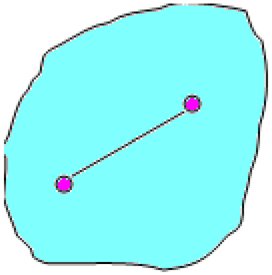
第八章　刚体力学

§8.1 刚体运动学

对于机械运动的研究，只局限于质点的情况是很不够的。物体是有形状大小的，它可以作平动、转动，甚至更复杂的运动。如果物体在外力的作用下形状体积改变很小时，形变可以忽略。我们就得到实际物体的另外一个抽象模型——刚体。

刚体——在任何外力作用下，形状大小均不发生改变的物体（特殊的质点系）。

◆ 若把刚体分为许多质元每个质元都小到可看作质点，那么刚体就是各质元间相对位置不发生变化的特殊质点系，即：任意两点之间的距离始终保持不变。



●说明:

①刚体是一种理想模型。

②在外力的作用下,任意两点均不发生相对位移;

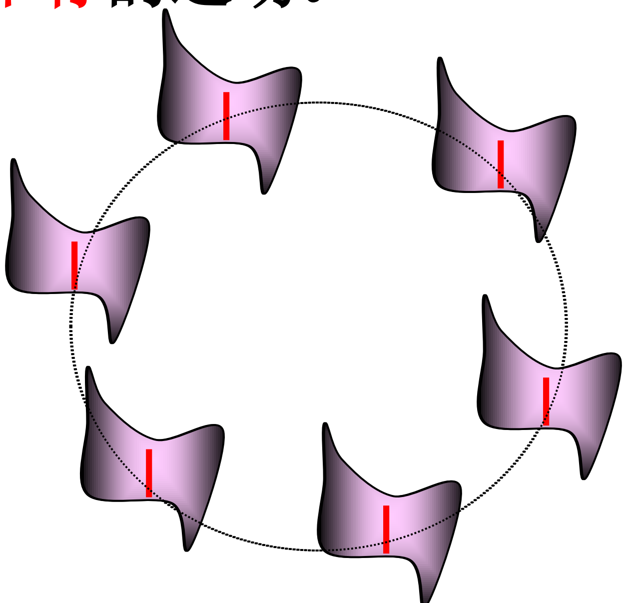
③刚体是弹性系数很大的一类物体的抽象;

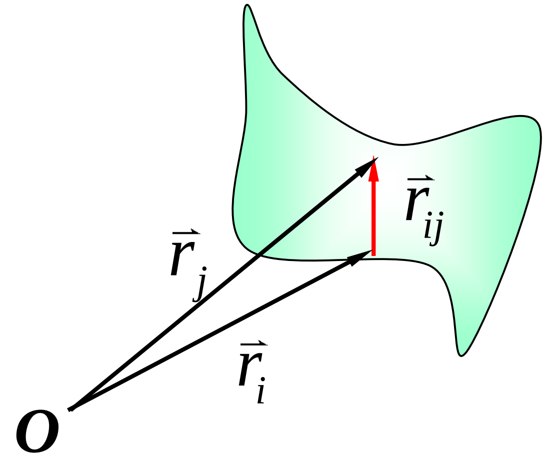
④刚体内力做功为零。

研究刚体力学的基本思路和方法：把质点系的一般概念、规律应到刚体这个特殊质点系上，就可得到刚体运动的特殊规律。

1.刚体运动——平动

刚体平动：刚体运动时，连接刚体内任意两点的直线在任意时刻都保持平行的运动。





取参考点O，图中 $\vec{r}_{ij}$ 表示质元 ***i*** 指向质元 ***j*** 的矢量

$$\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{r}_{ij}$$

由平动定义可知 $\vec{r}_{ij}$ 为恒矢量，所以

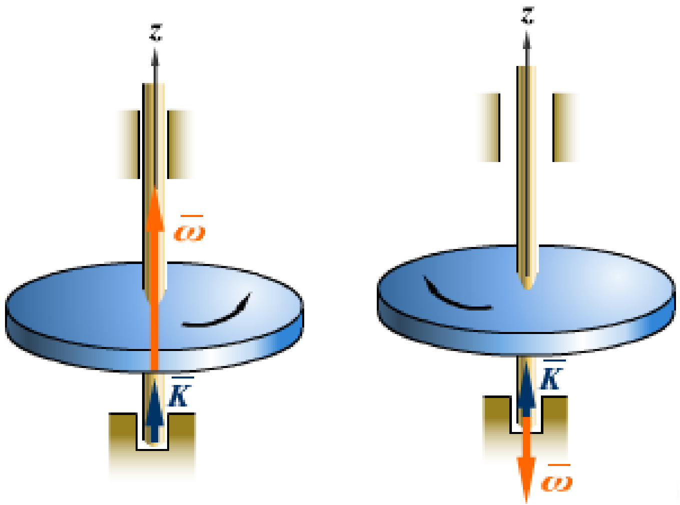
$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Rightarrow \vec{v}_j = \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_j = \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{a}_i$$

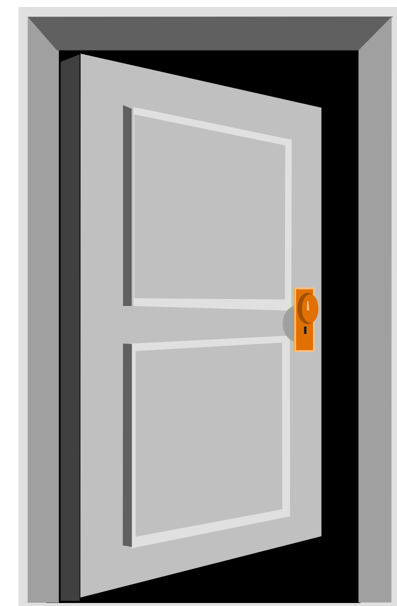
结论：刚体平动时,其上各点具有相同的速度、加速度及相同的轨迹(不一定是直线)。可用一个质点的运动代替刚体的运动。

§10.2 定轴转动

刚体运动时，刚体上的两点固定不动，根据刚体的定义可知，这两点连线上的所有点也静止不动，过这两点的直线称为转轴，这种运动称为定轴转动。



(a) (b)



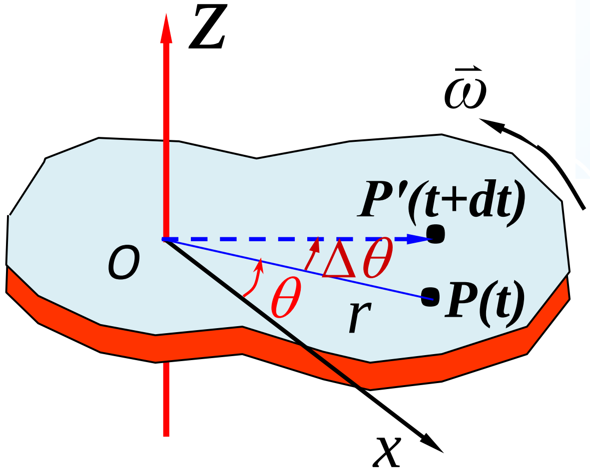
●定轴转动特征

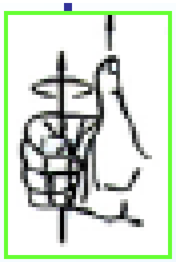
➢刚体上各点都在垂直于固定轴的平面内(转动平面)做半径不同的圆周运动，其圆心都在这条固定不动的直线(转轴)上；

➢刚体上各点到转轴的垂直线在同样的时间内所转过的角度都相同，因而用角量描述刚体的运动。

1. 刚体定轴转动的描述

由于各个质点在相同时间内都转过了相同的角度，引入**角量描述**将非常方便





①角坐标 θ

一般规定：面对z轴， 逆时针转动为正，顺时针转动为负。

$$\theta = \theta(t) \mapsto \text{定轴转动的运动学方程}$$

②角位移 $\Delta\theta$

$\Delta\theta$ 为 Δt 时间内刚体所转过的角度.

③角速度（单位：弧度.秒$^{-1}$）　　④角加速度（单位：弧度.秒$^{-2}$）

角速度: $\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}}$

角加速度: $\boxed{\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}}$

●刚体定轴转动运动方程

$$r(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} v(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} a(t) \qquad \theta(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \omega(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \beta(t)$$

初始条件: $t=t_0$时, $r=r_0$, $v=v_0$　　初始条件: $t=t_0$时, $\theta=\theta_0$ ， $\omega=\omega_0$

$$\omega(t)=\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta=\omega(t)dt \Rightarrow \theta-\theta_0=\int_0^t \omega(t')dt'$$

$$\beta(t)=\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega=\beta(t)dt \Rightarrow \omega-\omega_0=\int_0^t \beta(t')dt'$$

$$\boxed{\therefore\ \theta-\theta_0=\int_0^t \omega(t')dt'=\int_0^t\left(\omega_0+\int_0^{t'}\beta(t'')dt''\right)dt'}$$

对于匀变速转动 β =常量，我们可得

$$\omega=\omega_0+\beta t,\ \ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2,\ \ \omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$$

●角量与线量的关系

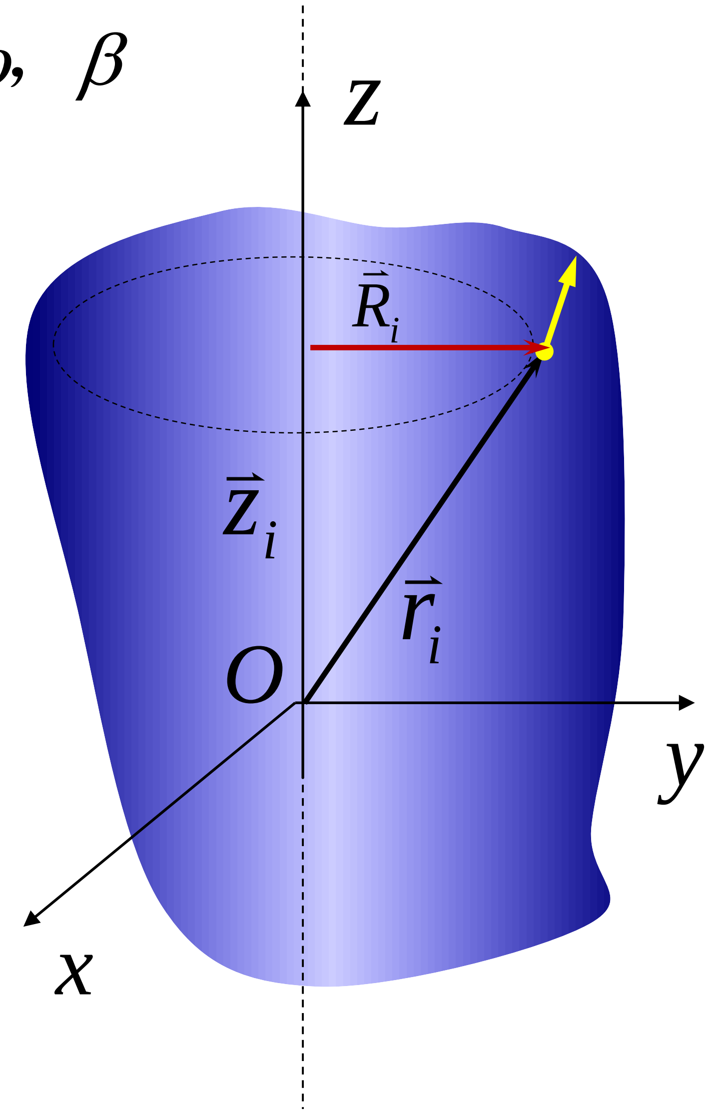
线量——质点做圆周运动的位移 $\vec{r}$、速度 $\vec{v}$、加速度 $\vec{a}$

角量——描述刚体转动整体运动的 θ, ω, β

参考点**O**选在转轴上

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{z}_i$$

每一个质元做圆运动的角速度和角加速度是相同的，它们是整个刚体的运动状态量。第***i***个质元



路程: $s_i = \theta R_i$

线速率: $v_i = \omega R_i$

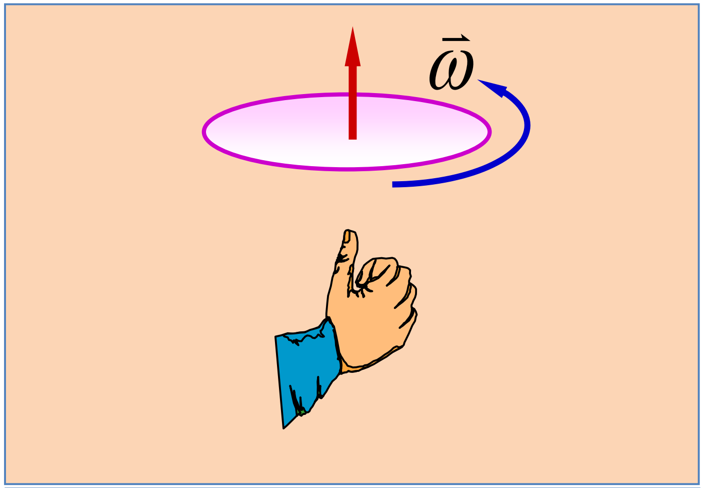
切向加速度: $a_{i\tau} = \beta R_i$

法向加速度： $a_{in} = \dfrac{v_i^2}{R_i} = \omega^2 R_i$

2. 角速度矢量

角速度矢量：规定角速度的方向沿转轴且与刚体转动方向成右手螺旋系统。

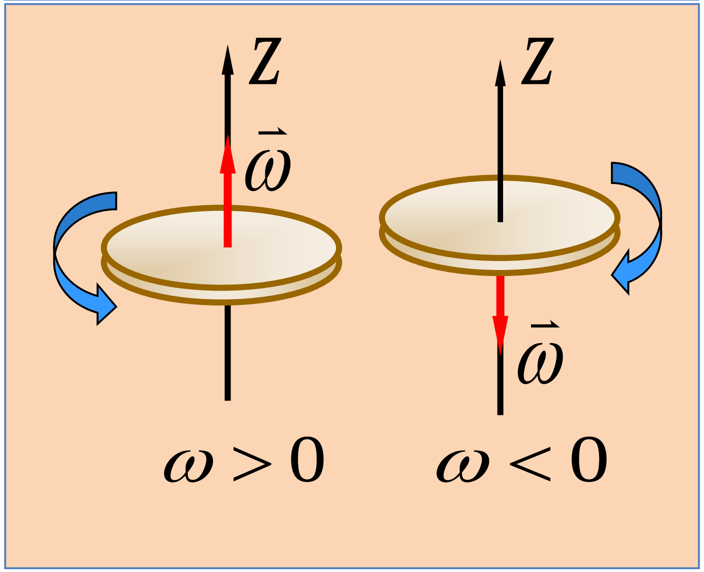
角加速度：$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$



