L1

Differential Geometry

微分几何

0. 引论

几何 研究事物之形状、大小、相对位置… 即研究空间.

- Euclid 《几何原本》
- Gauss. 测量大地 curvature（曲率）
  内蕴观点、研究几何 intrinsic
  ↓
- Riemann Riemanian geometry. 黎曼几何
- Klein的观点 —— Erlangen program. 几何学乃是研究空间在变换群下保持不变的性质的学问.
- Chern（陈省身） Global and intrinsic geometry.

L2

Gauss–Bonnet–Chern formula:

$$\chi(M) = \int_M e(\Omega)$$

M: even dimensional compact mfd. Ω: curvature form.
$e(\Omega)$: Euler class.

- 简单地说，微分几何学是用微积分与线性代数研究几何学.
- 本学期主要内容：
  曲线论，曲面论，张量分析与黎曼几何，与应用.
- 联系方式：diyang@ustc.edu.cn
  0551-63603909
  管理楼1627

· 考评方式：

平时成绩 30%

期中 + 期末 70%

· 教材：《微分几何》，彭家贵，陈卿，高等教育出版社.

· 参考书：

1. 《现代几何学》，方法与应用（第一卷）曲面几何、变换群与场.
Dubrovin，Novikov，Fomenko，Springer.

2. 《微分几何讲义》，陈省身，陈维桓、北京大学出版社.

3. 《微分几何》（第二版），陈维桓．北京大学出版社.

4. 《Differential Geometry of Curves and surfaces》，M.P. Do Carmo.

· 助教：李明阳，吴晗

· 答疑（office hour）：周一下午 14:30 ~ 17:00

§0.1. 欧氏线性空间与正交变换.

· 在线性代数里，我们学习了 Euclidean vector space.
欧氏(线性)空间

我们首先回顾它的定义.

· Def. 0.1. 设 V 是一个 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间．定义 V 上的一个 pairing $(\ ,\ ): V\times V\to\mathbb{R}$．若 $(\ ,\ )$ 满足如下三个条件：

i) symmetric： $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)\quad\forall\alpha,\beta\in V$.

ii) bilinear： $(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$

$$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

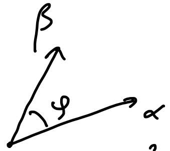
iii) positive definite：

$$(\alpha,\alpha)\geq 0．\text{“=”成立 iff } \alpha=0.$$

则称 $(\ ,\ )$ 为欧氏内积．配备了欧氏内积的线性空间称为欧氏空间.

· 设 $(V,(\,,\,))$ 是一个 n 维欧氏空间，对 V 中的每个向量 α，定义 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为 α 的长度，记为 $|\alpha|$. 对于 $\alpha,\beta\in V$，其夹角 φ 定义为 $\arccos\left(\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\cdot|\beta|}\right)$.

注意 $\varphi\in[0,\pi]$.



· 取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，定义

$$G_{ij} := (\alpha_i,\alpha_j)$$

称 $(G_{ij})_{n\times n} =: G$ 为 $(\,,\,)$ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的 Gram 矩阵.

· 内积在不同基下的 Gram 阵：

$\beta_1,\cdots,\beta_n$ another basis of V.

记 $(\,,\,)$ 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的 Gram 阵为 G'.

设 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，其中 P 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵. 则：

$$G' = P^T G P. \qquad (\text{相合！})$$

· 由内积的定义，我们知道 Gram 阵为实对称正定方阵.

因而存在实可逆 $\tilde{P}$, s.t.

$$\tilde{P}^T G \tilde{P} = I := \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

定义 $(e_1,\cdots,e_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\tilde{P}$ 则：

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij} \quad (\text{Kronecker delta})$$

即：$e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的标准正交基. We arrive at

· Thm.0.1. 设 $(V,(\,,\,))$ 为 n 维欧氏空间. 则 V 存在标准正交基.

