第九章　机械振动

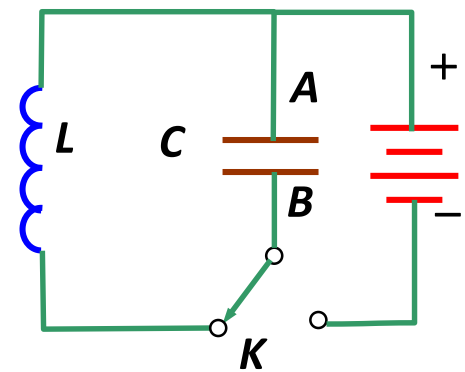
§9.1简谐振动

●振动：任何一个物理量在某一数值附近的反复变化。振动具有重复性和周期性。

➢振动是普遍存在的一种运动形式

①物体的来回往复运动(弹簧振子、单摆等)

②电流、电压的周期性变化。



●机械振动：物体在一定位置附近作周期性往复运动。

1. 简谐振动的特征及其表达式

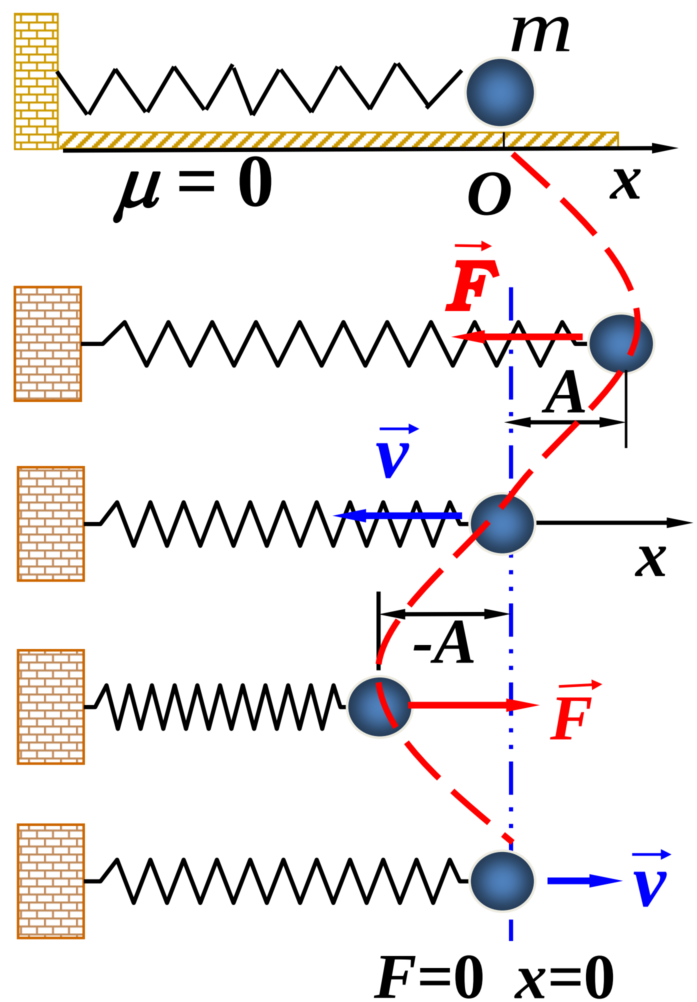
弹簧振子——轻弹簧与物体m组成的系统。

物体只受弹力作用

$$F_x = -kx$$

其中k弹性系数

弹簧振子的运动



弹力的两个特点

① 弹力的指向总是与位移x的方向反向，总是指向平衡位置。

② 弹力的大小正比于位移x的大小。

由牛顿定律：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$，则有

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

方程的解为： $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$ **A与φ_0 由初始条件定**

——简谐振动的运动方程

速度表达式：

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$= \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

加速度表达式：

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$= \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

2. 描述简谐振动的特征参量

①周期、频率和角频率

周期(T)——系统作一次完整振动所需时间。

$$x(t)=x(t+T)\ ,\quad v(t)=v(t+T)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A\cos[\omega_0(t+T)+\varphi_0]\\-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=-A\omega_0\sin[\omega_0(t+T)+\varphi_0]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\omega_0 T=2n\pi,\ n=1,2,3,\dots$$

T 的最小值： $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}}$

频率 ν ： $\boxed{\nu=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega_0}{2\pi}}$

角频率 ω_0： $\boxed{\omega_0=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{T}}$

T、 ν 和ω_0由振动系统本身的性质决定, 振幅A无关，这是简谐振动的重要特征。

②相位和初相位

相位：决定简谐运动状态的物理量 $\omega_0 t+\varphi_0$

初相：决定初始时刻物体运动状态的物理量 φ_0

相位比时间更直接更清晰地反映振子运动的状态。

③振幅

振幅*A*——— 物体离开平衡位置最大位移的绝对值。

●初始条件决定振幅和初相位

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad v=\frac{dx}{dt}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

设 $t=0,\ x=x_0\ ,v=v_0$

则 $x_0=A\cos\varphi_0, \quad v_0=-A\omega_0\sin\varphi_0$

$$\Rightarrow A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \qquad \tan\varphi_0=-\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件（两个）决定。

例题1：一放置在水平桌面上的弹簧振子，周期为***0.5 s***。当 t=0时，$x_0 = -1.0\times10^{-2} m, v_0 = 0.218 m\cdot s^{-1}$

求：运动方程？

解：$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\pi(s^{-1}), A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 2.0\times10^{-2}(m)$$

$$tg\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{4}{3}\pi$$

代入简谐振动表达式，则有

$$x = 2.0\times10^{-2}\cos(4\pi t + \frac{4}{3}\pi)(m)$$

3、常见的简谐振动

①竖直悬挂的弹簧振子

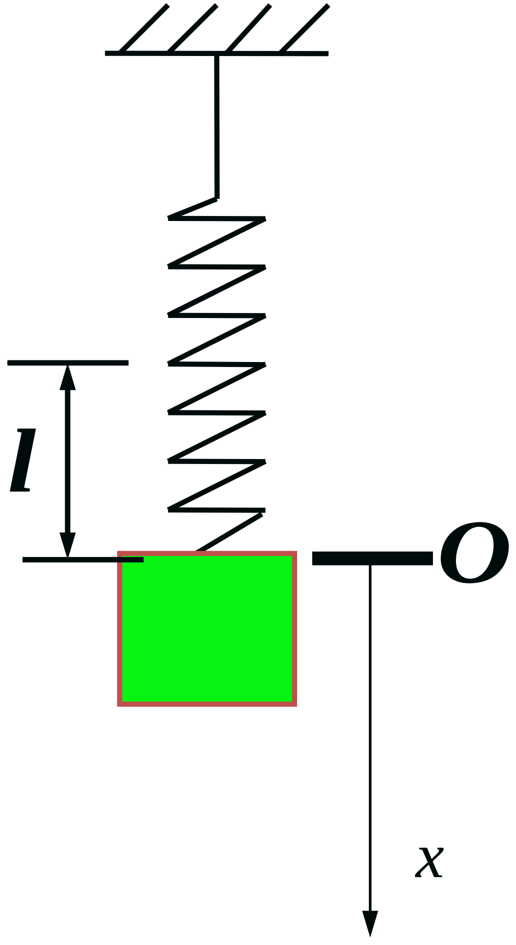
选平衡位置为坐标原点，

平衡时，弹簧伸长量为：

$$mg = kl$$

物体位移为x时，物体所受合力

$$F = mg - k(l + x) = -kx$$



由牛顿第二定律有

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

故物体仍做简谐振动，角频率为 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

②单摆

单摆在拉力和重力作用下做圆周运动，利用切向的牛顿方程可得

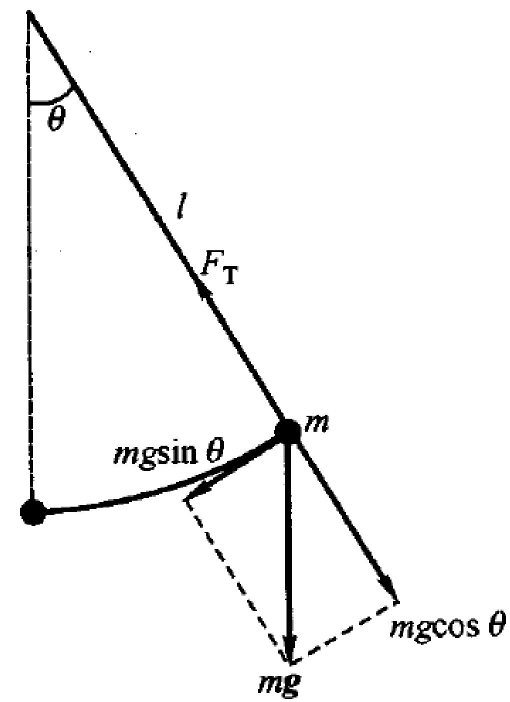
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

