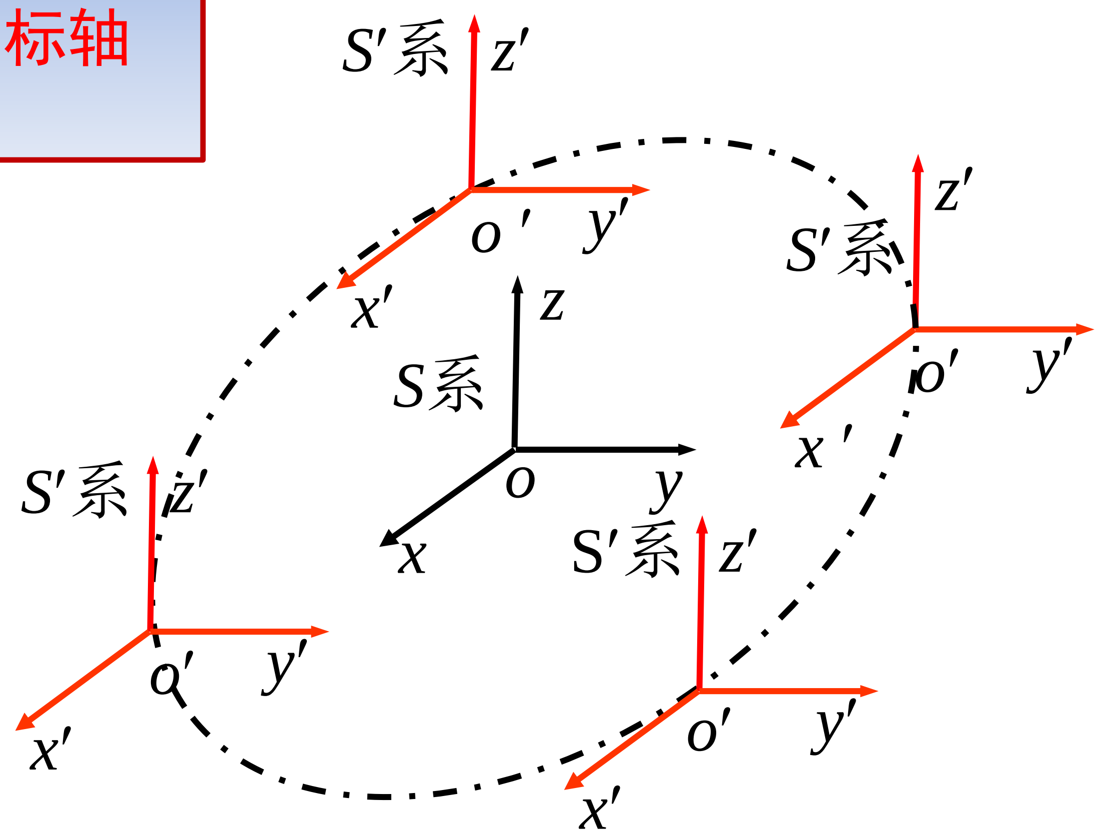
➢相对于惯性系作变速运动的参照系是非惯性系，包括平动加速系、转动系。

1.平动非惯性系的速度、加速度合成公式

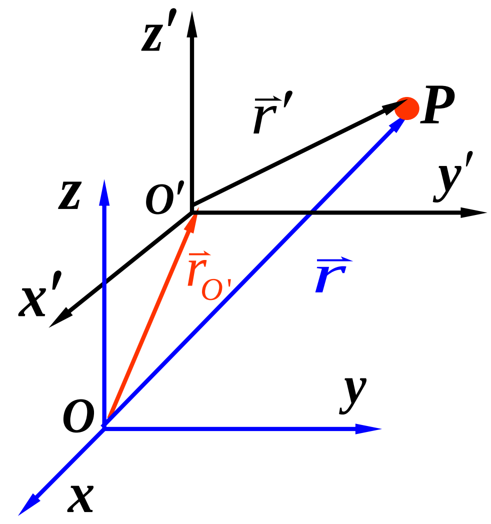
平动非惯性系(S′)：相对惯性系(S)做平动的参考系，因此其坐标轴的方向必须保持不变。

➢若开始时S′系中的各坐标轴与**S**系中的对应坐标轴相互平行，则在运动过程中，S′的各坐标轴应始终与S系的坐标轴保持平行。

●**注意：平动不一定是直线运动！ S′系的坐标原点O′可以做任何方式的直线或者曲线运动!**



位移合成法则： $\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)+\vec{r}_{O'}(t)$

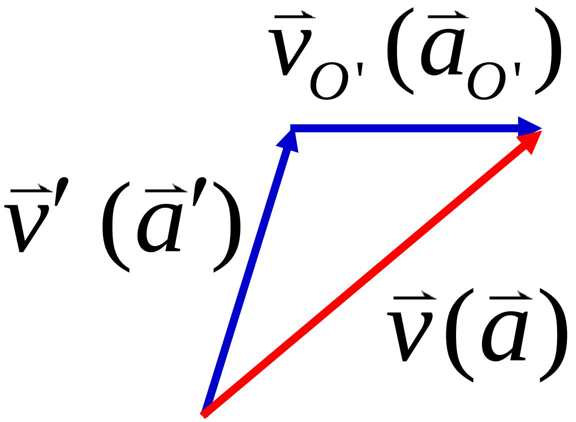


速度合成法则：

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}+\frac{d\vec{r}_{O'}(t)}{dt}=\vec{v}'(t)+\vec{v}_{O'}(t)$$

加速度合成法则：

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}'(t)}{dt}+\frac{d\vec{v}_{O'}(t)}{dt}=\vec{a}'(t)+\vec{a}_{O'}(t)$$



绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和；

绝对加速度等于相对加速度和牵连加速度的矢量和

2.平移惯性力

在S系中物体的运动满足牛顿定律：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$: 真实力?

$\vec{F}$ 和m不随参考系变化，即 $m' = m$, $\vec{F}' = \vec{F}$

但因 $\vec{a} \neq \vec{a}'$ ，在S'系看来物体的运动不满足牛顿定律，即

$$\vec{F}' \neq m'\vec{a}'$$

$$\because \quad \vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$$

$$\therefore \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{O'}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} - m\vec{a}_{O'} = m\vec{a}'$$

➢引入虚拟力 $\boxed{\vec{f}_i = -m\vec{a}_{O'}}$ $\vec{f}_i$: 平移惯性力?,简称惯性力

➢非惯性系S中，可以认为物体同时受到真实力和惯性力的作用，真实力与虚拟力的合力称为**表现力**，记为 $\vec{F}_{eff}$

$$\boxed{\vec{F}_{eff} = \vec{F} + \vec{f}_i}$$

➢非惯性系S'中，形式上牛顿方程仍然成立

$$\vec{F}_{eff} = m\vec{a}'$$

提供一种处理非惯性系中动力学问题的方法.