· Def.0.2. 设 $(V,(\,,\,))$ 为 n 维欧氏空间，称 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}: V\to V$ 为正交变换，if

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta), \quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

· 记 $O(V,(\,,\,)) := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ 为 } (V,(\,,\,)) \text{ 上的正交变换}\}$，即为 $(V,(\,,\,))$ 上正交变换全体. 简记为 $O(V)$.

· 容易看到：恒等变换 $id \in O(V)$.

. Prop. 0.1. $(O(V), \circ, e := id)$ 为一个群.

这里，"$\circ$"为线性变换的复合.

. 称 $(O(V), \circ, id)$ 为 V 上的<u>正交变换群</u>，简记为 $O(V)$.

. 取 $(V, (\cdot,\cdot))$ 的一组标准正交基 $(e_1, \cdots, e_n)$. 我们知道：V 上的任一线性变换 $\mathcal{A}$ 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵 A 为实正交阵，i.e., $A^TA = I$.

(这里，$\mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n)A$)

. 记 n 阶实正交阵全体为 $O(n, \mathbb{R}) =: O(n)$.

. Prop. 0.2. $O(V) \cong O(n)$ 群同构.

. Def. $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$

. 显然：$SO(n) < O(n)$.

. 例3. $V = \mathbb{R}^3$.

$(x, y) := x^T y$

则 $O(V) = O(3)$.

$SO(3) < O(3)$.

Prop. 0.3. (Euler) $\forall A \in SO(3)$，则 1 是 A 的一个特征值.

Def. 称 $SO(3)$ 为 3 维旋转群.

(也称 3 维刚体定点运动群.)

. Prop. 0.4. 设 $A \in O(n)$，则 $\exists \Omega \in O(n, \mathbb{R})$, s.t.,

$$\Omega^{-1} A \Omega = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & & & & \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\theta_s & \sin\theta_s & & & \\ & & & -\sin\theta_s & \cos\theta_s & & & \\ & & & & & \pm1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \pm1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

⑨

• Def. 设 $(V^n, (\,,\,))$ 为一欧氏空间. 对于任一 $\alpha \in V\setminus\{0\}$, 定义 $R_\alpha : V \to V$ by

$$R_\alpha(\psi) := \psi - 2\frac{(\psi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

称 R_α 为关于与 α 垂直的超平面的反射, 简称反射.

• Prop. 0.5. $\forall \mathcal{A} \in O(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可分解为一系列反射之乘积, i.e., ∃ 有限 $R_1, \dots, R_k$, s.t. $\mathcal{A} = R_k \circ \cdots \circ R_1$.

§0.2. 笛卡尔坐标系 (欧氏空间)

几何学需要在某个"空间"进行.

空间的基本元素是点. (Avoid from confusing w/ a v.s.)

M: 空间. (拓扑流形, topological manifold) 数学上定义的空间. 具体定义以后见到.

* 最重要之例: $\mathbb{R}^n$ 笛卡尔空间, 也常记为 $\mathbb{E}^n$.

• $\mathbb{R}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}\}$.

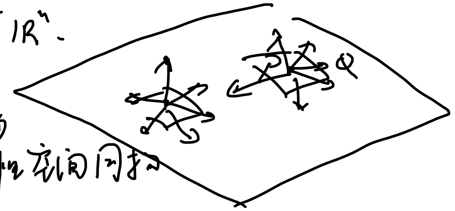
• $\mathbb{R}^n$ 中 ∀ 不同两点 P, Q 定一直线. 记 $\overrightarrow{PQ}$ 为连接 P、Q 的有向线段.

⑩

• 取定一个点 P, 则 $\{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in \mathbb{R}^n\}$ 为一线性空间, 记为 $T_P\mathbb{R}^n$. 注意: $\mathbb{R}^n$ 也常代表线性空间, 即, $T_P\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

我们的空间 $\mathbb{R}^n$.