在角度很小时有

$$\sin\theta \approx \theta$$

于是单摆的运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

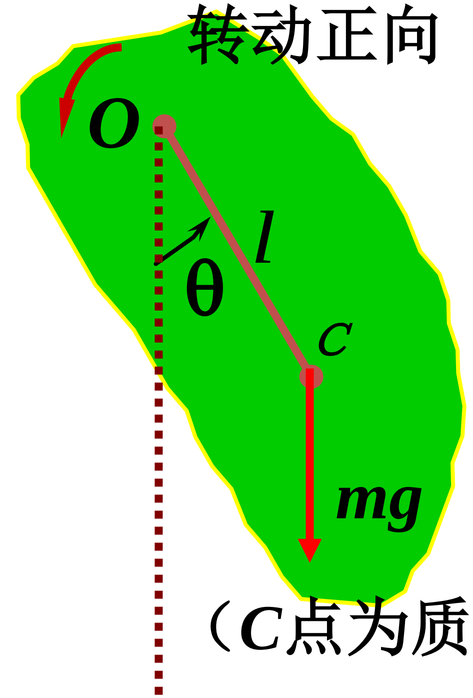


表明：单摆的运动也是简谐振动，故

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

③复摆是绕一固定的水平轴，在重力作用下，作微小摆动的刚体。

O表示复摆的转轴，**C**表示复摆的质心。**OC**与铅直方向的夹角为θ，它是描述刚体位置的变量。当**OC**在铅直线上时，$\theta=0$，为平衡位置。刚体绕**O**轴转动的力矩是由重力**mg**提供的



（**C**点为质心）

$$M = -mgl\sin\theta$$

由转动定律

$$M = I\beta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

小角度时 $\sin\theta \approx \theta$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{I}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

角频率：

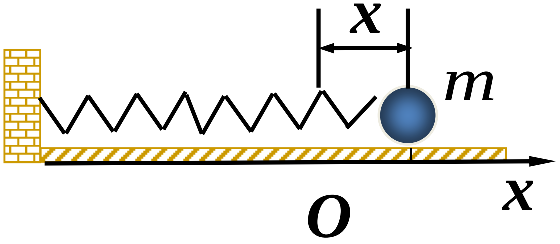
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

4. 简谐振动的能量转换

以水平的弹簧振子为例

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



动能: $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$$

势能: $$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

总能: $$\boxed{E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2}$$

总机械能守恒，即总能量不随时间变化.

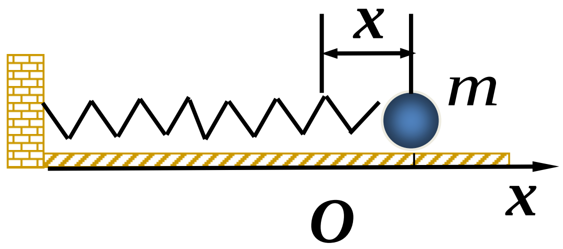
谐振动的总能量与振幅的平方成正比

4. 简谐振动的能量转换

以水平的弹簧振子为例

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$v=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$



动能:

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$\boldsymbol{\omega_0=\sqrt{k/m}}$$

势能:

$$E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)$$

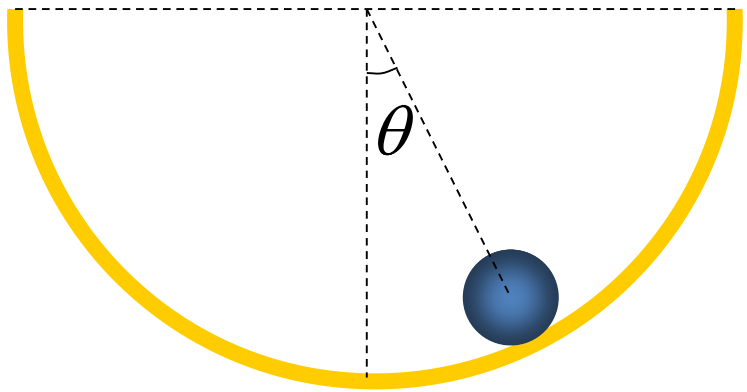
总能:

$$\boxed{E=E_\mathrm{k}+E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kA^2}$$

总机械能守恒，即总能量不随时间变化.

谐振动的总能量与振幅的平方成正比

例题2： 半径为 r 的小球在半径为R的半球形大碗内作纯滚动，这种运动是简谐振动吗？如果是，求出它的周期。



解： 设小球的质心速度v_C，绕质心转动的角速度为ω。小球在滚动过程中系统的机械能守恒：

$$mg(R-r)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2=E_0$$

其中 $I_C=\frac{2}{5}mr^2$ $\quad \omega r=v_C \quad$ $v_C=(R-r)\dot{\theta}$

所以可得

$$mg(R-r)(1-\cos\theta)+\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2=E_0$$

两边对t求导

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta=0$$

小角度滚动时 $\theta\ll 1,\sin\theta\simeq\theta$ ，运动方程化简为

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0 \quad\Longrightarrow\quad \omega_0=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

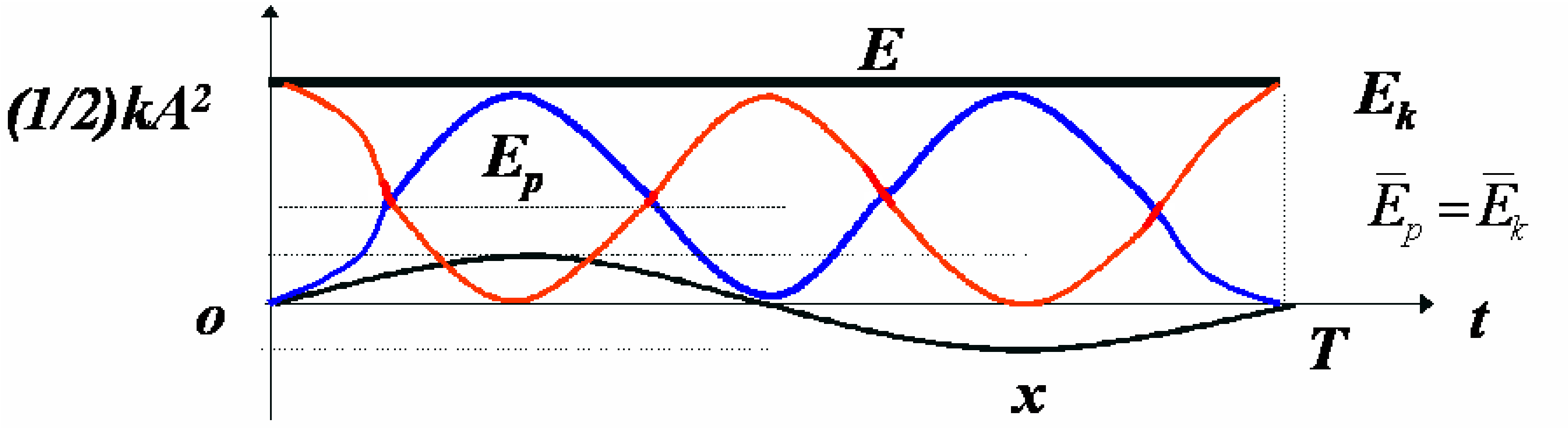
因此小球在碗底部的小角度滚动是简谐振动，其周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

能量平均值：

$$\bar{E}_k=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)\,dt=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{2}E$$

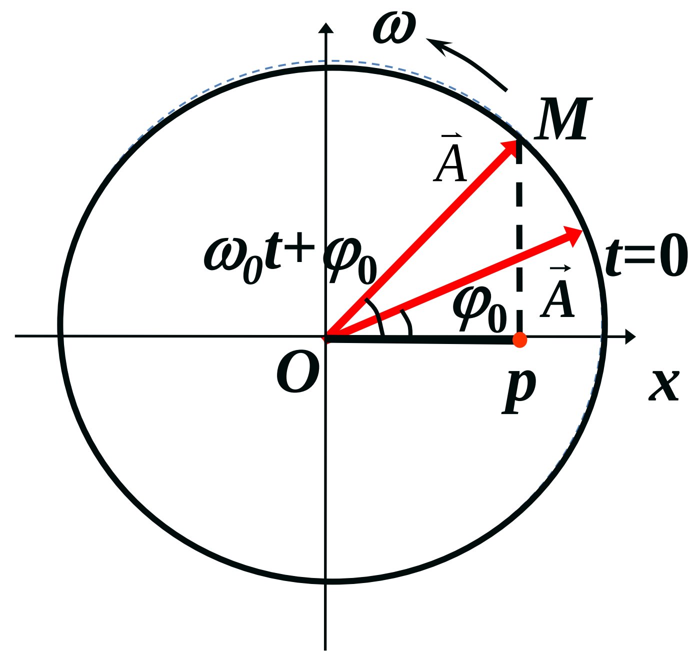
$$\bar{E}_p=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)\,dt=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{2}E$$