刚体作定轴转动，令转轴与 z 轴重合，则有

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$$

$$\vec{\beta} = \beta \vec{e}_z = \frac{d\omega}{dt}\vec{e}_z$$



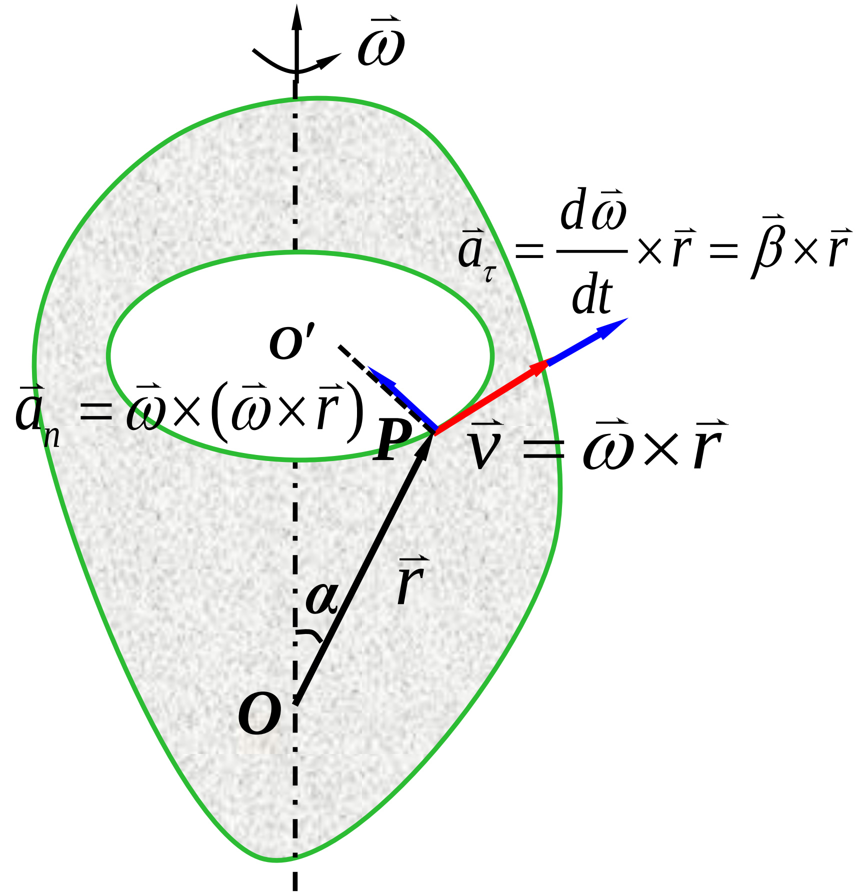
➢角量与线量的矢量关系式为：

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

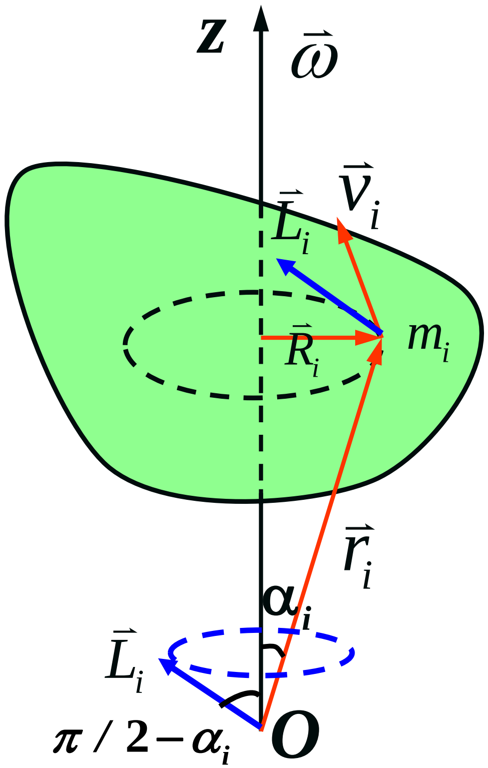
$$=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_\tau=\vec{\beta}\times\vec{r},\quad \vec{a}_n=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

3. 刚体定轴转动的角动量

如图所示，考虑以角速度 $\vec{\omega}$ 绕z轴转动的一个刚体，其上任一质元 m_i 相对于原点O的角动量为



$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

由质点组角动量的定义

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i \right]$$

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}}$$

故角动量 $\vec{L}$ 与角速度 $\vec{\omega}$ 成线性关系，但一般说来它们**不在同一方向上**。在直角坐标系下

$$\vec{r}_i = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z, \qquad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

所以有

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\vec{r}_i\right]$$

$$=\sum_i m_i\left[(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega\vec{e}_z-\omega z_i(x_i\vec{e}_x+y_i\vec{e}_y+z_i\vec{e}_z)\right]$$

$$=\left(\sum_i -m_i x_i z_i\right)\omega\vec{e}_x+\left(\sum_i -m_i y_i z_i\right)\omega\vec{e}_y+\left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega\vec{e}_z$$

若z 轴是刚体的对称轴，前两项的贡献为零，则刚体的角动量就与其角速度的方向相同。刚体角动量沿着角速度方向的分量为

$$\boxed{L_z=\left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega\equiv I_z\omega}$$

$$\boxed{I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_i m_i R_i^2}$$

刚体绕转轴z的转动惯量

4. 转动定律

由质点系的角动量定理

$$\vec{M}_{ex} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

考虑到刚体角动量 $L_z = I_z\omega$，可得

$$\boxed{M_z = \frac{d(I_z\omega)}{dt}}$$

当 $\frac{dI_z}{dt} = 0$ 时，有

$$\boxed{M_z = \frac{d(I_z\omega)}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\beta}$$

刚体定轴转动定律

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} & \text{平动问题} \\ M_z = I_z\beta & \text{刚体定轴转动问题} \end{cases}$$

地位相同

● **讨论：** 力对转轴的力矩

力对转轴上任一参考点的力矩矢量沿转轴方向的分量为力对转轴的力矩:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (\vec{R} + \vec{z}) \times (\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_z)$$

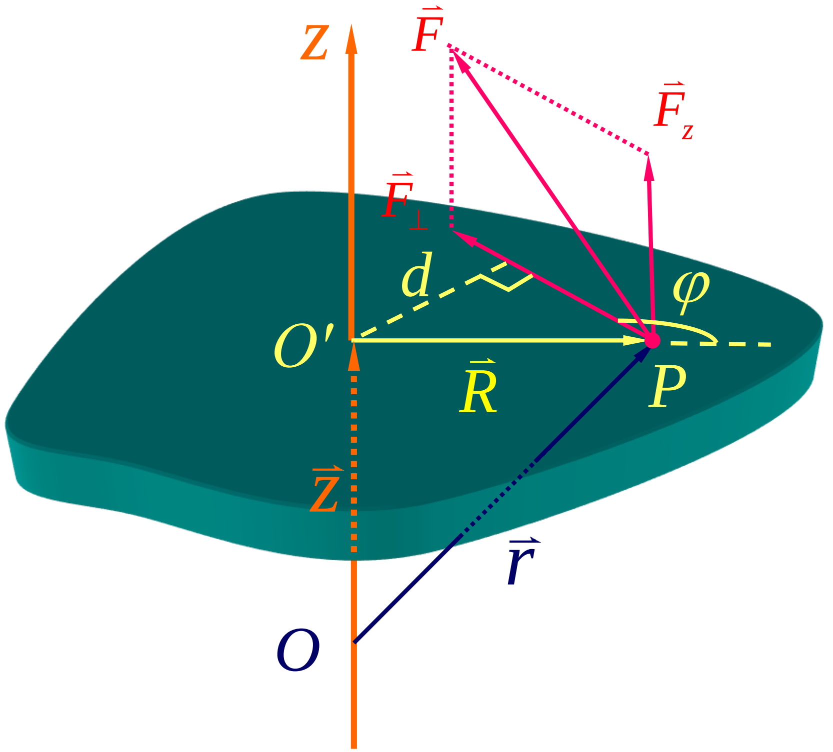
$$= \vec{R} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{R} \times \vec{F}_z + \vec{z} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{z} \times \vec{F}_z$$

$\vec{R} \times \vec{F}_{\perp}$: 沿Oz轴

$\vec{R} \times \vec{F}_z$: 垂直于Oz轴

$\vec{z} \times \vec{F}_{\perp}$: 垂直于Oz轴

$\vec{z} \times \vec{F}_z = 0$

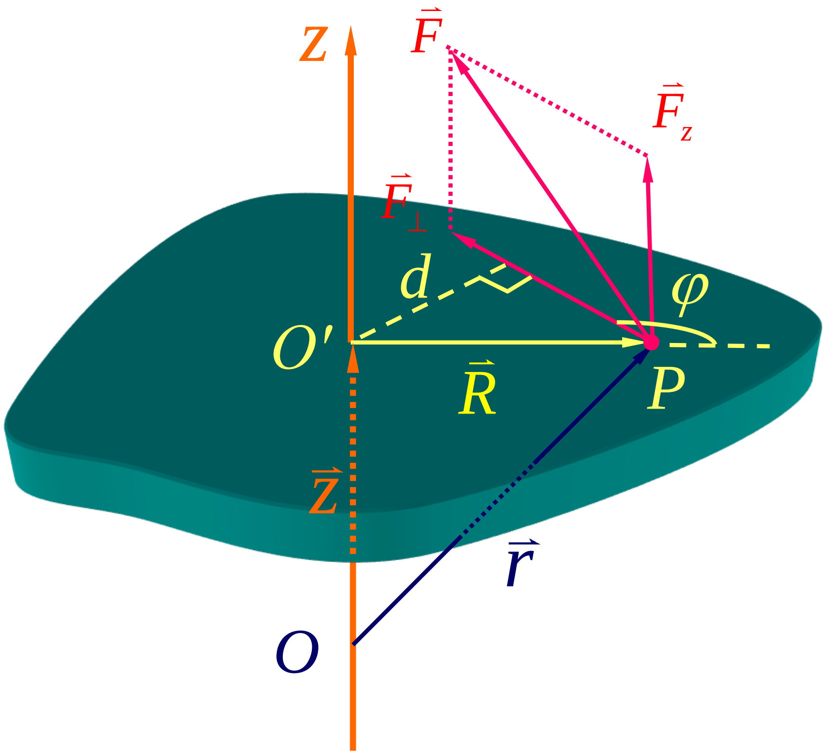


结论： 力矩沿着z 轴的分量为

$$M_z\vec{e}_z = \vec{R}\times\vec{F}_\perp$$

大小：　$F_\perp R\sin\varphi = F_\perp d$

方向：沿 $\vec{R}\times\vec{F}_\perp$ 方向，即沿转动轴的方向



5. 刚体角动量守恒定律

由转动定律

$$M_z=\frac{d(I_z\omega)}{dt} \quad \Rightarrow M_z dt=d(I_z\omega)$$

转动定律的微分形式

在 t_1 到 t_2 时间内：

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z dt=\int_{I_{z1}\omega_1}^{I_{z2}\omega_2} d(I_z\omega)=I_{z2}\omega_2-I_{z1}\omega_1$$