质点所受惯性力的大小，等于质点的质量和此非惯性系整体相对惯性系的加速度的乘积，方向与此加速度的方向相反 $\vec{f}_i = -m\vec{a}_{O'}$

● **“虚拟力”和“真实力”的区别：**

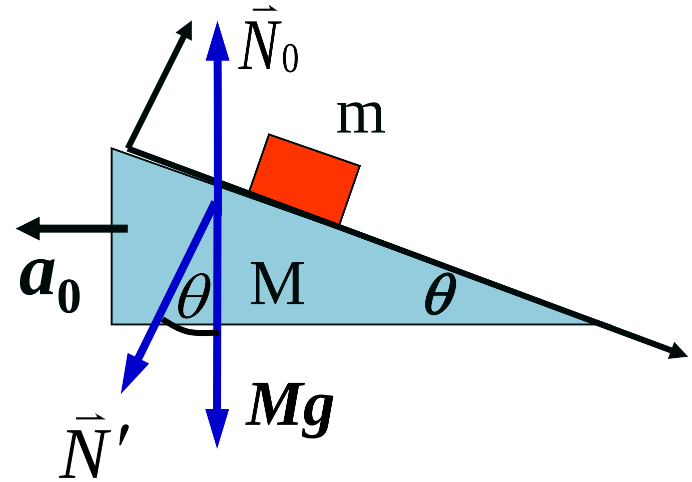
①不能指出是哪个物体作用；

②没有反作用力；

③所有质点都受力，而且惯性力与质点的位置无关，各处均匀。其指向一律与“牵连”加速度（坐标系的加速度S'）相反，且正比于质量（和重力类似）；

④原则上讲，只要选择惯性系，就可以消除惯性力，而真实力一般不能这样来消除。

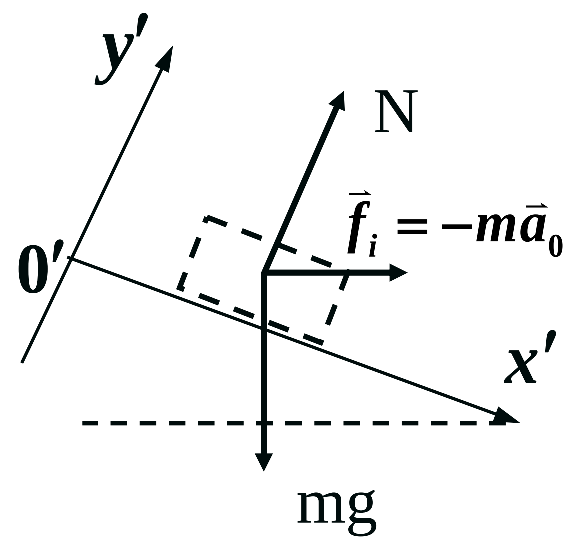
例题1： 一质量为m的木块静止于质量为M，倾角为θ，高为h的直角劈的顶部，劈置于水平面上，所有的接触面都是光滑的，试用非惯性系观点，求木块m相对斜面的加速度。



解： 劈的运动以地面为参考系来考察，在水平方向上

$$N\sin\theta = Ma_0 \qquad (1)$$

如图，坐标系 $o'x'y'$ 取在劈上木块除受真实力N和mg外，还受惯性力 $\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$ 。



木块的运动方程为

$$ma_0\cos\theta + mg\sin\theta = m\ddot{x}' \qquad (2)$$

$$N + ma_0\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \qquad (3)$$

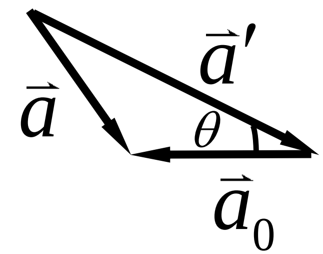
由(1)、(3)式消去N，即得

$$a_0 = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M}$$

代入(2)式，即得

$$\ddot{x}' = a' = a_0 \cos\theta + g\sin\theta = \frac{(M+m)\sin\theta}{m\sin^2\theta + M} g$$

由平动参考系的速度合成公式$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$，可得物体相对地面的加速度为



$$a = \sqrt{a_0^2 + a'^2 - 2a_0 a' \cos\theta}$$

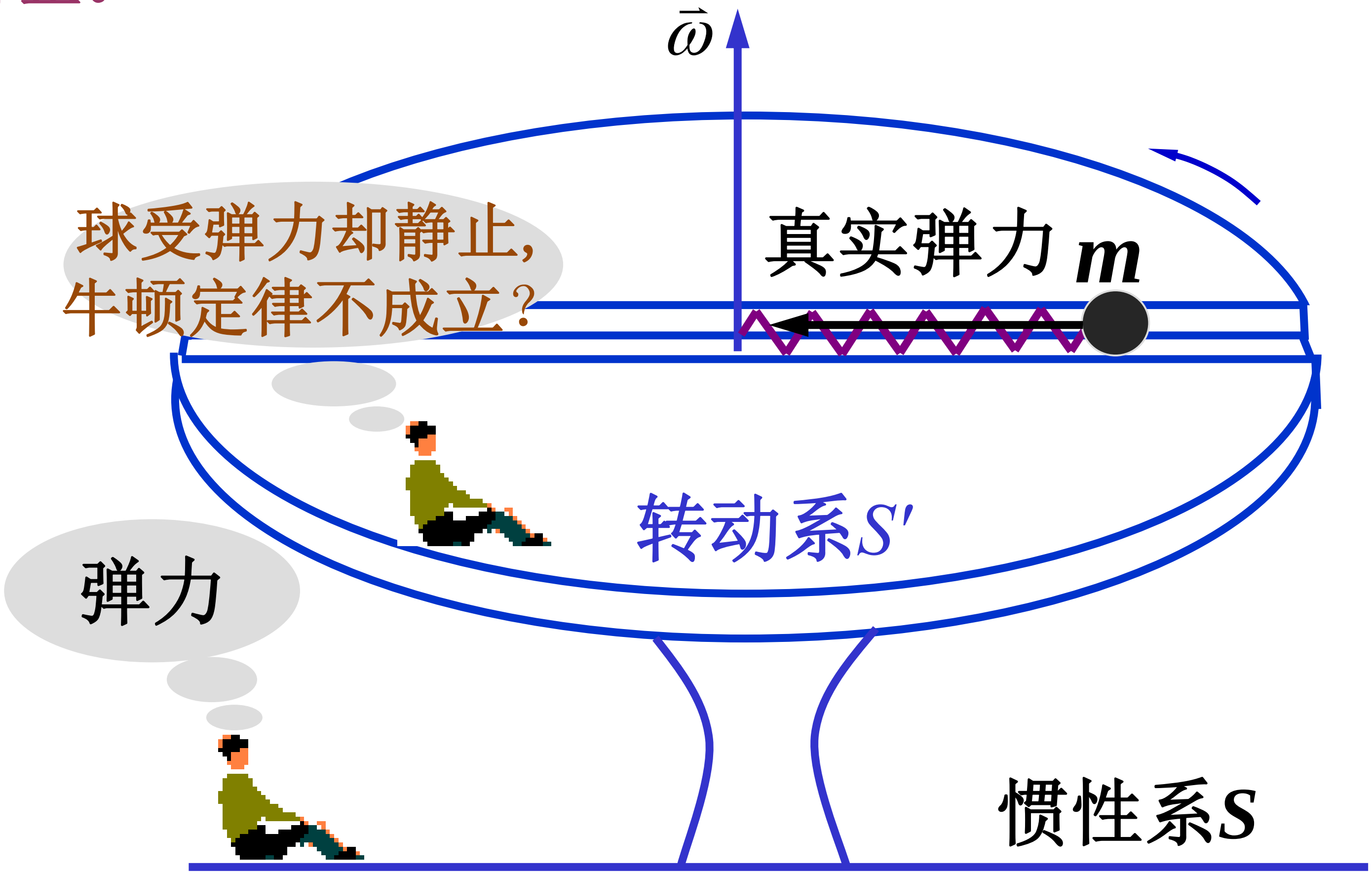
$$= \frac{g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\sqrt{(M+m)^2 + (m\cos\theta)^2 - 2(m+M)m\cos^2\theta}$$

$$= \frac{g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\sqrt{M^2 + m(2M+m)\sin^2\theta}$$