5. 简谐振动的表示法

① 旋转矢量图示法

作坐标轴ox ,自原点作一矢量$\vec{A}(\overline{OM})$



旋转矢量	简谐振动
模	振幅A
初始与x 轴的夹角	初相φ_0
角速度	角频率 ω_0
与x 轴的夹角	相位 $\omega_0 t+\varphi_0$

矢端M在x 轴上的投影P点的运动规律：

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

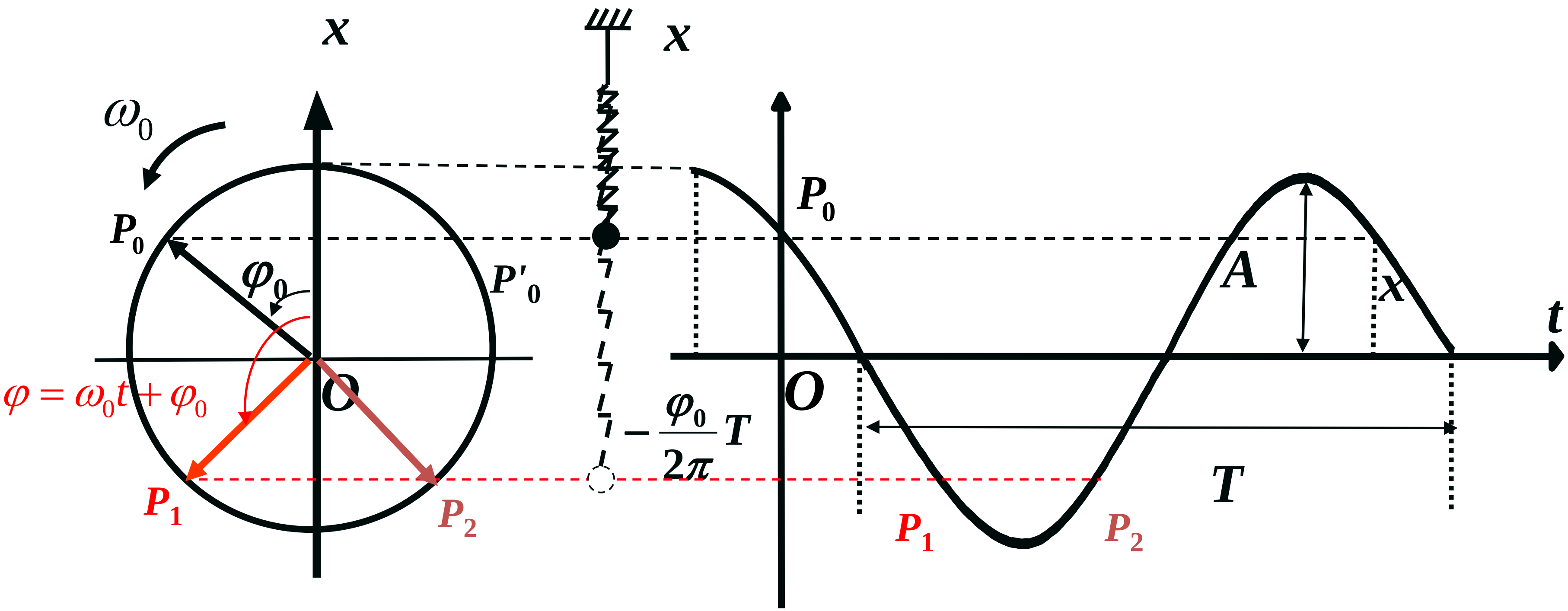
$$v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

➢做圆周运动的质点的位矢在x轴或y轴上的投影作简谐运动，不能把M的运动误认为简谐振动。

② x-t曲线图示法

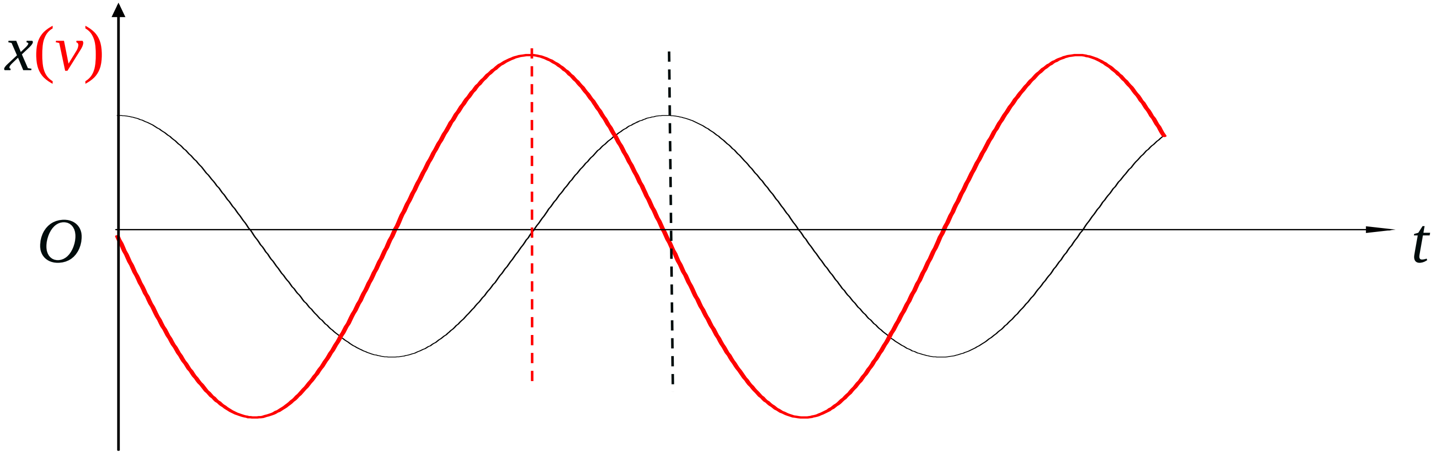
简谐振动也可用x-t 的振动曲线表示，如下图所示，图上已将振幅、周期、和初相标出。



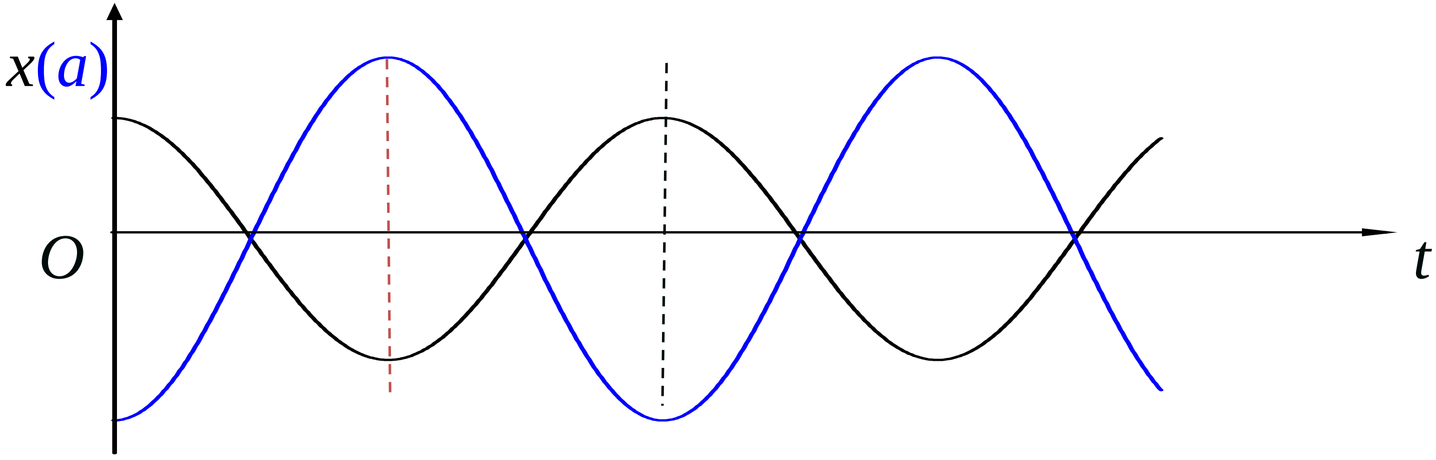
振幅大小决定曲线的“高低”，频率影响曲线的“密集和疏散”.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{dx}{dt} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}) \\ a = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \end{cases}$$

$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$



$\Delta\varphi = \pi$



③复数表示

利用三角函数与复数的关系，简谐振动也可用复数描述：

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega_0 t+\varphi_0)} = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0) + iA\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

复数的实部对应真实的振动量

复数表示的优越之处：求导、积分很方便。

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{dt} = i\omega_0 Ae^{i(\omega_0 t+\varphi_0)} = i\omega_0 \tilde{x}$$

$$\tilde{a} = \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt} = i\omega_0 \tilde{v} = (i\omega_0)^2 \tilde{x} = -\omega_0^2 \tilde{x}$$

例题2： 已知某质点作简谐运动，振动曲线如图，试根据图中数据写出振动表达

解： 设运动表达式

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

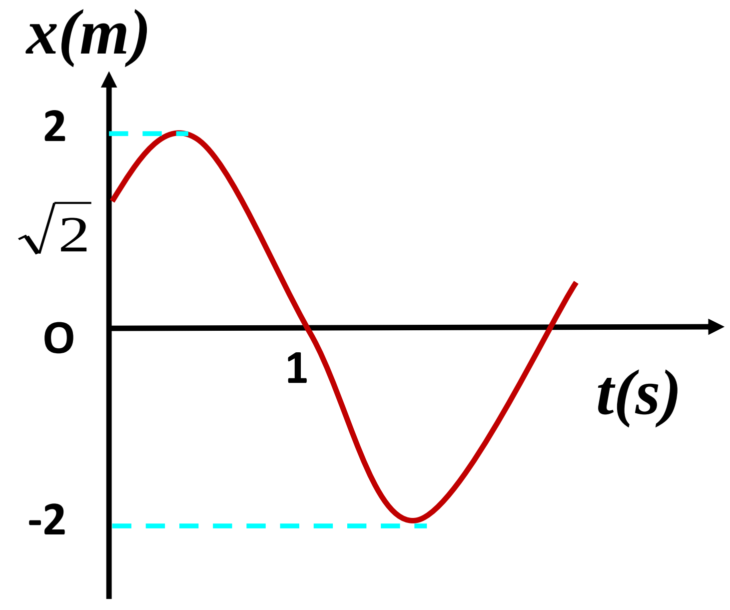
由图可见，$A=2m$，当$t = 0$时有：

$$x_0 = 2\cos\varphi_0 = \sqrt{2}$$

$$v_0 = -2\omega_0 \sin\varphi_0 > 0$$

由此得

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$$



当$t = 1$时有

$$x_1 = 2\cos(\omega_0 - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$v_1 = -2\omega_0 \sin(\omega_0 - \frac{\pi}{4}) < 0$$