转动定律的积分形式

当合外力矩$M_z=0$ 时，刚体沿着角速度方向的角动量守恒，即

$$\boxed{I_z\omega=const}$$

刚体角动量守恒定律

刚体角动量守恒定律：当作用在刚体（或刚体组系统）上的外力对固定转轴的合力矩为零时，这刚体（或刚体组系统）对该轴的角动量守恒。

说明：

- 角动量保持不变是转动惯量与角速度的乘积不变。 如果转动惯量不变, 则角速度也不变; 如转动惯量改变, 则角速度也改变。

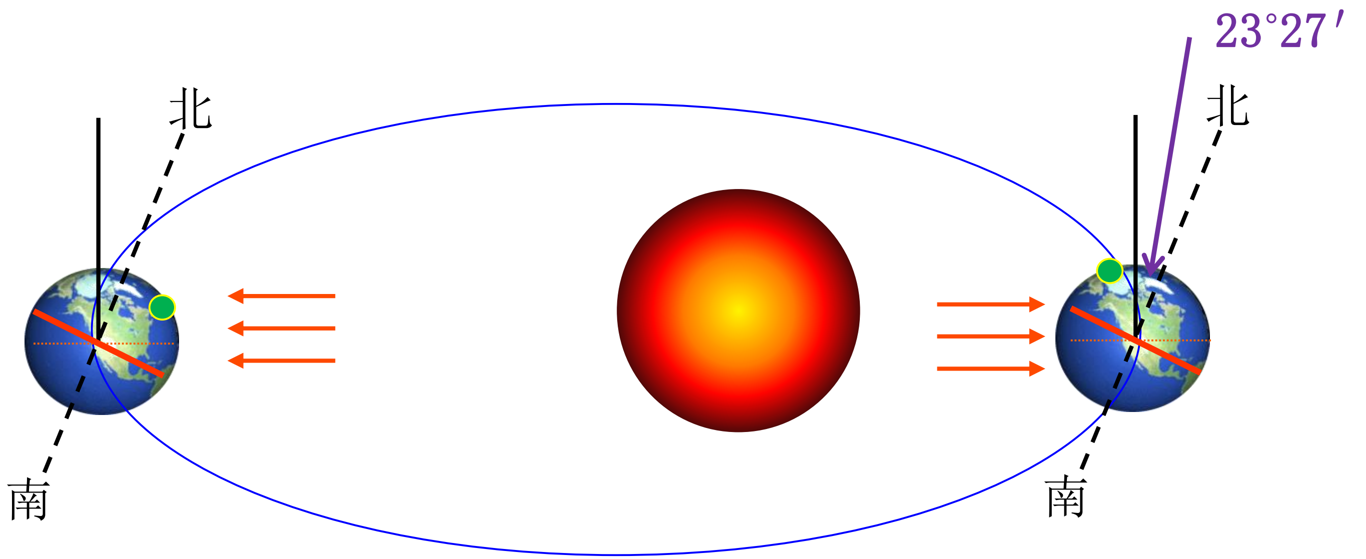
➢转动系统有多个物体(刚体或质点)组成

角动量守恒定律的形式为

$$\boxed{\sum_i I_{iz}\omega_i = \sum_i I_{iz,0}\omega_{i,0}}$$

系统内各物体的角动量必须是对同一固定轴而言。

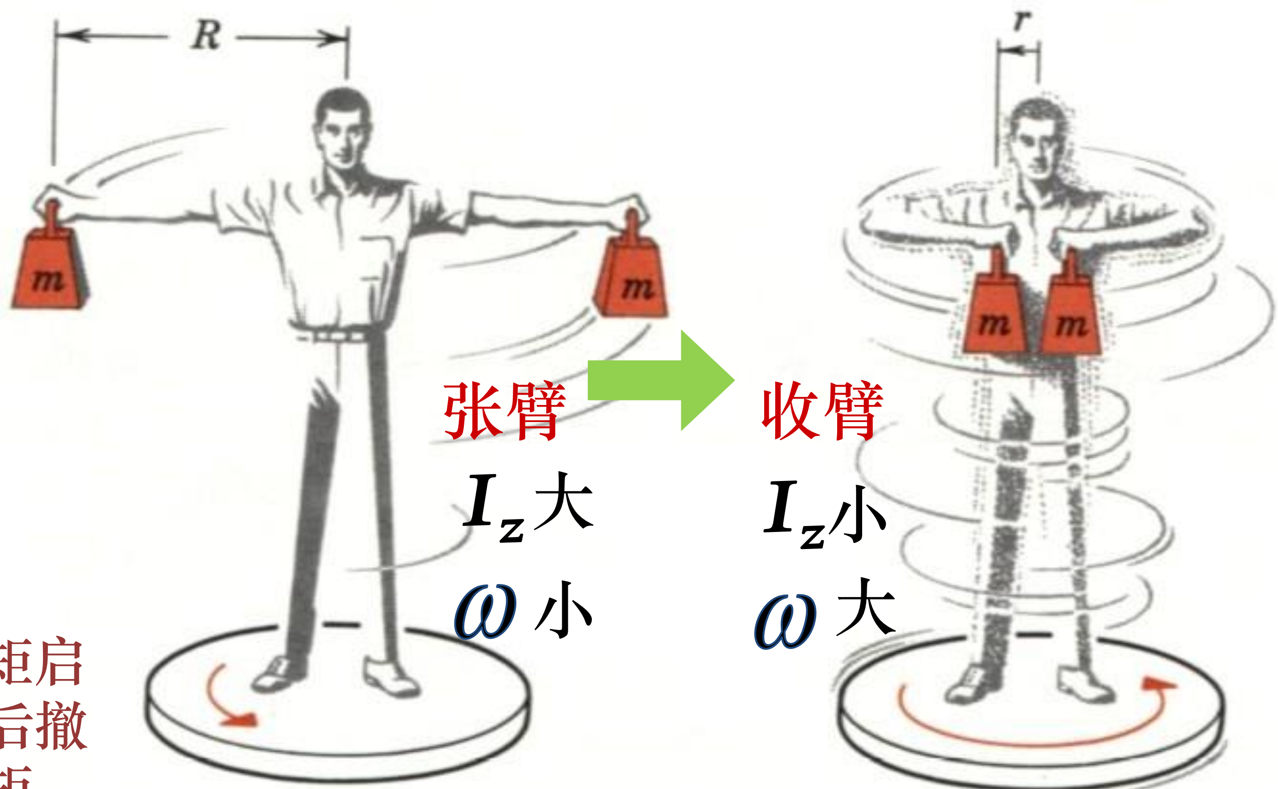
① I_z不变，角速度ω的大小和方向均不变



例如:地球所受的力矩近似为零，地球自转角速度的大小方向均不变。地球赤道平面与黄道平面（公转轨道）的夹角23°27′ 保持不变。地球在轨道上不同位置，形成春、夏、秋、冬四季的变化。

② I_z可变, ω亦可变，但$I_z\,\omega$乘积不变

例如：茹可夫斯基凳



用外力矩启动转盘后撤除外力矩

滑冰过程中忽略脚底摩擦力矩的作用，角动量守恒

$$I_{z1}\omega_1 = I_{z2}\omega_2 \;\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_{z1}}{I_{z2}}\omega_1$$

先使自己转动起来

张臂

I_z大

ω 小

收臂

I_z小

ω 大

花 样 滑 冰

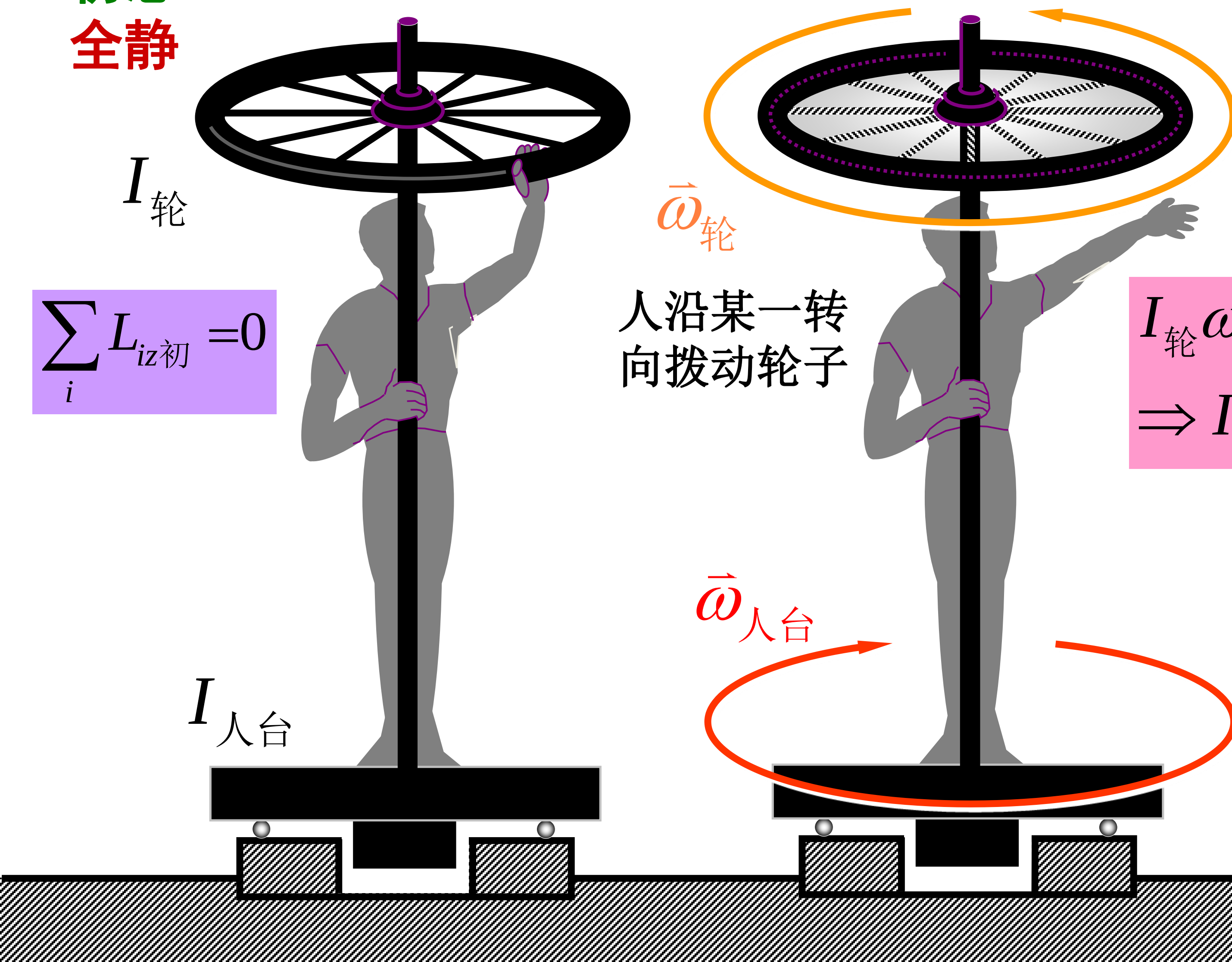
③刚体组角动量守恒

若$M_{ex,z}=0$，则$\sum_i L_{iz}=\sum_i I_{iz}\omega_i=const$

轮、转台与人系统

初态

全静



$\sum_i L_{iz初}=0$

人沿某一转向拨动轮子

末态

$I_{轮}\omega_{轮}+I_{人台}\omega_{人台}=0$

$\Rightarrow I_{人台}\omega_{人台}=-I_{轮}\omega_{轮}$

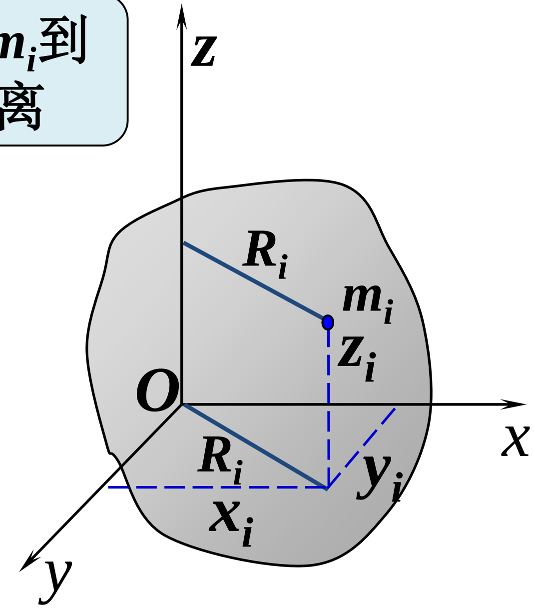
导致人台反向转动

6. 刚体的转动惯量

刚体绕定轴Oz的转动惯量

其中R_i为质元m_i到转轴的垂直距离

$$\boxed{I_z=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)=\sum_i m_i R_i^2,\qquad R_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2}}$$

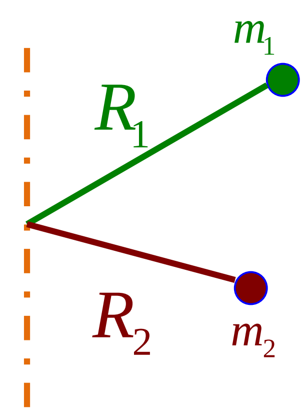


单位：**kg·m²**　　量纲：**ML^2**

物理意义：刚体定轴转动惯性大小的量度。

●转动惯量的计算

✱质量离散分布的刚体 $I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$



✱若质量连续分布： $I_z=\int R^2dm$

➢质量线分布(质量线密度为λ)： $dm=\lambda dl$

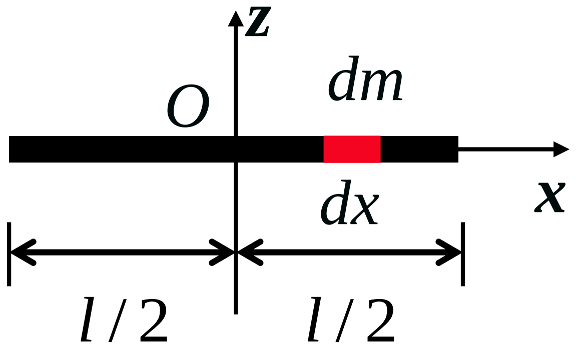
➢质量面分布(质量面密度为σ)： $dm=\sigma dS$

➢质量体分布(质量体密度为ρ)： $dm=\rho dV$

●几种典型形状刚体的转动惯量计算

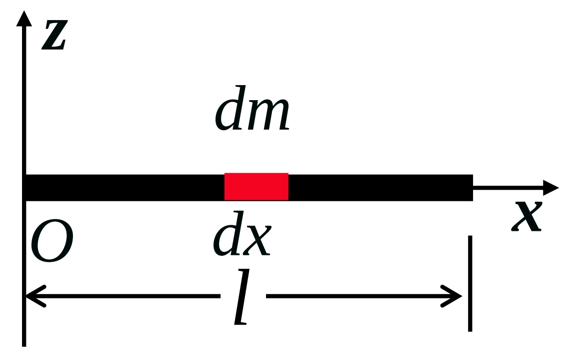
（1）均匀细棒

a）转轴过中心与杆垂直



$$I=\int r^2dm=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}x^2\frac{m}{l}dx=\frac{1}{12}ml^2$$