§3.2 转动非惯性参考系

从一个问题开始：

如图所示，设一圆盘绕固定轴在水平面内作匀速转动。沿盘径向开一细槽，槽内放一小球，用弹簧系于转轴上，小球相对于圆盘静止。

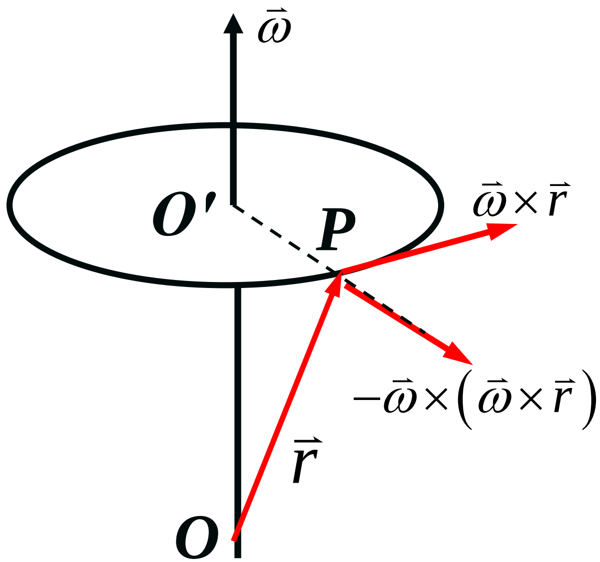


1. 相对于 S' 系静止的点——惯性离心力

静止在 S'系中的物体若位于过原点而垂直转轴的平面内，在S系中看来，物体受力

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{\omega}}{dt}+m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$
$$=m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right),\quad \text{若}\ \vec{\omega}\ \text{是常矢量}$$

而在 S' 系看来，必须认为物体不仅受真实力F 作用，而且还受虚拟力 $\vec{f}_i$ 作用，两力相抵消，即

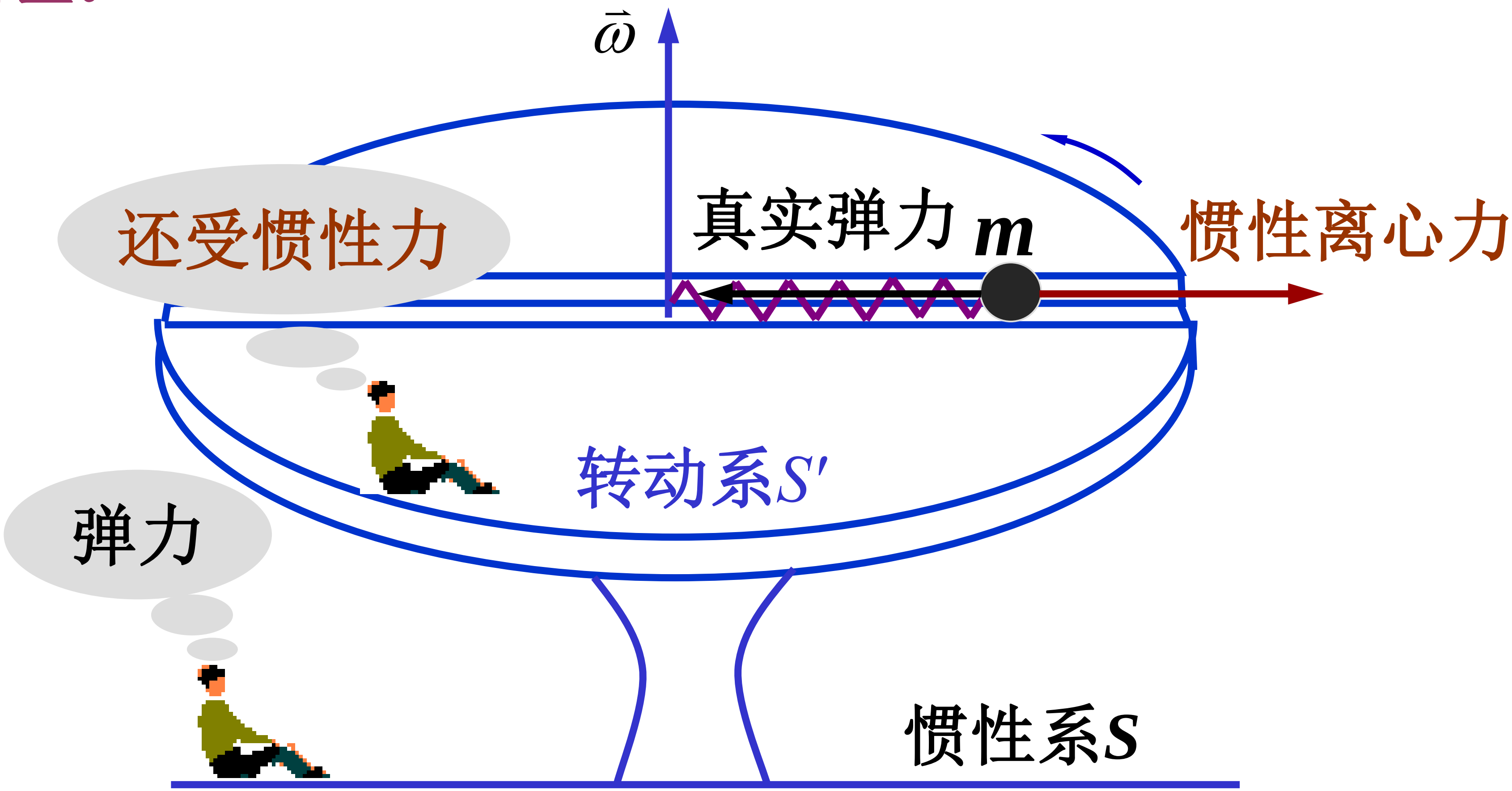


$$\vec{F}+\vec{f}_i=0$$

$$\therefore\quad \vec{f}_i=\vec{f}_c=-\vec{F}$$
$$=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