作为线性空间同构



• $\mathbb{R}^n$ 的 ∀ 两点 $P = (x^1, \dots, x^n)$, $Q = (y^1, \dots, y^n)$, 定义 P、Q 之间的距离为

$$\sqrt{(x^1-y^1)^2 + \cdots + (x^n-y^n)^2} =: d(P,Q).$$

• $(\mathbb{R}^n, d)$ metric space.

• open ball: $B_P(\delta) := \{Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \delta\}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Open balls 给出 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑. 以后不加说明, 我们的 $\mathbb{R}^n$ 是赋予标准拓扑的 metric space, 称为欧氏空间. (avoid from confusing w/ 欧氏向量空间)

· 记 $O=(0,\cdots,0)$ 坐标原点.

Take $Q_1=(1,0,\cdots,0)$

$Q_2=(0,1,0,\cdots,0)$

$\vdots$

$Q_n=(0,\cdots,0,1)$

记 $e_\alpha=\overrightarrow{OQ_\alpha}$, $\alpha=1,\cdots,n$.

则 $T_O\mathbb{R}^n=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1,\cdots,e_n\}$.

· 定义 $T_O\mathbb{R}^n$ 上的一个 pairing:

$$\langle\,,\rangle: T_O\mathbb{R}^n\times T_O\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$v\,,\ w\ \mapsto\langle v,w\rangle$$

by $\begin{cases}\langle e_\alpha, e_\beta\rangle := \delta_{\alpha\beta} & \text{(Kronecker delta)}\\ \text{bilinear extend to } T_O\mathbb{R}^n\times T_O\mathbb{R}^n\end{cases}$

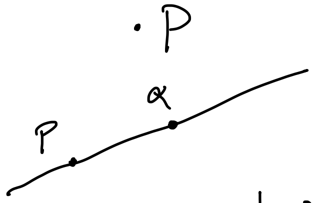
则 $(T_O\mathbb{R}^n,\langle\,,\rangle)$ 为欧氏线性空间, 且 $(e_1,\cdots,e_n)$ 为 $(T_O\mathbb{R}^n,\langle\,,\rangle)$ 的 orthonormal basis.

· Fact: $d(O,Q)=\sqrt{\langle\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OQ}\rangle}$, $\forall Q\in\mathbb{R}^n$.

· $\mathbb{R}^n$中的一些常见的几何对象:

点 $P\in\mathbb{R}^n$.

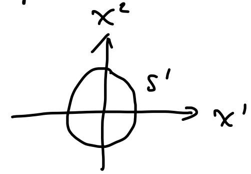
直线段 PQ,



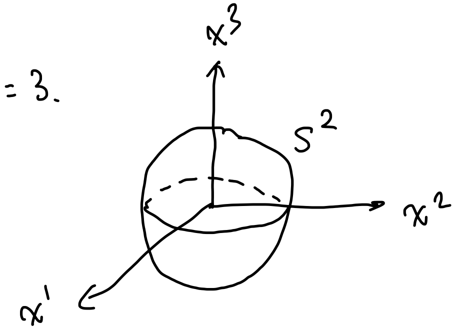
$\mathbb{R}^1$: 直线. $\mathbb{R}^2$: 平面. $\mathbb{R}^3$: 三维空间.

单位球面 $S^{n-1}:=\{P=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid (x^1)^2+\cdots+(x^n)^2=1\}$

例. $n=2$.



$n=3$.



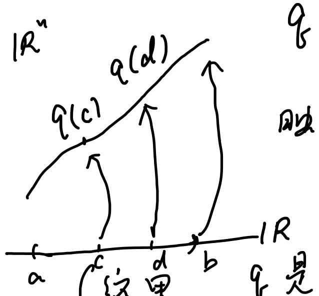
作业: 证明 Prop. 0.1 — Prop. 0.5.

§1. 曲线论

本章里，我们将主要研究 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线. "点动成线".

