2-26

线性代数　中科大　2019 春

· 教材：《线性代数与解析几何》陈志杰等.

· 参考书：《代数》M. Artin　《古今数学思想》

《数学：它的内容、方法和意义》　《代数学引论》·线性代数 杨斯拉剑

《高等代数学》2nd ed. 张贤科等.

· 成绩（估计）：平时 20%，期中 + 期末 80%

· Tel. 63603909　· E-mail: diyang@ustc.edu.cn.

§0. 引论　什么是线性代数？

大自然的雪花、晶体，人类的建筑，… 常给人美的感受. 这些事物美的（数学）原因与线性代数这一基础学科紧密相关. 在生产实践、管理科学、经济学、物理学等领域也有大量与线性代数相关的问题，具体地，比如说线性代数在行星轨迹预测、量子力学与统计相关的科学中有广泛应用. 简单地说，线性代数的主要内容包括：

1. 求解多元线性方程组（矩阵符号的引入）
2. 线性空间　（具体的对象）
3. 对称

这门课里，$\mathbb{R}$：实数集　$\mathbb{C}$：复数集.

0.1　求解线性方程组

从简单入手先作观察与归纳.

Q1 · 给定 $a, b \in \mathbb{R}$，求解关于 x 的方程：

$$ax = b, \quad x \in \mathbb{R}.$$

解：Case i). $a \neq 0 \Rightarrow$ 有唯一解 $x = \frac{b}{a}$

Case ii). $a = 0$ 且 $b = 0 \Rightarrow$ 无穷多解 $x = x_1 \in \mathbb{R}$.

Case iii). $a = 0$ 且 $b \neq 0 \Rightarrow$ 无解.

Q2 · 给定 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$，求解关于 (x, y) 的方程组：

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

解：

Case i). $a \neq 0$

$$\text{方程组}(1),(2) \xrightarrow{(1)/a} \begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a} & (3) \\ dx + ey = f & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(4)-d(3)\text{ 替换 }(4)} \begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a} & (5) \\ \left(e - \frac{bd}{a}\right)y = f - \frac{cd}{a} & (6) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a} & (7) \\ (ae - bd)y = af - cd & (8) \end{cases}$$

i)-1. $ae - bd \neq 0$

$\Rightarrow$ 唯一解：$\left(x = \frac{ce - bf}{ae - bd},\ y = \frac{af - cd}{ae - bd}\right)$

i)-2. $ae - bd = 0$ 且 $af - cd = 0$

$\Rightarrow$ 无穷多解：$(x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y_1,\ y = y_1)$，$y_1 \in \mathbb{R}$.

i)-3. $ae - bd = 0$ 且 $af - cd \neq 0 \Rightarrow$ 无解.

Case ii). $d \neq 0$.

与 Case i) 类似. 事实上,

原方程组 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} dx + ey = f & (3) \\ ax + by = c & (4) \end{cases}$

ii)-1. $ae - bd \neq 0$

$\Rightarrow$ 唯一解: $\left(x = \frac{ce - bf}{ae - bd},\ y = \frac{af - cd}{ae - bd} \right)$.

ii)-2. $ae - bd = 0$ 且 $af - cd = 0$

$\Rightarrow$ 无穷多解: $(x = \frac{f}{d} - \frac{e}{d} y_1,\ y = y_1)$, $y_1 \in \mathbb{R}$.

ii)-3. $ae - bd = 0$ 且 $af - cd \neq 0$

$\Rightarrow$ 无解.

Case iii). $a = 0$ 且 $d = 0$. Exercise.

Remark. 也可按 $a \neq 0$、$a = 0$ 进行分类讨论.

Q3. 给定 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1,$

$a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2,$

$a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_3, \quad \in \mathbb{R}$

求解关于 (x, y, z) 的方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

理论与实际中, 常遇到解线性方程组问题, 方程的个数与未知数个数未必一样多.

现在实际中常常遇到的一般问题是 给定

$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \quad b_1,$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, \quad b_m, \quad \in \mathbb{R}$

求解关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{*}$$

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的 m 行 n 列数组称为

matrix (mater) 一个矩阵. 这里, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

记这个矩阵为 A. 也记为 $(a_{ij})_{m \times n}$. (m 行 n 列矩阵, $m \times n$ 矩阵)

$= (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij})$

在这个定义下, 比如 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 为个 m 行 1 列矩阵.

称两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 相等 $A = B$, 如果 $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

$= (a_{ij}) \quad = (b_{ij})$

· 设 $A=(a_{ij})$ 为一个 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 为一个 $n\times k$ 矩阵.

我们定义 A,B 之间的乘法 $A\cdot B$ 如下.

$A\cdot B$ 为一个 $m\times k$ 矩阵

$$(A\cdot B)_{ij} := \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} \qquad \begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le k\end{matrix}$$

· 在上述定义下，所要求解的方程组可以写为如下形式：

$$A\cdot X=b,$$

其中，$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$，$b=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$(A: m\times n,\ X: n\times 1,\ AX: m\times 1)$.

0.2. 线性空间的概念

线性空间也称为向量空间，是大家在高中时知道的二维向量空间和三维向量空间的概念的推广及抽象。我们回顾三维向量空间.

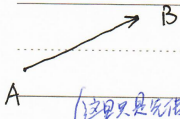
首先简要回顾三维空间中的向量.

人们(包括我们的书)通常所说的三维空间是指三维仿射空间(affine space)，这个空间的基本元素是点。

任取两点 A,B，以 A 为起点、B 为终点的有向线段称为三维空间中的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$.

AB 的长度记为 $|AB|$，也称为 $\overrightarrow{AB}$ 的模、大小.

大小相等、方向相同的两个向量称为是相等的.



Def. 三维空间中全体向量构成的空间称为三维向量空间(作为集合)，记为 V.

(这里只是先借用这个词)

在三维空间中，取定一个点 O，我们看到三维空间中的任一向量都可以唯一对应到以 O 为起点的向量，我们有：

$$V=\{\text{以 } O \text{ 为起点的全体向量}\}$$

设 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\in V$. 定义它们之间的一个加法如下：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}\\ O\ A\ C & \text{若 } O,A,B \text{ 共线}\\ \\ A,\ O,\ C,\ B & \text{若 } O,A,B \text{ 不共线.}\end{cases}$$

(平行四边形法则)

设 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\overrightarrow{OA}\in V$. 定义 λ 与 $\overrightarrow{OA}$ 之间的乘法 $\lambda\overrightarrow{OA}$ 如下：① $\lambda\overrightarrow{OA}$ 是一个向量

② 若 $\lambda\neq 0$ 且 $A\neq O$，$|\lambda\overrightarrow{OA}| := |\lambda|\,|\overrightarrow{OA}|$

$\lambda\overrightarrow{OA}$ 的方向 $:=\begin{cases}\text{与 } \overrightarrow{OA} \text{ 方向相同} & \text{if } \lambda>0,\\ \text{反} & \text{if } \lambda<0.\end{cases}$

若 $\lambda=0$ 或 $A=O$，$\lambda\overrightarrow{OA}:=\overrightarrow{OO}$. 这个乘法称为数乘.

观察发现(作为集合和)三维向量空间 V 关于上述加法和数乘满足以下 8 条性质：

1. $a+b=b+a$
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. 存在一个元素 $0\in V$, s.t. $\forall a\in V$
$$a+0=a$$
4. $\forall a\in V$, $\exists b\in V$ s.t.
$$a+b=0$$
5. $1a=a$
6. $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$
7. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$
8. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$

这里，3中，0可取为 $\overrightarrow{OO}$.

4中，b可取为 a 的反向量.

其余各条，$\forall a,b,c\in V$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. 称0为零向量.

抽象化：配备加法和 $\mathbb{R}$-数乘 运算的集合 V 满足上述 8 条公理 称为一个 $\mathbb{R}$-线性空间，也称为一个 $\mathbb{R}$-向量 ——.

例：$\mathbb{R}^n:=\{\text{所有 } m \text{ 行 } 1 \text{ 列矩阵}\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\mid x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}\right\}$

$x,y\in V$ 定义 $x+y:=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_m+y_m\end{pmatrix}$，

（"$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$" "$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$"）

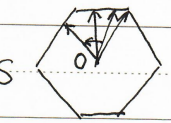
$\lambda\in\mathbb{R}, x\in V$, 定义 $\lambda x:=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_m\end{pmatrix}$

证明：$\mathbb{R}^n$ 关于 "点" "+" "数乘" 构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间.

证明：取 $0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. $\forall x\in V$. 取 $y=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ -x_m\end{pmatrix}\Rightarrow 4$ is true. #.

$\Rightarrow 3$ is true.

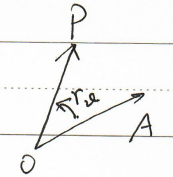
0.3 对称



$W=$ 平面向量空间

$r_\alpha: W\to W$

$\overrightarrow{OA}\longmapsto\overrightarrow{OP}=r_\alpha\overrightarrow{OA}:=$ 将 $\overrightarrow{OA}$ 逆时针旋转 α



正六边形 S 可视为集合

$$OS=\{\overrightarrow{OP}\mid P\in S\}\subseteq W$$

则 $r_{\frac{\pi}{3}}OS=OS$ 即：集合 OS 在旋转 $\frac{\pi}{3}$ 下不变.

或者说 OS 具有旋转 60° 的不变性.

事物、运动的对称 均可由此观点来研究。

2-28. · 先回顾线性空间的相关概念 题 $(\mathbb{R}^n,+,\lambda)$

作业：Q1. Q2. 从Q1的结果中观察，并证明若 $ae-bd\neq 0$ 则(1)有唯一解.并求出此解.

· §1 三维空间中的向量

引言里我们看到，三维空间中的向量的概念可以推广到一般的、抽象的事物上，本章我们进一步研究（回顾）三维空间中的向量的性质，为学习抽象线性空间的性质作准备

补充参考：

1. 《20个数学思想》 M. 克莱因
2. 《代数学引论》 线性代数 · 柯斯特利金

1.1. 线性相关的相关概念

V：三维向量空间.

Def. 设 $a_1,\dots,a_m\in V$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$,

称向量 $a:=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m$ 为 $a_1,\dots,a_m$ 的一个线性组合.

也称 a 可由 $a_1,\dots,a_m$ 线性表出.

Def. 称 $a_1,\dots,a_m\in V$ 线性相关，if

$\exists$ 不全为零的实数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ s.t. $\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m=0$

反之称 $a_1,\dots,a_m$ 线性无关.

显然，若 a 可由 $a_1,\dots,a_m$ 线性表出，则 $a,a_1,\dots,a_m$ 线性相关.

命题1. $a_1,\dots,a_m$ 线性相关，i.f.f. 其中一个向量可由其余向量线性表出. Pf. #.

e.g. 证明：若 a, b 线性无关，则 $a+b$ 与 $a-b$ 线性无关.

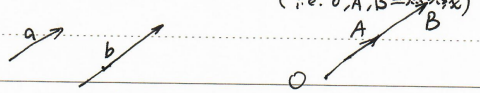
pf: $\lambda(a+b)+\mu(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)a+(\lambda-\mu)b=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda-\mu=0\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\mu=0$ #.

任取 A 中一点 O.

- 设 $a, b \in V$. 称 a 与 b 平行 ($a \parallel b$)，if 将 a, b 平移对应到以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 共线. ($a \parallel b$ 也称 a 与 b 共线.)



$\forall a \in V$, 有: $a \parallel 0$, $0 \parallel a$.

显然: $a \parallel b$ i.f.f $\exists$ 不全为零实数 λ, μ s.t. $\lambda a+\mu b=0$

i.e. i.f.f a, b 线性相关

- 命题2. 证空间中任意三点 A, B, C 共线 i.f.f

$\exists$ 不全为零的 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ s.t.

$\forall$ 点 O, $\begin{cases}k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=0\\ k_1+k_2+k_3=0\end{cases}$

pf. "$\Rightarrow$": A, B, C 共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu$ 不全为零 s.t. $\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=0$.

取 λ, μ 使得此式成立.

$\Rightarrow \forall O$, $\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$

$\Leftrightarrow \forall O$, $-(\lambda+\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}=0$

取 $k_1=-(\lambda+\mu)$, $k_2=\lambda$, $k_3=\mu$.

"$\Leftarrow$": 不妨设 $k_1 \neq 0$.

$\Rightarrow k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}-(k_2+k_3)\overrightarrow{OC}=0$

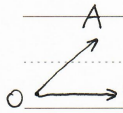
$\Rightarrow k_1\overrightarrow{CA}+k_2\overrightarrow{CB}=0 \Rightarrow A, B, C$ 共线. #.

借助向量，我们还可以理解：平面.

仍然取定一点 O.

$V=\{$以 O 为起点的向量$\}$ $\xleftrightarrow{1-1}$ $\{$三维空间中的点$\}$

f: 取终点 A



任取 V 中不共线两向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$

集合 $S:=\{\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ 为 V 的子集.

则 $f(S)$ 为经过点 O 的一个平面. 过 O 点的平面如何由此定义.

S 是可由 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 线性表出的向量的全体.

因而 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 线性相关也即 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 共面.

命题3. 空间中，经过任意不共线三点 A, B, C 有且仅有一个平面.

pf. 先证存在性. 记 V 为三维向量空间.

取定点 A. $V=\{$以 A 为起点的向量$\}$ $\xrightarrow{g}$ $\{$空间中的点$\}$ 取终点映射.

$S:=\{\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

A, B, C 不共线 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow g(S)$ 为过 A 点平面.

$\overrightarrow{AB} \in S \Rightarrow B \in g(S)$

$\overrightarrow{AC} \in S \Rightarrow C \in g(S)$

$\Rightarrow g(S)$ 为过 A, B, C 的一个平面.

再证唯一性. 设 $g(S')$ 为过 A, B, C 的(另)任一平面.

由 $g(S')$ 过 A 知: $S'=\{\alpha\overrightarrow{AB'}+\beta\overrightarrow{AC'} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$ 不共线.

$B \in g(S')$, i.e., $\overrightarrow{AB} \in S'$ B', C' 为空间中两点

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\alpha_1\overrightarrow{AB'}+\beta_1\overrightarrow{AC'}$ (1) for some $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$

$C \in g(S')$, i.e. $\overrightarrow{AC} \in S'$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\alpha_2\overrightarrow{AB'}+\beta_2\overrightarrow{AC'}$ (2) for some $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

显然 α_1, α_2 不同时为零. otherwise $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ 与题设矛盾.

不妨设 $\alpha_1 \neq 0$

$\xrightarrow{\frac{1}{\alpha_1}\cdot(1)}$ $\frac{1}{\alpha_1}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\overrightarrow{AC'}$ (3)

$\xrightarrow{(2)-\alpha_2\cdot(3)}$ $\overrightarrow{AC} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{AB} = \left(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2\right)\overrightarrow{AC'}$

由于 $\overrightarrow{AC'} \neq 0 \Rightarrow \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ otherwise $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ 共线.

记 $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \frac{\alpha_1}{\Delta}\overrightarrow{AC} - \frac{\alpha_2}{\Delta}\overrightarrow{AB}$

代入(1) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \alpha_1\overrightarrow{AB'} + \beta_1\left(\frac{\alpha_1}{\Delta}\overrightarrow{AC} - \frac{\alpha_2}{\Delta}\overrightarrow{AB}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\Delta+\alpha_2\beta_1}{\Delta}\overrightarrow{AB} - \frac{\alpha_1\beta_1}{\Delta}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{\beta_2}{\Delta}\overrightarrow{AB} - \frac{\beta_1}{\Delta}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow S' = \left\{\alpha\left(\frac{\beta_2}{\Delta}\overrightarrow{AB} - \frac{\beta_1}{\Delta}\overrightarrow{AC}\right) + \beta\left(\frac{\alpha_1}{\Delta}\overrightarrow{AC} - \frac{\alpha_2}{\Delta}\overrightarrow{AB}\right) \middle| \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

$= \left\{\frac{\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2}{\Delta}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_1\beta - \beta_1\alpha}{\Delta}\overrightarrow{AC} \middle| \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

Claim: $S' = S$.