惯性离心力

如图所示，设一圆盘绕固定轴在水平面内作匀速转动。沿盘径向开一细槽，槽内放一小球，用弹簧系于转轴上，小球相对于圆盘静止。

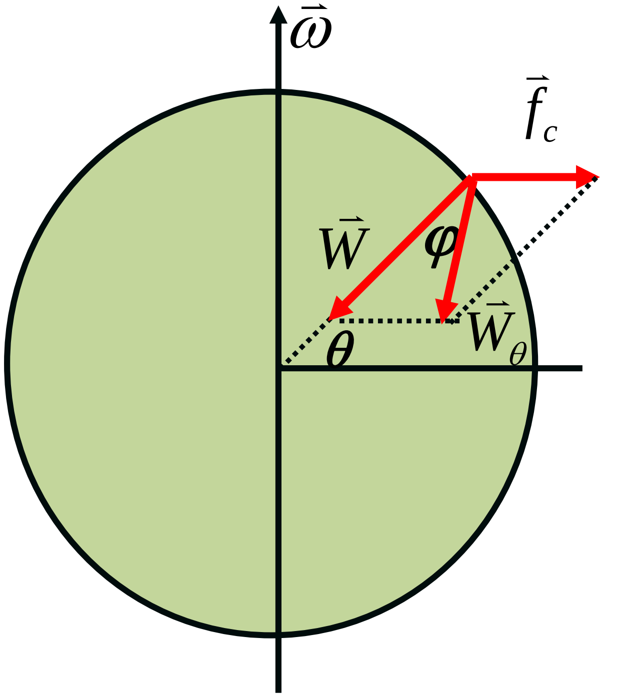


- 惯性离心力的特点：

①惯性离心力垂直于转轴，并指向离开转轴的方向；

②惯性离心力与物体质量成正比。离心力与物体所在位置有关，与物体在转动系中运动与否无关。

例2：地球表面上物体的重力并不严格指向地心，且重力随纬度的减小而减小，试讨论为什么？



解：由于地球的自转，在地球上测得物体的重力并非是物体的真实重力，而是表观重力W_θ。 如图，W_θ 是物体所受引力W 和离心力 f_c 的矢量和。

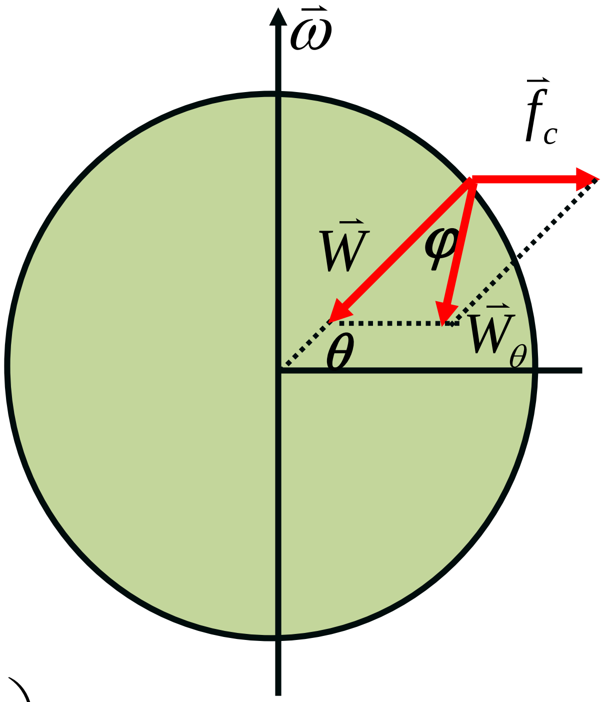
$$\vec{W}_\theta = \vec{W} + \vec{f}_c$$

$$\Rightarrow W_\theta = \sqrt{W^2 + f_c^2 - 2Wf_c\cos\theta}$$

$$\because\ f_c = mR_0\omega^2\cos\theta$$

$$\therefore \frac{f_c}{W}=\frac{mR_0\omega^2\cos\theta}{mg}=\frac{6.4\times10^6\times\left(2\pi/(24\times60\times60)\right)^2}{9.81}\cos\theta\approx\frac{\cos\theta}{289}$$

所以 $W >> f_c$， 故



$$W_\theta=\sqrt{W^2+f_c^2-2Wf_c\cos\theta}$$

$$\approx W\left(1-\frac{f_c}{W}\cos\theta\right)$$

$$\approx W\left(1-\frac{1}{289}\cos^2\theta\right)$$

在两极处 $\theta=\pm\pi/2,\quad \cos\theta=0,\quad W_\theta=W$

在赤道处 $\theta=0,\quad \cos\theta=1,\quad W_\theta=W\left(1-\frac{1}{289}\right)$

下面我们求 W_θ与W的夹角φ，由图知为

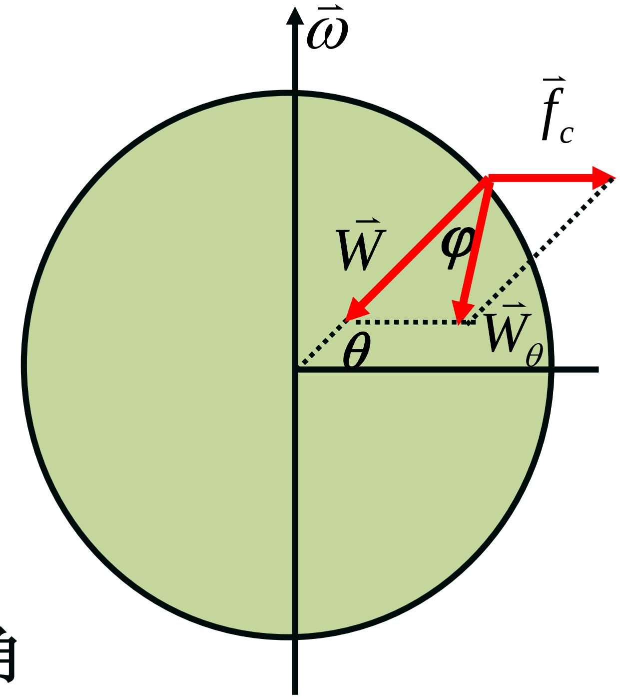
$$\varphi\approx\sin\varphi=\frac{f_c\sin\theta}{W_\theta}\simeq\frac{m\omega^2R\cos\theta\sin\theta}{mg}=\frac{\omega^2R\sin2\theta}{2g}$$

可见θ在45°处为最大，

$$\varphi_{\max} = \omega^2 R / 2g = 0.15\% \approx 6'$$

在上面讨论中未区分引力质量 m_G 和惯性质量 m_I ，若要区分，则

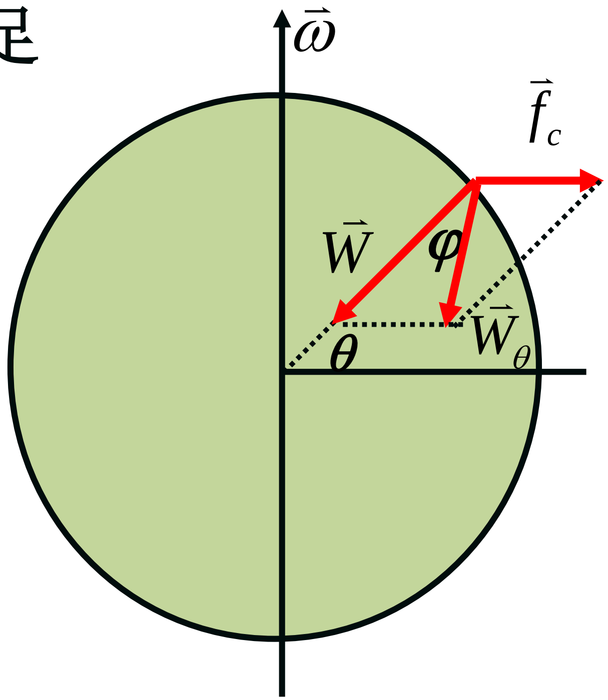
$$\varphi = \frac{\omega^2 R \sin 2\theta}{2g} \cdot \frac{m_I}{m_G}$$