解得:

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

因为周期$T > 1$秒，所以取$n = 0$, 即$\omega = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\therefore \qquad x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

§ 9. 2简谐振动的合成

任何一个复杂的振动都可看成若干个简谐振动的合成。

1.同方向同频率简谐振动的合成

两简谐振动：$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$

❖ 合成结果仍为简谐运动；

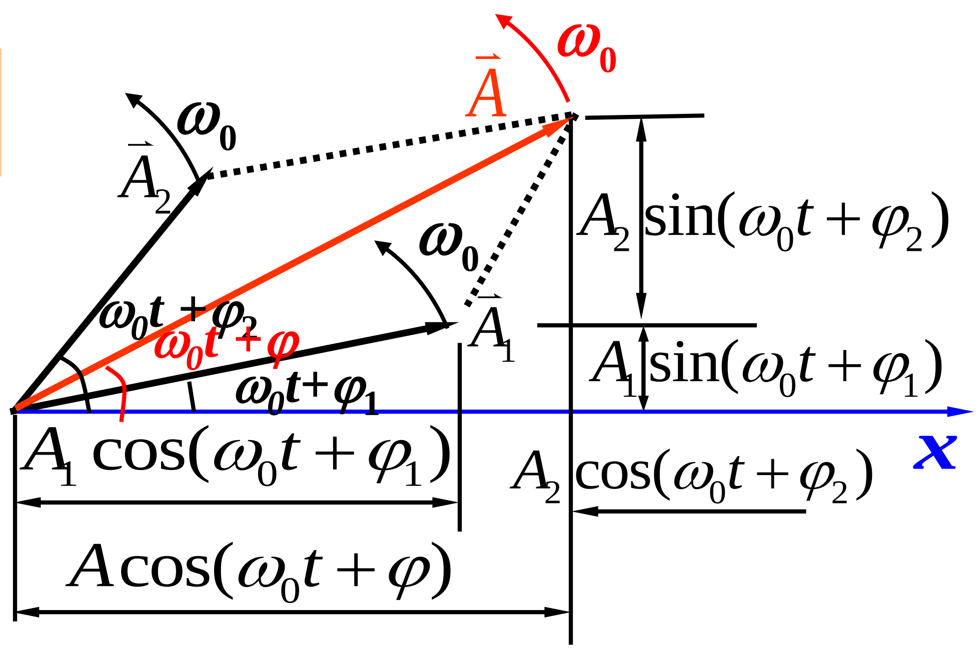
❖ 合振动与分振动在同一方向，且有相同频率。

合振动的运动方程：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \arctan\theta\,\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



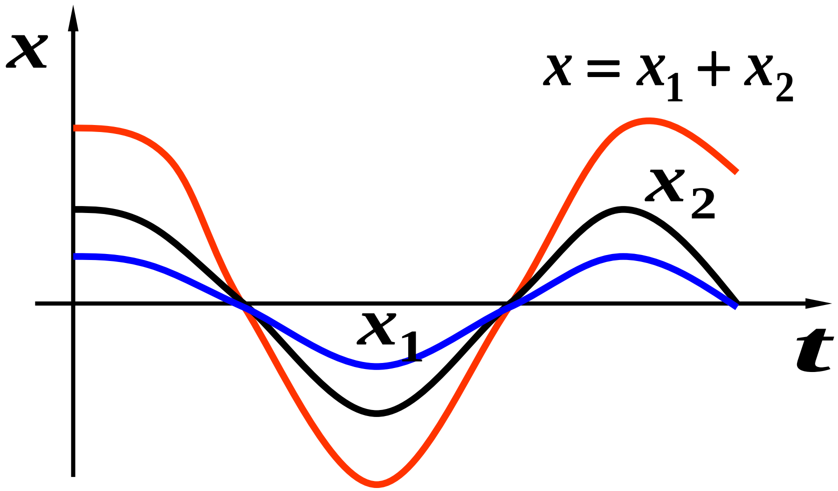
讨论：

相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 反映了两谐振的步调关系.

$$(1)\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$A_{max} = A_1 + A_2$$

两振动步调一致，同达最大，同达平衡 。

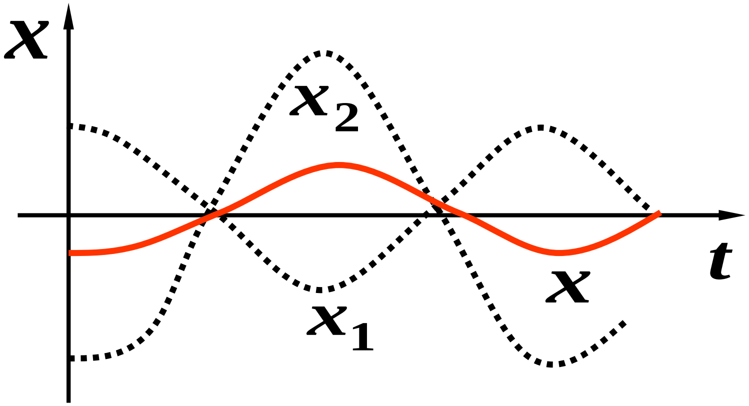


$$(2)\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2n+1)\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\boldsymbol{A_{\min}=|A_2-A_1|}$$

两振动步调反向,

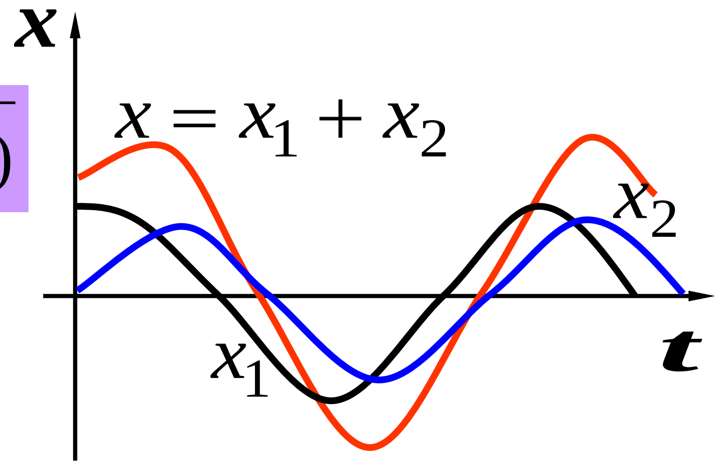
$$若A_1=A_2,\Rightarrow A=0$$



(3) 一般情况下(相位差任意)

$$A=\sqrt{A_1{}^2+A_2{}^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\boldsymbol{|A_2-A_1|<A<A_1+A_2}$$

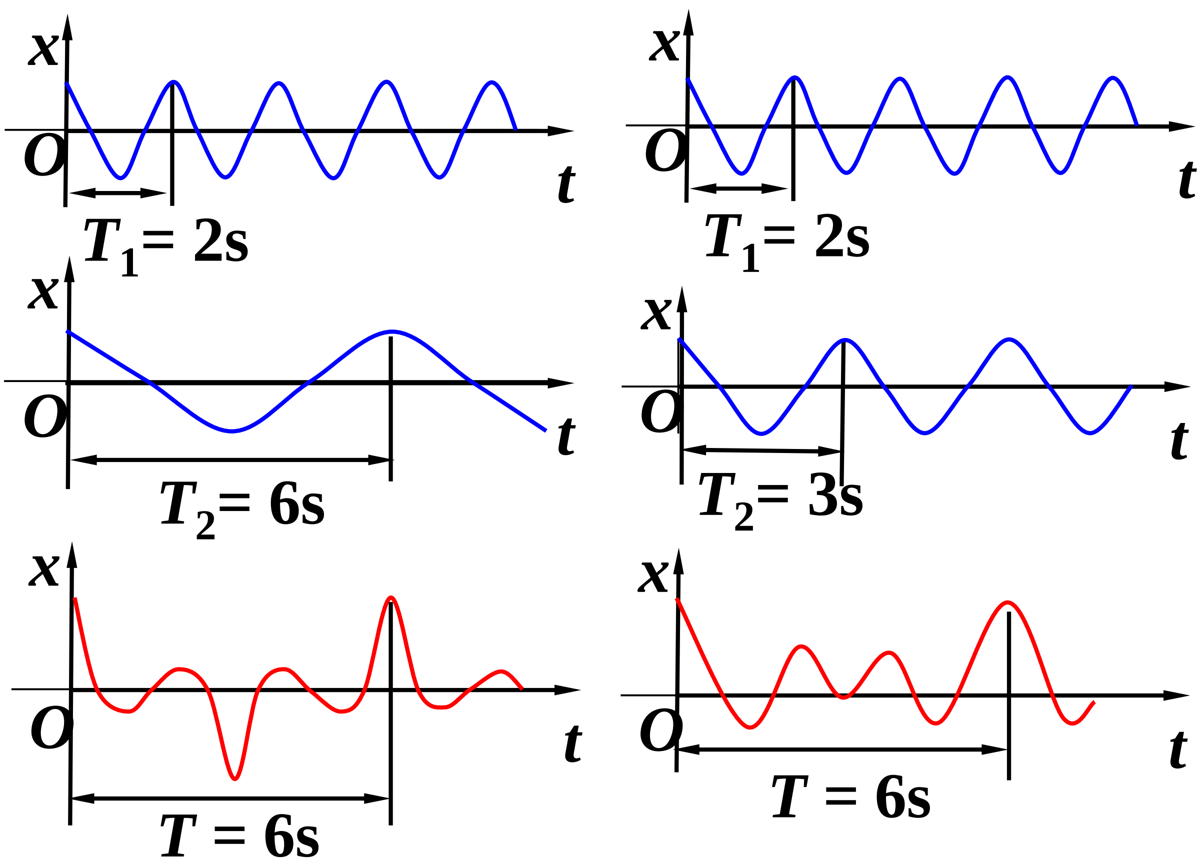


两个振动相位差在同频率简谐振动合成中起决定性作用。

2.同方向不同频率简谐振动的合成

设一质点同时参与了角频率分别为ω_1，ω_2的两个同方向的简谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\quad x_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$