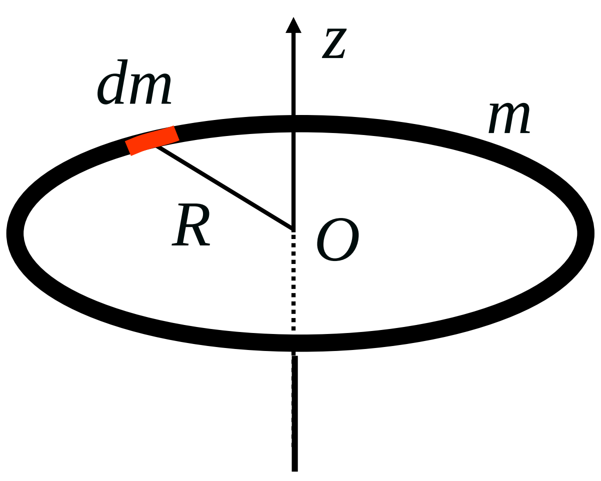
b）转轴过棒一端与棒垂直



$$I=\int r^2dm\quad=\int_0^l x^2\frac{m}{l}dx=\frac{1}{3}ml^2$$

可见转动惯量与刚体质量、质量分布、轴的位置有关。

（2）均匀细圆环

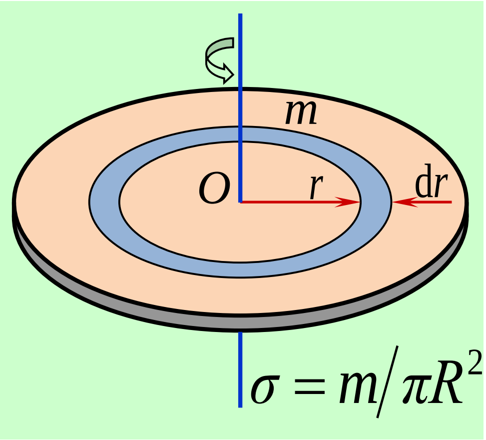


转轴过圆心与环面垂直，取

$$dm=\lambda dl,\qquad \lambda=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{2\pi R}}$$

$$I=\int R^2 dm=\lambda R^2\int_0^{2\pi R}dl=mR^2$$

（3）均匀圆盘绕中心轴的转动惯量



在盘上取半径为**r**，宽为**$\mathrm{d}r$**的圆环

圆环质量：

$$\mathrm{d}m=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

圆环绕轴的转动惯量：

$$dI=r^2\mathrm{d}m=2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r$$

圆盘绕轴的转动惯量为：

$$I=\int dI=\int_0^R 2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r=\frac{\sigma}{2}\pi R^4=\frac{1}{2}mR^2$$

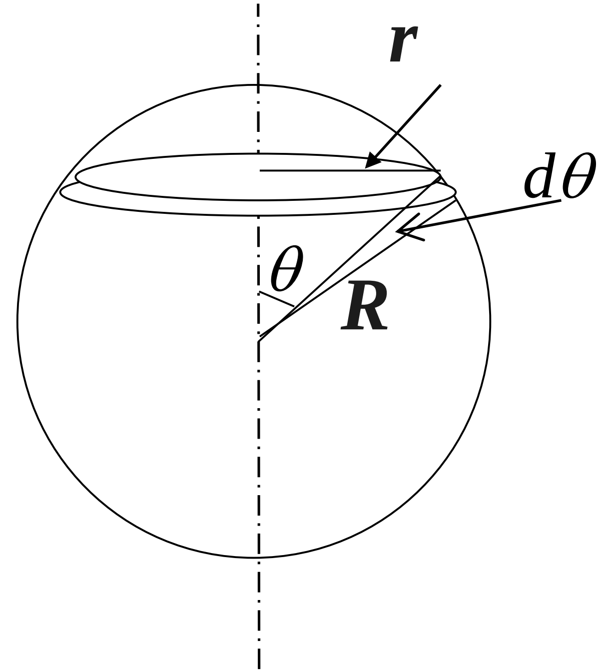
（4）均匀薄球壳(半径**R**、质量**m**)绕直径的转动惯量

该球壳的质量面密度为

$$\sigma=\frac{m}{4\pi R^2}$$

将球壳划分为许多小圆环，环面积为:

$$ds = 2\pi r \cdot Rd\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$



圆环质量:

$$dm = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

圆环绕轴的转动惯量:

$$\begin{aligned} dI &= r^2 dm \\ &= (R\sin\theta)^2 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi\sigma R^4 \sin^3\theta d\theta \end{aligned}$$

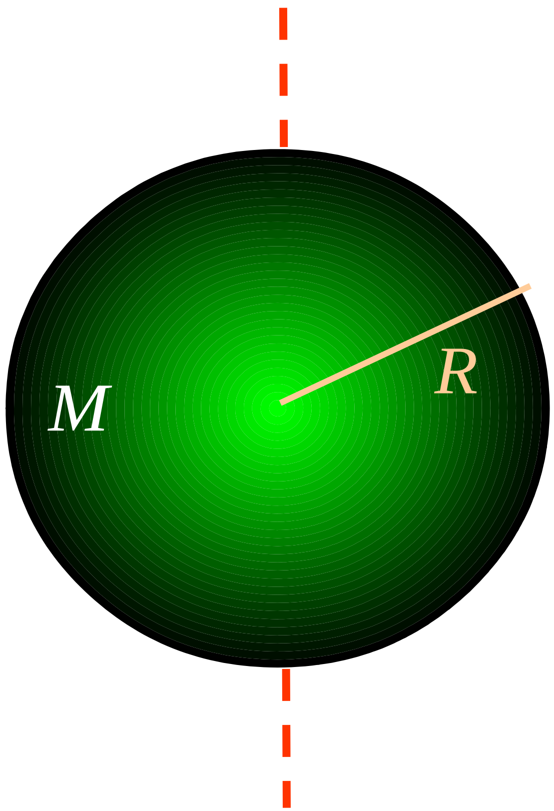
所以球壳的转动惯量为

$$I = \int dI = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 2\pi\sigma R^4 \left[-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta \right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{8}{3}\pi\sigma R^4 = \frac{2}{3} mR^2$$

（5）均匀球体(半径*R*、质量*m*)绕直径的转动惯量

把球体看作无数个同心薄球壳的组合。在球体上取半径为*r*，厚度为*dr*的球壳，该球壳的质量为



$$dm = \rho dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3m}{R^3} r^2 dr$$

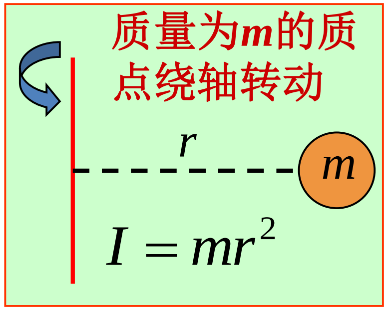
该球壳的转动惯量为

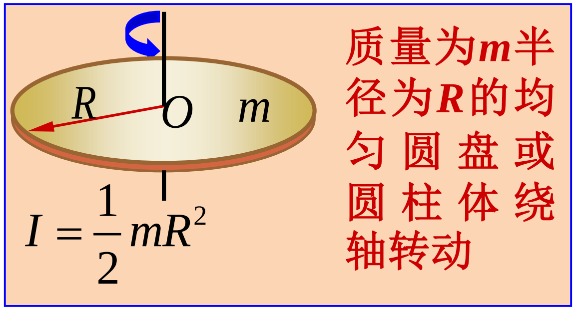
$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2m}{R^3} r^4 dr$$

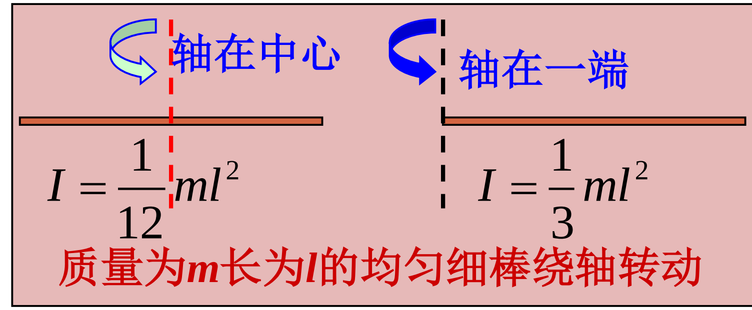
该球体的转动惯量是

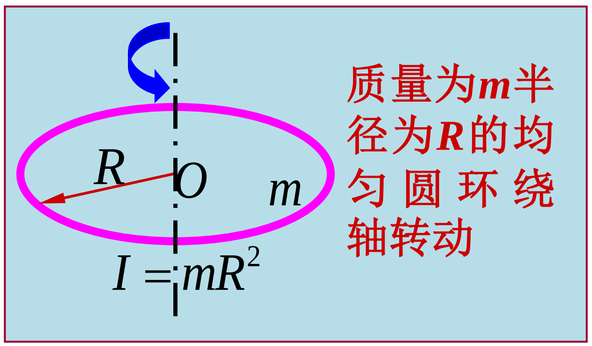
$$I = \int dI = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} mR^2$$

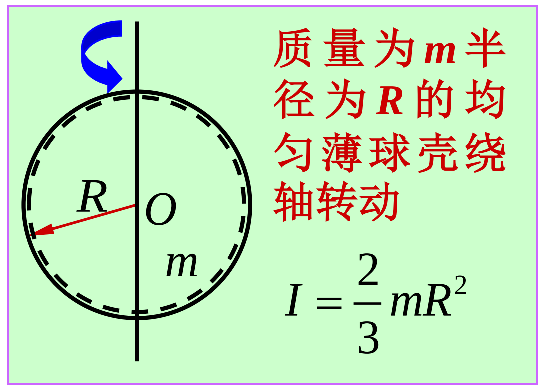
●几种常见刚体的转动惯量总结

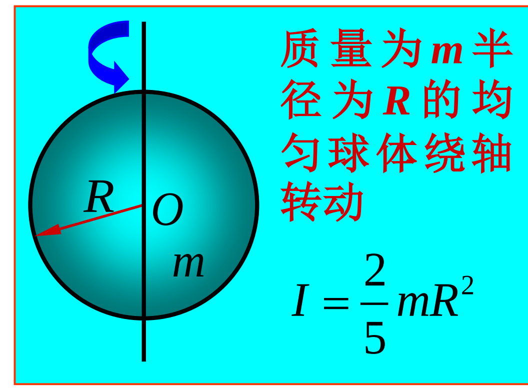












说明：

①刚体的转动惯量是由总质量、质量分布、转轴的位置三个因素决定；

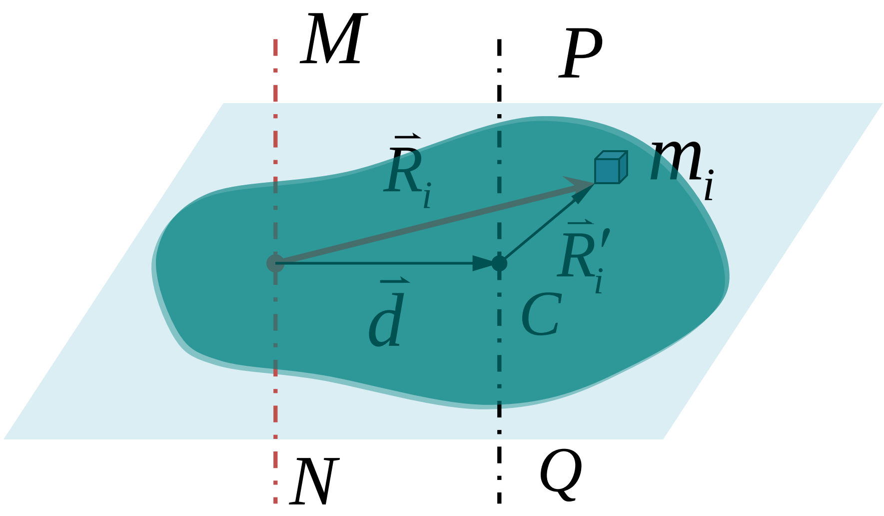
②同一刚体对不同转轴的转动惯量不同，凡是提到转动惯量，必须指明它是对哪个轴的才有意义。