如果惯性质量与引力质量不成正比，此 φ 角将因物体的质料不同而异。因而，若用细线将不同质料的物体悬挂起来，悬线将取不同的方向。匈牙利物理学厄特沃什利用此原理，在1908年完成了一个的证明引力质量与惯性质量成正比的令人信服的实验。

例3：地球同步卫星定位于赤道上空

解：地球同步卫星静止于地球上空，必须满足



①表观重力W_θ 为零. 只有当 $\theta = 0$ 时，引力和离心力的矢量和才有可能为零. 故地球同步卫星只能定位于赤道上空；

②卫星角速度恰等于地球自转角速度

$\omega = 2\pi/T$，$T = 24\times60\times60s$. 即

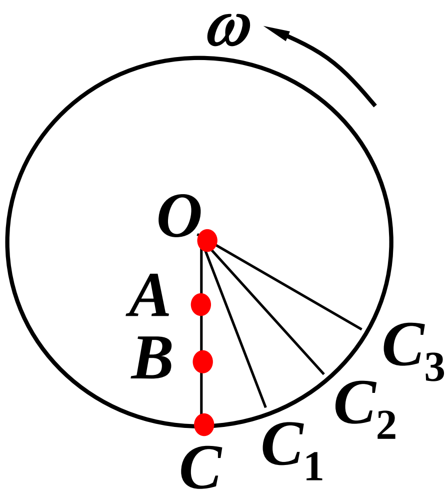
$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h)$$

$$R+h = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 42000km$$

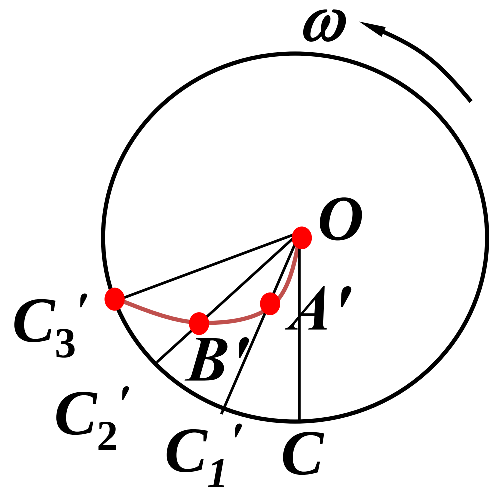
$$\therefore h \approx 42000km - 6370km \approx 35630km$$

2.　相对于 S' 系运动的质点——科里奥利力

从一个问题开始：



物体相对地面沿直线$OABC$运动



物体相对转盘沿曲线$OA'B'C_3'$运动

物体相对转盘作曲线运动，表明物体除受惯性离心力外还受其他惯性力使得其运动方向发生偏转。

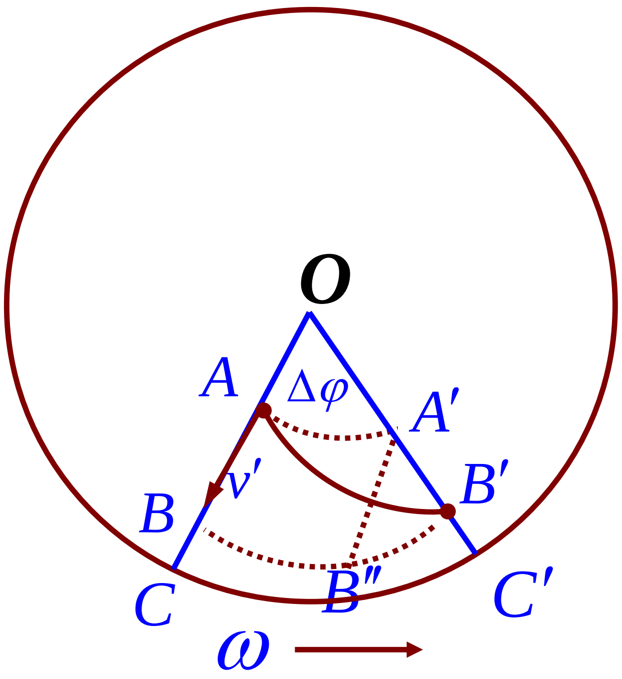
若物体相对于转动参考系作相对运动，则由转动参考系的观察者看来，除了惯性离心力外，物体还受到另一惯性力的作用，此力称为科里奥利力（法国人**G.Coriolis 1835**年提出）。

●科里奥利力的解析表达式

当质点m以速度v'沿半径OC相对圆盘作匀速直线运动，质点同时参与了两个运动（圆盘的转动和相对圆盘的运动），由A点出发运动到圆盘上的B点，由于圆盘的转动，在S系的观测者看来，质点运动到了B'点。

如图所示作辅助线。

其切向速度不断增大，在Δt内



$$\overline{A'B''} = v'\Delta t,$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

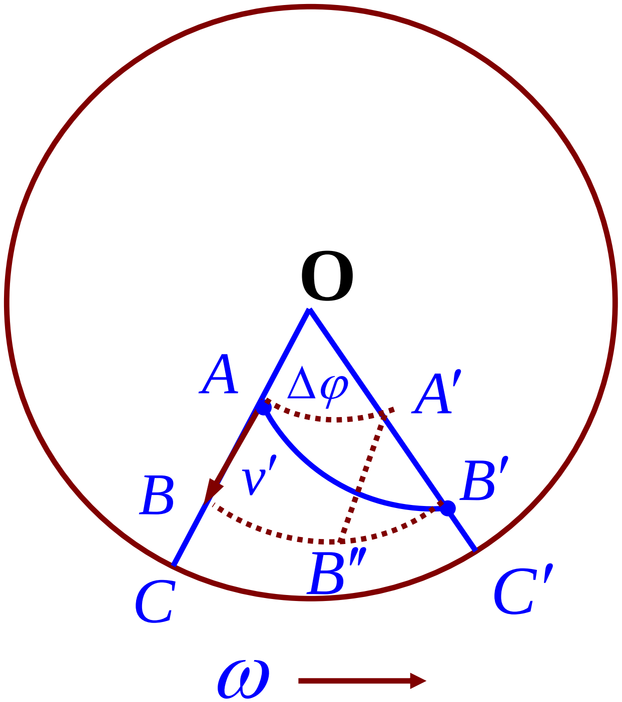
$$\Delta s = \overline{B''B'} = \overline{A'B''}\cdot\Delta\varphi = v'\omega(\Delta t)^2$$

➢在S系的观测者看来，质点最初具有两个速度分量:径向分量 $v_r = v'$ 和横向分量 $v_\theta = \omega \overline{OA}$ ，Δt 时间后圆盘转过角度 $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ ，横向速度分量使质点走到A'点；