Definition 1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一条光滑参数曲线(段) q 是 (a,b) 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个光滑映射

$$q:(a,b)\to\mathbb{R}^n$$
$$t\mapsto q(t)=(q^1(t),\cdots,q^n(t))$$



(这里，q 是光滑映射是指每一分量 $q^1(t),\cdots,q^n(t)$ 均为 (a,b) 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数.)

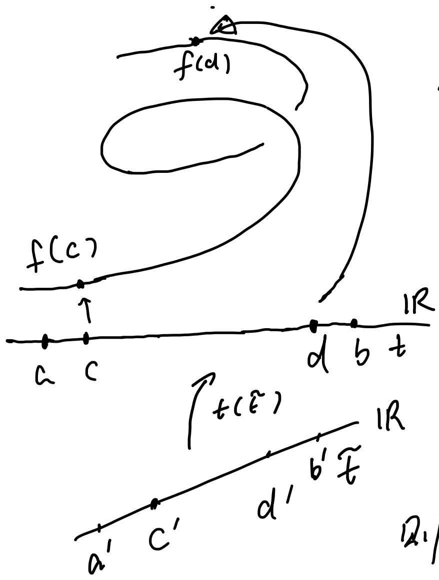
Definition 2. 定义 $\vec{v}(t):=\left(\frac{dq^1(t)}{dt},\cdots,\frac{dq^n(t)}{dt}\right)$

称为参数曲线 q 在 t 时刻的速度.

Definition 3. 考虑 $[c,d]\subseteq(a,b)$ 及 $q|_{[c,d]}$. 定义

$$s:=\int_c^d\sqrt{\langle\vec{v}(t),\vec{v}(t)\rangle}\,dt=\int_c^d|\vec{v}(t)|\,dt$$

称为曲线 $q|_{[c,d]}$ 的长度. (本课程以后提到的曲线常指参数曲线.)



给定曲线，改变参数：

$$t=t(\tilde{t})$$

$t(c')=c$, $t(a')=a$

$t(d')=d$, $t(b')=b$

Assume $\frac{dt}{d\tilde{t}}>0$.

则：$q(t)=q(t(\tilde{t}))=r(\tilde{t})$,

i.e., $q^i(t)=q^i(t(\tilde{t}))=r^i(\tilde{t})$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{t}\ \mathbb{R} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr] & & \mathbb{R}^n\ q(t(\tilde{t})) \\
& \mathbb{R}\ t(\tilde{t}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

其长度为 $\tilde{s}$. 由定义知，

$$\tilde{s}=\int_{c'}^{d'}\sqrt{\left\langle\frac{dr(\tilde{t})}{d\tilde{t}},\frac{dr(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right\rangle}\,d\tilde{t}$$

$$=\int_{c'}^{d'}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dr^i(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right)^2}\,d\tilde{t}$$

$$=\int_{c'}^{d'}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dq^i}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2}\,d\tilde{t}=\int_c^d\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dq^i(t)}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=s.$$

因而我们证明了

· Prop. 1 曲线的长度不依赖于参数的选取.

· 由 Prop. 1, 若q为单射, 将曲线的长度也称为是曲线的像的长度.

* 弧长参数 (自然参数)

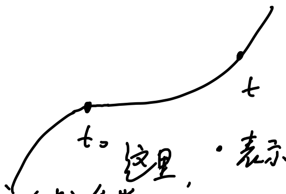
· 设 $q:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ 为光滑参数曲线.

$$t\longmapsto q(t)$$

设 $t_0\in(a,b)$ 为初始时刻, $[t_0,t]\subseteq(a,b)$

曲线 $q|_{[t_0,t]}$ 的长度记为 $s(t)$, 即:

$$s(t):=\int_{t_0}^{t}|\dot q(u)|\,du.$$



这里, $\cdot$ 表示 $\frac{d}{dt}$.

Def.4. 称 $s(t)$ 为弧长, 也称为弧长参数或自然参数.