① $S' \subseteq S$ ✓

② $S \subseteq S'$ indeed, consider

$$\begin{cases} \frac{\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2}{\Delta} = \lambda \\ \frac{\alpha_1\beta - \beta_1\alpha}{\Delta} = \mu \end{cases} \text{ i.e., } \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\Delta} & -\frac{\alpha_2}{\Delta} \\ -\frac{\beta_1}{\Delta} & \frac{\alpha_1}{\Delta} \end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

$\frac{\beta_2}{\Delta}\frac{\alpha_1}{\Delta} - \left(-\frac{\alpha_2}{\Delta}\right)\left(-\frac{\beta_1}{\Delta}\right) = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta} \neq 0 \Rightarrow$ 有唯一解:

$(\alpha = *\lambda + **\mu,\ \beta = *\lambda + **\mu) \Rightarrow S \subseteq S'$. #

命题4. 空间中取定一点 O. 设 A, B, C 为不共线三点. 则

M 在平面 ABC 上 i.f.f. $\exists k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ s.t. $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC} \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{cases}$

pf. M 在平面 ABC 上 $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ s.t.

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

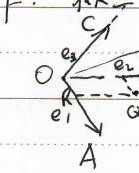
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$. #

1.2 坐标系.

Def. V 中任意三个有序的、不共面的向量 e_1, e_2, e_3 称为 V 的一组基.

定理: 设 e_1, e_2, e_3 为 V 的一组基. 则 $\forall a \in V$, $\exists!$ 三元有序数组 (x_1, x_2, x_3) s.t. $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

pf. 存在性: 取定点 O, $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OR} \parallel e_1$, $\overrightarrow{RQ} \parallel e_2$



$a = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP}$

$= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

唯一性: $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$= y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$

$\Rightarrow (x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + (x_3 - y_3)e_3 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$. #

称 (x_1, x_2, x_3) 为 a 在 basis (e_1, e_2, e_3) 下的坐标.

· 向量加法与数乘在 basis 下与之前定义的 3×1 矩阵的加法与数乘一致.

Def. 空间中任一点 O, 及 V 的一组基 (e_1, e_2, e_3). 称 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 为一个仿射坐标系. O: 坐标原点.

设 P 为空间中任一点. P 的坐标: $\overrightarrow{OP}$ 在 (e_1, e_2, e_3) 下的坐标. 称为点 P 在 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 下的坐标.

$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} \longleftrightarrow$ 坐标.

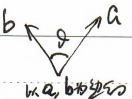
· 若 e_1, e_2, e_3 满足: $e_1 \perp e_2$, $e_2 \perp e_3$, $e_3 \perp e_1$, $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$, 右手则称 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 为直角坐标系. 常用 $[O; i, j, k]$ 记.

回顾：行向量、列向量、不共线三点确定一平面。

1.3. 内积、向量积、混合积。

$a, b, c \in V$.

内积：$a \cdot b := |a||b|\cos\theta$　　$0 \le \theta \le \pi$



向量积：定义 $a \times b$ 为向量，其大小 $= |a||b|\sin\theta$ = 平行四边形的面积

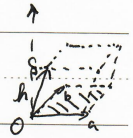
方向：$\perp a$，$\perp b$，且 a，b，$a\times b$ 满足右手定则。

混合积：$(a\times b)\cdot c$

观察知：$(a\times b)\cdot c$ = 以 a, b, c 为棱的平行六面体的有向体积

$\Rightarrow (a\times b)\cdot c = (b\times c)\cdot a = (c\times a)\cdot b$

$= -(b\times a)\cdot c = -(c\times b)\cdot a = -(a\times c)\cdot b$



命题：$\forall a, b, c \in V$，$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a\cdot b = b\cdot a \\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \\ (\lambda a)\cdot b = \lambda(a\cdot b) = a\cdot(\lambda b) \\ a^2 := a\cdot a \ge 0 \quad \text{“}=\text{”成立 iff } a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\times b = -b\times a \\ (\lambda a)\times b = \lambda(a\times b) = a\times(\lambda b) \\ (a+b)\times c = a\times c + b\times c \end{cases}$$

- 引入直角坐标系 $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$.

$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$　　$i\cdot j = i\cdot k = 0$ ……

$i\times j = k$，$j\times k = i$，$k\times i = j$.

$a = (a_1, a_2, a_3)$

$b = (b_1, b_2, b_3)$

$\Rightarrow a\cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$$a\times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$=: \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k\right)\cdot(c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$

$$(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Prop. a, b, c 共面 $\iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Pf. 均 $\iff$ 体积为 0. #.

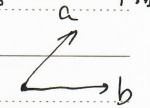
Rmk. Pf2. a, b, c 共面 $\iff$ 存在不全为零的实数 λ, μ, ν s.t. $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$

$\iff \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ \cdots \\ a_3x + \cdots + c_3z = 0 \end{cases}$ 有非零解 $\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

- 直角坐标系 $[O; i, j, k]$

$a = (a_1, a_2, a_3)$

$b = (b_1, b_2, b_3)$



过点 O 则由 a, b 张成的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

（in other words，该平面对应的向量与 $a\times b$ 垂直）← 法向量

§2. 复数

$i := \sqrt{-1}$　　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$z = x + iy$，$x, y \in \mathbb{R}$　　$i^2 = -1$.

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

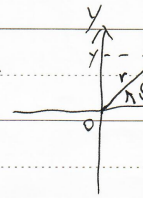
$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$0 := 0 + 0i$

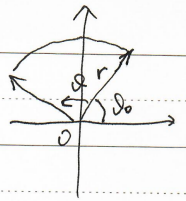
对 $z \ne 0$，$z = x + iy$ 定义 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\bar{z} := x - iy$.



$P = (x, y) = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$0 \le \theta < 2\pi$



$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad r_1 \geq 0$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \quad r_2 \geq 0$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$

in particular $r_1 = 1$. 对于 $z = \cos\theta + i\sin\theta$

$z\cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z_0 \mapsto z z_0$

$r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) \mapsto r\left(\cos(\theta_0+\theta) + i\sin(\theta_0+\theta)\right)$

$\frac{1}{z}\cdot : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z_0 \mapsto z_0/z$

$r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) \mapsto r\left(\cos(\theta_0-\theta) + i\sin(\theta_0-\theta)\right)$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$(\forall \underset{\text{actually}}{\theta \in \mathbb{R}})$ $\cos\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}$

$\sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}$

$\Rightarrow \cos\theta + i\sin\theta$

$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(+1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(+i)^n}{n!}\theta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$= e^{i\theta}$

$\theta = \pi. \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i\pi}+1 = 0.$ (Euler 公式)

week 2

作业: Pg. 1, 3-6, 9-12, 15H, 19.

Q3. 设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ 为平面直角坐标系两不同点. 写出经过 P, Q 的直线方程

Q4. 设 $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$, $R(x_3,y_3,z_3)$ 为空间直角坐标系不共线三点. 写出经过这三点的平面方程.

§A 外代数 (Grassman 代数)

V 线性空间, $e_1, \dots, e_n$: 一组基.

$\forall a, b, c, \overset{v}{\in} \overset{w}{V}. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$a \wedge a = 0$

$(\lambda a + \mu b)\wedge c = \lambda\, a\wedge c + \mu\, b\wedge c$, $a\wedge(\lambda b+\mu c) = \lambda a\wedge b + \mu a\wedge c$

$a\wedge b\wedge c := (a\wedge b)\wedge c := a\wedge(b\wedge c) \Rightarrow (\lambda a+\mu b)\wedge v\wedge w := \lambda a\wedge v\wedge w + \mu b\wedge v\wedge w$

e.g. $a\wedge b = -b\wedge a$, $\forall a,b\in V$. $(a+b)\wedge(a+b) = 0 \Rightarrow a\wedge a + b\wedge a + a\wedge b + b\wedge b = 0$

$\Rightarrow a\wedge b = -b\wedge a$

$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$

$b = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$

$a\wedge b = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)\wedge(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3)$

$= \lambda_1\mu_2\, e_1\wedge e_2 + \lambda_1\mu_3\, e_1\wedge e_3$

$+ \lambda_2\mu_1\, e_2\wedge e_1 + \lambda_2\mu_3\, e_2\wedge e_3$

$+ \lambda_3\mu_1\, e_3\wedge e_1 + \lambda_3\mu_2\, e_3\wedge e_2$

$= (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\, e_1\wedge e_2 + (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)\, e_2\wedge e_3 + (\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)\, e_3\wedge e_1$

$= \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2\end{vmatrix} e_1\wedge e_2 + \begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix} e_2\wedge e_3 + \begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix} e_3\wedge e_1$

$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$

$a\wedge b\wedge c = \gamma_3 \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2\end{vmatrix} e_1\wedge e_2\wedge e_3$

$+ \gamma_1 \begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix} e_2\wedge e_3\wedge e_1$

$+ \gamma_2 \begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix} e_3\wedge e_1\wedge e_2$

$= \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix} e_1\wedge e_2\wedge e_3$

V: 三维线性空间

Thm a, b, c 共面 $\Leftrightarrow a\wedge b\wedge c = 0$.

(参考 Rank 判据)

§3 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

引言里我们看到，该方程可写为：

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1},\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

· Gauss 消元法（九章算术）

例子.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & (2) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & (4) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (5) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 & (6) \end{cases}$$

(5)-3(4), (6)-2(4)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & (7) \\ -7x_2 - 7x_3 = -21 & (8) \\ -7x_2 - x_3 = -15 & (9) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & (10) \\ x_2 + x_3 = 3 & (11) \\ 6x_3 = 6 & (12) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

三种初等变换：

i) 交换两个方程，其余不变.

ii) 某个方程 × 非零常数，其余不变.

iii) 方程 A + k·方程 B 替换方程 A，其余不变.

实现：三种初等变换为方程组的等价变化.

· 算法：

① 写增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

r_1 ---

r_m ---

初等变换变为增广矩阵上的操作.

② 若第 1 列全为零，则看第 2 列，…

直到某一列 j_1 不全为零.

由 i). 不妨设 $a_{1j_1} \neq 0$.

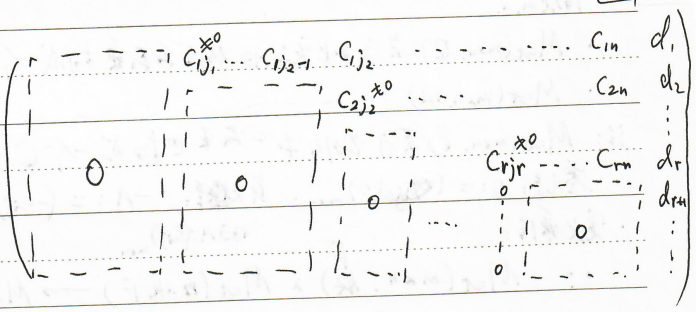
$r_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} r_1$ 替换 r_i, $i = 2, \cdots, m$

$$\Longleftarrow \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j_1} & a_{1,j_1+1} & \cdots & b_1 \\ & 0 & a^{(2)}_{2,j_1+1} & \cdots & b^{(1)}_2 \\ 0 & \vdots & \vdots & & \\ & 0 & a^{(1)}_{m,j_1+1} & \cdots & b^{(1)}_m \end{pmatrix}$$

对子矩阵继续上述操作次得：

$$\Longleftarrow \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1j_1} \neq 0 & \cdots & a_{1j_2} & a_{1,j_2+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & a^{(1)}_{2j_2} \neq 0 & a^{(1)}_{2,j_2+1} & \cdots & a^{(1)}_{2n} & b^{(1)}_2 \\ 0 & & 0 & 0 & a^{(2)}_{3,j_2+1} & \cdots & a^{(2)}_{3n} & b^{(2)}_3 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & a^{(2)}_{m,j_2+1} & \cdots & a^{(2)}_{mn} & b^{(2)}_m \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ 标准型：



定理：对上述标准型：

若 $d_{r+1} \neq 0$ 无解

若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 唯一解

若 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$ 无穷多解. #

作业：P67. 1：(1), (2), (4), (7)

2：(1), (2)

3, 4, 5, 6.

§4. 矩阵和行列式

§4.1 "matrix". 回归线性方程的招会. 零元素非一. 负元素唯一.

形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 这样的 m 行 n 列的数表称为一个矩阵. 记为 $A_{m\times n}$, or A, or $(a_{ij})_{m\times n}$ or (a_{ij}).

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. "实矩阵".

(注：也可以考虑 $a_{ij} \in \mathbb{C}$. "复矩阵"). 合体记为 $M_{at}(m\times n, \mathbb{R})$ or $M_{at}(m\times n, \mathbb{C})$. $m=n$. n 阶矩阵.

· 定义加法：$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$

$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

· 定义数乘：$\lambda \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$

$\lambda A := (\lambda a_{ij})$.

固定 m, n.

· $M_{at}(m\times n, \mathbb{C})$ 关于如上定义的加法和数乘构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间.

· $M_{at}(m\times n, \mathbb{R})$ · — — — — — $\mathbb{R}$-线性空间.

注：$M_{at}(m\times n, \mathbb{C})$ 关于加法和 $\mathbb{C}$-数乘也构成一个 $\mathbb{C}$-线性空间.

零元素：$0 := (0)_{m\times n}$. 负元素：$-A := (-a_{ij})_{m\times n}$.

· 定义乘法：对于 $A = (a_{ij})_{m\times n}$

$\cdot : M_{at}(m\times n, F) \times M_{at}(n\times k, F) \longrightarrow M_{at}(m\times k, F)$

$(A = (a_{ij}), B = (b_{jl})) \longmapsto A\cdot B$ or AB.

$$(A\cdot B)_{il} := \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jl}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}.$$

· 定义两个矩阵相等：若各分量相等. · 定理：$\lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

· 定理：① 矩阵乘法满足结合律：$(AB)C = A(BC)$

② 乘法对加法满足分配律：$(A+B)C = AC + BC$

pf：① $LHS_{ip} = \sum_l (AB)_{il} C_{lp}$

$$= \sum_l \sum_j A_{ij} B_{jl} C_{lp}$$

$RHS_{ip} = \sum_j A_{ij} (BC)_{jp}$

$$= \sum_j A_{ij} \sum_l B_{jl} C_{lp} = \sum_{j,l} A_{ij} B_{jl} C_{lp} = LHS_{ip}. \#$$

② exercise. #

e.g. · $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 零矩阵

· $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ n 阶单位阵. 记为 I or $I_{n\times n}$ or I_n

$I_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)

显然：$\forall A=(a_{ij})_{n\times k}$

$(IA)_{il}=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}a_{jl}=a_{il}\Rightarrow IA=A.$

$\forall B=(b_{ki})_{m\times n}$

$(BI)_{kj}=\sum_{i=1}^{n}b_{ki}\delta_{ij}=b_{kj}\Rightarrow BI=B.$

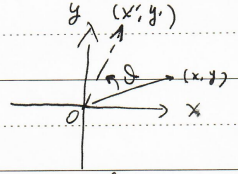
对 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 有：$AI=IA=A.$

· 形如：$\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}_{n\times n}$ 的矩阵称为 n 阶对角阵. 也记为 $diag(a_1,\cdots,a_n)$.

· 形如：$\begin{pmatrix}a&&\\&\ddots&\\&&a\end{pmatrix}_{n\times n}$ 的矩阵称为 n 阶数量矩阵. $a\neq 0$.

· $\begin{pmatrix}*&&\\&\ddots&\\0&&*\end{pmatrix}$ 上三角阵. $\begin{pmatrix}*&&0\\&\ddots&*&&*\end{pmatrix}$ 下三角阵.

·



$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$

$(x+iy)e^{i\theta}$

$=(x+iy)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=x\cos\theta-y\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$

$=x'+y'i$

· 定义：设 $A\in M_{at}(m\times n,F)$. 定义 A^T 为 $n\times m$ 矩阵.

$(A^T)_{ij}:=A_{ji}$

称 A^T 为 A 的转置.

设 A 为一个方阵. 若 $A^T=A$ 则称 A 为对称矩阵.

若 $A^T+A=0$ 则称 A 为反对称矩阵.

· 命题：① $(A+B)^T=A^T+B^T$ ② $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ ③ $(AB)^T=B^TA^T$ #

· Def. $A\in M_{at}(n\times n,F)$. if $\exists\ B\in M_{at}(n\times n,F)$

s.t. $AB=BA=I_n$

则称 A 可逆. 并称 B 为 A 的逆. 可逆也称非奇异

· 命题. 若 A 可逆. 则其逆唯一. 反之称为不可逆. 不可逆也称为奇异

证. 设有 $AB_1=B_1A=I$

$AB_2=B_2A=I$

则 $B_1=B_1I=B_1AB_2=IB_2=B_2$ #.