➢如果没有加速度，此横向分量与径向分量合成，把小球带到B''点；

➢然而质点实际上已到达位置B'，位移$B''B'$是由加速度引起的。

在Δt 这一极短时间间隔内可认为加速度均匀，设物体向右方的加速度为a_{cor}，利用匀加速的距离公式，有



$$\Delta s = \frac{1}{2} a_{cor} (\Delta t)^2$$

两式相比，得

$$a_{cor} = 2v'\omega$$

其方向与质点相对于圆盘的速度v' 垂直，并指向右方。

显然，为使物体获得这个加速度，必须施物体向右的法向力

$$F = ma_{cor} = 2m\omega v'$$

➢若以圆盘为参考系，在盘中观察者看来，质点***m*** 所作的是沿半径的匀速直线运动，它应该不受力才符合牛顿定律。

➢换句话说，小球在旋转系所表现的行为，好象受到了除惯性离心力之外的另一个“假想的力” f_{cor}。这个力与槽壁对该质点的真实力F大小相等，方向相反。其大小为

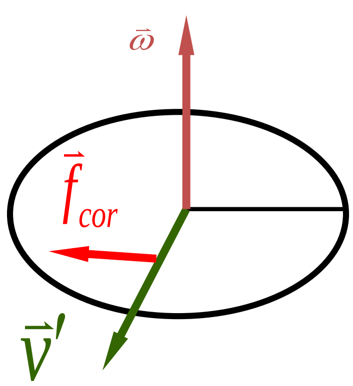
$$f_{cor} = F = 2m\omega v'$$

其方向与质点相对于圆盘的速度v'垂直，并指向左。力f_{cor}是盘中观察者设想的力，是一个惯性力，即为科里奥利力，使得

$$\vec{F} + \vec{f}_{cor} = 0$$

可以证明，物体在圆盘内沿任何方向运动时，都将受到一个与运动方向垂直的科氏力。在普遍情况下

$$\vec{f}_{cor} = -m\vec{a}_{cor} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$



●科里奥利力特征：

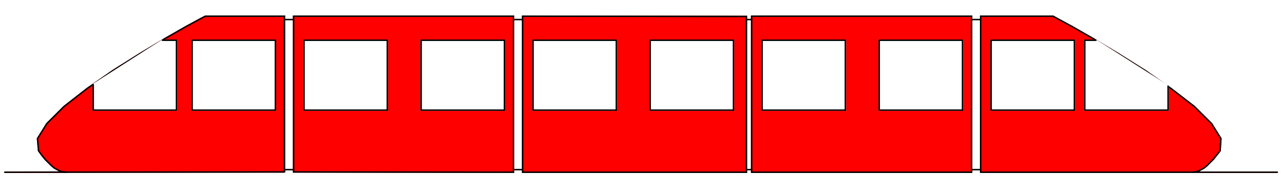
①与相对速度成正比，故只有当物体相对转动参考系运动时才能出现；

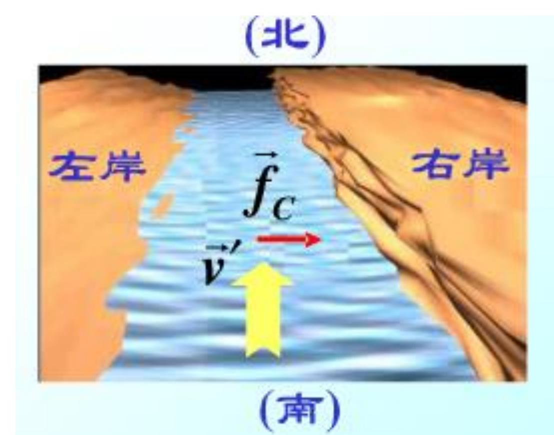
②与转动角速度的一次方成正比, 而离心力与角速度的二次方成正比，故当参考系的转动角速度较小时，科里奥利力比离心力更重要；