Def.5. 称曲线 $q(t)$ 是正则的, if

$$\dot q(t)\neq 0,\quad \forall t\in(a,b).$$

· 观察: 对于正则曲线, $\frac{ds}{dt}=|\dot q(t)|>0$

$$\left(=\sqrt{\dot x^1(t)^2+\cdots+\dot x^n(t)^2}\right)$$

因而在 $t_0\le t<b$ 上有反函数:

$$s=s(t)\xrightarrow{\text{反函数}} t=t(s).$$

$s(t_0)=0$

我们的正则曲线 $q=q(t)$ 在 s 坐标下有参数表示:

$$q(t(s))=:r(s)=(r^1(s),\dots,r^n(s))$$

$$\left(\text{or, } q^i(t)=q^i(t(s))=r^i(s)\right)$$

$$\frac{dq}{ds}=\frac{dq}{dt}\,\frac{dt}{ds}$$

$$\left|\frac{dq}{ds}\right|=\left|\frac{dq}{dt}\right|\overbrace{\frac{dt}{ds}}^{>0}=\frac{ds}{dt}\,\frac{dt}{ds}=1. \quad \Rightarrow\left|\frac{dr}{ds}\right|=1.$$

$$\text{Or, } s=\int_0^s\left|\frac{dr}{ds}\right|ds \Rightarrow \frac{ds}{ds}=\left|\frac{dr}{ds}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dr}{ds}\right|=1.$$

§1.1. 平面曲线.

$q=q(t)=(x(t),y(t))$.

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_{t_0}^{t}|\vec{v}|\,dt$$

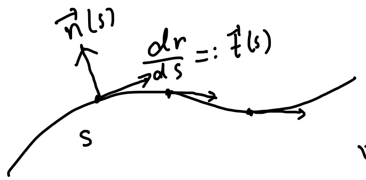
$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \qquad \vec{v}=\dot{q}$$

s: 弧长参数.

$r=r(s)$ 弧长参数下的曲线

$\left|\frac{dr}{ds}\right|=1$. 即在弧长参数下速度向量大小为1.

$\frac{dr}{ds}=\left(\frac{dx(s)}{ds},\frac{dy(s)}{ds}\right)$ 为 s 处的单位切向量.



即为 $\vec{t}(s)$

$|\vec{t}(s)|=1$. $\vec{t}(s)$

曲线的每一点处有单位切向量 $\vec{t}(s)$

$\vec{t}(s)$ 随着 s 动. $\forall s$, 将 $\vec{t}(s)$

逆时针旋转 90° 得一单位向量,记

为 $\vec{n}(s)$. $\vec{n}(s)$ 随 s 动.

Def. 6. 称 $(r(s);\vec{t}(s),\vec{n}(s))$ 为沿曲线 r 的Frenet标架

Lemma. 1. $\vec{t}(s)\perp\frac{d\vec{t}(s)}{ds}$, $\forall s$.

Pf. $|\vec{t}(s)|\equiv 1$

$$\Rightarrow \langle\vec{t}(s),\vec{t}(s)\rangle\equiv 1.$$

$$\Rightarrow \left\langle\frac{d\vec{t}(s)}{ds},\vec{t}(s)\right\rangle+\left\langle\vec{t}(s),\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\right\rangle\equiv 0$$

$$\Rightarrow \left\langle\vec{t}(s),\frac{d\vec{t}(s)}{ds}\right\rangle\equiv 0. \quad \#$$

由Lemma 1.1知:

$$\frac{d\vec{t}(s)}{ds}=\kappa(s)\vec{n}(s)$$

称 $\kappa(s)$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的曲率.