· 命题. 若 A,B 可逆则：① $(A^{-1})^{-1}=A$. ② $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$ 对 $\lambda\neq 0$. ③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. ④ $(A^T)^T=(A^{-1})^T$.

· trace. 设 $A\in M_{at}(n\times n,F)$. $F=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

定义 $tr\,A:=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$ $tr(A)$

称为 A 的 trace.

· 命题：① $tr(A+B)=tr\,A+tr\,B$

② $tr(\lambda A)=\lambda\,tr\,A$

③ $tr(A^T)=tr(A)$

④ $tr(AB)=tr(BA)$.

$A\in M_{at}(m\times n,F)$, $B\in M_{at}(n\times m,F)$, 则：

· 对 $F=\mathbb{C}$. 复共轭. $\overline{A}:=(\overline{A_{ij}})_{m\times n}$

· 命题：① $tr(\overline{A})=\overline{tr(A)}$.

② $\overline{(AB)}=\overline{A}\,\overline{B}$

e.g. $A \in M_{at\, m\times n}(\mathbb{C})$. 若 $tr(A\bar{A}^T)=0$ 则 $A=0$.

pf. $A=(a_{ij})_{m\times n}$

$tr(A\bar{A}^T)=\sum_{i=1}^{m}(A\bar{A}^T)_{ii}$ $\quad \bar{A}^T_{ji}=\bar{A}_{ij}=\overline{a_{ij}}$

$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=0.$

$\Rightarrow A=0$. #

· 逆矩阵在用：A为方阵. $Ax=b$. 若 A可逆 $\Rightarrow x=A^{-1}b$. 存在唯一解组

· 分块矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. $\quad \beta_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1s}\\ \vdots & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2}\cdots A_{rs}\end{pmatrix}_{r\times s}$$

· 若 $A_{ij}=0$ $\forall i\neq j$ 则称 A为准对角阵.

· 若 $A_{ij}=0$ $\forall i>j$ —— 准上三角阵.

$\forall i<j$ —— 下 ——.

e.g. $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}E & F\\ G & H\end{pmatrix}$

有: $M+N=\begin{pmatrix}A+E & B+F\\ C+G & D+H\end{pmatrix}$

$MN=\begin{pmatrix}AE+BG & AF+BH\\ CE+DG & CF+DH\end{pmatrix}$

合理分块，简便计算.

Homework. P113. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. (1),(2)(5)

Q1. 设 $A,B\in M_{at}(n\times n,\mathbb{F})$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

称 AB 可交换. 若 $AB=BA$.

对于 $n=2$. ~~求出所有与一个给定的~~ 求出 $M_{at}(2\times 2,\mathbb{F})$ 中所有与 ~~给定~~ 可交换的 2×2 分阵.

Q2. 给定 $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{C}$. 记 $P(x,y)$ (a,b,c不全为零)

~~$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$~~

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 为 $\mathbb{P}^2$ 上一条二次曲线. 称此曲线 reducible. 若存在

$f_1=Ax+By+C$

$f_2=Dx+Ey+F$

s.t. $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=f_1f_2$ (没有二次项)

否则称之为不可约. 证明：对于平面上任意一组任意五个点，存在一条二次曲线经过这5个点. (五点确定一条二次曲线) 是不可约的?

0, 2, 6, ...

例1 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\&1&0&1\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$. 求 A^n. $n\in\mathbb{Z}_{>0}$.

解1. $A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&3&3&6\\0&1&0&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Guess: $A^n=\begin{pmatrix}1&n&n&n(n-1)\\0&1&0&n\\0&0&1&n\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. 数学归纳法 ...

解2. $A^n=\begin{pmatrix}1&a_n&b_n&c_n\\0&1&d_n&e_n\\0&0&1&f_n\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a_n&b_n&c_n\\0&1&d_n&e_n\\0&0&1&f_n\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a_n+1&b_n+d_n+1&c_n+e_n+f_n\\0&1&d_n&e_n+1\\0&0&1&f_n+1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n+1 \overset{a_1=1}{\Rightarrow} a_n=n$

$b_{n+1}=b_n+d_n+1 \Rightarrow b_{n+1}=b_n+1 \overset{b_1=1}{\Rightarrow} b_n=n$

$c_{n+1}=c_n+e_n+f_n \Rightarrow c_{n+1}=c_n+2n \overset{c_1=0}{\Rightarrow} c_n=n^2-n$

$d_{n+1}=d_n=\cdots=0$

$e_{n+1}=e_n+1 \Rightarrow e_n=n$

$f_{n+1}=f_n+1 \Rightarrow f_n=n$

$(n+1)^2-(n+1)=n^2+2n+1-n-1=n^2+n$

$-(n^2-n)$

解3. $A=\begin{pmatrix}B&I\\0&B\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}B^2&2B\\0&B^2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}B^3&3B^2\\0&B^3\end{pmatrix}\cdots\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}B^n&nB^{n-1}\\0&B^n\end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$, ...

$\Rightarrow B^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}n&n(n-1)\\0&n\end{pmatrix}\\0&\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$.

~~4.2 行列式~~

~~• Motivation~~

例: $A=\begin{pmatrix}1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}$ 求 A^k, $k\geq 1$.

解: $A=I+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}}_{J}=I+J$

$A^2=I+2J+J^2$, $A^3=I+3J+3J^2+J^3$, ...

$A^k=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}J^m$

$J^2=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&0\\0&&&&0\end{pmatrix}$, $J^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&\ddots&0\\&&&&\ddots&0\\0&&&&&0\end{pmatrix}$, ...

$J^{n-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\&\ddots&\ddots&\ddots&0\\&&\ddots&\ddots&0\\&&&\ddots&0\\0&&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}$.

也可先猜后证.

$(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2iab$

$(a+bi)^3 = a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$= a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i$

例2. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. 求 A^k, $k\geq 1$.

解: (1) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} a(a^2-b^2)-2ab^2 & 2a^2b+b(a^2-b^2) \\ -b(a^2-b^2)-2a^2b & -2ab^2+a(a^2-b^2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^3-3ab^2 & 3a^2b-b^3 \\ b^3-3a^2b & a^3-3ab^2 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} a^4-3a^2b^2+b^4-3a^2b^2 & 3a^3b-ab^3+a^3b-3ab^3 \\ -b(a^2-3ab^2)+a(b^2-3a^2b) & -b(3a^2b-b^3)+a(a^3-3ab^2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^4-6a^2b^2+b^4 & 4a^3b-4ab^3 \\ 4ab^3-4a^3b & a^4-6a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}$ ....

$A=aI+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^k=(aI+b\sigma)^k=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}a^{k-m}b^m\sigma^m$

$\sigma^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma^3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma^{4m+1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4m+2}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4m+3}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^{4m}=I$

(2) 若 $a,b\in\mathbb{R}$, $A \xleftrightarrow{f} a+bi$. $A^k \xleftrightarrow{f} (a+bi)^k$ ($i^2=-1$)

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow$

(3) $a+bi=re^{i\theta}$

$A=r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow A^k=r^k\begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$, $k\geq 1$.

· 矩阵的 exponential. $e^X:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$ (X 为 n 阶方阵)

例3. $X=\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$ $X^0=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$X^2=\begin{pmatrix} -\theta^2 & \\ & -\theta^2 \end{pmatrix}$

$X^3=\begin{pmatrix} 0 & -\theta^3 \\ \theta^3 & 0 \end{pmatrix}$

....

$e^X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k=\begin{pmatrix} 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots & \theta-\frac{\theta^3}{3!}+\cdots \\ -\theta+\frac{\theta^3}{3!}-\cdots & 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=:A$

$A^TA=I$. A: $\mathbb{R}^2$ 上旋转 θ 和变换.

$\theta=\theta(t)$

$\frac{dA^T}{dt}A+A^T\frac{dA}{dt}=0$

$\omega:=\frac{dA}{dt}A^{-1}=\begin{pmatrix} -\sin\theta\,\dot\theta & +\cos\theta\,\dot\theta \\ -\cos\theta\,\dot\theta & -\sin\theta\,\dot\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & \dot\theta \\ -\dot\theta & 0 \end{pmatrix}$

称 ω 为角度矩阵.

27 3/4

$A \in Mat(3\times 3, \mathbb{R})$.

满足 $A^TA = I$ 的矩阵 A $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ 上保向 刚体运动 设 $A = A(t)$

$\det A = 1$

$\omega := \frac{dA}{dt} A^{-1}$ 称为角速度矩阵.

$$\omega^T + \omega = A^{-1}\frac{dA^T}{dt} + \frac{dA}{dt}A^{-1}$$

$$= A\frac{dA^T}{dt} + \frac{dA}{dt}A^T = 0 \quad (\text{因为 } AA^T = I)$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \omega_{12} = -\omega_z \\ \omega_{13} = \omega_y \\ \omega_{23} = -\omega_x \end{cases}$$

integration

$$\frac{dA}{dt} = \omega(t)A(t)$$

若 $\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$ 则

$$A(t) = e^{\omega_0 t} A(0)$$

indeed. $\frac{dA(t)}{dt} = \omega_0 e^{\omega_0 t} A(0)$

$= \omega_0 A(t)$

27 7/8

ℓ	10	100	1000	10000
	0	1	2	3

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)$$

$$= \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)}$$

	0	1	2	3

$$= \frac{9801}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{k!^4\, 396^{4k}}} \cdot \frac{1}{14.} = \frac{9801}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1103 + \cdots}$$

$$= \frac{640320^{3/2}}{12} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!\,(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3\,(-640320)^{3k}}}$$

4.2 行列式：定义、计算与应用.

* motivation 1: check linear independency

- $(ae_1+be_2)\wedge(ce_1+de_2)=(ad-bc)\,e_1\wedge e_2$
- $(a_{11}e_1+a_{12}e_2+a_{13}e_3)\wedge\cdots\wedge(a_{31}e_1+a_{32}e_2+a_{33}e_3)$

$=(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$
$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31})\,e_1\wedge e_2\wedge e_3$

- 四维向量空间 e_1,e_2,e_3,e_4 basis

$(a_{11}e_1+a_{12}e_2+a_{13}e_3)\wedge\cdots\wedge(a_{41}e_1+\cdots+a_{44}e_4)$

$=\sum_{\sigma\in S_4}\operatorname{sign}(\sigma)\,a_{1\sigma_1}\cdots a_{4\sigma_4}$

* motivation 2: 希望得到计算逆矩阵的有效算法.

- 定义: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 定义 A 的行列式为

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\,a_{1\sigma_1}\cdots a_{n\sigma_n}=:\det(A)$$

$$(\text{or } =:|A|)$$

这里, $\operatorname{sign}(\sigma):=(-1)^{\tau(\sigma)}$ 称为排列 σ 的符号,

$\tau(\sigma)$ 为 σ 的逆序对的个数. * 下面看如何计算 $\tau(\sigma)$.

- 逆序对为奇数的排列称为奇排列.

偶 偶 奇 偶 奇 奇 偶 ....

- 命题 4.2.1 一次对换改变奇偶性.

证明: $\sigma=\overset{(\mathrm{I})}{\cdots}\,a\,\overset{(\mathrm{II})}{\cdots}\,b\,\overset{(\mathrm{III})}{\cdots}$ $\quad\sigma'=\overset{(\mathrm{I})}{\cdots}\,b\,\overset{(\mathrm{II})}{\cdots}\,a\,\overset{(\mathrm{III})}{\cdots}$

i) 若 $a<b$. 设 (II) 中, 比 a 小的有 y 个; 大于 a 小于 b 的有 z 个; 大于 b 的有 x 个.

即: (II) 中: $a<\cdots<b$, y 个, z 个.

则 $\tau(\sigma')-\tau(\sigma)=(y+1+z+x)-(y+x)=2z+1$.

ii) 若 $a>b$. 设 (II) 中, 比 a 大的有 y 个, a,b 之间 z 个, 比 b 小的有 x 个.

即 $a>\cdots>b>\cdots>b$, y 个, z 个.

则 $\tau(\sigma')-\tau(\sigma)=(x+y)-(z+1+x+y+z)=-(2z+1)$. #.

$(1,2,\cdots,n)$ 称为顺序排列.

命题 4.2.2 设 σ 为一排列. 则 σ 可经过 $\tau(\sigma)$ 次相邻位置对换变为顺序排列.

证明: $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$

设形如 $(*,1)$ 的逆序对有 m_1 个 $\Rightarrow$ m_1 次相邻位置对换可将 1 换到位置 1. 且不改变其他构成关系.

从第二个位置开始的有 m_2 个形如 $(*,2)$ 的逆序对. $\Rightarrow$ m_2 次相邻位置对换可将 2 换到位置 2. ....

共 $m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}$ 次相邻位置对换可将 σ 变成顺序. #

(也可用数学归纳法证即: 若对 $n=k$ 成立. $(k\ge 1)$ 则对于 $n=k+1$.

$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{k+1})$ ~~设 $(*,1)$ 和逆序对有~~

设 1 的位置为 $i+1$. 则有 i 个形如 $(*,1)$ 的逆序对. $\sigma_{i+1}=1,\ i=0,\cdots,k$

则对换变为 $(1,\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i,\sigma_{i+2},\cdots,\sigma_{k+1})$

$\tau(\sigma)=i+\tau((\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i,\sigma_{i+2},\cdots,\sigma_{k+1}))$

~~由数学~~ 由归纳假设: 排列 $\sigma_1,\sigma_2\cdots,\sigma_i,\sigma_{i+2},\cdots,\sigma_{k+1}$ 可由 $\tau((\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i,\sigma_{i+2},\cdots,\sigma_{k+1}))$ 次相邻位置对换变为顺序 $(2,3,\cdots,k+1)$. #.)

命题 4.2.3 设 σ 为一排列. 若 σ 可由 r 次对换变为顺序排列 则:

$$(-1)^r=(-1)^{\tau(\sigma)}.$$

证明: 只需注意到顺序排列为偶排列. 及命题 4.2.1

命题 4.2.4 一排列 σ 可由顺序排列经过一系列对换得到. 且对换次数奇偶性与 $\tau(\sigma)$ 相同.

证明: $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$. 顺序排列: $(1,2,\cdots,n)=A$.

若 $\sigma_1\neq 1$. 对换 A 中的 1 和 σ_1. 得 $B=(\sigma_1,\cdots)$

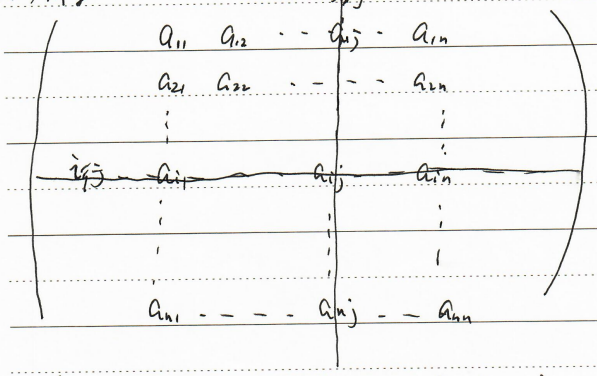
若 $\sigma_2\neq 2$. 对换 B 中的 2 和 σ_2 得 $C=(\sigma_1,\sigma_2\cdots)$

.... 至多 $n-1$ 次得 σ. 奇偶性只需注意顺序排列为偶排列, 以及命题 4.2.1. #

上面我们给出了行列式的定义和计算方法. 实际中, 使用定义来计算是比较复杂的. 我们下面给出一些计算行列式的有效方法.

定义: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 定义元素 a_{ij} 对应的余子式为 (minor)

$(n-1)\times(n-1)$ 方阵



的行列式, 记为 M_{ij}. (cofactor)

称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 对应的代数余子式, 记为 C_{ij}.