- 两个同方向不同频率的简谐振动，合成后仍然是周期运动，但不再是简谐振动。
- 合振动周期是分振动周期的最小公倍数。

特例： 两同方向，振动振幅，且两频率之差远小于这两振动各自的频率。

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

其中 $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$

合振动的位移为：

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \\ &= A_{\text{调}}(t)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \end{aligned}$$

振幅随时间缓慢变化的简谐振动。

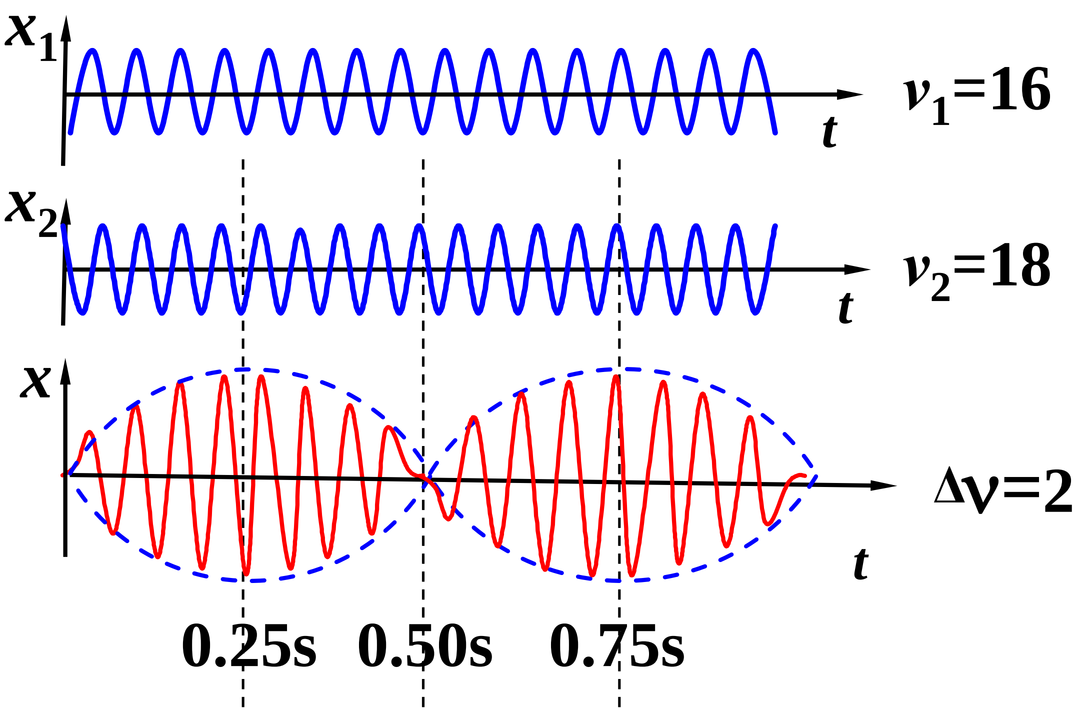
$$A_{\text{调}}(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

合振动的角频率：$\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

调制振幅：$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|$

振幅调制周期：$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right|}=\frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

振幅调制频率：$\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}\right|=|\nu_1-\nu_2|$



拍——频率较大但相差不大的两个同方向简谐振动合成时产生合振动振幅周期性变化的现象。

拍频——单位时间内振动加强或减弱的次数。

振幅变化的周期为：$\dfrac{1}{\Delta\nu} = \dfrac{1}{|\nu_2 - \nu_1|}$　　拍频：$\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_1|$

●拍现象的应用：

- 用标准音叉振动校准乐器
- 测定超声波
- 测定无线电频率
- 调制高频振荡的振幅和频率等

3.互相垂直相同频率简谐振动的合成

如果两个振动频率相同，但一个沿x方向、一个沿y方向

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

合振动坐标的参量方程

消去参数t，得显式的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_xA_x}\cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y)$$

合成的运动轨迹一般为一椭圆（包括圆，直线段），形状决定于分振动的振幅和相位差，两振幅相等时为圆。

讨论：

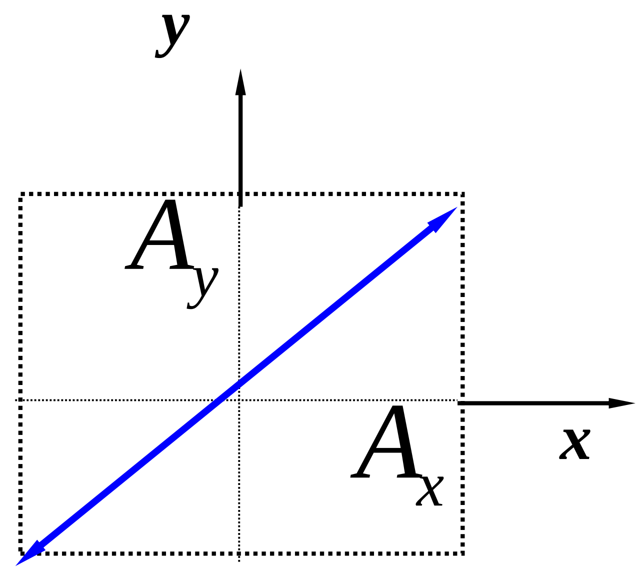
$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_x}\cos(\varphi_x-\varphi_y)=\sin^2(\varphi_x-\varphi_y)$$

① 分振动相位相同：$\varphi_y-\varphi_x=2n\pi \qquad n=0,1,2,3,\ldots$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}=\left(\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}\right)^2=0$$

$$\therefore y=\frac{A_y}{A_x}x$$

轨迹为过原点的直线



$\varphi_x-\varphi_y=2n\pi$

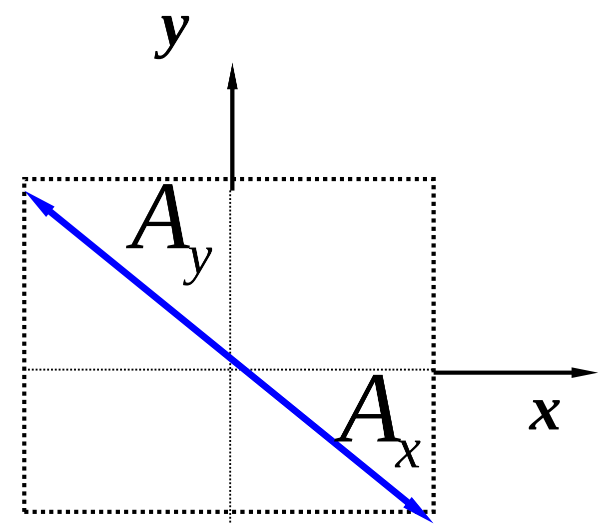
时刻t 质点离开平衡位置的位移（合振动）

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\cos(\omega t+\varphi_x)$$

所以合振动也是频率相同的简谐振动，振幅为 $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$

②分振动相位相反： $\varphi_y-\varphi_x=(2n+1)\pi \qquad n=0,1,2,3,\ldots$

$$x=A_x\cos(\omega t+\varphi_x)$$
$$y=A_y\cos(\omega t+\varphi_y)=A_y\cos(\omega t+\varphi_x+2n\pi+\pi)$$
$$=-A_y\cos(\omega t+\varphi_x)$$

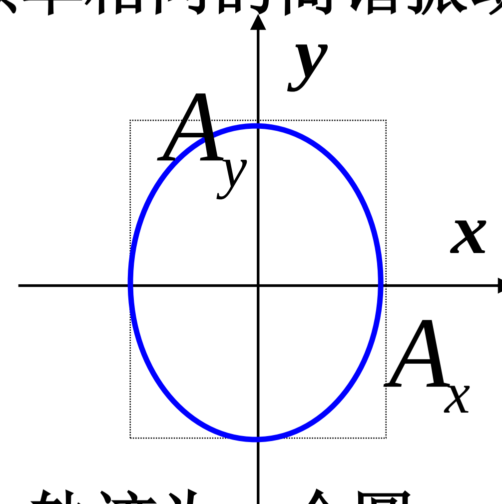


$$\varphi_x-\varphi_y=(2n+1)\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{A_x}=-\frac{y}{A_y}$$