6. 有关转动惯量的定理

(1)平行轴定理

取两个互相平行、间距为 **d** 的转轴

其中一个转轴通过刚体质心**C**



$$\vec{R}_i = \vec{R}_i' + \vec{d}$$

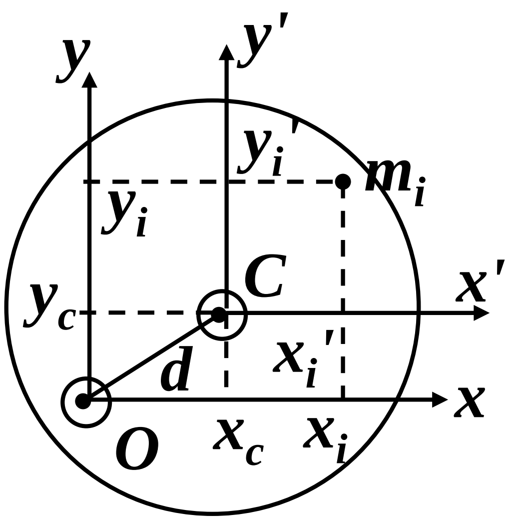
$$I_{MN} = \sum_i m_i \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i = \sum_i m_i \left(\vec{R}_i' + \vec{d}\right) \cdot \left(\vec{R}_i' + \vec{d}\right)$$

$$= \sum_i m_i \vec{R}_i' \cdot \vec{R}_i' + 2\sum_i m_i \vec{R}_i' \cdot \vec{d} + \sum_i m_i \vec{d} \cdot \vec{d}$$

$$= \sum_i m_i R_i'^2 + 2\left[\sum_i m_i \vec{R}_i'\right] \cdot \vec{d} + md^2$$

$$= I_C + md^2$$

$I_C = \sum_i m_i R_i'^2 \mapsto$ 对质心轴的转动惯量

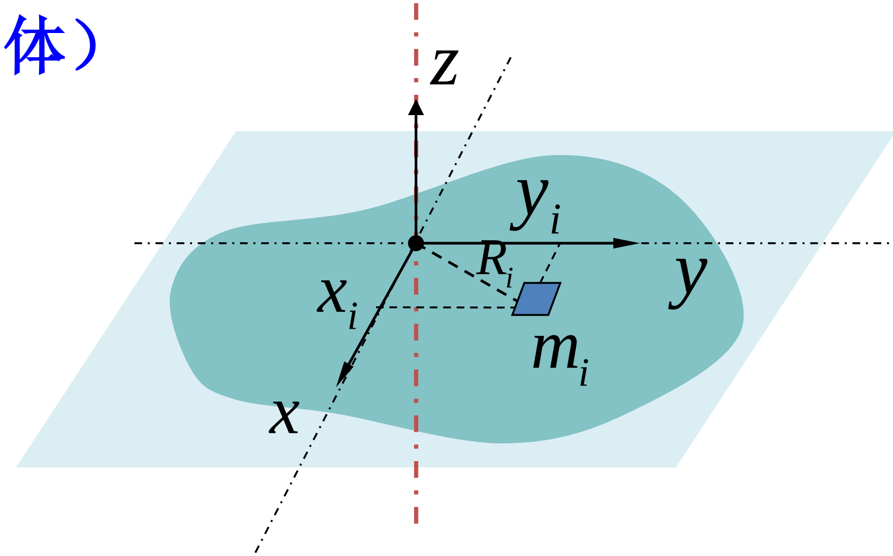


平行轴定理： $$\boxed{I_{MN} = I_C + md^2}$$

推论：刚体沿任何方向转动，绕通过质心的转轴的转动惯量最小。

(2)垂直轴定理（适用于二维平面刚体）

对于如图所示的薄板状刚体，取z轴垂直此平面，x、y轴取在平面。



薄板绕Ox轴的转动惯量：

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

薄板绕Oy轴的转动惯量：

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

薄板绕Oz轴的转动惯量：

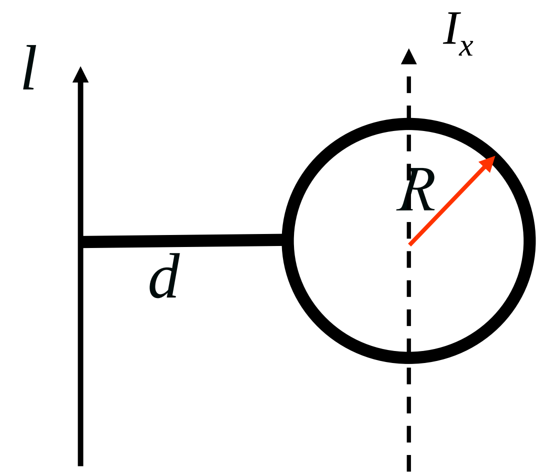
$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 + \sum_i m_i x_i^2 = I_x + I_y$$

垂直轴定理： $\boxed{I_x + I_y = I_z}$

(3) 组合定理

由几个部分组成的刚体对某轴的转动惯量，等于刚体各部分对该轴的转动惯量之和——转动惯量的组合定理。

例题1：如图, 圆环质量m_1，半径R，短棒质量m_2，长度d，求对l轴的转动惯量。



解：圆环转轴通过直径的转动惯量，
根据正交轴定理有

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

根据平行轴定理，圆环对转轴l的转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 (R + d)^2$$

因此，整个元件对l轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{3} m_2 d^2 + \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 (R + d)^2$$

7. 转动定律应用举例

当系统中既有转动物体, 又有平动物体时， 用隔离法解题。对转动物体用转动定律建立方程， 对平动物体则用牛顿定律建立方程。

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad M_z = I_z\beta$$

●应用转动定理和牛顿第二定律解题的思路

①明确已知条件和待求量，确定研究对象；

②取隔离体，受力分析；

③选坐标，应用转动定理或牛顿第二定律列方程；

④计算力矩和转动惯量；

⑤由约束关系补充运动学方程；

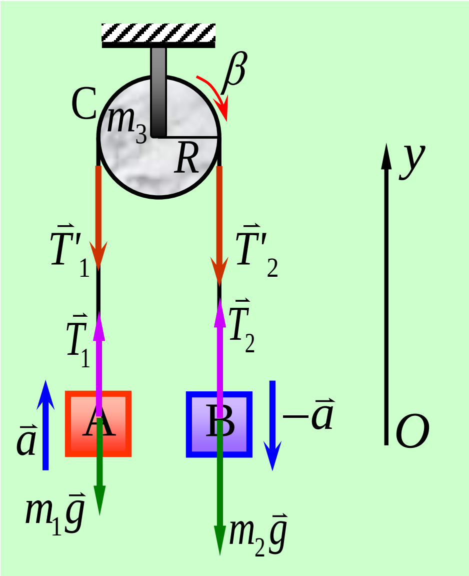
⑥求解，讨论。

例题2： 如图，一轻绳跨过一定滑轮*C*，滑轮视为匀质圆盘，绳的两端分别悬有质量为m_1和m_2的物体*A*和物体*B*，$m_1<m_2$. 设滑轮的质量为m_3，半径为*R*，滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计，绳与滑轮之间无相对滑动. **试求：**（1）物体的加速度和绳的张力；（2）若不计滑轮质量，结果如何？

解：（1）分别取*A*、*B*为质点，取图示*Oy*坐标系，受力分析如图。

由牛顿第二定律得

$$\begin{cases} \mathrm{A}: T_1 - m_1 g = m_1 a \\ \mathrm{B}: T_2 - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$



*C*为刚体，受力分析如图。

*C*绕定轴转动，由转动定理得

$$T_2' R - T_1' R = I\beta$$

由角加速度和切向加速度的关系得

$$a = R\beta$$

$$\because I=\frac{1}{2}m_3R^2,\quad T_1'=T_1,\quad T_2'=T_2$$

联立以上各式得

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3/2}g$$

$$T_1=\frac{2m_1m_2+m_3m_1/2}{m_1+m_2+m_3/2}g$$

$$T_2=\frac{2m_1m_2+m_3m_2/2}{m_1+m_2+m_3/2}g$$

$$\boldsymbol{T_1\neq T_2}$$

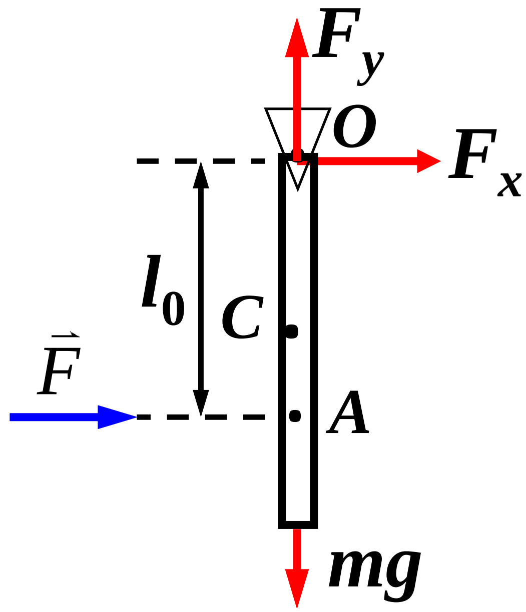
(2) 当m_3=0时有

$$T_1=T_2=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

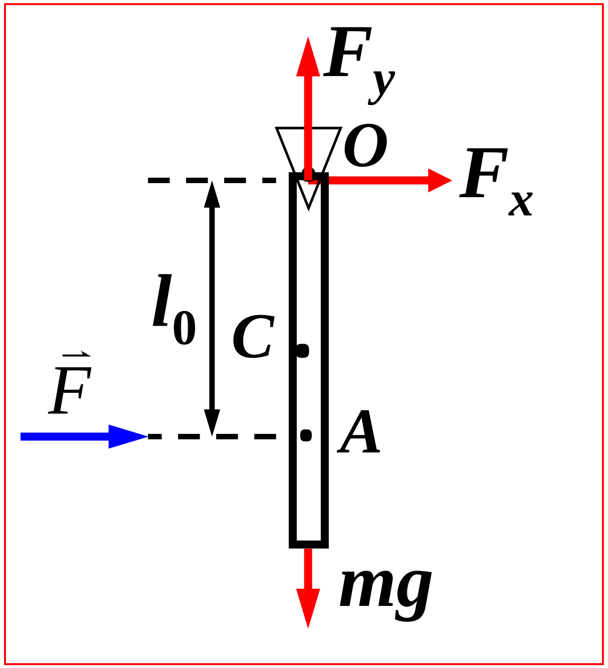
$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$$

例题3：“打击中心”问题

细杆：质量为m，长度为l，轴O，在竖直位置静止。若在某时刻有力作用在A处，求轴对杆的作用力。



解： 可通过转动定律求细杆的转动，再求质心加速度。利用质心运动定理求支反力。



如图示，除力F外，系统还受重力、轴的支反力等。但这两个力对轴的力矩＝0。只有F对细杆的运动有影响，对转轴O的力矩为：

$$M = l_0 F$$

应用转动定律

$$M = I\beta \Rightarrow \beta = \frac{M}{I} = \frac{l_0 F}{I} = \frac{3 l_0 F}{m l^2}$$

进一步应用质心运动定律可得

$$\vec{F} + m\vec{g} + (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y) = m\vec{a}_c$$

质心运动定律分量式：

$$\begin{cases} F_\tau = F + F_x = ma_{c\tau} = m\dfrac{l}{2}\beta = \dfrac{3l_0}{2l}F \\ F_n = F_y - mg = ma_{cn} = m\dfrac{l}{2}\omega^2 \simeq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = \frac{3l_0F}{ml^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_y \simeq mg \\ F_x = \left(\dfrac{3l_0}{2l} - 1\right)F \end{cases}$$