定理 4.2.1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, 记 C_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 则:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij} \quad \text{(行列式按第 } i \text{ 行展开)} \quad \forall i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij} \quad \text{(行列式按 } \cdots \text{ 列展开)} \quad \forall j.$$

即. $|A|=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n}$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma_1,\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_n \text{ 为 } \{1,\cdots,n\}\setminus\{j\} \text{ 的排列}\\ \sigma_i:=j}}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma_1}\cdots a_{i\sigma_i}\cdots a_{n\sigma_n}$$

$\sigma_1,\cdots,\sigma_{i-1}$ 中比 j 小的有 $j-1$ 个, 大的有 $n-i$ 个

$\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_n$ 中 $\cdots$ 小的有 $j-1$ 个, 大的有 $n-j$ 个

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_n \text{ 为 } \{1,\cdots,n\}\setminus\{j\} \text{ 的排列}}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma_1}\cdots\widehat{a_{i\sigma_i}}\cdots a_{n\sigma_n}(-1)^{i-1-r_{\sigma_i}+s_{(\sigma)}}$$

$i-1-r_{\sigma_i}+j-1-r(\sigma)=i+j$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad \#.$$

$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

· 定理 4.2.2. (行列式的性质):

1. 多线性性: $\det\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_i^{(1)}+\mu\alpha_i^{(2)}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\lambda\det\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i^{(1)}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\mu\det\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i^{(2)}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

2. 反对称性: $\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ \alpha\\ \vdots\end{pmatrix}=0$ $(i\neq j)$.

3. 规范性: $\det(I)=1$.

证明: 1. $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_i^{(1)}+\mu\alpha_i^{(2)}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(a_{ij})$ $a_{ij}=\lambda\alpha_{i0;j}^{(1)}+\mu\alpha_{i0;j}^{(2)}$

将 A 按第 i 行展开

$$\Rightarrow \det A=\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda\alpha_{i0;j}^{(1)}+\mu\alpha_{i0;j}^{(2)}\right)(-1)^{i_0+j}M_{i_0j}$$

(这里 M_{i_0j} 为 a_{i_0j} 对应的代数余子式).

$$=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{i_0}^{(1)}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{i_0}^{(2)}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{vmatrix}.$$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

2. $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\,a_{1\sigma_1}\cdots a_{n\sigma_n}$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma')(-1)\,a_{1\sigma_1}\cdots a_{n\sigma_n}$$

σ' 为 σ 交换 σ_i,σ_j 得到的.

$$=-\sum_{\sigma'\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma')\,a_{1\sigma'_1}\cdots a_{n\sigma'_n}=-\det A\Rightarrow\det A=0.$$

3. $\det(I)=1$. 显然. #

定理 4.2.3. 设 $A, B \in M_{at}(n\times n, F)$. 则 $|AB| = |A|\,|B|$.

pf. 记 $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

对 B 分块 $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ $\beta_j = (b_{j1}, \cdots, b_{jn})$, $j = 1, \cdots, n$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{n1}\beta_1 + \cdots + a_{nn}\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\beta_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}\beta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}\beta_j \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1}\beta_{j_1} \\ \sum_{j_1=1}^n a_{2j_1}\beta_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_1=1}^n a_{nj_1}\beta_{j_1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sum_{j_2=1}^n a_{1j_2}\beta_{j_2} \\ \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2}\beta_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_2=1}^n a_{nj_2}\beta_{j_2} \end{pmatrix} * \cdots * \begin{pmatrix} \sum_{j_n=1}^n a_{1j_n}\beta_{j_n} \\ \sum_{j_n=1}^n a_{2j_n}\beta_{j_n} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n}\beta_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1j_1}\begin{pmatrix} \beta_{j_1} \\ * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j_2=2}^n a_{1j_2}\beta_{j_2} \\ * \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1}\begin{pmatrix} \beta_{j_1} \\ * \end{pmatrix} *$$

$$= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \det\begin{pmatrix} \beta_{j_1} \\ \vdots \\ \beta_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j\in S_n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \det\begin{pmatrix} \beta_{j_1} \\ \vdots \\ \beta_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j\in S_n} (-1)^{\tau(j)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \det\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \det A \det B \quad \#$$

Cor1. $A \in M_{at}(m\times n, F)$, $B \in M_{at}(n\times m, F)$. $m > n$. 则 $\det(AB) = 0$.

pf. $A_1 := (A, O_1)_{m\times m}$, $B_1 := \begin{pmatrix} B \\ O_2 \end{pmatrix}_{m\times m}$ $A_1B_1 = AB$

$O_1 = O_{m\times(m-n)}$, $O_2 = O_{(m-n)\times m}$ $\det(AB) = \det A_1 \det B_1 = 0$. #

Cor2. $A \in F^{m\times m}$, $D \in F^{n\times n}$, $B \in F^{n\times m}$, $C \in F^{m\times n}$, A 可逆.

则: $\det\begin{pmatrix} A_{m\times m} & C_{m\times n} \\ B_{n\times m} & D_{n\times n} \end{pmatrix} = \det A \det(D - BA^{-1}C)$

pf. $\begin{pmatrix} I_m & O \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ O & -BA^{-1}C + D \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} I_m & O \\ -BA^{-1} & I_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & D - BA^{-1}C \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det A \det(D - BA^{-1}C).$$

(这里, 我们用到 $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{vmatrix} = |A_1|\,|A_3|$. 证明留作练习. (用定义).)

定理 4.2.4. $A \in F^{n\times n}$. $\det A = \det(A^T)$.

pf. $\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2}\cdots a_{\sigma_n n}$

由命题 4.2.2: 排列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 可由 $\tau(\sigma)$ 次对换变为 $1, 2, \cdots, n$.

设这 $\tau(\sigma)$ 次对换将 $1, 2, \cdots, n$ 变为 $j_1, \cdots, j_n$. 则:

$a_{\sigma_1 1}\cdots a_{\sigma_n n} = a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$

且 $(-1)^{\tau(\sigma)} = (-1)^{\tau(j)}$

$$\Rightarrow \det(A^T) = \sum_{j\in S_n} (-1)^{\tau(j)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} = \det(A) \quad \#$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$. 记 C_{ij} 为 a_{ij} 对应的代数余子式.

定义: $A^* := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \left(= (C_{ij})^T\right)$

定理 4.2.5. $AA^* = A^*A = \det(A)\, I$.

pf. $\Longleftrightarrow$ $(AA^*)_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij} = \det(A)\delta_{ij}$ (1)

$(A^*A)_{ij} = \sum_{j=1}^n C_{ji}a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ji}C_{ji} = \det(A)\delta_{ij}$ (2)

若 i=k. (1) $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \det A$. true. (按第 i 行展开)

(2) $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ji} C_{ji} = \det A$ true (——i 列——)

若 i≠k.

$\Leftarrow$ 记 B 为将 A 的第 k 行用第 i 行替换后的方阵. $\Rightarrow \det B = 0$.

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = 0$$

↓ 按第 k 行展开

类似的 记 D 为将 A 的第 k 列用第 i 列替换后的方阵. $\Rightarrow \det D = 0$

$$\det D = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} C_{jk} = 0 \quad \#.$$

↓ 按第 k 列展开

定理 4.2.6.

$A \in F^{n\times n}$. A 可逆 当且仅当 $\det A \neq 0$.

且当 A 可逆时, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

pf. "$\Rightarrow$". A 可逆 $\Rightarrow \exists B$ s.t. $AB = BA = I$.

$\Rightarrow \det A \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$.

"$\Leftarrow$". $\det A \neq 0 \Rightarrow \frac{A^*}{\det A}$ 为 A 的逆. #.

Rmk. A 可逆 $\Leftrightarrow \exists B$ s.t. $AB = I$ or $BA = I$.

作业: ~~P114. 22, 23, 23 (1), (3), (4), (5), (6), (7).~~

~~26, 25, 27, 28, 29, 30.~~

P114 22-25, 27-30.

· Applications:

1. Cramer 法则: 设 $A \in F^{n\times n}$ 若 $\det A \neq 0$ 则 对于 $\forall b$ 的 方程

$$Ax = b$$

的解存在且唯一. 这里, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

且此唯一解有表达式 $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$, $i = 1, \cdots, n$.

这里 Δ_i 是将 A 的第 i 列 换为 b 的方阵的行列式.

注明: $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆.

则 $x = A^{-1} b$ 为解, 且为唯一解.

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\det A} A^* b$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (A^*)_{ij} b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} C_{ji} b_j = \frac{\det \Delta_i}{\det A}$$

(这里, 我们记 C_{ij} 为 A 的第 i 行、第 j 列的元素对应的代数余子式).

2. V: 线性空间.

$v_1, \cdots, v_n$ basis. ($v_1, \cdots, v_n$ 线性无关且任一向量可由 $v_1, \cdots, v_n$ 线性表出)

$$(a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n) \wedge \cdots \wedge (a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

· Examples.

1. Vandermonde 行列式：

$$\Delta_n(a_1,\dots,a_n) := \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Solution.

$$\Delta_n(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \\ a_1^{n-1}-a_n a_1^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_n a_{n-1}^{n-2} \quad 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \\ a_1^{n-2}-a_n a_1^{n-3} & \cdots & (a_{n-1}-a_n)a_{n-1}^{n-3} \quad 0 \\ (a_1-a_n)a_1^{n-2} & \cdots & (a_{n-1}-a_n)a_{n-1}^{n-2} \quad 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \quad 0 \\ \vdots & & \\ (a_1-a_n)a_1^{n-2} & \cdots & (a_{n-1}-a_n)a_{n-1}^{n-2} \quad 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ \vdots & & \\ (a_1-a_n)a_1^{n-2} & \cdots & (a_{n-1}-a_n)a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(a_1-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(a_1-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)\,\Delta_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1}) \quad \Delta_1 = 1.$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\,\Delta_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1})$$

$$\Rightarrow \Delta_n = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

2.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} =: \Delta_n$$

Solution. $n=1$. $\Delta_1 = x$

$n=2$. $\Delta_2 = x^2-1 = (x+1)(x-1)$

$n\ge 3$.

数阶行列式 Δ_n 第一行

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & \cdots \\ 1-x & 0 & x-1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \\ 1-x & 0 & \cdots & 0 \quad x-1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

按第一行 $= x$

$$\begin{vmatrix} x-1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x-1 & \\ & & & x-1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ & x-1 & & \\ & & \ddots & \\ 1-x & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1-x & x-1 & & \\ 1-x & & x-1 & \\ 1-x & & & \ddots \\ & & & x-1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1-x & x-1 & 0 & \\ 1-x & 0 & x-1 & \\ 1-x & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \\ 1-x & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1-x & x-1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 1-x & 0 & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$= x(x-1)^{n-1} - (x-1)(x-1)^{n-2} + (-1)(x-1)(1-x)(x-1)^{n-3} - (x-1)^2(1-x)(x-1)^{n-4}$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}(1-x)$$

$$= x(x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1}$$

$$= (x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

$\sigma = (2,3,\cdots,n-1,1)$

$\tau(\sigma) = (-1)^{n-2}$

3. Circulants

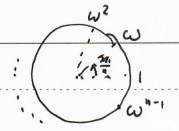
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & & & \\ x_{n-1} & & & & x_3 \\ & & & & x_2 \\ x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x_1 \end{vmatrix}_{n\times n} =: C_n$$

Solution: $C_1 = x_1$

$C_2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1+x_2)(x_1-x_2)$

$C_3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 = (x_1+x_2+x_3)(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\cdot(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)$

in general, let $\omega := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ (n次本原单位根)



设:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$C_nV_n = \begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n & x_1+\omega x_2+\cdots+\omega^{n-1}x_n & \cdots & x_1+\omega^{n-1}x_2+\cdots+\omega^{(n-1)(n-1)}x_n \\ x_n+x_1+\cdots+x_2 & x_n+\omega x_1+\cdots+\omega^{n-1}x_2 & \cdots & x_1+\omega^{n-1}x_1+\cdots+\omega^{(n-1)(n-1)}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1 & x_2+\omega x_3+\cdots+\omega^{n-1}x_1 & \cdots & x_2+\omega^{n-1}x_3+\cdots+\omega^{(n-1)(n-1)}x_1 \end{vmatrix}$$

记 $f(z) = x_1z^0+x_2z+\cdots+x_nz^{n-1}$, 则:

$$C_nV_n = \begin{vmatrix} f(1) & f(\omega) & \cdots & f(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \omega f(\omega) & & \omega f(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(1) & \omega^{n-1}f(\omega) & & \omega^{n-1}f(\omega^{n-1}) \end{vmatrix} = f(1)\cdots f(\omega^{n-1})\,V_n$$

由于 $V_n \neq 0$

$\Rightarrow C_n = f(1)\cdots f(\omega^{n-1})$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

4. 设 $A\in F^{n\times n}$. 证明: $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Pf. "$\Rightarrow$". $Ax^*=0$. $x^*\neq 0$.

反证法. 若 $\det A\neq 0$. $\Rightarrow A$ 可逆 $\Rightarrow A^{-1}Ax=0 \Rightarrow x=0$. 矛.

"$\Leftarrow$". $\det A = 0$.

由 Gauss 消元法知, $r<n$. 且 $d_{r+1}=0$. $\Rightarrow$ 有无穷多解. #

5. $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times m}$. 证明:

$$\det(I_n - BA) = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m - AB)$$

Pf.

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I-BA \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \det(I-BA).$$

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I-AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \det(I-AB). \#$$

6. 7 #p25~#p26

作业: 27-30,

31 (2),

32

对 $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}_{n} = |A||B|$ 的证明 (困难)

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(m+n)\times(n+m)}$

$$LHS = \sum_{\sigma\in S_{n+m}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{m\sigma_m}\cdots a_{(m+n)\sigma_{m+n}} = \sum_{\sigma_1\in S_m}\sum_{\sigma_2\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{m\sigma_m}\, a_{(m+1)\sigma_{m+1}}\cdots a_{(m+n)\sigma_{m+n}}$$

$= |A||C|$

~~课上讲~~ 9. 设 $f: \underbrace{F^n\times\cdots\times F^n}_{n} \to F$ 满足: (1) $f\begin{pmatrix} \cdots \\ \alpha+\beta \\ \cdots \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \cdots \\ \alpha \\ \cdots \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \cdots \\ \beta \\ \cdots \end{pmatrix}$

(2) $f\begin{pmatrix} \cdots \\ \alpha \\ \cdots \end{pmatrix} = 0$ (3) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ 则 $f\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

这里把 ~~向量~~ 行向量构成的线性空间. $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. 为 ~~0~~ 1

~~2.~~ ~~$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}A}$~~ 作业:

~~$\forall A\in F^{n\times n}$~~, 设 $A, B\in M_{n\times n}(F)$, 若 A, B 可交换, 即 $AB=BA$. 定义 $V := \{M \mid M, A$ 可交换且 BM 的迹为零$\}$.

记 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda\in F$ 为任意常数. (对!!!)

(i) 证明 V 关于矩阵的加法与 F 数乘构成线性空间 ii). 求出 V 中的所有元素

iii) 找到一组 $M_{n\times n}(F)$ 上的 ~~基~~ 基底

~~找出所有元素~~

7.5. $\det(I+\epsilon B) = 1+\epsilon\,\mathrm{tr}(B) + O(\epsilon^2)$

$\forall B \in F^{n\times n}$. 对 $n=1$. OK. $n\geq 2$. $\epsilon^* \cdot \epsilon^* = O(\epsilon^2)$

moreover, $\det(I+\epsilon B) = 1+\epsilon\,\mathrm{tr}(B)+\cdots+\epsilon^n \det B$. (6.

8. Jacobi's formula.

命题：设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$. 其中 $a_{ij} = a_{ij}(t)$ 为 $t\in\mathbb{R}$ 的连续可微函数.

则：$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \mathrm{tr}\left(A^*(t)\frac{dA(t)}{dt}\right).$$

证明：$$\frac{d(\det A(t))}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}}(t)\frac{da_{ij}}{dt}$$

设 C_{ij} 为 a_{ij} 对应的代数余子式.

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} C_{kl} \quad (\text{行列式按第 } k \text{ 行展开}),\ \forall k=1,\cdots,n \text{ 成立.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a_{kl}}{\partial a_{ij}}C_{kl} + \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial C_{kl}}{\partial a_{ij}}.$$

取 $k=i$.

$$\Rightarrow \frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a_{il}}{\partial a_{ij}}C_{il} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}\boxed{\frac{\partial C_{il}}{\partial a_{ij}}}$$

$\boxed{\frac{\partial C_{il}}{\partial a_{ij}}}$ 与 a_{ij} 无关 $= 0$

$$= \sum_{l=1}^{n}\delta_{lj}C_{il} = C_{ij}.$$

$$\Rightarrow \frac{d(\det A(t))}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}(t)\frac{da_{ij}}{dt}$$

$$= \mathrm{tr}\left(A^*\cdot\frac{dA}{dt}\right).$$

推论：$\forall X\in F^{n\times n}$. $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}X}$.