由 $\langle\vec{n}(s),\vec{n}(s)\rangle\equiv 1$ 知:

$$\left\langle\frac{d\vec{n}}{ds},\vec{n}\right\rangle+\left\langle\vec{n},\frac{d\vec{n}}{ds}\right\rangle\equiv 0$$

$$\Rightarrow \left\langle\frac{d\vec{n}}{ds},\vec{n}\right\rangle\equiv 0 \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds}\perp\vec{n}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \lambda(s)\,\vec{t}(s)$$

由 $\langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \rangle \equiv 0$ 知:

$$\left\langle \frac{d\vec{n}}{ds}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \frac{d\vec{t}}{ds} \right\rangle \equiv 0$$

$$\Rightarrow \lambda(s) + \kappa(s) \equiv 0$$

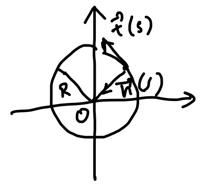
We arrive at

Thm 1. (Frenet 公式)

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s)\,\vec{n}(s) \\[2mm] \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa(s)\,\vec{t}(s) \end{cases}$$

or,
$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{pmatrix}.$$

例1.



$R>0$ 半径.

$$q(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$$

$$s = \int_0^{\varphi} \dot{q}(u)\,du = \int_0^{\varphi} \sqrt{R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u}\,du = R\varphi.$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{R}s.$$

$$\vec{r}(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

$$\vec{t}(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

$$\vec{n}(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right) = \frac{1}{R}\vec{n}(s),$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \left(\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) = -\frac{1}{R}\vec{t}(s).$$

$$\Rightarrow \kappa(s) \equiv \frac{1}{R}. \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}$$

例2. i). $\kappa(s)\equiv 0 \iff r(s)$ 是直线

ii). $\kappa(s)\equiv$ 常数 $a\neq 0$

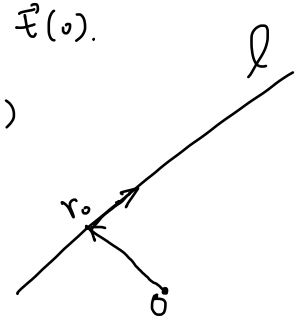
$\iff \vec{r}(s)$ 的像是半径为 $\left|\frac{1}{a}\right|$ 的圆弧.

Pf. i). $\kappa(s)\equiv 0 \iff \dfrac{d\vec{t}}{ds}\equiv 0$

$\iff \vec{t}(s)\equiv \vec{t}(0)$.

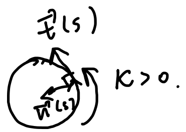
$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}(s) = \vec{t}(0)$$

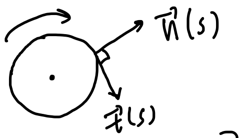
$$\Rightarrow \vec{r} = s\,\vec{t}(0) + r_0$$



ii). "$\Leftarrow$". 例1.

"$\Rightarrow$". 令: $\vec{p}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{a}\vec{n}(s)$





$$\frac{d\vec{p}(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} + \frac{1}{a}\frac{d\vec{n}(s)}{ds}$$

$$= \vec{t}(s) - \frac{\kappa(s)}{a}\vec{t}(s)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}(s) = \vec{p}_0 \Rightarrow \left|\vec{r}-\vec{p}_0\right| = \frac{1}{|a|}. \#$$

· 几何意义:
曲率 $\kappa(s)$ 反映曲线在 s 处"弯曲"的程度.

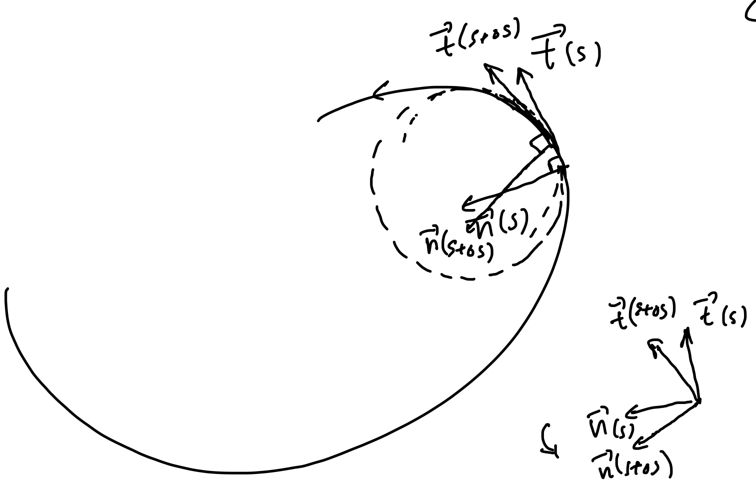
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\vec{t} \end{cases}$$

$$\vec{t}(s+\Delta s) = \vec{t}(s) + \vec{t}'(s)\Delta s + O(\Delta s^2)$$
$$= \vec{t}(s) + \kappa(s)\vec{n}(s)\Delta s + O(\Delta s^2)$$