所以有

$$F_x < 0,\quad l_0 < \frac{2}{3}l$$

$$F_x = 0,\quad l_0 = \frac{2}{3}l$$

$$F_x > 0,\quad l_0 > \frac{2}{3}l$$

- 网球拍

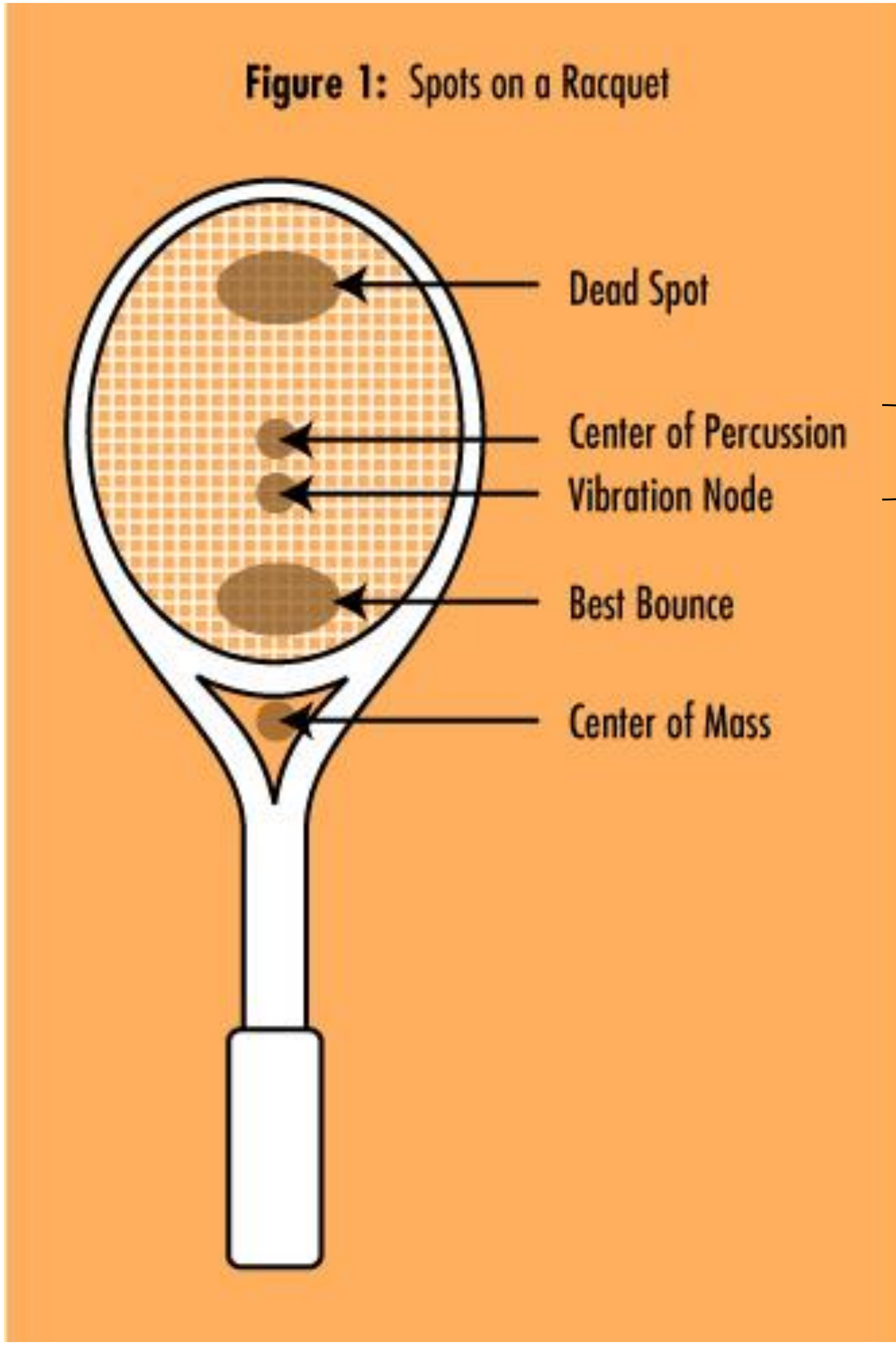


Figure 1: Spots on a Racquet

the sweet spot

例题4： 一粒子弹水平射入一静止悬杆的下端，穿出后速度损失 3/4，求子弹穿出后棒的角速度ω 。已知轴处自由 。

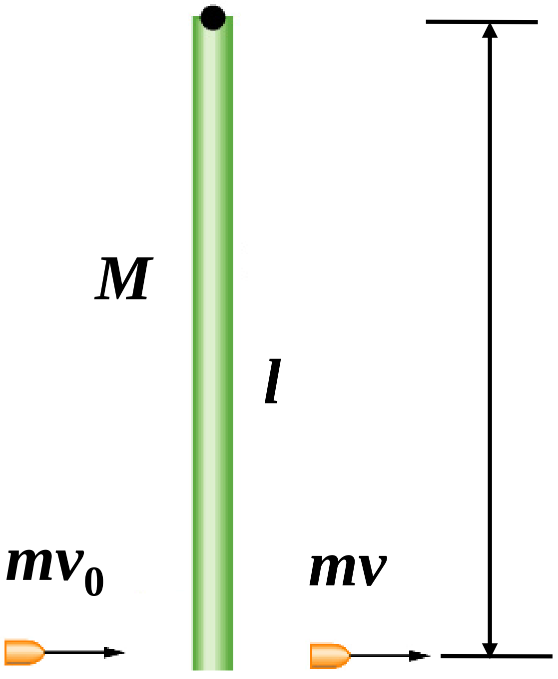
解： 取子弹与杆组成的系统作为研究对象。系统角动量守恒

$$mv_0 l = mvl + \frac{1}{3}Ml^2\omega, \qquad v = \frac{1}{4}v_0$$

故可得

$$\omega = \frac{9mv_0}{4Ml}$$

再次见到，用系统的方法处理问题，简捷明了。



§ 10.3 刚体定轴转动的动能定理

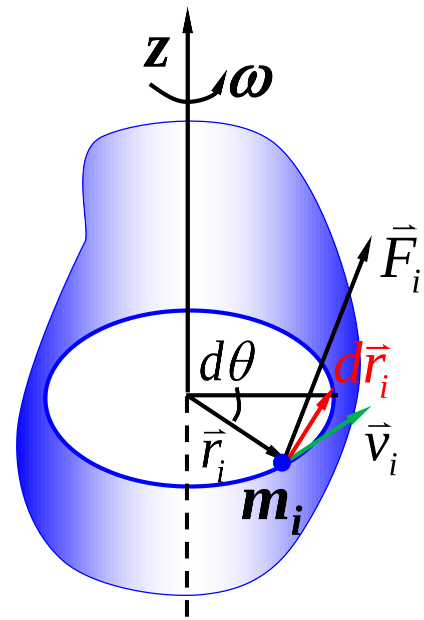
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$$

1.力矩的功

刚体中质元 m_i 上的外力 $\vec{F}_i$ 的作用下位移 $d\vec{r}_i$，则元功为

$$dW_i=\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i=\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i dt=\vec{F}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)dt$$
$$=\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)dt=\vec{\omega}\cdot\vec{M}_i dt$$
$$=M_{i,z}\omega dt=M_{i,z}d\theta$$

$$\Rightarrow dW=\sum_i dW_i=\sum_i M_{i,z}d\theta_i=M_z d\theta$$



对有限角位移

$$W=\int_{\theta_0}^{\theta}dW=\int_{\theta_0}^{\theta}M_z\mathrm{d}\theta'$$

作用于刚体的外力的功，等于外力对该轴的合力矩与转角的乘积。

力矩的功率：
$$P=\frac{dW}{dt}=M_z\frac{d\theta}{dt}=M_z\omega$$

注：力矩的功实际上是力的功在转动中的特殊形式！

2. 定轴转动刚体的动能

当刚体绕定轴转动时，其动能为所有质点作圆周运动动能的总和。

任意质元m_i的动能为：

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_i v_i^2$$

则刚体的动能为

$$E_k=\sum E_{ki}=\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum\frac{1}{2}m_i R_i^2\omega^2=\frac{1}{2}(\sum m_i R_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}I_z\omega^2$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}I_z\omega^2}$$

刚体转动动能

3. 定轴转动刚体的动能定理

$$W_{外}=\int_{\theta_0}^{\theta}M_z d\theta=\int I_z\beta d\theta=I_z\int\frac{d\omega}{dt}\cdot d\theta=I_z\int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega=\frac{1}{2}I_z\omega^2-\frac{1}{2}I_z\omega_0^2$$

上式即为：

$$\boxed{W_{外}=E_k-E_{k0}}$$

刚体定轴转动的动能定理：作用于刚体的外力 对固定轴的力矩所做的功等于刚体绕定轴转动动能的改变量。

注：刚体的内力不作功。

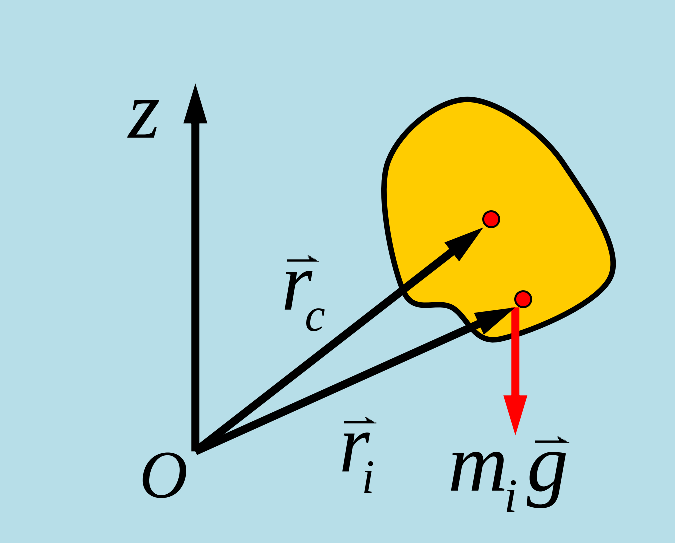
4. 刚体的重力势能

刚体和地球系统的重力势能：

以地面为零势能点，质元 m_i的重力势能为

$$\Rightarrow E_p = \sum m_i g z_i$$

$$= mg\left(\frac{\sum_i m_i z_i}{m}\right) = mgz_c$$



刚体的重力势能与质量集中在质心上的一个质点的重力势能相同。

若刚体在转动过程中，只有重力矩做功，则刚体系统机械能守恒：

$$\boxed{\frac{1}{2}I_z\omega^2 + mgz_c = \text{const.}}$$

刚体转动的机械能守恒

质点的运动规律和刚体定轴转动规律的对比(一)

质点的平动	刚体的定轴转动
速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{dt}}$
加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	角加速度 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}$
质量$\boldsymbol{m}$，力$\boldsymbol{F}$	转动惯量$\boldsymbol{I_z}$，力矩$\boldsymbol{M_z}$
力的功 $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$	力矩的功 $W = \int_{\theta_a}^{\theta_b} M_z d\theta$
动能 $\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2} mv^2}$	转动动能 $E_k = \dfrac{1}{2} I_z \omega^2$
重力势能 $E_p = mgz$	重力势能 $E_p = mgz_C$

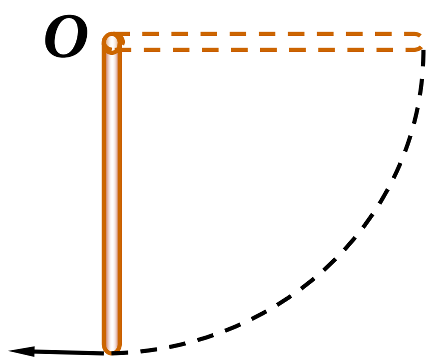
质点的运动规律和刚体定轴转动规律的对比(二)

质点的平动	刚体的定轴转动
运动定律 $\vec{F} = m\vec{a}$	转动定律 $M_z = I_z \beta$
动量定理 $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$	角动量定理 $M_z = \dfrac{d(I_z \omega)}{dt}$
动量守恒 $\sum_i \boldsymbol{m_i v_i} = \mathbf{const.}$	角动量守恒 $\sum I_z \omega = \text{const.}$
动能定理 $W = \Delta E_k$	动能定理 $W = \Delta E_k$
机械能守恒 $E_k + E_p = \text{const.}$	机械能守恒 $E_k + E_p = \text{const.}$

例题5: 均质杆的质量为*m*，长为*l*,一端为光滑的支点。最初处于水平位置，释放后杆向下摆动，如图所示。

（1）求杆在图示的竖直位置时，其下端点的线速度*v*;

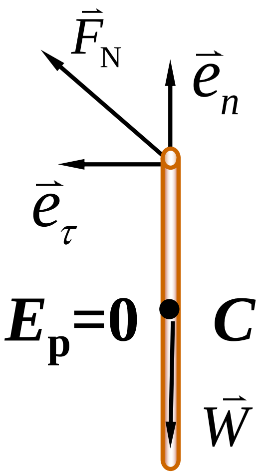
（2）求杆在图示的竖直位置时，杆对支点的作用力。



解: (1)由机械能守恒得

$$mgz_c+\frac{1}{2}I\omega^2=0$$

$$z_c=-\frac{1}{2}l \qquad \boldsymbol{I=\frac{1}{3}ml^2}$$



联立得 $$v=\omega l=\sqrt{\frac{3g}{l}}\,l=\sqrt{3gl}$$

(2)根据质心运动定理 $$\vec{F}_\mathrm{N}+\vec{W}=m\vec{a}_c$$

分量式 $$\begin{cases} F_\mathrm{Nn}-mg=m\dfrac{v_c^2}{r_c} \\ F_{\mathrm{N}\tau}=ma_{c\tau} \end{cases}$$

杆处于铅直位置时不受力矩作用，由转动定理，角加速度为零,所以

$$a_{c\tau}=\beta r_c=0 \Rightarrow F_{\mathrm{N}\tau}=0$$

此外

$$r_c = \frac{1}{2}l, \quad v_c = \omega r_c = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{Nn}} = mg + m\frac{v_c^2}{r_c} = mg + \frac{3}{2}mg = \frac{5}{2}mg$$ 方向向上。

【思考题】杆子在任意位置时的角速度、角加速度以及对支点处的作用力。

§ 10. 4 平面平行运动

刚体作平面平行运动时，各点始终和某一平面保持一定的距离，或者说刚体中各点都平行于某一平面而运动。

1.刚体的平面运动特点

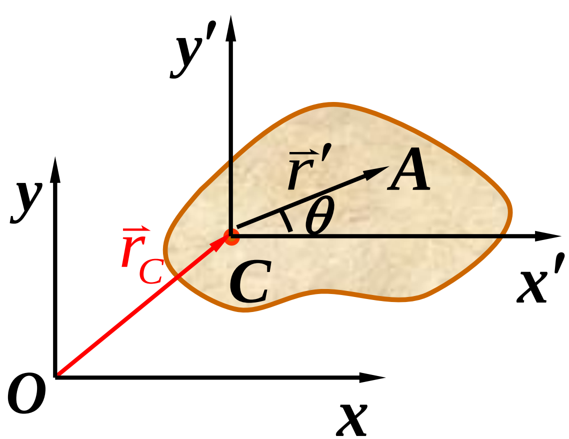
①每一质元轨迹都是一条平面曲线；

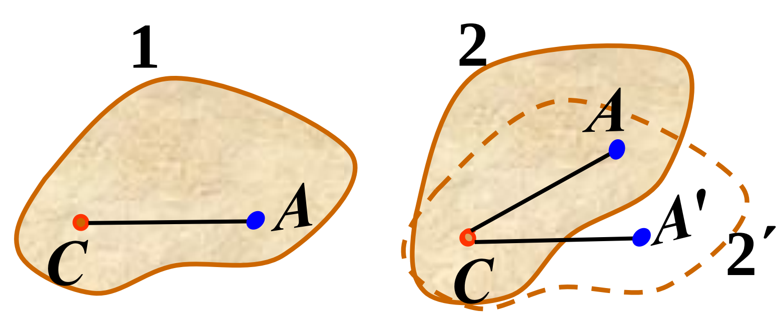
②刚体内垂直于固定平面的直线上的各点，运动状况都相同；

③可用与固定平面平行的平面在刚体内截出一平面图形来代表刚体。

2. 平面平行运动的运动方程

建立坐标系*Oxyz*，使平面图形在*Oxyz*面内，*z*轴与屏幕垂直。





在平面上任取一点C，称为基点，通常我们选择质心为基点，以基点C为坐标原点建立坐标系$Cx'y'z'$，两坐标系对应的坐标轴始终两两平行。

转轴与固定平面垂直

刚体平面运动 = C点平动 + 绕C点的定轴转动

$$\begin{cases} \vec{r}_C(t) = x_C(t)\vec{e}_x + y_C(t)\vec{e}_y \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