证明：记 $A = e^{tX}$, $t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow A(0) = I_n$.

记 $f(t) = \det(A(t))$, ~~$g(t) = e^{\mathrm{tr}(tX)} = e^{t\,\mathrm{tr}(X)}$~~

$\Rightarrow f(0) = 1$, ~~$g(0) = 1$~~.

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(\det A(t))}{dt} = \mathrm{tr}\left(A^*(t)\frac{dA(t)}{dt}\right)$$

$A(t) = e^{tX}$. $\Rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = e^{tX}X = A(t)X$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \mathrm{tr}(A^*(t)A(t)X) = \mathrm{tr}(\det(A(t))IX)$$

$$= f(t)\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,f(t) \Rightarrow f(t) = e^{t\,\mathrm{tr}(X)}$$

~~$\frac{dg(t)}{dt} = e^{t\,\mathrm{tr}(X)}\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,g(t)$~~ $\Rightarrow f(1) = e^{\mathrm{tr}(X)}$

$$= \det(e^X).$$

推论：设 $X\in M_{at}(n,F)$ #.

$\mathrm{tr}(X) = 0$ 则 $\det(e^X) = 1$.

定义：$$sl_n(F) := \{X\in M_{at}(n\times n,F) \mid \mathrm{tr}\,X = 0\}.$$

$sl_n(F)$ 关于矩阵加法与 F 数乘构成一个线性空间.

(作业：证明 $sl_n(F)$ 关于~~变换运算~~矩阵封闭.)

定义：$$SL_n(F) = \{A\in M_{at}(n\times n,F) \mid \det A = I\}.$$

上述推论说明 exp 给出 $sl_n(F)$ 到 $SL_n(F)$ 的一个映射.

$X \mapsto e^X$.

$sl_n(F)$：A_{n-1} 型李代数 $(n\geq 2)$.

$SL_n(F)$：特殊线性群.

$GL_n(F)$：一般线性群 定义为 $\{A^{n\times n} \mid \det A\neq 0\}$.

9. 设 $f: F^n \times \cdots \times F^n \to F$ 为一函数，满足：

(1) $f\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda\alpha+\mu\beta\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix}\vdots\\ \beta\\ \vdots\end{pmatrix}$ $\forall \lambda,\mu \in F$, $\alpha,\beta \in F^n$.

(2) $f\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ \alpha\\ \vdots\end{pmatrix} = 0$

(3) $f\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} = 1$

则 $f\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. 这里，$F^n$ 为 n 行 n 列数组构成的线性空间.

Pf. 记：$e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,0,\cdots)$, $\cdots$, $e_n=(0,0,\cdots,0,1)$.

设 $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, 则：

$$f\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} f\begin{pmatrix}e_{j_1}\\ \vdots\\ e_{j_n}\end{pmatrix} \overset{\text{两行相等}}{=\!=} \sum_{j\in S_n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} f\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}.$$

注意到：$\forall \alpha,\beta \in F^n$,

$$f\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha+\beta\\ \alpha+\beta\\ \vdots\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \alpha\\ \vdots\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \beta\\ \vdots\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}\vdots\\ \beta\\ \alpha\\ \vdots\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}\vdots\\ \beta\\ \beta\\ \vdots\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \beta\\ \vdots\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}\vdots\\ \beta\\ \alpha\\ \vdots\end{pmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow$ 交换两行，f 变号.

由命题 4.2.2 知：排列 j 可由 $\tau(j)$ 次对换变为标准排列，每次对换（微改）改变 $f\begin{pmatrix}e_{j_1}\\ \vdots\\ e_{j_n}\end{pmatrix}$ 的符号.

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \sum_{j\in S_n} (-1)^{\tau(j)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \underbrace{f\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}}_{=1}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}. \quad \#$$

4.3 ~~矩阵~~ 初等变换 秩与相抵标准型

· 初等变换

· 交换两行，其余不变 $r_i \leftrightarrow r_j$

· 某行 · 非零数，— — — λr_i

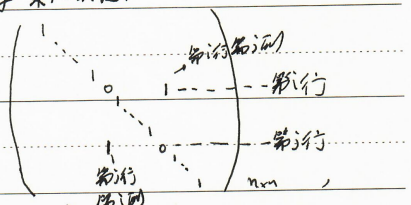
· 行 A + λ · 行 B 替换行 A，其余不变. $r_A + \lambda r_B$.

称上述变换为初等行变换.

· 定理 4.3.1 上述三种变换，可由矩阵乘法实现.

证明：定义初等阵如下：

~~S~~ $S(i,j) :=$



$$D(i,\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{第 } i \text{ 行}, \quad \lambda \neq 0,\ \lambda \in F$$

$n \times n$

$$T(i,j,\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \lambda \in F$$

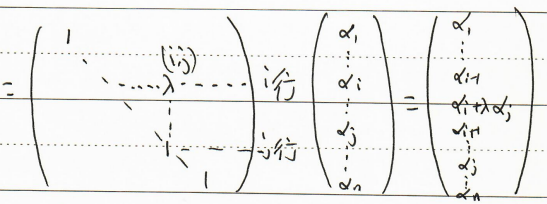
第 j 行.

$n \times n$.

$A \in F^{n\times m}$, 记 $A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

$$S(i,j)A = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$D(i,\lambda)A=\begin{pmatrix} I & & \\ & \lambda & \\ & & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} \\ \lambda\alpha_i \\ \alpha_{i+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

$T(i,j,\lambda)A=$  $=$  #.

类似地有列初等变换：

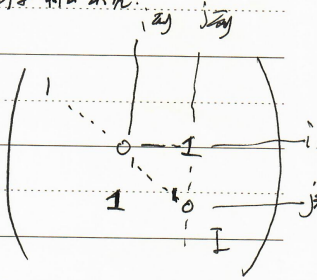
i) $C_i \leftrightarrow C_j$

ii) λC_i

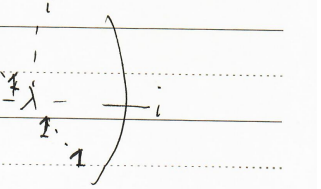
iii) $C_i + \lambda C_j$ (替换 C_i，其余不变)

· 定理 4.3.1' 上述三种列初等变换，可由矩阵乘法实现.

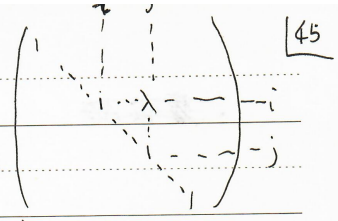
pf. 记 $A=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

$$AS(i,j)=(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_n)$$ 

$$=(\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_i,\cdots)$$

$$AD(i,\lambda)=(\beta_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_n)$$ 

$$=(\cdots,\lambda\beta_i,\cdots)$$

$$AT(i,j)=(\beta_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)$$ 

$$=(\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j+\lambda\beta_i,\cdots)$$

定理 4.3.2. 1) $S(i,j)$ 对称，$S(i,j)^{-1}=S(i,j)$. $=S(j,i)$

2) $D(i,\lambda)^{-1}=D(i,\lambda^{-1})$，对于 $\lambda\neq 0$，$\lambda\in F$.

3) $T(i,j,\lambda)^{-1}=T(i,j,-\lambda)$ $\forall\lambda\in F$

pf. 1) $S(i,j)^2=I$.

2) $D(i,\lambda)D(i,\lambda^{-1})=I$.

3) $T(i,j,\lambda)\,T(i,j,-\lambda)=I$. #.

定理 4.3.3. $\forall A\in F^{m\times n}$，$\exists$ 有限个 m 阶初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$ 和有限个 n 阶初等矩阵 $Q_1,\cdots,Q_t$，s.t.

$$P_s\cdots P_1 A Q_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},\quad r\geq 0.$$

pf. if $A=0$ $\Rightarrow$ ✓.

if $A\neq 0$. 不妨设 $a_{pq}\neq 0$.

将 A 的第 1 行与第 p 行互换，

——·——1——·——q 列互换，得 B.

即 $B=(b_{ij})_{m\times n}=S(p)\,A\,S(1,q)$ $\quad B_{11}=a_{pq}$.

$\tilde{B}:=D(1,a_{pq}^{-1})B \Rightarrow \tilde{B}_{11}=1$.

利用初等变换，将 $\tilde{B}$ 第一行、第一列除 $\tilde{B}_{11}$ 全变为零.

$$T_{m1}(-b_{m1})\cdots T_{21}(-b_{21})\,\tilde{B}\,T_{n1}(-b_{1n})\cdots T_{1n}(-b_{1n})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

C 为 $(m-1)\times(n-1)$ 阶矩阵 (数学归纳法). #.

定理 4.3.3 推出如下定理：

定理 4.3.4 (Rmk 1). $\forall A\in F^{m\times n}$. $\exists$ 可逆 P，可逆 $Q\in F^{n\times n}$ s.t.

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in F^{m\times n},\quad r\geq 0.$$

• 设 A 为任一可逆方阵.

$$P_s\cdots P_1 A Q_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

A 可逆, $P_s\cdots P_1, Q_1,\cdots,Q_t$ 可逆

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{可逆} \Rightarrow r=n.$$

$$\Rightarrow P_s\cdots P_1 A Q_1\cdots Q_t = I$$

$$A = P_1^{-1}\cdots P_s^{-1} Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$$

$PAQ=I \Rightarrow A=P^{-1}Q^{-1}$

• 定理 4.3.5 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可分解为一系列初等方阵的乘积.

$A = P_1^{-1}\cdots P_s^{-1} Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$

$\Rightarrow Q_t\cdots Q_1 P_s\cdots P_1 A = I$, $A Q_1\cdots Q_t P_s\cdots P_1 = I$

i.e., 一个可逆矩阵可通过一系列行初等变换化为 I

i.e., 一个可逆矩阵可通过一系列列初等变换化为 I

• 现设: $P_m\cdots P_1 A = I$. $\Rightarrow A^{-1} = P_m\cdots P_1 = P_m\cdots P_1 I$.

由此给出可得如下矩阵求逆的有效算法.

$$P_m\cdots P_1\cdot (A\ \ I) \longrightarrow (I,\ A^{-1})$$

行初等变换, 目标将 A 化为 I.

例3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

$$(A, I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{r_2-r_1 \text{ 替换 } r_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & [illegible] & 0 & [illegible]\\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2 \text{ 替换 } r_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -7 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{8}{3}\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21}\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{r_2-3r_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21}\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{3}r_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{21}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21}\end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{21}\\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21}\end{pmatrix}.$$

上面我们看到，对于矩阵 A 且 A 可逆，r 唯一且 $=n$.

一般地，有：

定理 4.3.4 (Part II). r 由 A 唯一确定.

Pf. 存在性 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P \in F^{m\times m}$

$A \in F^{m\times n}$

$Q \in F^{n\times n}$

反证法：若 $\exists\ \tilde{P} \in F^{m\times m}$, $\tilde{Q} \in F^{n\times n}$, 可逆 s.t.

$$\tilde{P}AQ = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{且 } r \neq r'.$$

不妨设 $r < r'$. 则：由 $A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$ 有：

$$\tilde{P}P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$r', r \leq m$

$r', r \leq n$.

对分块：

$$\tilde{P}P^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}_{m\times m} \quad B: r'\times r$$

$$Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix}_{n\times n} \quad G: r\times r'$$

$$\Rightarrow \tilde{P}P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BG & BH \\ DG & DH \end{pmatrix}$$

$BG = I_{r'}$

与 Cor 1 时定理 4.2.3 矛盾. #

定义：r 称为 A 的秩. (rank)

设 $A, B \in F^{m\times n}$.

定义：(相抵) ~~与相抵相似矩阵~~ 称 A, B 相抵 if $\exists\ P, Q$ 可逆 s.t.

$$B = PAQ.$$

命题：相抵是等价关系. 记为 $\sim$.

Pf. $A = IAI$. $B = PAQ \Rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1}$. $B = PAQ \Rightarrow C = RPAQS$. $C = RBS$ #

Fix m and n. $M_{m\times n}(F)/\sim$

$$= \left\{ O_{m\times n}, \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \cdots \begin{pmatrix} I_{\min(m,n)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \right\}$$

数学上分类事物，用等价关系.

e.g. $S = \{\text{all square matrices}\}$.

定义 $A \sim B$ if A, B 有相同的秩.

$$S/\sim = \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \cdots \right\}.$$

P116.

作业：35. (1), (3), (4), (5)

36. (2), (3)

37.

38.

39.

40.

4.3 秩与相抵

初等变换：

初等行变换：
- $r_i \leftrightarrow r_j$, $i \neq j$
- λr_i, $\lambda \in F, \lambda \neq 0$
- $r_i + \lambda r_j$ 替换 r_i, $\lambda \in F, i \neq j$

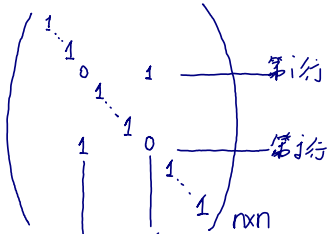
初等列变换：
- $c_i \leftrightarrow c_j$, $i \neq j$,
- λc_i, $\lambda \in F, \lambda \neq 0$
- $c_i + \lambda c_j$ 替换 c_i, $\lambda \in F, i \neq j$.

定理 4.3.1. 初等变换可由矩阵乘法实现.

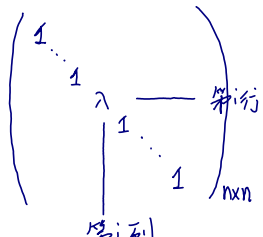
特别地，初等行变换可由左乘方阵实现；

……列……右乘……

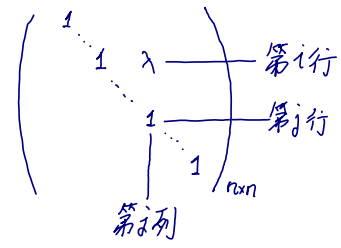
Proof. 如下定义一些方阵：

$S(i,j) :=$ 

$i \neq j$.

$D(i,\lambda) :=$ 

$\lambda \in F, \lambda \neq 0$

$T(i,j,\lambda) =$ 

(λ 位于第 i 行第 j 列)

$\lambda \in F$,

$i \neq j$.

$\forall A \in F^{n\times m}$. 记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为行向量.

我们有

$$S(i,j)A = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$D(i,\lambda)A = \begin{pmatrix} I & & & \\ & \lambda & & \\ & & I & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda\alpha_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$T(i,j,\lambda)A = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & I \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_i + \lambda\alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\forall B \in F^{m\times n}$. 记 $B = (\beta_1, \dots \beta_n)$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ 为列向量.

我们有

$$B \cdot S(i,j) = (\dots, \beta_i, \dots, \beta_j \dots) \cdot S(i,j) = (\dots, \beta_j, \dots \beta_i, \dots)$$

$$B \cdot D(i,\lambda) = (\dots, \beta_i, \dots) D(i,\lambda) = (\dots, \lambda\beta_i, \dots)$$

$$B \cdot T(i,j) = (\dots, \beta_i, \dots \beta_j, \dots) T(i,j) = (\dots, \beta_i, \dots, \beta_j + \lambda\beta_i, \dots) \quad \#$$

我们称上述证明中的 $S(i,j)$, $D(i,\lambda)$, $T(i,j,\lambda)$ 为初等方阵

- Theorem 4.3.2.

  1) $S(i,j) = S(j,i) = S(i,j)^{-1} = S(i,j)^T$, $\forall i \neq j$.

  2) $D(i,\lambda)^{-1} = D(i,\lambda^{-1})$, $\forall \lambda \in F, \lambda \neq 0$ $\forall i$.

  3) $T(i,j,\lambda)^{-1} = T(i,j,-\lambda)$, $\forall i \neq j$. $\forall \lambda \in F$.

  Pf. exercise. #

- Theorem 4.3.3. $\forall A \in F^{m\times n}$, 存在有限个 m 阶初等方阵 $P_1, \cdots, P_s$ 和有限个 n 阶初等方阵 $Q_1, \cdots, Q_t$, s.t.

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Proof. 我们用数学归纳法.