时刻*t*质点离开平衡位置的位移(合振动)也是频率相同的简谐振动。

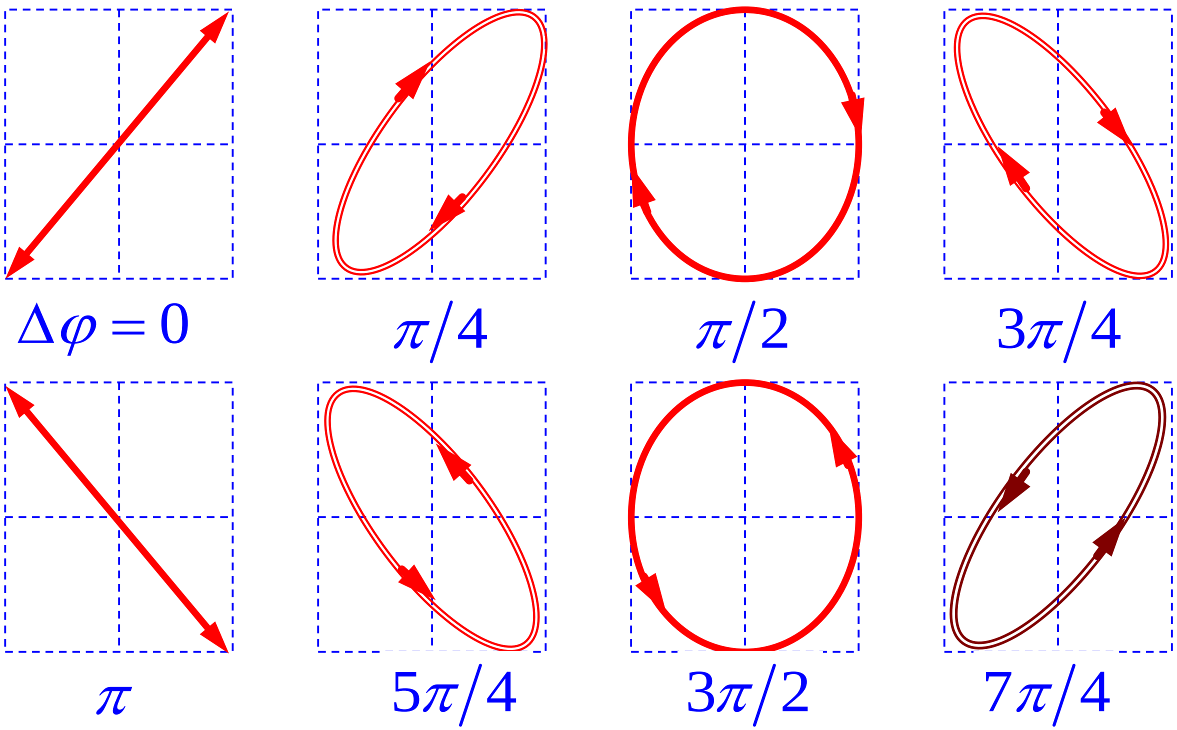
③ $\varphi_y-\varphi_x=(n+1/2)\pi,\ n=0,1,2,3\ldots$



轨迹方程： $\dfrac{x^2}{A_x^2}+\dfrac{y^2}{A_y^2}=1$

振动的空间轨迹一般为一正椭圆。当$A_x=A_y$时，轨迹为一个圆。

④$\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x$为其它值：合振动的轨迹表现为方位与形状各不相同的椭圆，质点运动方向亦各异。

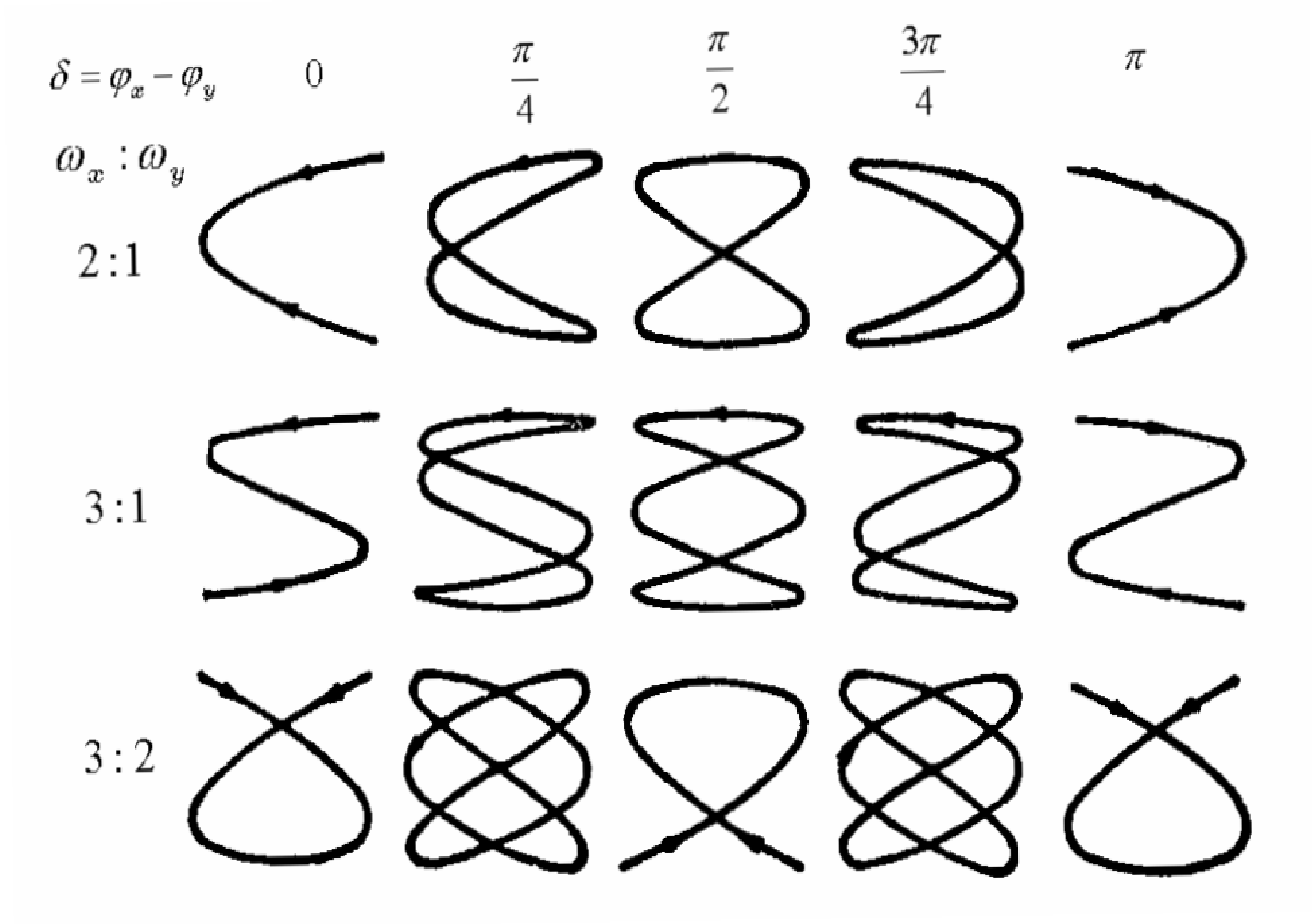


$0<\varphi_y-\varphi_x<\pi$　质点沿顺时针方向运动

$\pi<\varphi_y-\varphi_x<2\pi$　质点沿逆时针方向运动

4. 互相垂直不同频率简谐振动的合成以及李萨如图形

合振动轨道一般不是封闭曲线，但当频率有简单的整数比关系时，是稳定的封闭曲线，称为利萨如图形。曲线形状与频率比和初位相差相关。



例题3：有两个振动方向相同的简谐振动，其振动方程分别为 $x_1 = 4\cos(2\pi t + \pi)\,\text{cm}$ ，$x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/2)\,\text{cm}$

1）求它们的合振动方程；

2）另有一同方向的简谐振动 $x_3 = 2\cos(2\pi t + \varphi_3)\,\text{cm}$

问：当φ_3为何值时，x_1+x_3的振动为最大值？当φ_3为何值时，x_1+x_3的振动为最小值？

解：1）两个振动方向相同，频率相同的简谐振动合成后还是简谐振动，合振动方程为

$$x = A\cos(2\pi t + \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 5(\text{cm})$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = -\frac{3}{4}$$

根据已知条件，*t*=*0*时，合矢量应在第二象限，故

$$\varphi_0 = \frac{4}{5}\pi$$

所求的振动方程为

$$x = 5\cos(2\pi t + 4\pi / 5)\ (\mathrm{cm})$$

2） 当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \pm 2k\pi\left(k = 0,1,2\cdots\right)$ 时，相位相同。

即 $\varphi_3 = \pm 2k\pi + \pi\left(k = 0,1,2\cdots\right)$， 振幅最大

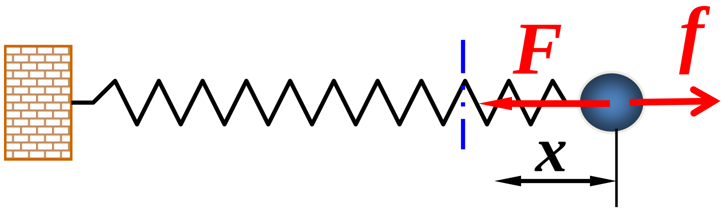
当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \pm 2\left(k+1\right)\pi\left(k = 0,1,2\cdots\right)$ 时，相位相反。