平面平行运动的运动方程

刚体上任意一点A点相对于Oxyz系的位置矢量

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}'$$

$\vec{r}'$ 是A点相对于C点的位矢，由平动参考系的速度合成率可得

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_C + \vec{v}'$$

刚体绕过基点的转动角速度为 $\vec{\omega}$

$$\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}' \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

刚体上任意一点的加速度为： $\vec{a}=\vec{a}_C+\vec{\beta}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

2. 刚体平面运动的基本动力学方程

刚体平面平行运动 = C点平动 + 绕C点的定轴转动

- 质心的运动

利用质心运动定理，求质心的运动

$$\boxed{\vec{F}_{ex}=m\vec{a}_c} \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_c=F_{ex,x} \\ m\ddot{y}_c=F_{ex,y} \end{cases}$$

- 刚体绕质心的转动

选质心坐标系 $Cx'y'z'$,设z'为过质心而垂直于固定平面的轴， 在质心系中，角动量定理的形式和惯性系中相同

$$M_z'=\frac{dL_z'}{dt}=\frac{d(I_{cz}\omega)}{dt}=I_{cz}\beta \Longrightarrow \boxed{M_z'=I_{cz}\beta}$$

平面平行运动有3个自由度，利用上述三个方程完全描述运动，称为刚体平面运动的基本动力学方程。

3. 刚体平面运动的动能和功能原理

由质点系动能的柯尼希定理知，刚体平面平行运动中动能可以表为质心的平动动能与绕质心的转动动能之和，即

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}mv_C{}^2 + \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2}$$

由质心运动定理

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}_{ex} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_c^2(t) - \frac{1}{2}mv_c^2(t_0) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{ex} \cdot d\vec{r}_c$$

由质心系角动量定理

$$I_{cz}\frac{d\omega}{dt} = M_z' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2(t) - \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2(t_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z' d\theta$$

因此，刚体平面平行运动的功能原理为

$$\boxed{E_k(t) - E_k(t_0) = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{ex} \cdot d\vec{r}_c + \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z' d\theta}$$

如果作用在刚体上的力仅为保守力，必然导致机械能守恒，即

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2 + E_p = const}$$

4. 滚动

有滑滚动——接触面之间有相对滑动的滚动(摩擦力不够大);

无滑滚动——接触面之间无相对滑动的滚动(摩擦力足够 大) 也称纯滚动。

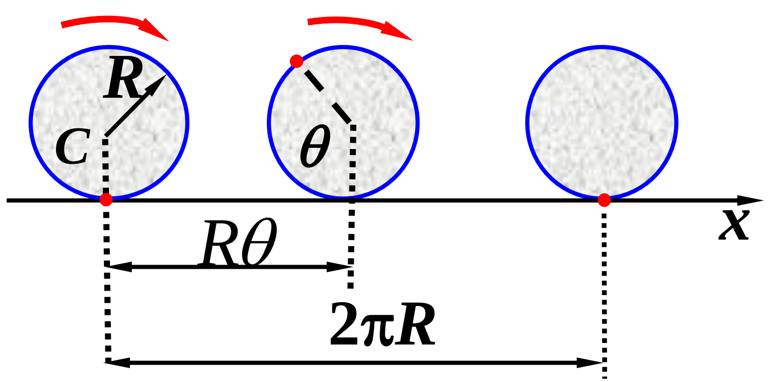
①纯滚动的运动学判据： $x_c = R\theta \Rightarrow v_c = R\omega \Rightarrow a_c = R\beta$

当柱体绕中心转动，其中心轴前进的距离

$$x_c = R\theta$$

对时间微分 $v_c = R\omega$

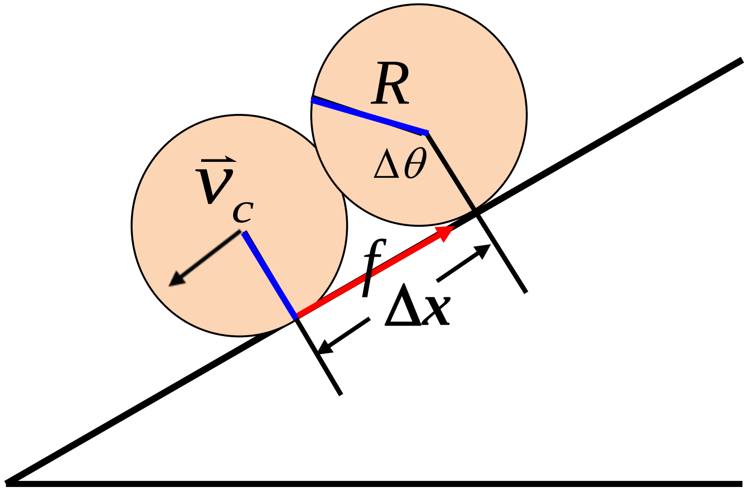
再对时间微分 $a_c = R\beta$



②静摩擦力不作功

如图，静摩擦力做功可以用刚体平面平行运动的功能原理写为

$$W = \int \vec{f} \cdot d\vec{r}_c + \int M_z' d\theta$$
$$= f\Delta x - fR\Delta\theta$$



根据运动学判据， 有

$$\Delta x = R\Delta\theta$$

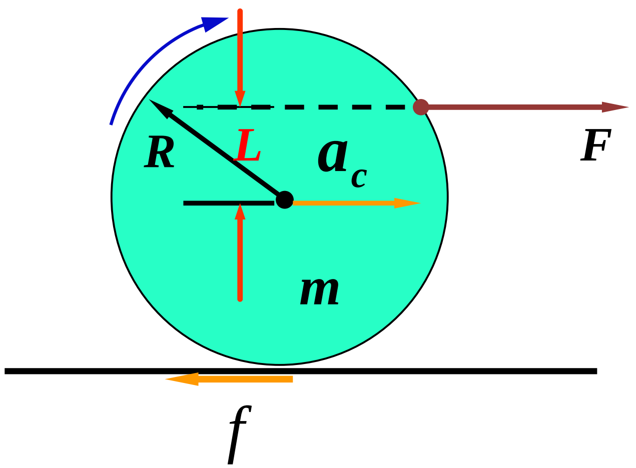
$$\therefore\ W = f\left(\Delta x - R\Delta\theta\right) = 0$$

③确定静摩擦力的方向：假定两刚性表面不存在摩擦，判定刚体与承滚面相接触的那一点将向何方运动，则作用在此刚体的静摩擦力方向必与其反向。

例题6： 一质量为m，半径为R的均质圆柱，在水平外力F作用下，在粗糙的水平面上作纯滚动，力的作用线与圆柱中心轴线的垂直距离为L，求：质心的加速度和圆柱所受的静摩擦力。

解: 设静摩擦力f的方向如图所示，则由质心运动方程

$$F - f = ma_C$$



圆柱对质心的转动定律：

$$FL + fR = I_C\beta$$

纯滚动条件

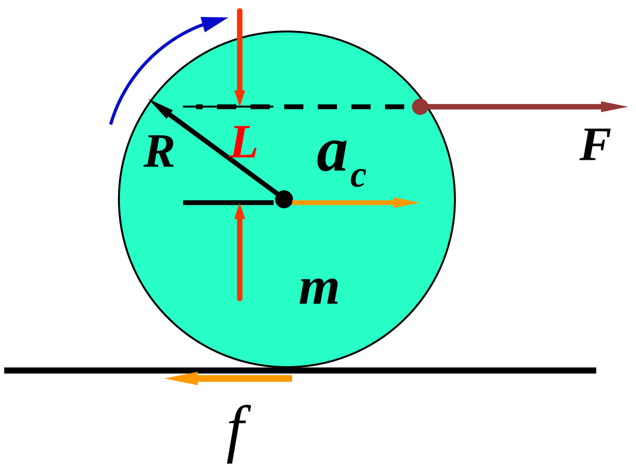
$$a_C = R\beta$$

圆柱对质心的转动惯量为

$$I_C = \frac{1}{2}mR^2$$

联立以上四式，得

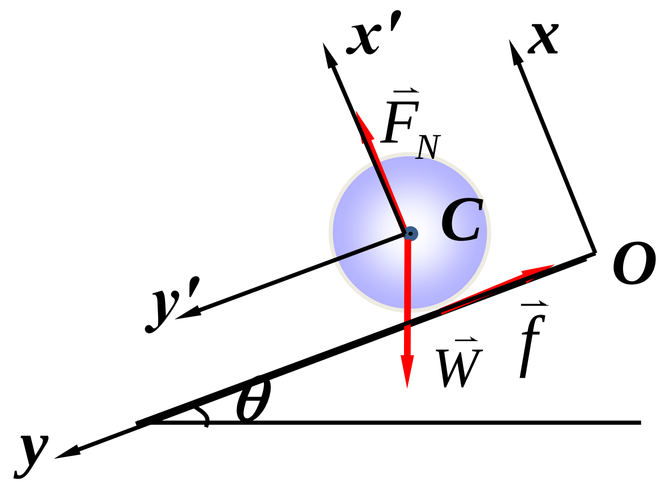
$$\begin{cases} a_C = \dfrac{2F(R+L)}{3mR} \\ f = \dfrac{R-2L}{3R}F \end{cases}$$



由此可见

$$\begin{cases} L < R/2,\ f > 0 \mapsto \text{静摩擦力向后} \\ L > R/2,\ f < 0 \mapsto \text{静摩擦力向前} \\ L = R/2,\ f = 0 \mapsto \text{无摩擦力} \end{cases}$$

例题7：如图，固定斜面倾角为θ，质量为 m 半径为 R 的均质圆柱体顺斜面向下作无滑滚动，求圆柱体质心的加速度a_c，斜面作用于柱体的摩擦力f 以及滚到斜面底部时质心的速率。



解： 根据质心运动定理

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} + \vec{W} + \vec{f} = m\vec{a}_c$$

y 轴上投影

$$mg\sin\theta - f = ma_c$$

对质心轴的转动定理：$fR = I\beta = \dfrac{1}{2}mR^2\beta$

无滑滚动：$a_c = R\beta$

$$\Rightarrow a_c = \frac{2}{3}g\sin\theta, \quad f = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

滚到斜面底端时质心的速率?

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin\theta \Rightarrow v_c = a_c t = \frac{2}{3} g \sin\theta t \Rightarrow y = \frac{1}{2} a_c t^2 = \frac{1}{3} g \sin\theta t^2$$

当圆柱体滚到斜面底端时

$$y = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{3} g \sin\theta t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3h}{g \sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{3h/g}}{\sin\theta}$$

所以此时的质心速率为

$$v_c = \frac{2}{3} g \sin\theta t \quad = \frac{2}{3} g \sin\theta \frac{\sqrt{3h/g}}{\sin\theta} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

解法二： 因为是无滑滚动，静摩擦力f不做功，只有重力W做功，

所以机械能守恒：

$$\left.\begin{aligned} & \boldsymbol{mgh = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2} \\ & \text{无滑滚动条件：}\ \boldsymbol{v_c = \omega R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

§ 10.5 刚体的定点运动

陀螺：绕对称轴高速旋转的刚体称为陀螺，或称回转仪

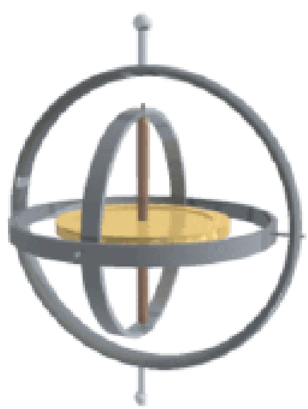
陀螺在运动过程中通常有一点保持固定，故属刚体的定点运动。利用角动量和角速度的矢量性质，可以解释陀螺的运动。

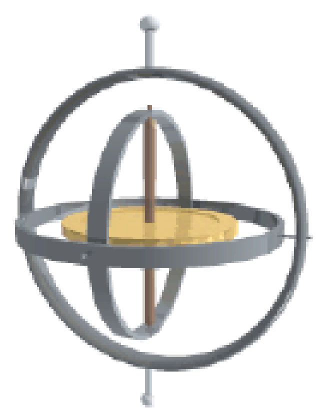
1. 自由陀螺

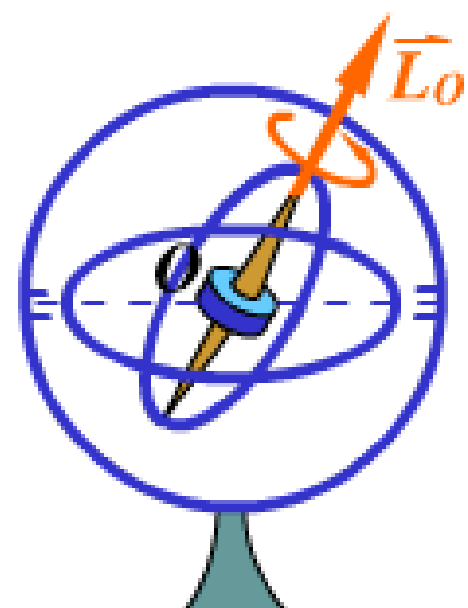
自由陀螺： $\vec{M}_O = 0$

由角动量定理可得 $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = 0 \quad \Rightarrow \vec{L}_O = \text{常矢量}$