对 $m=n=1$, $A=(a)$. 命题显然成立

假设此命题对于 $F^{i\times j}$ 成立, 这里, $i \leq m$, $j \leq n$ 且等号不同时满足.

则对 $F^{m\times n}$, 设 $A \in F^{m\times n}$.

- 若 $A=0$ 则命题成立.
- 若 $A \neq 0$. 不妨设 $a_{pq} \neq 0$. 交换 A 的第1行和第 p 行, 交换 A 的第1列和第 q 列, 得矩阵 B.

令 $\widetilde{B} := D(1, a_{pq}^{-1})\, B$. $\Rightarrow \widetilde{B}_{11} = 1$.

利用初等变换可将 $\widetilde{B}$ 第1行, 第1列除 $\widetilde{B}_{11}=1$ 外全变为零, i.e.,

$$T(m,1,-b_{m1}) \cdots T(2,1,-b_{21})\, \widetilde{B}\, T(1,2,-b_{12}) \cdots T(1,n,-b_{1n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

由数学归纳法知: 存在 s' 个 $(m-1)$ 阶可逆方阵 $R_1, \cdots, R_{s'}$

和 t' 个 $(n-1)$ 阶 - - - - - $U_1, \cdots, U_{t'}$,

s.t. $R_{s'} \cdots R_1\, C\, U_1 \cdots U_{t'} = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(m-1)\times(n-1)}$.

Hence,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{s'} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} T(m,1,-b_{m1}) \cdots T(2,1,-b_{21}) D(1, a_{pq}^{-1})\, S(1,p)\, A\, S(1,q)\, T(1,2,-b_{12}) \cdots T(1,n,-b_{1n}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{t'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

The theorem is proved. #.

- 行(列)初等变换也可对分块矩阵操作. e.g., $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$, A 可逆.

- Theorem 4.3.4.

  Part I. $\forall A \in F^{m\times n}$, $\exists$ 可逆矩阵 $P \in F^{m\times m}$ 和可逆矩阵 $Q \in F^{n\times n}$, s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$, $r \geq 0$.

  Part II. r 由 A 唯一确定.

Proof. Part I. True, because of Thm. 4.3.3.

Part II. 反证法: 若存在 $\widetilde{P} \in F^{m\times m}$, $\widetilde{Q} \in F^{n\times n}$ 可逆.

且 $\widetilde{P} A \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$, $r' \neq r$.

不妨设 $r' > r$.

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{P} A \tilde{Q} = \tilde{P} P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\tilde{Q}.$$

对 $\tilde{P}P^{-1}$ 分块：

$$\tilde{P}P^{-1} = \begin{pmatrix} B_{r'\times r} & C \\ D & F \end{pmatrix}_{m\times m}$$

$$Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} G_{r\times r'} & H \\ J & K \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$\Rightarrow \tilde{P}P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BG & BH \\ DG & DH \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow BG = I_{r'}$$

与定理4.2.3的推论1矛盾. #.

- 定义：r 称为 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$，or $r(A)$.
- 定义：(相抵等价) 设 $A, B \in F^{m\times n}$，称 A 和 B 相抵等价 (或相抵)，if $\exists P, Q$ 可逆矩阵 s.t. $B = PAQ$.

记为 $A \sim B$.

- 命题 4.3.1. 对固定的 m, n，相抵等价是 $M_{m\times n}(F)$ 上的一个等价关系。

proof.

$IAI = A \Rightarrow A \sim A$

$PAQ = B \Rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1}$

$\Rightarrow B \sim A$

$PAQ = B,\ RBS = C$

$\Rightarrow C = RPAQS.$

$\Rightarrow A \sim C.$ #.

- 什么是等价关系？

设 S 为一个集合，S 上的一个等价关系 $\sim$ 是指满足如下三条性质的二元关系：

自反：$\forall a \in S,\ a \sim a$

对称：$\forall a, b \in S,$ if $a \sim b$, then $b \sim a$.

传递：$\forall a, b, c \in S,$ if $a \sim b,\ b \sim c$ then $a \sim c$

等价类 $[a] := \{ s \in S \mid a \sim s \}$

$S/\sim$:= 等价类集

$p: S \longrightarrow S/\sim$ 到商投影

$a \longmapsto p(a) := [a]$

显然 p 为满射.

$a \sim b \iff [a] = [b]$

- 取代表 ....

- 定理 4.3.5. 设 $A, B \in F^{m\times n}$.

$A \overset{\text{相抵}}{\sim} B$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

Proof. 必要性：若 $A \sim B$，

设 $B \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

由传递性：

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理 4.3.4 $\Rightarrow \mathrm{rank}(A) = r$

充分性：记 $r = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \sim B.$ #.

相抵等价的代表：

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

相抵标准型

- 命题 4.3.2. 设 $A, B \in Mat(m\times n, F)$, 则 A, B 相抵 当且仅当存在有限个初等矩阵 $P_1, \dots, P_s$ 和有限个初等矩阵 $Q_1, \dots, Q_t$, s.t.
$$B = P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t.$$

证明: 作业.

- Some applications:

1. 方阵 (i.e., $m=n$)

$Mat(n,F)$ 在 $\overset{\text{相抵}}{\sim}$ 下有 $(n+1)$ 类, 代表为: $0_{mn}, \begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&\ddots\end{pmatrix}_{m\times n}, \dots, I_n$

$A \sim I_n \Rightarrow \exists P, Q$ 可逆 s.t. $PAQ = I_n$

$\Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1} \Rightarrow A$ 可逆

反之, $A \in Mat(n,F)$ 可逆

$\Rightarrow \exists P, Q$ 可逆 s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且 $\det\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow r = n. \Rightarrow A \sim I_n.$

即我们证明了如下定理.

- 定理 4.3.6. $A \in Mat(n,F)$ 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{\text{相抵}}{\sim} I_n$.

类似地,

- 定理 4.3.7. $A \in Mat(n,F)$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可分解为一系列初等方阵的乘积.

Proof. A 可逆 $\overset{\text{定理 4.3.6}}{\Longleftrightarrow} A \sim I_n$

$\overset{\text{命题 4.3.2.}}{\Longleftrightarrow} \exists P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t$, s.t., $A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$.

#

Digression: A 可逆 $\Leftrightarrow \exists P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t$, s.t.,

$A = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$

$\Leftrightarrow Q_1 \cdots Q_t P_s \cdots P_1 A = I$

$\Leftrightarrow A Q_t \cdots Q_1 P_s \cdots P_1 = I$

a) 可逆矩阵可通过一系列行初等变换变为 I

b) ---------- 列 ---------- I

由 a) 可得矩阵求逆的一个有效算法:

$P_m \cdots P_1 A = I$

$\Rightarrow A^{-1} = P_m \cdots P_1 = P_m \cdots P_1 I$

$P_m \cdots P_1 \cdot (A \ \ I) = (I \ \ A^{-1})$

即通过对 $(A\ I)$ 作初等行变换, 目标将 A 化为 I, 则同时也将 I 化为 A^{-1}.

例子. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A\ I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3&1&0&1&0&0\\ 1&3&1&0&1&0\\ 0&1&3&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\ 1&3&1&0&1&0\\ 0&1&3&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{替换}]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{8}{3}&1&-\frac{1}{3}&1&0\\ 0&1&3&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&1&3&0&0&1\\ 0&\frac{8}{3}&1&-\frac{1}{3}&1&0 \end{array}\right)$$

$$\cdots\cdots\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{array}\right). \quad \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}.$$

2. 一些具体例子.

Example 1. 证明：每个秩为 r 的矩阵可写为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

Proof. 设 A 秩为 r.

$$\Rightarrow A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

for some P, Q invertible

$$\Rightarrow A=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\cdots+PE_{rr}Q$$

这里，$E_{ii}=\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ ← i行. $\operatorname{rank}(PE_{ii}Q)=1$. #

Example 2. $A\in F^{n\times n}$. $A^2=A$ 证明：$r(A)+r(I-A)=n$.

Proof. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I-A \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad r(A)+r(I-A)=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}_{=n\text{个}}$$

上述证明中我们用到如下结论：

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

Pf. $PAQ=\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $RBS=\begin{pmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} P & \\ & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & I_{r(B)} \end{pmatrix}$. #

Example 3. $A, B\in F^{n\times n}$. $BA=0$, $M=\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}$ 求 M^{-1}.

Solution. $\left(\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline B & I \end{array}\middle|\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-Br_1} \left(\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & I-BA \end{array}\middle|\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -B & I \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & I \end{array}\middle|\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -B & I \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{r_1-Ar_2} \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\middle|\begin{array}{c|c} I+AB & -A \\ \hline -B & I \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} I+AB & -A \\ -B & I \end{pmatrix}$$ (verify the correctness)

· 准三角初等方阵

$$\begin{pmatrix} I & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I & & \\ & & & 0 & I \\ & & & I & 0 \end{pmatrix}_{s\times s}\begin{pmatrix} \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C+XA & D+XB \end{pmatrix} \cdots$$

3. $Mat(m\times n, F)$

- 按相抵等价的等价类个数 $= \min\{m,n\}+1$.

定义: $A\in F^{m\times n}$. $r(A)=m$ 称 A 为行满秩的.

$r(A)=n$ 称……列……

- 定理4.3.8 $A\in F^{m\times n}$. $P\in F^{m\times m}$, $Q\in F^{n\times n}$, P,Q 可逆 则:

$$r(PAQ)=r(A).$$

Proof. $PAQ\sim A \Rightarrow r(PAQ)=r(A)$. #.

命题4.3.3. $\forall A\in F^{m\times n}$: 有 $r(A^T)=r(A)$.

Pf. 由定理4.3.4.: 存在 P,Q 可逆, s.t.

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^TA^TP^T=\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T\sim\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A^T)=r(A). \quad \#.$$

- 矩阵的秩的进一步探讨:

引理4.3.1. $A\in F^{m\times n}$. P,Q 分别为 m 阶和 n 阶初等方阵.

若 A 的所有 k 阶子式为零, 则 PA 与 AQ 的所有 k 阶子式为零.

Proof. 若 $P=S(i,j)$,

PA 的任一 k 阶子式可对应到 A 的一个 k 阶子式乘相差一个符号. $\Rightarrow$ 均为零

若 $P=D(i,\lambda)$, $\lambda\neq 0$. 类似.

若 $P=T(i,j,\lambda)$. $\lambda\in F$.

A 的 k 阶子式:

取行 $1\le i_1<\cdots<i_k\le m$

取列 $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$

得一 k 阶子阵, 记为 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k\\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$

$\det A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}$ 称为 A 的一个 k 阶子式.

$$\det PA\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases}\det A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k\\ j_1 & j_2\cdots j_k\end{pmatrix}, & i\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_k\},\\ \det A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_t\cdots i_k\\ j_1\cdots j_t\cdots j_k\end{pmatrix}+\lambda\det\begin{pmatrix} i_1\cdots j\cdots i_k\\ j_1\cdots j_t\cdots j_k\end{pmatrix}, & i=i_t\ (1\le t\le k).\end{cases}$$

对于 AQ, 类似可证. #.

定理4.3.9. 矩阵 A 的非零子式的最大阶数 $=\operatorname{rank}(A)$.

Proof. $\exists P,Q$ 可逆, s.t. $PAQ=\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的任意 k ($k>r(A)+1$) 阶子式为零

$\xRightarrow{\text{引理4.3.1}}$ A 的任意 k ($k>r(A)+1$) 阶子式为零 $\Rightarrow$ A 的非零子式最大阶数 $\le r(A)$.

再由引理4.3.1知: A 至少有一 $r(A)$ 阶非零子式, 否则与标准型矛盾. #.

定理 4.3.9 给出 $r(A)=r$ 的一个判别条件：

若 A 至少有一个 r 阶非零子式且所有 $(r+1)$ 阶子式为零，则 A 的秩为 r.

- More examples on rank and its computations.

例：$A=\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{n\times n}$

Solution.

$$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

$x=1$

$$A \sim \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}$$

$x\neq 1$

$$A \sim \begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & I_{n-1} & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)=\begin{cases} 1, & x=1, \\ n-1, & x=1-n, \\ n, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

例：$A=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{n\times n}$

Solution. 记 $A=(a_{ij})$. a_{n1} 对应的代数余子式 $\neq 0 \Rightarrow r(A)\geq n-1$. $\det A=1+(-1)^{n-1}$.

$$\Rightarrow r(A)=\begin{cases} n, & n \text{ odd}, \\ n-1, & n \text{ even}. \end{cases}$$

例：证明：$A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times p}$，则 $r(AB)\leq \min\{r(A), r(B)\}$.

证：设 $A=P\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$,

$$B=R\begin{pmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S.$$

$$AB=P\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QR\begin{pmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S$$

$$=P\begin{pmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}_{r(A)\times r(B)}\begin{pmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S$$

$$=P\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S$$

$$=P\begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(AB)\leq \operatorname{rank}(U_{11})\leq \min\{r(A), r(B)\}. \#$$

作业：35. (1), (3), (4), (5).

36. (2), (3)

37, 38, 39, 40, 41, 42, 43.

§5. 线性空间

前面我们已经介绍了一般线性空间的定义，并学习了一些具体的线性空间，比如：

直观的三维向量空间，二维向量空间，

already rigourously defined
- 行数组空间，
- 列 · · · 一，
- 一般数组空间（即 $Mat(m\times n, F)$，m,n 固定，$F=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$）

这一章里，我们将抽象地、系统地学习线性空间。

5.1 定义与一些基本概念

首先我们回顾线性空间的定义。

定义 5.1.1. 设 V 是一个非空集合，$F=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. 定义 V 上的两种运算：

(1) 加法"+"：$\forall$ 两个元素 $\alpha,\beta\in V$ 组成的有序对 (α,β)，定义 V 中唯一的一个元素 γ 与之对应，记为 $\alpha+\beta=\gamma$.

(2) F-数乘：$\forall\lambda\in F$，$\forall\alpha\in V$，定义 V 中唯一的一个元素 γ 与之对应，记为 $\lambda\alpha=\gamma$.

若加法与数乘满足如下 8 条公理：

① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$，$\forall\alpha,\beta\in V$.

② $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$.

③ $\exists$ 元素 $0\in V$，s.t. $\forall\alpha\in V$，$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$

④ $\forall\alpha\in V$，$\exists\beta\in V$ s.t. $\alpha+\beta=\beta+\alpha=0$

⑤ $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$，$\forall\lambda\in F,\alpha\beta\in V$.

⑥ $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$，$\forall\lambda,\mu\in F$，$\alpha\in V$.

⑦ $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$，$\forall\lambda,\mu\in F$，$\alpha\in V$.

⑧ $1\alpha=\alpha$，$\forall\alpha\in V$.

则称 V 为 F 上的线性空间（linear space）也称为向量空间（vector space）。V 中的元素称为向量。

- 我们称公理③中的元素 0 为零元素，或零向量。

Claim：零元素是唯一的。

Proof. 若 θ_1,θ_2 均为零元素，$\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2$ #

此断言说明定义中第④条公理的合理性。

- 我们称④中的 β 为 α 的负元素（或负向量），记为 $\beta=-\alpha$.

Claim：负元素唯一。

Proof. 若 β_1,β_2 均为 α 的负元素，则

$$\beta_1=\beta_1+0=\beta_1+(\alpha+\beta_2)=(\beta_1+\alpha)+\beta_2=0+\beta_2=\beta_2.$$

线性空间的一些简单性质：

i) $\lambda x=0$，$\lambda\in F$，$x\in V$ i.f.f $\lambda=0$ 或 $x=0$.

Pf. "$\Leftarrow$"：$\forall x\in V$,

$$x=(1+0)x=x+0x$$

$$0=(-x)+x=(-x)+x+0x=0x$$

$\forall\lambda\in F$，$\lambda 0=\lambda(0\cdot 0)=(\lambda 0)0=0\cdot 0=0$

"$\Rightarrow$"：$\lambda x=0$

若 $\lambda\neq 0$，两边同时数乘 $\frac{1}{\lambda}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda x)=\frac{1}{\lambda}0=0.$$

$$\text{即 } (\tfrac{1}{\lambda}\lambda)x=x$$

#

ii) $(-\lambda)x = -\lambda x = \lambda(-x)$.

Pf. $(-\lambda)x + \lambda x = (-\lambda+\lambda)x = 0x = 0 \Rightarrow (-\lambda)x = -\lambda x$.