即 $\varphi_3 = \pm 2\left(k+1\right)\pi + \pi\left(k = 0,1,2\cdots\right)$，振幅最小

§9.3阻尼振动

阻尼振动——振幅(或能量)随时间不断减少的振动。

1. 阻尼振动的运动微分方程



对水平弹簧振子

弹簧力：　$F=-kx$

阻尼力：　$f=-\gamma v_x=-\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

γ为阻尼系数，与物体的形状以及周围性质有关

由牛顿第二定律可得：　$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

令　$\omega_0=\sqrt{k/m}$　——固有角频率

$\beta=\gamma/2m$　——阻尼因子

于是可得运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0{}^2x=0$$

将形如 $e^{\lambda t}$ 的解代入微分方程，得特征方程

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

其特征根是

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

于是方程的解得一般形式为

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

这里系数A_1和A_2由振动的初始条件确定。按阻尼度β/ω$_0$大小的不同，微分方程有三种不同形式的解，代表了振动物体的三种运动方式。

①过阻尼：$\beta > \omega_0$

特征方程有两个不同的实根，这时方程的解为

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

这种过阻尼运动方式是非周期运动,振动从开始最大位移缓慢回到平衡位置，不再做往复运动。

②欠阻尼振动： $\beta < \omega_0$

特征方程有两个互为共轭的复根

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega_f,\quad \lambda_2 = -\beta - i\omega_f,\quad \omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

两个线性无关解

$$x_1 = e^{-\beta t} e^{i\omega_f t},\ x_2 = e^{-\beta t} e^{-i\omega_f t}$$

根据线性齐次微分方程的性质知，方程的解为

$$x(t) = A_1 x_1 + A_2 x_2 = e^{-\beta t}(A_1 e^{i\omega_f t} + A_2 e^{-i\omega_f t})$$

振动的解是一个实数解，应取该解的实部。

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\beta\ t} \cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

A_0和φ_f 决定于初始条件的积分常数。

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_f t+\varphi_f)$$

振幅随时间衰减

周期振动

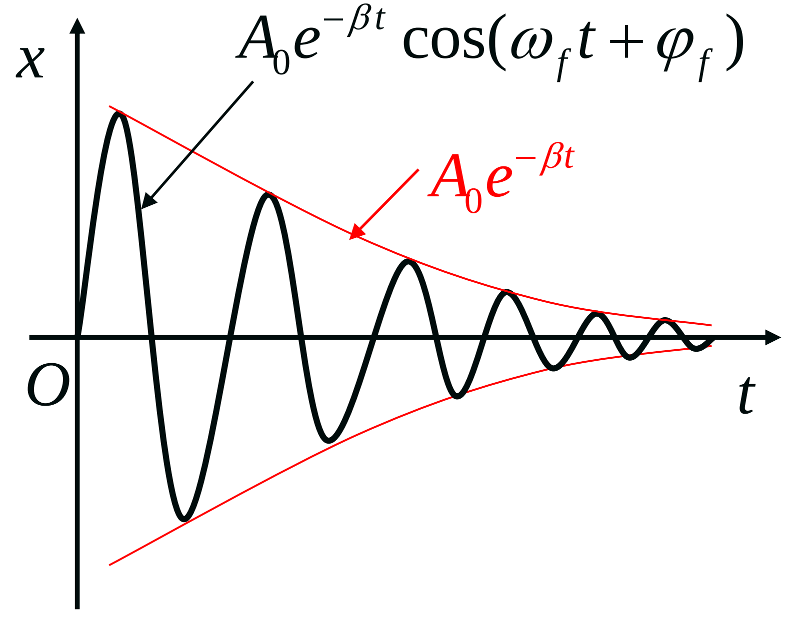
严格讲振子的运动不是周期运动，但仍然可看做振幅衰减的周期运动。

准周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega_f}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

❖阻尼振动周期比系统的固有周期长

●阻尼振动曲线：



●振子机械能的耗散

$$E = E_k + E_p \approx \frac{1}{2} m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t}$$

机械能不再守恒

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = fv_x$$

机械能的减少是由于阻尼力提供了负的功率

●品质因数：用来描述阻尼项的大小

t 时刻阻尼振子的能量与经一周期后损失的能量之比的 2π 倍，用Q表示，即

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2} m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{\frac{1}{2} m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}\left(1 - e^{-2\beta T}\right)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

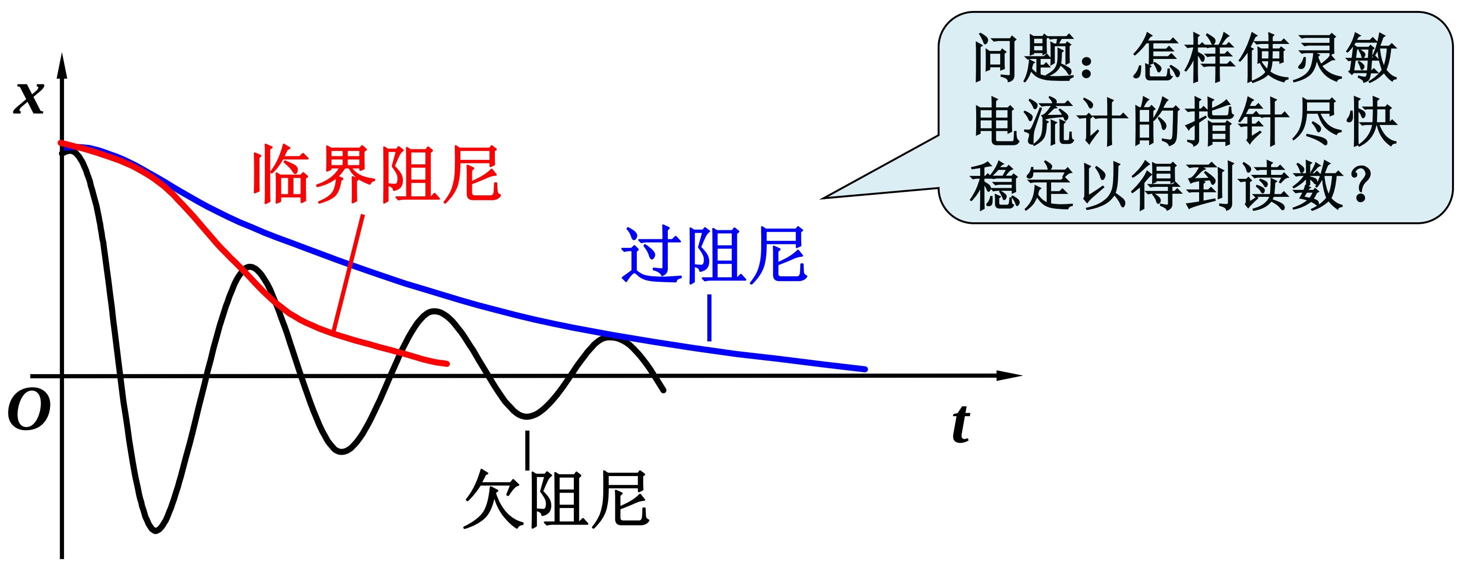
在阻尼很小的情况下描述阻尼能耗的品质因数与固有频率成正比，与阻尼系数成反比

③临界阻尼状态： $\beta = \omega_0$

特征方程只有一个重根，微分方程的解为：

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

A_1、A_2亦由初始条件定。物体不作往复运动的极限。系统从周期运动变为非周期振动,称为临界阻尼。



一般情况下，从偏离平衡位置开始回复到平衡位置所需的时间，临界阻尼将比过阻尼快。

§9.4 受迫振动和共振

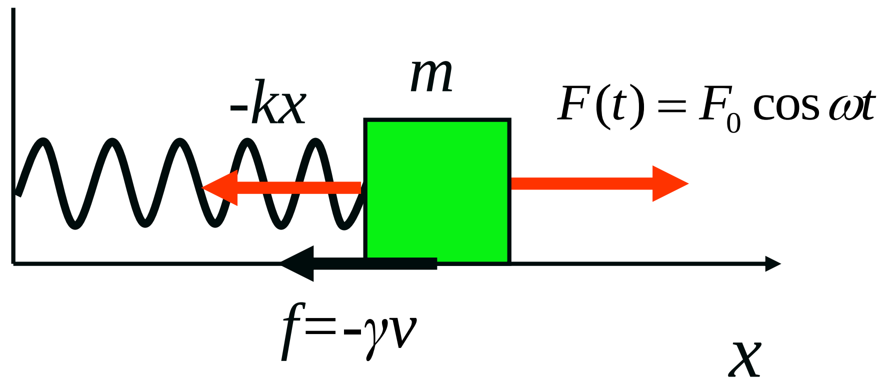
受迫振动———系统在周期性外力持续作用下所发生的振动。

1. 受迫振动的运动微分方程

恢复力: $-kx$

阻尼力: $-\gamma v$

强迫力: $F_0 \cos \omega t$



根据牛顿第二定律

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma v + F_0 \cos \omega t$$

令 $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$, $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$

得 $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

方程的通解= 齐次方程的通解+方程的特解

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 & \text{通解} \\ \ddot{x}_2 + 2\beta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = f_0\cos(\omega t) & \text{特解} \end{cases} \Rightarrow \quad x = x_1 + x_2$$