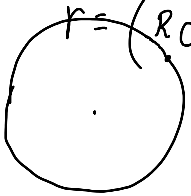
$$\vec{n}(s+\Delta s) = \vec{n}(s) + \vec{n}'(s)\Delta s + O(\Delta s^2)$$
$$= \vec{n}(s) - \kappa(s)\vec{t}(s)\Delta s + O(\Delta s^2)$$

$$\cos(\Delta s) = 1 + O(\Delta s^2)$$
$$\sin(\Delta s) = \Delta s + O(\Delta s^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{t}(s+\Delta s) \approx \cos(\kappa(s)\Delta s)\vec{t}(s) + \sin(\kappa(s)\Delta s)\vec{n}(s) + O(\Delta s^2) \\ \vec{n}(s+\Delta s) \approx -\sin(\kappa(s)\Delta s)\vec{t}(s) + \cos(\kappa(s)\Delta s)\vec{n}(s) + O(\Delta s^2) \end{cases}$$



$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds}$.



$r = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right),\ R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$

$\vec t(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right),\ \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$

$\vec n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right),\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$

$\vec t(s+\Delta s) = \vec t(s) + \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right),\ -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)\Delta s + O(\Delta s^2)$

$= \vec t(s) + \frac{1}{R}\vec n(s) + \cdots$

$\vec n(s+\Delta s) = \vec n(s) + \left(\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right),\ -\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)\Delta s + O(\Delta s^2)$

$= \vec n(s) - \frac{1}{R}\vec t(s) + \cdots$

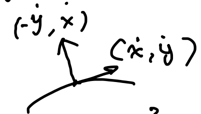
$$\vec r(s+\Delta s) = \vec r(s) + \vec r'(s)\Delta s + \frac{1}{2!}\vec r''(s)\Delta s^2 + O(\Delta s^3)$$
$$= \vec r(s) + \vec t(s)\Delta s + \frac{1}{2}\kappa\vec n(s)\Delta s + O(\Delta s^3)$$

作业: P28. 2.

• 平面参数曲线曲率公式:

$\vec q(t) = (x(t), y(t))$. $\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$

$$\frac{d\vec q}{ds} = \frac{d\vec q}{dt}\frac{dt}{ds} = (\dot x, \dot y)\frac{1}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} = \vec t$$



$$\Rightarrow \vec n = \frac{(\dot y, \dot x)}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$

$$\frac{d\vec t}{ds} = \frac{d\vec t}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{(\ddot x, \ddot y)}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}\frac{1}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} + (\dot x, \dot y)\left(-\frac{1}{2}\right)(\dot x^2+\dot y^2)^{-2}(2\dot x\ddot x+2\dot y\ddot y)$$
$$= \left(\frac{\ddot x}{\dot x^2+\dot y^2} - \frac{\dot x(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y)}{(\dot x^2+\dot y^2)^2},\ \frac{\ddot y}{\dot x^2+\dot y^2} - \frac{\dot y(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y)}{(\dot x^2+\dot y^2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{d\vec t}{ds}\cdot\vec n = \frac{-\dot y\ddot x(\dot x^2+\dot y^2) + \dot x\dot y(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y) + \dot x\ddot y(\dot x^2+\dot y^2) - \dot x\dot y(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y)}{(\dot x^2+\dot y^2)^2\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$
$$= \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}}.\ \#.$$