$\lambda(-x) + \lambda x = \lambda(-x+x) = \lambda\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda(-x) = -\lambda x$.

· 例子.

1 Fix $m, n \geq 1$.

$V = Mat(m\times n, F)$

V 关于矩阵加法和矩阵的 F-数乘构成 F 上的一个线性空间.

$m=1$. 列数组向量空间, 元素常称为列向量.

$n=1$. 行 · · · — — — 行 · · ·.

2. $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

$V = F_d[x] := \{ \leq d$ 次的 F 系数多项式 $\}$

$= \left\{ \sum_{k=0}^{d} c_k x^k \;\middle|\; c_0, c_1, \cdots, c_d \in F \right\}$

(x 为不定元)

V 关于多项式加法和 F-数乘构成 F 上的一个线性空间.

3. $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

$V = C_m := \left\{ a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \cdots + a_m\cos(m\theta) + b_m\sin(m\theta) \;\middle|\; \begin{matrix} a_0,\cdots,a_m, \\ b_1,\cdots,b_m \end{matrix} \in F \right\}$

($\cos(k\theta)$ 视为 θ 的函数)

V 关于函数的加法和 F-数乘构成 F 上的一个 ℓ. sp..

4. $V = C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ 连续 $\}$

关于函数加法和 $\mathbb{R}$-数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的一个 ℓ. sp..

5. 设 $A \in Mat(m\times n, F)$ 为一给定矩阵. $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}$

$W := \{ x \in F^n \mid Ax = 0 \}$

则 W 关于列向量的加法和 F-数乘构成一个线性空间.

(作业: Prove it.)

定义 5.1.2. 设 V 是 F 上的 linear sp., $F = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}$.

W 是 V 的非空子集. 若 W 关于 V 中的加法和 F-数乘运算封闭, 即:

a) $\forall \alpha, \beta \in W$, $\alpha+\beta \in W$;

b) $\forall \lambda \in F, \alpha \in W$, $\lambda\alpha \in W$,

则称 W 是 V 的一个线性子空间, 简称子空间.

注: 子空间是线性空间.

定义 5.1.3. V: v. sp / F. S: V 的非空子集 (允许无限)

定义 $\langle S\rangle := \left\{ \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \;\middle|\; \begin{matrix} m\geq 1, \lambda_1,\cdots,\lambda_m \in F, \\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m \in S \end{matrix} \right\}$.

$\langle S\rangle$ 是 V 的一个子空间. 称为 V 的一个生成子空间,

S 称为这个生成子空间的生成元. (注: 若 S 有限 $= \{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$, 则 $\langle S\rangle = \{ \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_s \in F \}$.)

例子. 1. $V = F_d[x]$.

$W = \{ p \in V \mid p(x) = p(-x) \}$

则 W 为 V 的一个子空间.

令 $S = \{ 1, x^2, \cdots, x^{2[d/2]} \}$

则 $W = \langle S\rangle$.

2. $V=F^n$. $A\in M_{at}(m\times n, F)$

$$W:=\{x\in F^n \mid Ax=0\}$$

则 W 为 V 的一个子空间.

定义5.1.4. V: v.sp/F. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$, $m\geq 1$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F$, 称和式

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=:\alpha$$

为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合 (linear combination)

也称 α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 称为组合系数, 或表出系数.

记为 $\alpha\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle$.

定义5.1.5. V: F-v.sp. $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$ ($s\geq 1$) 称为是线性相关的, if 存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 不全为零, s.t. (linear dependent)

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\alpha_i=0.$$

否则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是线性无关的 (或线性独立的).

- 显然, 根据定义可知: 一个向量 α 线性相关 iff $\alpha=0$.
- 记 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 为向量组. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关, 也称 S 线性相关. 若 - - - - - - - - - - - - 无关, - - - - - - - - 无关.

若 α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 也称 α 可由 S 线性表出.

- 定理5.1.1. 对于 $s\geq 2$, 如下命题等价:

i) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

ii) $\exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 不全为零 s.t. $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\alpha_i=0$.

iii) 存在 α_i, s.t. $\alpha_i=\sum_{j\neq i}\mu_j\alpha_j$, for some $\mu_1,\cdots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\cdots,\mu_s\in F$

iv) 存在 α_i, s.t. $\alpha_i\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s\rangle$.

v) $\exists\ \alpha_i$, s.t. $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s\rangle$. M.ex. #.

简单事实: 包含零向量的任何向量组一定线性相关.

- 定理5.1.2. 设 V: v.sp/F. S_1, S 为 V 中的向量组, $S_1\subseteq S$.

a) 若 S_1 线性相关 $\Rightarrow S$ 线性相关.

b) 若 S - - - - 无关 $\Rightarrow S_1$ - - - - 无关.

Proof. 设 $S_1=\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_k}\}\subseteq S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$

S_1 linear dep. $\Rightarrow\exists\ \lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_k}$ 不全为零 s.t.

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}\alpha_{i_j}=0$$

记 $I=\{i_1,\cdots,i_k\}$.

$$\Rightarrow \sum_{m_1\in I}\lambda_{m_1}\alpha_{m_1}+\sum_{\substack{1\leq m_2\leq s\\ m_2\notin I}}0\cdot\alpha_{m_2}=0$$

$\Rightarrow S$ is linear dep. a) is proved.

b) is obvious. #.

定义5.1.6. 设 S_1, S_2 为向量空间 V 的两个向量组, 若 S_2 中任一向量可由 S_1 线性表出, 则称 S_2 可由 S_1 线性表出.

若 S_1, S_2 可互相线性表出, 则称 S_1 和 S_2 等价. 记为 $S_1\sim S_2$.

定义5.1.7. 设 S 为向量空间 V 的一个向量组, 若 V 可由 S 线性表出, 则称 S 为 V 的一个生成元系. 若 V 有一个有限生成元系, 则称 V 是有限生成的.

定义5.1.8. V: v.sp/F. $F=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, or $\mathbb{Q}$. 设 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 为 V 的一个向量组, $m\geq 1$.

若 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关, 且任加一个其它向量 $\alpha_{i_{r+1}}$ 后, $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_{i_{r+1}}$ 线性相关, 则称 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为向量组 S 的一个极大线性无关组. S 的极大线性无关组的元素的个数称为 S 的秩 (rank). 记为 r. 显然 $r\leq m$.

· 等价定义： V: v.sp./F. S: V的一个向量组. S的一个极大线性无关组 S_1 是 S 的一个子集，满足：

① S_1 是线性无关的

② S 可由 S_1 线性表出. (i.e., $\langle S\rangle=\langle S_1\rangle$.)

S_1 的元素的个数称 S 的秩.

·我们来验证定义的合理性.

引理5.1.1. 向量组等价是个等价关系.

proof. 1). 自反性： $S\sim S$

2). 对称性： $S\sim T\Rightarrow T\sim S$.

3). 传递性： $S_1\sim S_2,\ S_2\sim S_3\Rightarrow S_1\sim S_3$.

这里，S,T,S_1,S_2,S_3 为 V 中向量组. 细节 exercise. #.

引理5.1.2. 向量组 S 和向量组 T 等价 iff $\langle S\rangle=\langle T\rangle$.

proof. 记 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$

$T=\{\beta_1,\cdots,\beta_\ell\}$.

"⇒" $S\sim T\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\langle T\rangle\Rightarrow\langle S\rangle\subseteq\langle T\rangle\\ \beta_1,\cdots,\beta_\ell\in\langle S\rangle\Rightarrow\langle T\rangle\subseteq\langle S\rangle\end{cases}$

$\Rightarrow\langle S\rangle=\langle T\rangle$.

"⇐" $\langle S\rangle=\langle T\rangle$.

$\Rightarrow\ \alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\langle T\rangle\ \Rightarrow\ S\sim T$. #.
$\beta_1,\cdots,\beta_\ell\in\langle S\rangle$

引理5.1.3. 向量组 S 和其任一极大线性无关组等价.

proof. 记 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$. 不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 S 的一个极大线性无关组

显然，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由 S 线性表出.

反之，$\forall j\in\{r+1,\cdots,m\}$,

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_j$ 线性相关

$\Rightarrow\ \exists\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\lambda_j$ 不全为零，s.t.

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\lambda_j\alpha_j=0$$

显然 $\lambda_j\neq0$ (otherwise $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关)

$$\Rightarrow\ \alpha_j=-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\alpha_1-\cdots-\frac{\lambda_r}{\lambda_j}\alpha_r$$

$\Rightarrow$ S 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出. #.

Cor.5.1.1. 向量组的任意两个极大线性无关组等价.

pf. 用传递性. #

· 定理5.1.3. 若 向量组 $S_1\sim S_2$, S_1 线性无关，S_2 线性无关，

则 S_1 的元素个数 = S_2 的元素个数.

proof. 设 $S_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$,

$S_2=\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$

$S_1\sim S_2\Rightarrow\exists\,M_{ij}\in F$ s.t.

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{s}M_{ij}\beta_j$$

考察线性方程组 $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\alpha_i=0\quad(*)$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ linearly indep. $\Rightarrow$ 只有零解.

$$(*)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\sum_{j=1}^{s}M_{ij}\beta_j=0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\lambda_iM_{ij}\beta_j=0$$

$\beta_1,\cdots,\beta_s$ linearly indep. $\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{r}\lambda_iM_{ij}=0,\ \forall j=1,\cdots,s.\ (**)$

$(**)$ 为关于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 的线性方程组，只有零解 $\xRightarrow{\text{Gauss消元法}}$ $s\geq r$.

同理，由 $\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ 可由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 线性表出知：$r\geq s$. $\Rightarrow r=s$. #.

Cor 5.1.2. 若 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 和 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_s}$ 分别为 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 的极大线性无关组，则 $r=s$.

因而，我们证明了定义 5.1.8 中秩的定义的合理性.

作业：P157. 43, 44；P155. 12. (1)-(6)
13.

5.2. 基与维数

定义 5.2.1. V: v.sp./F. $F=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}$. $V\neq\{0\}$. V 的极大线性无关组称为 V 的基，其秩称为 V 的维数. 记为 $\dim V$, or $\dim_F V$. 若 $\dim V$ 有限，则称 V 为有限维线性空间；反之称 V 为无限维线性空间，记为 $\dim V=\infty$. (选择公理).
(or 无穷维)

(注：对于一个具有无穷多个元素的向量组，称其线性相关是指存在有限部分线性相关.)

· 以下我们只讨论 $\dim V<\infty$ 的情形.

· 设 V 为一个有限维 v. sp. /F，且 $V\neq\{0\}$. 取 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, $n=\dim V$ 为 V 的一个极大线性无关组. 由定义知：$V=\langle S\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle$.

· 定义 5.2.2. 设 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的一组基. 则 $\forall\alpha\in V$，α 可唯一写为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i,$$

称 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 为 α 在基 S 下的坐标.

· 例 1. $V=F^n$.

$$e_i=(0,\cdots,0,\underset{\text{第 }i\text{ 个分量}}{1},0,\cdots,0),\quad i=1,\cdots,n$$

$e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基，称为自然基.

$\forall b\in F^n$. $b=(b_1,\cdots,b_n)=b_1e_1+\cdots+b_ne_n$

即 b 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的坐标为 $(b_1,\cdots,b_n)$.

· 向量形式：

V: l. sp. /F. finite dimensional. $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ basis.

$$\forall\alpha\in V,\quad \alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$$

因而，一个向量在一组基下的坐标常用一个列数组向量来记.

取定一组基后，一个向量和其坐标可以等同起来. 即：

$$\alpha=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}.$$

比如：α_i 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 第 i 行，$i=1,\cdots,n$.

· 坐标变换：

V: l. sp. /F. $\dim V=n<\infty$.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 一组基，

$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 另一组基.

$\forall j=1,\cdots,n$, $\beta_j\in V$, 记 β_j 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}c_{1j}\\\vdots\\c_{nj}\end{pmatrix}$,

$$\text{i.e.,}\quad \beta_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\alpha_i.$$

$$\Leftrightarrow\quad(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

这里，$C:=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

称方阵 C 为从基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵(或转移矩阵).

- $\forall v \in V$，记 v 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: x$，

  v 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ ⋯⋯ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =: y$.

即：
$$\begin{aligned} v &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\, x \\ &= (\beta_1, \cdots, \beta_n)\, y \\ &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\, C y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = Cy.$$

由于 β_i 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$，且 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 线性无关，

$\Rightarrow$ 列向量 $\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$ 线性无关 （作为 F^n 中元素）

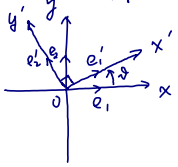
$$\xRightarrow{\S 4.2 \text{ 之应用 2 或 4}} C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ 可逆.}$$

$$\Rightarrow y = C^{-1} x.$$

- Summary:
$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\, C \quad (\text{basis} / \text{basis})$$
$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\, C^{-1}$$
$v \in V$. $v = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\, x = (\beta_1, \cdots, \beta_n)\, y$

$\Rightarrow x = Cy$. $y = C^{-1} x$.

例子：



P

正交标架 (e_1, e_2) 逆时针旋转 θ 得

正交标架 (e_1', e_2'). 则有：

$$e_1' = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_2' &= e_1 \cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) + e_2 \sin\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= -e_1 \sin\theta + e_2 \cos\theta = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (e_1', e_2') = (e_1, e_2) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

P 在 $(O; e_1, e_2)$ 直角坐标系的坐标为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，

在 $(O; e_1', e_2')$ ⋯⋯ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

则：
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

引理 5.2.1 V: l.sp. / F. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in V$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性表出，且 $t > s$，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 线性相关.

Pf. $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in \langle \beta_1, \cdots, \beta_s \rangle$

$\Rightarrow \exists c_{ij} \in F$, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le t$, s.t. $\forall\, 1 \le j \le t$, $\alpha_j = \sum_{i=1}^{s} c_{ij} \beta_i$.

考虑关于 $x_1, \cdots, x_t \in F$ 的方程：$\sum_{j=1}^{t} x_j \alpha_j = 0 \quad (*)$

Claim: $(*)$ 有非零解.

Indeed, $\sum_{j=1}^{t} x_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{t} x_j \sum_{i=1}^{s} c_{ij} \beta_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{t} x_j c_{ij} \right) \beta_i$

我们将证一个更强的事实：方程组 $\sum_{j=1}^{t} x_j c_{ij} = 0$, $i = 1, \cdots, s$ 有非零解.

This is true because of Gauss 消元法（方程个数 < 未知数个数）.

$\Rightarrow$ Claim 成立. 引理得证. 并.

命题5.2.1. V: l.sp./F. $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性无关. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_s\in V$ 线性表出. 则 $t\le s$.

Pf. 反证法. 若 $t>s$. 则 由引理5.2.1 知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性相关. 矛盾. #.

• 定理5.2.1. V: l.sp./F. $\dim_F V=n$. 则:

(1) V 中任意 $(n+1)$ 个向量一定线性相关.

(2) V 中任意 n 个线性无关的向量为 V 的一组基.

proof. (1) 反证法. 若存在 V 的 $(n+1)$ 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ 线性无关.

取 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的一组基

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ 可由 $\beta_1,\cdots\beta_n$ 线性表出.

$\Rightarrow$ $n+1\le n$. 矛盾.

(2) 设 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的线性无关的 n 个向量.

$\forall\,\alpha\in V$. 由(1)知:

$\beta_1,\cdots,\beta_n,\alpha$ 线性相关.

i.e. $\exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}\in V$ s.t.

$$\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n+\lambda_{n+1}\alpha=0$$

Claim: $\lambda_{n+1}\neq 0$

Otherwise $\Rightarrow\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关. 矛盾.

$\Rightarrow\lambda_{n+1}\neq 0$. $\Rightarrow\alpha\in<\beta_1,\cdots,\beta_n>$

i.e., $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的一个极大线性无关组. #.

注: V: l.sp./F. W 是 V 的子空间 $\Rightarrow$ W 为线性空间. 线性空间的所有性质对 W 也适用.

5.3 齐次线性方程组的解空间

作为线性空间的一个应用, 我们在本节刻画 $Ax=0$ 的解集结构.

设 $A\in F^{m\times n}$, 考虑如下线性方程组:

$$Ax=0,\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in F^n. \qquad (*)$$

我们知道 F^n 是线性空间 $(+,F\text{-数乘})$.

定义集合 $V:=\{x\in F^n\mid Ax=0\}$, 称为 $(*)$ 的解集.