当高速旋转着的陀螺不受外力作用时，其角动量守恒，陀螺将保持其自转轴的方位和自转角速度不变。

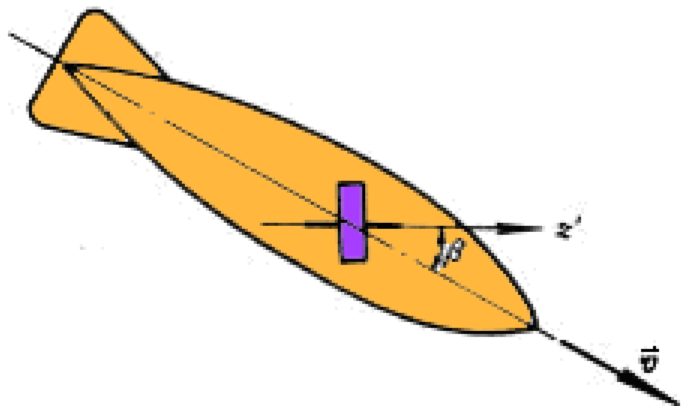






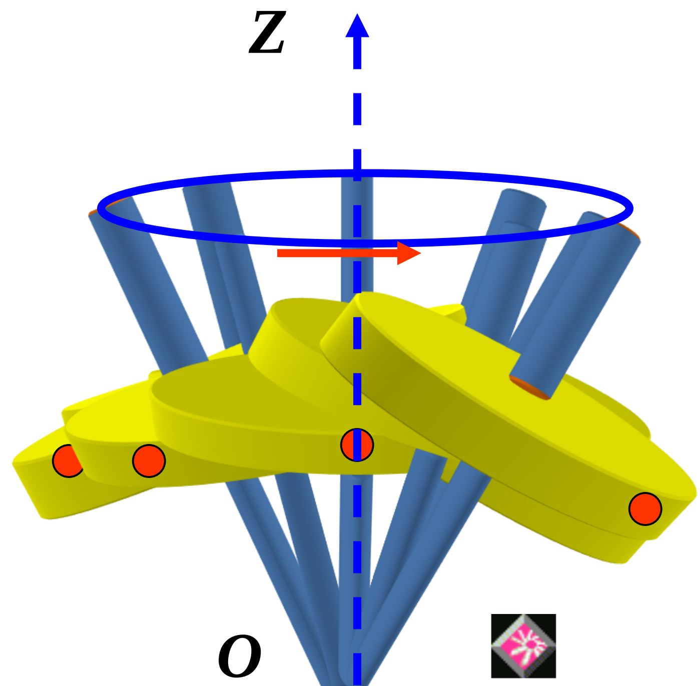
●大小不变表现为转体以恒定角速率转动，方向不变表现为转体的轴线在空间的方位始终不变；

●应用:可用陀螺仪轴线作为标准，安装在导弹、飞机、坦克或舰船中，随时指出它们在空间的方位，以便进行自动调整。



2. 陀螺的进动

进动：刚体绕自身对称轴高速旋转时，其自转轴绕另一轴的缓慢转动称为进动（又称旋进）。



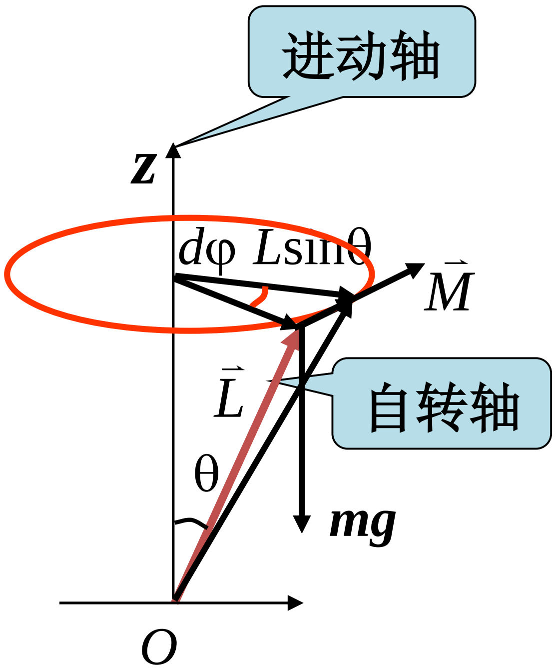
应用程序

●进动的解释

对固定点O，陀螺只受重力矩的作用，即

$$\vec{M}=\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{g})=\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{g}$$

$$=\frac{1}{m}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\times m\vec{g}=\vec{r}_c\times m\vec{g}$$



根据刚体角动量定理

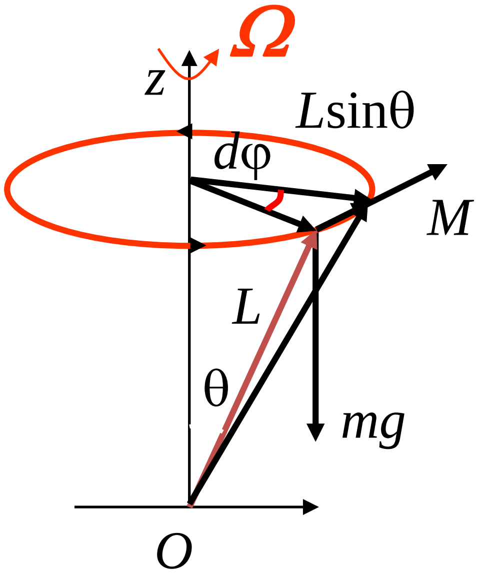
$$d\vec{L}=\vec{M}dt$$

即角动量的变化量 $d\vec{L}$ 应像 $\vec{M}$ 一样垂直于 $\vec{L}$。$\vec{L}$ 的顶端绕一水平圆周运动。陀螺自转轴绕竖直轴的转动即为进动。又如图

$$dL=L\sin\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow d\varphi=\frac{dL}{L\sin\theta}=\frac{Mdt}{L\sin\theta}=\frac{r_c mg\sin\theta dt}{L\sin\theta}=\frac{r_c mg}{L}dt$$

其中$\boldsymbol{L}$是陀螺的自转角动量，为陀螺绕其对称轴旋转的转动惯量$\boldsymbol{I}$与自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的乘积。因此，陀螺的进动角速度为



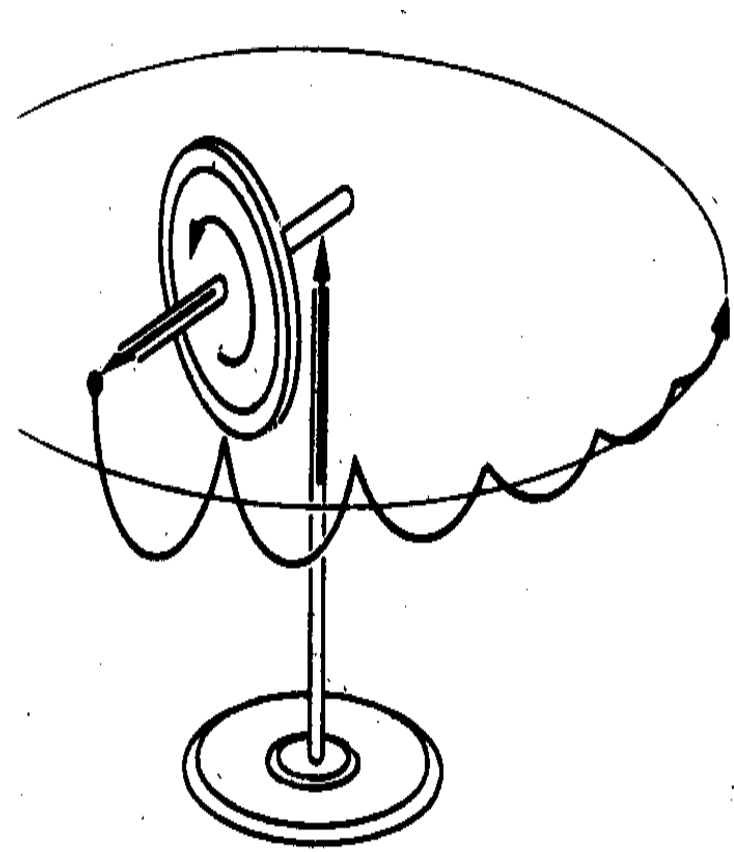
$$\Omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{mgr_c}{L}=\frac{\boldsymbol{mgr_c}}{\boldsymbol{I\omega}}$$

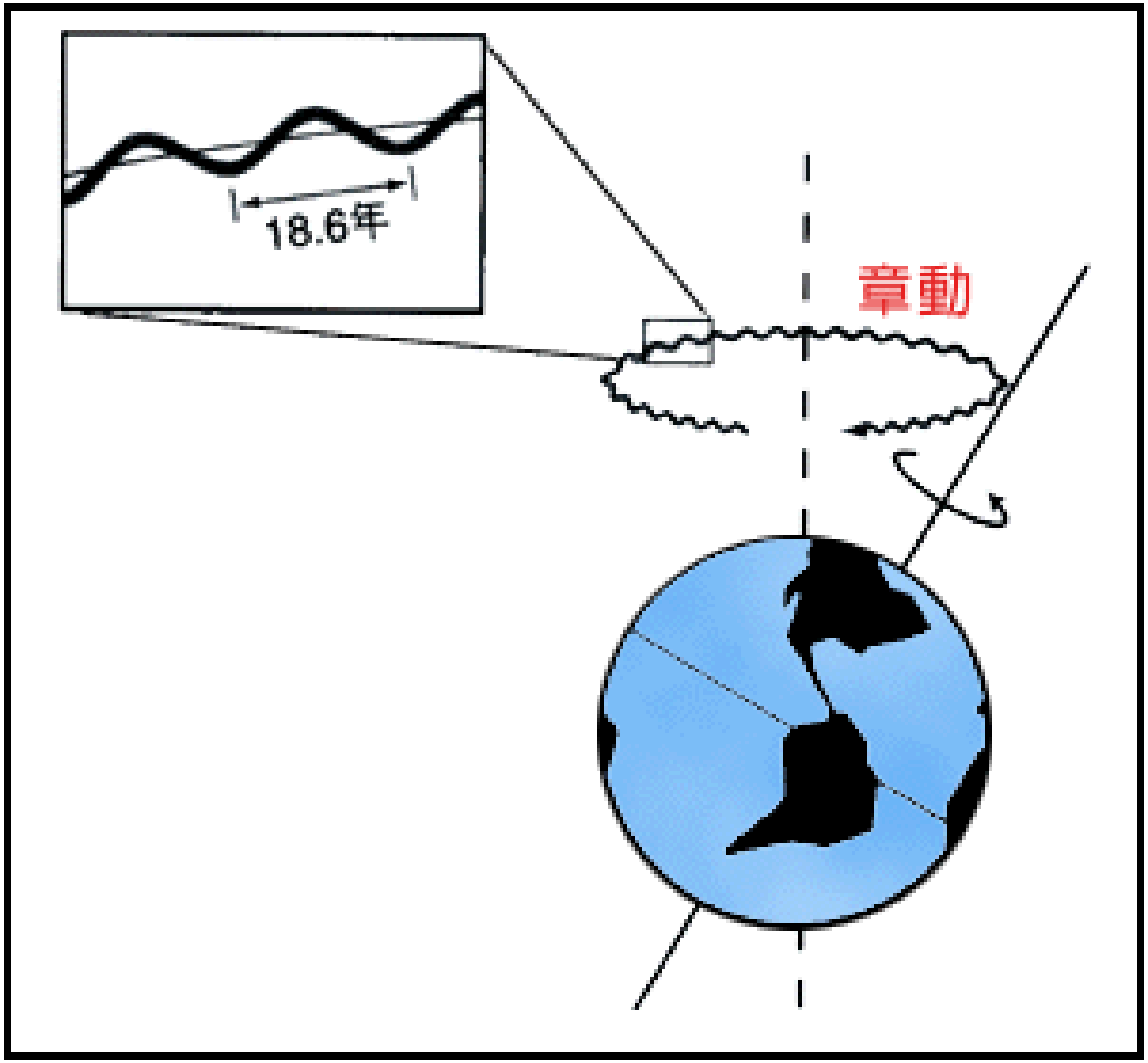
由此可见，陀螺的进动角速度随着自转角速度的 ω 增大而减少，与角度$\boldsymbol{\theta}$无关。

3. 刚体的章动

章动：刚体在进动的过程中还伴有上，下的周期运动，称为章动。

章动，拉丁语中是“点头”的意思。地球除进动外，也有章动。地轴的章动是英国天文学家布拉得雷（J.Bradley）于是1748年分析了20年的观测资料后发现的。地球章动的周期为18.6年，近似地说，就是19年。在我国古代历法中把19年称为一“章”，这便是中译名“章动”的来源。




18.6年
章動