下面我们将考虑欠阻尼情况，则有

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi_f)$$

可以利用旋转矢量法求解受迫振动方程的特解

试探解：

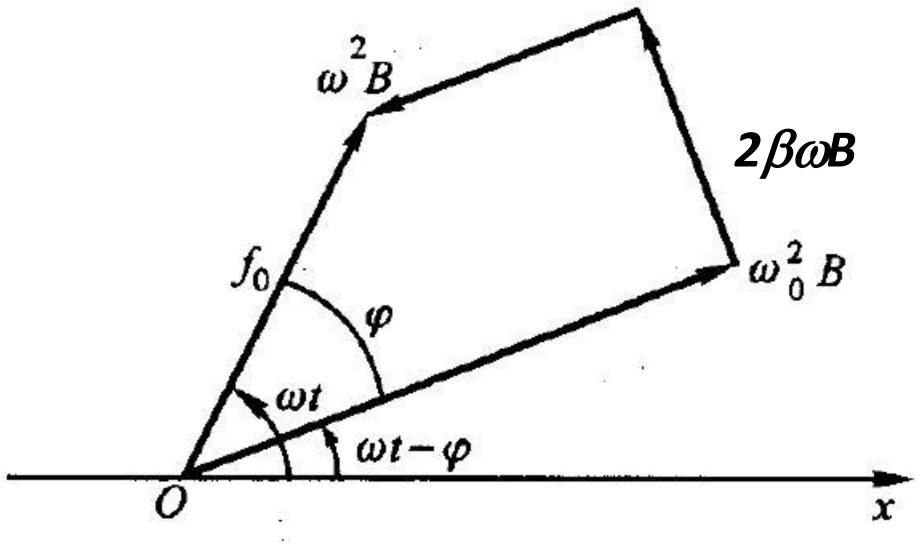
$$x_2 = B\cos(\omega t - \varphi)$$

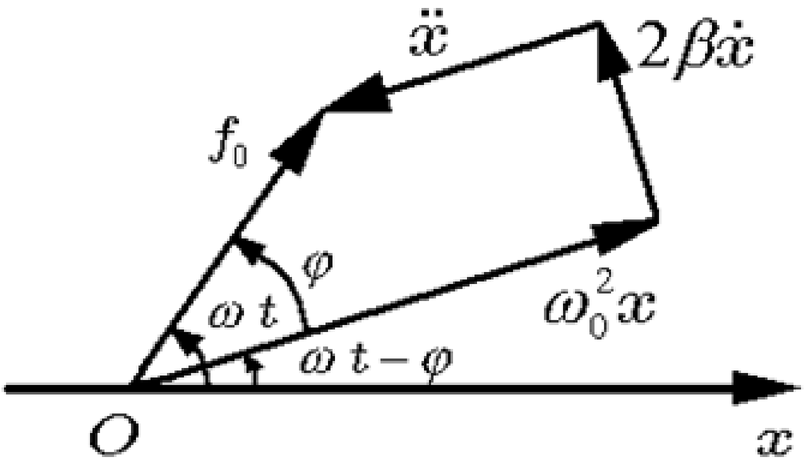
$$\Rightarrow \dot{x} = -\omega B\sin(\omega t - \varphi) = \omega B\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 B\cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 B\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

把受迫振动的运动方程的各项用旋转矢量法表示

$$\ddot{x}+2\beta\,\dot{x}+\omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$





$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 B^2+\left(2\beta\omega B\right)^2 = f_0^2,$$

$$\Rightarrow B=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

稳态解的特点：频率与强迫力频率相同，振幅及初相位完全由强迫力和系统的固有参量决定，与系统初始条件无关。

所以在小阻尼情况，受迫振动方程的解为

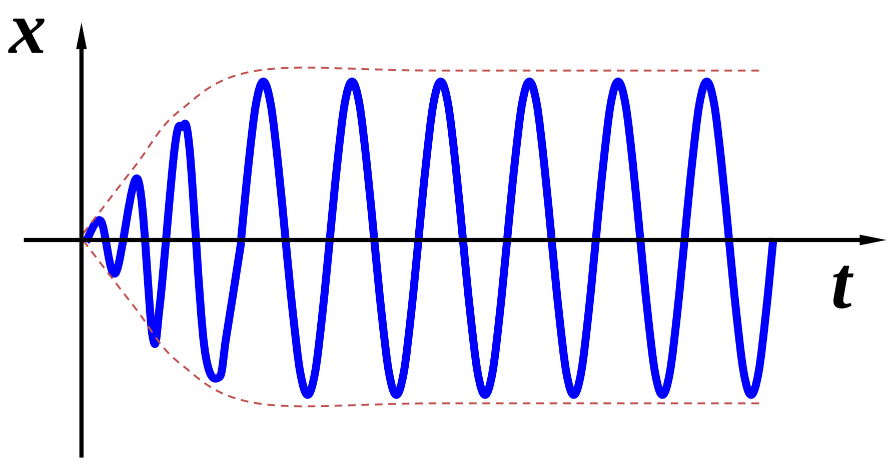
$$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_f t + \varphi_f) + B\cos(\omega t - \varphi)}$$

阻尼振动，随时间消失，**暂态解**

简谐振动, **稳态解**

经一段时间，振子达稳定振动状态，受迫振动变为简谐振动

$$x = B\cos(\omega t - \varphi)$$



2. 共振

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}},\qquad \tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

共振： 驱动力的角频率为某一定值时，受迫振动的振幅达到极大值的现象.

$$\frac{dB}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\right)$$

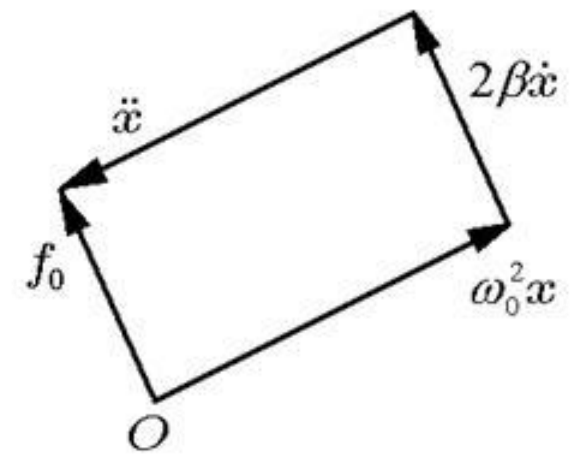
$$=2f_0\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{-3/2}\omega\left[\omega_0^2-\omega^2-2\beta^2\right]=0$$

由此可得

共振频率： $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\simeq\omega_0,\quad for\ \beta\ll\omega_0$

共振振幅： $B_r=\dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

共振位相： $\varphi_r=\arctan\dfrac{\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}{2\beta}\simeq\tan^{-1}\dfrac{\omega_0}{\beta}\simeq\dfrac{\pi}{2}$



$$x\simeq B\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})=B\sin(\omega t)$$

讨论:

① β 越小时

ω_r越接近于ω_0， B_r越大

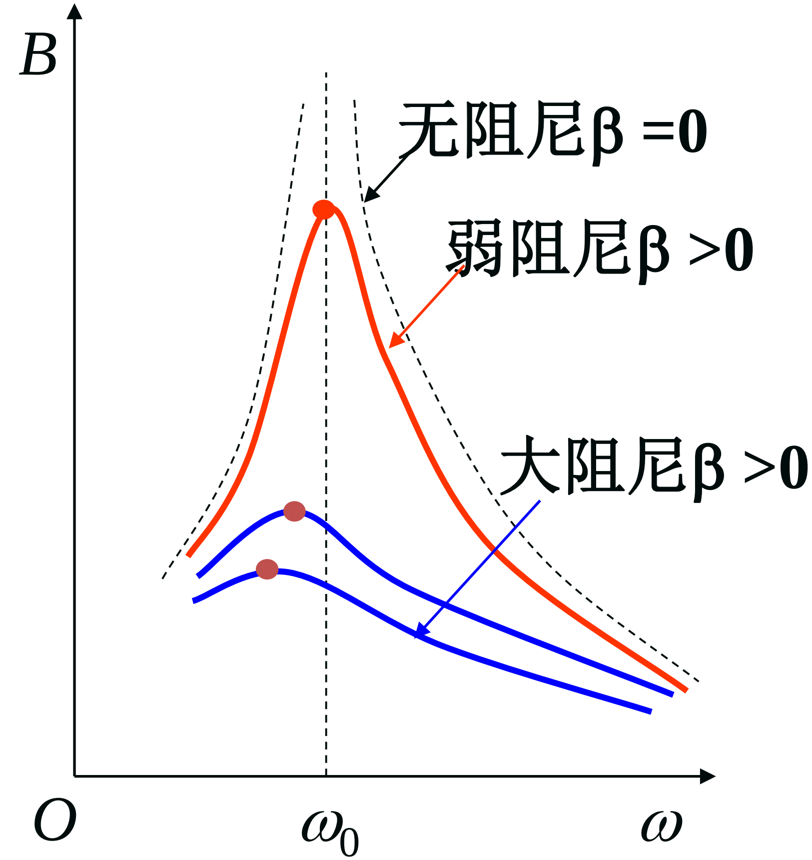
② β=0时

$\omega_r = \omega_0, B_r \to \infty$， 尖锐振动

●应用:

①电磁共振选台(收音机)
②乐器利用共振提高音响效果
③研究避免共振的破坏的措施:

- 破坏外力(强迫力)的周期性
- 改变系统固有频率
- 改变外力的频率
- 增大系统阻尼力



频率响应曲线

B-ω图常称**频率响应曲线**或称**共振曲线。**