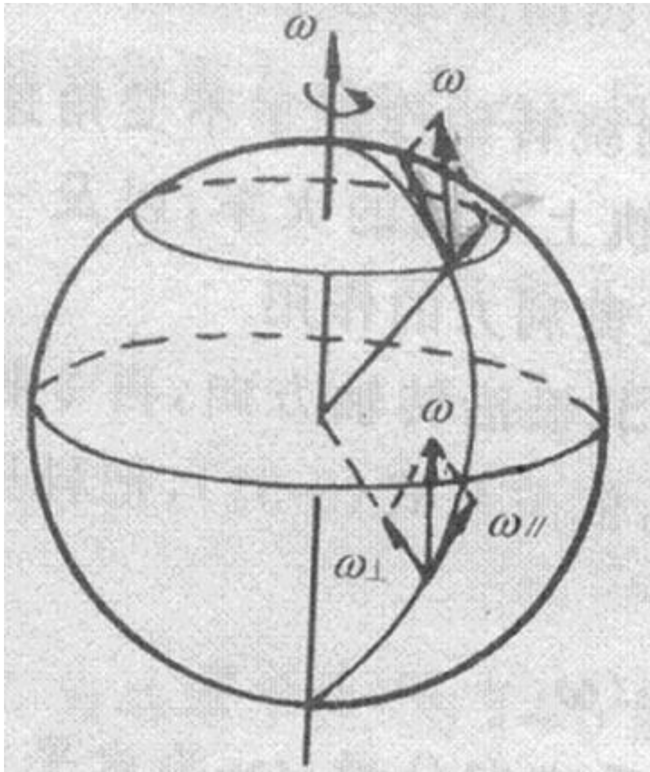
③力的方向总是与相对速度垂直，不会改变相对速度的大小。

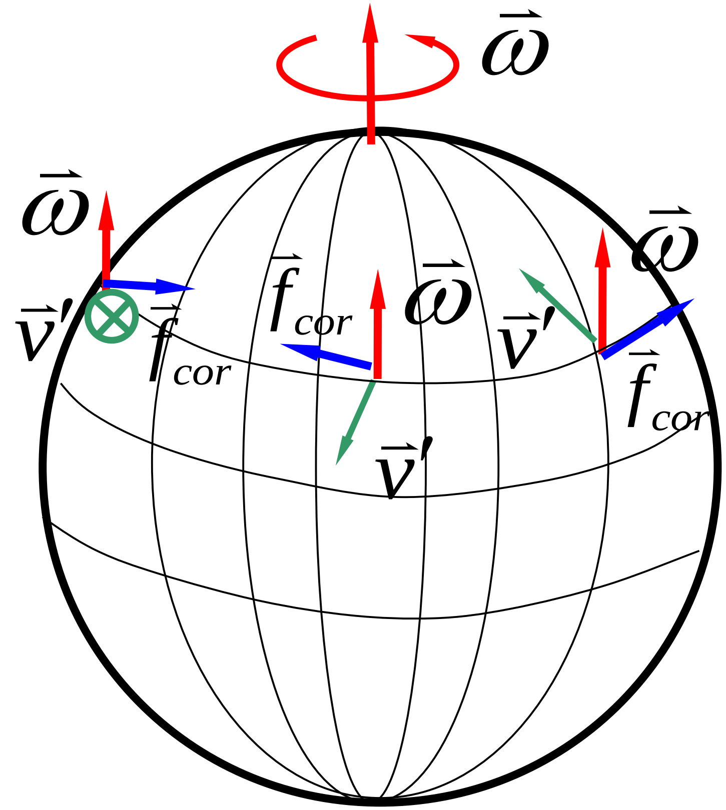
●地球是一个转动参考系，科里奥利力在地球上的表现：

①地面上北半球河流冲刷右岸，火车对右轨的偏压较大。在南半球则对左岸和左轨作用大。

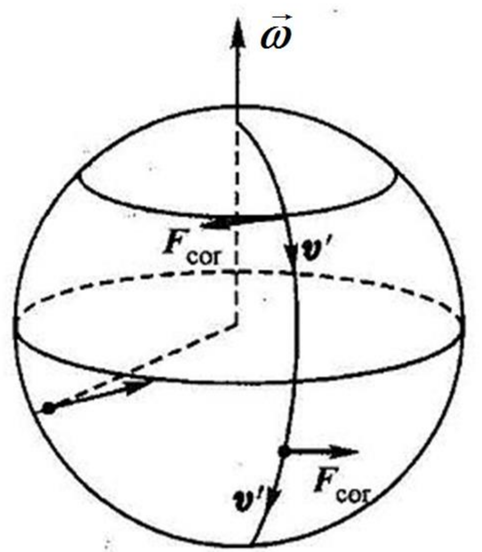






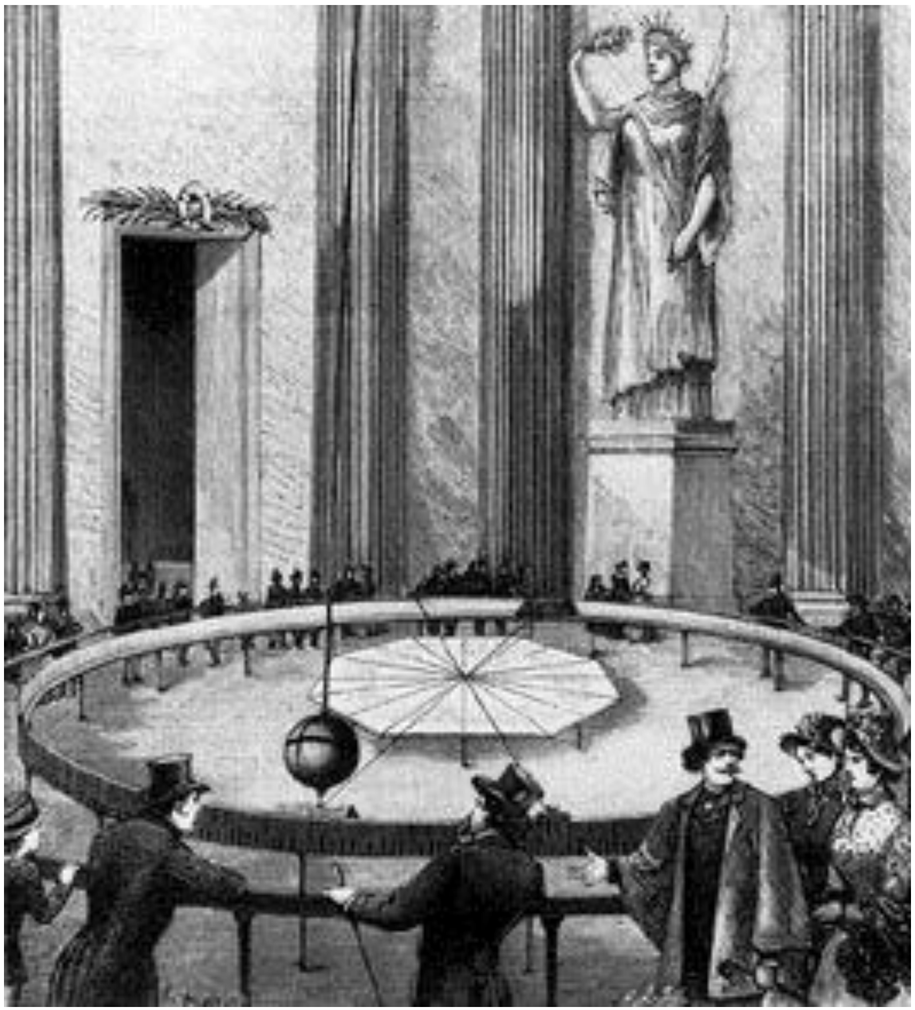


在地球的北半球上，ω方向向上，力沿地面的分量指向相对运动的右方。在地球的南半球上，ω方向向下，力沿地面的分量指向相对运动的左方。



②地球上自由落体偏东；

③傅科（J.L.Foucalt）摆直接证明地球自转



巴黎国葬院大厅的傅科摆

例题5：讨论自由落体偏东的距离

解：在地球参考系中，需考虑惯性力，忽略较小的惯性离心力，该质点的运动方程满足

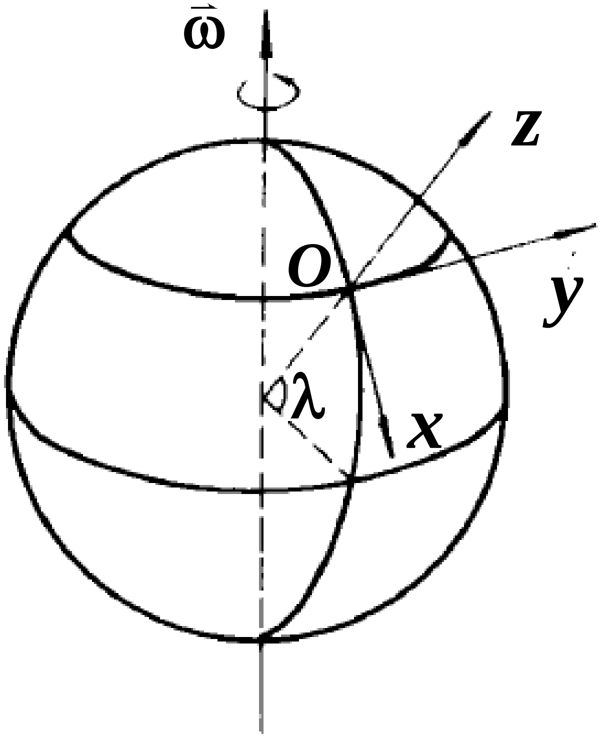
$$m\vec{a}' = \vec{F} - mg\vec{k} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$\vec{F}$ 代表重力以外的作用力

$$\because \vec{\omega}\times\vec{v}' = (-\omega\cos\lambda\vec{e}_x + \omega\sin\lambda\vec{e}_z)\times(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z)$$

$$= -\omega\dot{y}\sin\lambda\vec{e}_x + \left(\omega\dot{z}\cos\lambda + \omega\dot{x}\sin\lambda\right)\vec{e}_y - \omega\dot{y}\cos\lambda\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega\left(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda\right) \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases}$$



假设质点从有限高度h出自由下落，那么我们可以认为重力加速度g的值保持不变，若再忽略空气阻力，则重力以外的力$F_x=F_y=F_z=0$。则该质点的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases}$$

忽略高阶项，可得

$$\begin{cases} \ddot{x} \simeq 0 \\ \ddot{y} \simeq -2\omega\dot{z}\cos\lambda \\ \ddot{z} \simeq -g \end{cases} \qquad (\#)$$

由题意知，其初始条件为

$$t=0, \quad \begin{cases} x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0, \quad z|_{t=0} = h \\ \dot{x}|_{t=0} = \dot{y}|_{t=0} = \dot{z}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

结合初始条件，对(#)式积分，可得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} g t^3 \omega \cos\lambda \\ z = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去时间*t*,可得落体轨道方程

$$y^2 = -\frac{8}{9}\frac{\omega^2 \cos^2\lambda}{g}(z-h)^3$$

当落体到达地面时*z*=0,由上式可得落体偏东的数值为:

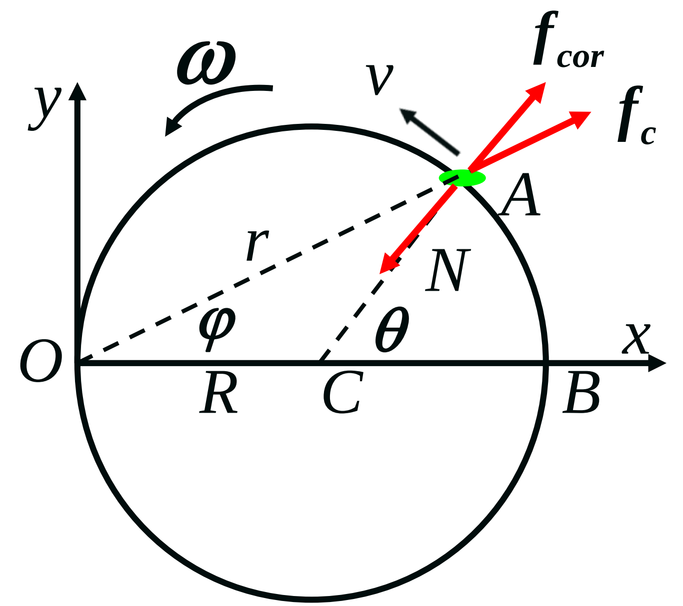
$$y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega\cos\lambda$$

$$\lambda = 40^\circ, h = 200m, y \simeq 4.75\times 10^{-2} m$$

由此可知， *y*>0即物体落在抛射点*O*的东方。进一步，在赤道（λ=0）处偏东的数值最为显著，而在两极（ λ =π/2）则为零。

例题6：质量为m的小环套在半径为R光滑大圆环上，后者在水平面内以匀角速度 ω 绕其上一点O转动。试分析小环在大环上运动时的切向加速度和水平面内所受的约束力。

解：如图，以直径OCB为极轴，位矢 $\overline{OA}$ 与极轴的夹角为 φ。位矢 $\overline{CA}$ 与极轴的夹角为 θ 。在随大环转动的参考系中，小环受到三个水平力：



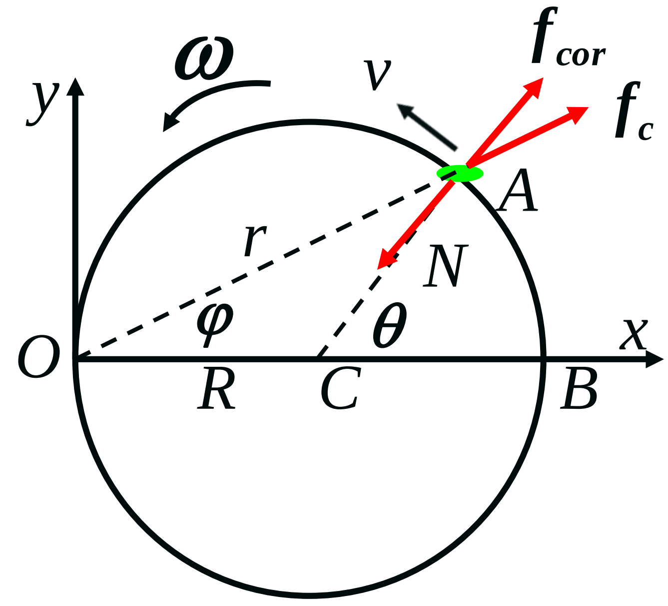
大环的约束力 N（法向）

惯性离心力 $f_c = m\omega^2 r$ （沿 $\overline{OA}$ ）

其中 $r = \overline{OA} = 2R\cos\varphi,\ \varphi = \dfrac{\theta}{2}$

科里奥利力： $f_{cor}=2mv\omega$ （法向）

其中 $v=R\dfrac{d\theta}{dt}$ 为小环相对于大环速度，沿圆环的切线方向。



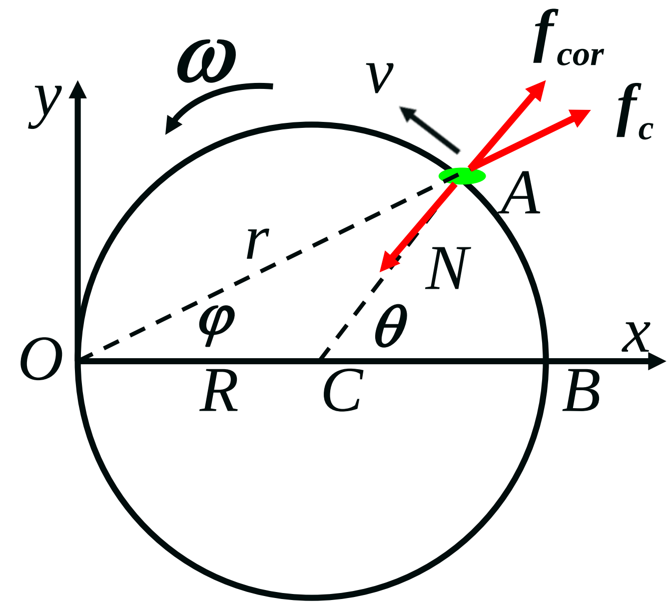
(1)在自然坐标系中，切向加速度

$$a_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}=R\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{1}{m}f_c\sin\varphi=-\omega^2 r\sin\varphi$$

$$=-2\omega^2R\cos\varphi\sin\varphi=-\omega^2R\sin\theta$$

此式表明，小环的运动是以*B*点为平衡位置来回摆动.

(2) 在自然坐标系中，水平面内约束力有



$$N - f_{cor} - f_c \cos\varphi = ma_n = \frac{mv^2}{R}$$

$$\therefore \quad N = f_{cor} + f_c \cos\varphi + \frac{mv^2}{R}$$

$$= 2mv\omega + m\omega^2 r\cos\varphi + \frac{mv^2}{R}$$

$$= 2mv\omega + m\omega^2 R\left(1+\cos\theta\right) + \frac{mv^2}{R}$$

小环在大环上运动时所受的约束力沿大环的法线方向。

小结

惯性系*S*: $\boxed{m\vec{a}=\vec{F}}$

非惯性系*S'*: $\boxed{m\vec{a}'=\vec{F}_{eff}}$ $\vec{F}_{eff}=\vec{F}+\vec{F}_{惯性力}$

$$m\vec{a}'=\vec{F}-m\vec{a}_{O'}-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

平移惯性力: $\vec{f}_i=-m\vec{a}_{O'}$

惯性离心力: $\vec{f}_c=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)=m\omega^2\vec{r}'\ \text{ if }\vec{\omega}\perp\vec{r}'$

科里奥利力: $\vec{f}_{cor}=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

横向惯性力: $-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$ （力学课程不考虑）