$\forall\alpha,\beta\in V$. $\Rightarrow A\alpha=0$, $A\beta=0$

$\Rightarrow A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0+0=0\Rightarrow\alpha+\beta\in V$

$\forall\lambda\in F$, $\alpha\in V$

$A\cdot\lambda\alpha=\lambda A\alpha=0\Rightarrow\lambda\alpha\in V$.

$\Rightarrow$ V 是 F^n 的线性子空间. 称为 $(*)$ 的解空间.

• 定理5.3.1. $\dim_F V=n-\operatorname{rank}(A)$.

Pf. 对 A 作初等行变换 (Gauss elimination) 知: 原方程组 $Ax=0$ 等价于 $Cx=0$, 其中

$$C=\begin{pmatrix} & c_{1j_1}\cdots c_{1(j_2-1)} & c_{1j_2} & \cdots & c_{1n}\\ 0 & & c_{2j_2} & \cdots & c_{2n}\\ & 0 & 0 & & \\ & & & c_{rj_r} & c_{rn}\\ & & & 0 & \end{pmatrix}$$

其中 $c_{1j_1}=\cdots=c_{rj_r}=1$. 将变量 $\{x_1,\cdots,x_n\}\setminus\{x_{j_1},\cdots,x_{j_r}\}$ 记为 $x_{i_1},\cdots,x_{i_{n-r}}$.

我们发现，任意取定 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n-r}} \in F$，得 (*) 的一个解 x.

记这些解为

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x_{i_1} + \cdots + \alpha_{1\,n-r} x_{i_{n-r}} \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} x_{i_1} + \cdots + \alpha_{n\,n-r} x_{i_{n-r}} \end{cases}, \quad x_{i_1}, \cdots, x_{i_{n-r}} \in F.$$

i.e. $\quad x = x_{i_1} \alpha_1 + \cdots + x_{i_{n-r}} \alpha_{n-r}$

$$\alpha_\ell = \begin{pmatrix} \alpha_{1\ell} \\ \vdots \\ \alpha_{n\ell} \end{pmatrix} \in F^n,$$

且 (*) 的任一解均可由此得到.

$$\Rightarrow V = \left\{ x = t_1 \alpha_1 + \cdots + t_{n-r} \alpha_{n-r} \;\middle|\; t_1, \cdots, t_{n-r} \in F \right\}.$$

观察到 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 均为解，且 α_ℓ 的第 i_ℓ 行为 1，

第 $i_1, \cdots, i_{\ell-1}, i_{\ell+1}, \cdots i_n$ 为 0.

$\Rightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 线性无关 $\Rightarrow \dim V = n - r$.

注意到：$A \sim C \Rightarrow r = \mathrm{rank}(A)$. #

（$\sim$ 上方：相抵）

作业：P157：46，47，48，49

P154：3 (1)，

4，5，7，10 (2)，(4)，

11，12 (1)–(6)

13，14，15.

5.4 行秩、列秩、矩阵的秩

设 $A \in F^{m \times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$ 按行分块，可视为由 m 个行向量组成.

$$= (\beta_1, \cdots, \beta_n)$$ 按列分块，可视为由 n 个列向量组成.

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in F^n = F^{1 \times n}$ 为 $l.sp.$ F^n 的一个向量组，记为 S_1.

$\beta_1, \cdots, \beta_n \in F^m = F^{m \times 1}$ 为 $l.sp.$ F^m 的一个向量组，记为 S_2.

称 S_1 的秩为 A 的行秩.

称 S_2 的秩为 A 的列秩.

定理 5.4.1. $\mathrm{rank}(S_1) = \mathrm{rank}(S_2) = \mathrm{rank}(A)$.

证明. i) 初等变换不改变矩阵的秩. (由定理 4.3.5 及命题 4.3.2)

ii) 行秩 $=$ 列秩.

设 $A \in F^{m \times n}$，记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in F^n$，$\beta_1, \cdots, \beta_n \in F^m$

① 行初等变换 I. $r_i \leftrightarrow r_j$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_m' \end{pmatrix}$$

显然：$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由 $\alpha_1', \cdots, \alpha_m'$ 线性表出，反之亦然.

② 行初等变换 II. λr_i，$\lambda \in F \setminus \{0\}$.

可互相线性表出.

③ 行初等变换 III. $\alpha_i' = \alpha_i + \lambda \alpha_j$. 注意到 $\alpha_j = \alpha_j'$，$\alpha_i = \alpha_i' - \lambda \alpha_j'$

$\Rightarrow$ 可互相线性表出.

④ 列初等变换 I: $C_i \leftrightarrow C_j$

$$A = (\cdots, \beta_i, \cdots, \beta_j, \cdots) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (a_{pq})_{m\times n}$$

$$A' = (\cdots, \beta_j, \cdots, \beta_i, \cdots) = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_m' \end{pmatrix}$$

$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s}$ 线性相关 i.f.f.

$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_s \in F$, 不全为零, s.t.

$$\lambda_1\alpha_{i_1} + \cdots + \lambda_s\alpha_{i_s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_{i_1 1} + \cdots + \lambda_s a_{i_s 1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{i_1 n} + \cdots + \lambda_s a_{i_s n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_{i_1 1} + \cdots + \lambda_s a_{i_s 1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{i_1 n} + \cdots + \lambda_s a_{i_s n} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\alpha_{i_1}', \cdots, \alpha_{i_s}'$ 线性相关.

⑤ 列初等变换 II. 证类似 I.

iii) 初等变换不改变矩阵的列秩. 与 ii) 同理.

由 Thm.4.3.4, 命题 4.3.2, 定理 4.3.7 知:

存在初等方阵 $P_1, \cdots, P_s, Q_1, \cdots, Q_t$ s.t.

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

这里 $r = \mathrm{rank}(A)$. 显然 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的行秩 = 其列秩 $= r$. 并.

Cor.5.4.1. $A \in F^{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ A 的行向量 l. indep.
$\Leftrightarrow$ A 的列 . . . . . .

Cor 5.4.2. A 的不等于零的 r(A) 阶子式所在行构成 A 的行向量的极大线性无关组
. . . . . 列 . . . . . 列 . . . . . .

Digression. 用初等变换求极大线性无关组

给定 $\beta_1, \cdots, \beta_s \in F^m$ 为 s 个列向量, 求其极大线性无关组.

对矩阵 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_s)$ 作行初等变换得 $\tilde{B}$. 由 $\tilde{B}$ 的列向量的极大线性无关组推断 B 的列向量的极大线性无关组. (Gauss Elimination)

例子. 求 $a_1 = (-1, 5, 3, -2)$, $a_2 = (4, 1, -2, 9)$, $a_3 = (2, 0, -1, 4)$, $a_4 = (0, 3, 4, -5)$. 的极大线性无关组.

Solution.

$$(a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 21 & 10 & 3 \\ 0 & 10 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 21 & 10 & 3 \\ 0 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 108 \\ 0 & 0 & 5 & 54 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$, (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_3, a_4), (a_2, a_3, a_4) 均为 a_1, a_2, a_3, a_4 的极大线性无关组.

5.5 线性方程组的解集结构

在 5.3 节里, 我们看到 $Ax = 0$ 的解空间为线性空间, 且其维数 $= n - \mathrm{rank}(A)$. 这里, $A \in F^{m\times n}$, $x \in F^n$.

特别地, $Ax = 0$ 一定有解, 即零解. 零解唯一 iff $\mathrm{rank}(A) = n$.

有非零解 iff $\mathrm{rank}(A) < n$.

本节, 我们考虑一般的线性方程组:

$$Ax = b \quad (1), \qquad \begin{matrix} b=0 & \text{齐次方程组} \\ b\neq 0 & \text{非齐次方程组} \end{matrix}$$

$A \in F^{m\times n}$, $b \in F^m$ 为给定的矩阵, $x \in F^n$

定理 5.5.1. (1) 有解 i.f.f. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, b)$.

Pf. 记:

$$A=(\beta_1,\cdots,\beta_n),\qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n=b$. (2)

(2) 有解 $\Leftrightarrow$ $b\in\langle\beta_1,\cdots,\beta_n\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\langle\beta_1,\cdots,\beta_n\rangle=\langle\beta_1,\cdots,\beta_n,b\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的列秩 $=$ $\beta_1,\cdots,\beta_n,b$ 的列秩

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)$. #

定义 $S:=\{x\in F^n \mid Ax=b\}$, 称为非齐次线性方程组(1)的解集.

· $\forall\,\alpha,\beta\in S$, i.e., $A\alpha=b$, $A\beta=b$ $\Rightarrow$ $A(\alpha-\beta)=0$.

· 若 $S\neq\phi$. 任取 $x_0\in S$. 固定 x_0.

① $\forall x\in S$, $A(x-x_0)=0$

$\Rightarrow$ $x-x_0\in V:=\{y\in F^n \mid Ay=0\}$

$\Rightarrow$ $x\in x_0+V$, i.e., $S\subseteq x_0+V$

② $\forall x\in x_0+V$ $\Rightarrow$ $Ax=b$, i.e., $x_0+V\subseteq S$

We arrive at

定理 5.5.2. $S=x_0+V=\{x_0+v \mid v\in V\}$.

这个定理说明, 若 $Ax=b$ 有解, 则其通解有如下形式:

$$x=x_0+t_1\beta_1+\cdots+t_{n-r}\beta_{n-r},\qquad t_1,\cdots,t_{n-r}\in F.$$

其中 x_0 为 $Ax=b$ 的任一特解, $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 为对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

Cor. 5.5.1. (1) 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)=n$.

Summary.

$Ax=b$

- $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)-1$ 无解,
- $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)<n$ 无穷多解, x_0+V.
- $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)=n$ 唯一解.

作业: 16, 17, 18,
19 (1), (3)
20 (1)
21, 22, 23

作业 Apr 18. P156.
38,
40(1),
41

· Last time

给定 $A \in F^{m\times n}$.

$Ax = 0$ (1) 齐次线性方程组

$x \in F^n$

$V := \{ x \in F^n \mid Ax = 0 \}$ is a $(n - \operatorname{rank}(A))$-dimensional vector sp. 称为 (1) 的解空间.

any basis of V: $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n-r(A)}\}$ 称为 (1) 的一组基础解系。

通解: $x = \sum_{j=1}^{n-r(A)} t_j \beta_j$, $t_1, \cdots, t_{n-r(A)} \in F$.

$b \in F^m$ $Ax = b$ (2) 非齐次线性方程组

方程组(2) 有解 i.f.f. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b)$

当(2)有解时. 通解 $x = x_0 + \sum_{j=1}^{n-r(A)} t_j \beta_j$, $t_j \in F$

其中, x_0 为 (2) 的任一特解, $\beta_1, \cdots, \beta_{n-r(A)}$ 为相应齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系。

§5.6 子空间的运算

定理5.6.1. 设 V: l.sp / F. W_1, W_2 是 V 的线性子空间.

则 $W_1 \cap W_2$ 是 V 的线性子空间.

pf. $\forall \alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$,

$\left.\begin{array}{l} \alpha \in W_1,\ \beta \in W_1 \Rightarrow \alpha+\beta \in W_1 \\ \alpha \in W_2,\ \beta \in W_2 \Rightarrow \alpha+\beta \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta \in W_1 \cap W_2$.

$\forall \alpha \in W_1 \cap W_2$, $\lambda \in F$,

$\left.\begin{array}{l} \alpha \in W_1 \Rightarrow \lambda\alpha \in W_1 \\ \alpha \in W_2 \Rightarrow \lambda\alpha \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\alpha \in W_1 \cap W_2$.

#.

两个子空间的交是子空间.

定理 5.6.2. 设 V: l.sp / F. W_1, W_2 是 V 的线性子空间.

则 $W_1 + W_2 := \{ \alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2 \}$

是 V 的线性子空间. 且是包含 $W_1 \cup W_2$ 的最小线性子空间.

pf. $\forall \alpha, \beta \in W_1 + W_2$.

设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in W_1$, $\alpha_2 \in W_2$,

$\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1 \in W_1$, $\beta_2 \in W_2$

则 $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in W_1 + W_2$

$\forall \alpha \in W_1 + W_2$, $\lambda \in F$. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda\alpha = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 \in W_1 + W_2$

显然. $W_1 \subseteq W_1 + W_2$. $W_2 \subseteq W_1 + W_2$, $\Rightarrow W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$

设 W 是包含 $W_1 \cup W_2$ 的任一子空间.

$\forall \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in W$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \in W \Rightarrow W_1 + W_2 \subseteq W$.

Hence $W_1 + W_2$ 是包含 $W_1 \cup W_2$ 的最小子空间.

定理 5.6.3. 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Proof. 先证一个简单引理.

引理: 设 V 是一个 l.sp.f. $\dim V = n$.

设 W 是 V 的一个子空间. $\dim W = r < n$.

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 W 的一组基. 则存在 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n \in V$

s.t. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基.

Pf. 取 $\alpha_{r+1} \in V$, s.t. $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 线性无关.

(otherwise, $\forall \beta \in V$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$ 线性相关.

$\Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 V 的一组基 #)

依次下去. 由于 n 有限, 可至 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots \alpha_n$ 为 V 的极大线性无关组. #.

现记 $r = \dim V_1$,

$s = \dim V_2$,

$t = \dim(V_1 \cap V_2)$.

取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ → 扩充为 V_1 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_{r-t}$

→ 扩充为 V_2 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-t}$

$\Rightarrow V_1 + V_2 = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_{r-t}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{s-t} \rangle$.

下证: $\alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots \beta_{r-t}, \gamma_1, \cdots \gamma_{s-t}$ 线性无关.

若 $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_t \alpha_t + \mu_1 \beta_1 + \cdots + \mu_{r-t} \beta_{r-t} + \nu_1 \gamma_1 + \cdots + \nu_{s-t} \gamma_{s-t} = 0$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_t, \mu_1, \cdots, \mu_{r-t}, \nu_1, \cdots, \nu_{s-t} \in F$.

则 $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_t \alpha_t + \mu_1 \beta_1 + \cdots + \mu_{r-t} \beta_{r-t} = -\nu_1 \gamma_1 - \cdots - \nu_{s-t} \gamma_{s-t} =: \delta$

$\delta \in V_1$ (因为左边 $\in V_1$)

$\delta \in V_2$ (因为右边 $\in V_2$)

$\Rightarrow \delta \in V_1 \cap V_2$

i.e., $-\nu_1 \gamma_1 - \cdots - \nu_{s-t} \gamma_{s-t} \in V_1 \cap V_2$

$\Rightarrow \nu_1 = \cdots = \nu_{s-t} = 0$

同理知: $\mu_1 = \cdots = \mu_{r-t} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_t \alpha_t = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_t = 0$. $\Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots \beta_{r-t}, \gamma_1, \cdots \gamma_{s-t}$ 线性无关.

$\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = t + (r-t) + (s-t)$

$= r + s - t$. #.

Cor. 5.6.1. 设 V_1, V_2 是 V 的线性子空间. 有:

$V_1 \cap V_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

Def. V: l. sp. / F. 设 V_1, V_2 是 V 的线性子空间.

若 $\forall \alpha \in V_1 + V_2$, α 可唯一地写为

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

则称 $V_1 + V_2$ 为直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则称 V_1, V_2 互为补空间.

Thm. 5.6.4. 设 V_1, V_2 为 V 的子空间. 以下命题等价.

(1) $V_1 + V_2$ 为直和.

(2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(3) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

(4) $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 V_1 的一组基.

$\beta_1, \cdots, \beta_s$ 为 V_2 ----,

则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 为 $V_1 + V_2$ 的一组基.

Pf. (1) $\Rightarrow$ (2). 若 $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$.

取 $\beta \in V_1 \cap V_2$, $\beta \neq 0$.

$0 \in V_1 \cap V_2$, $0 = 0 + 0 = \beta + (-\beta)$. 矛盾.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). $\surd$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) 由定理 5.6.3 的证明知显然.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $\alpha \in V_1 + V_2$,

若 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2'$

$\alpha_1, \alpha_1' \in V_1$, $\alpha_2, \alpha_2' \in V_2$. $\Rightarrow$ $\alpha_1 - \alpha_1' = \alpha_2' - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2$

$\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_1'$ 且 $\alpha_2 = \alpha_2'$ #.

· 商空间 (quotient space)

· 设 V: l. sp. / F W 是 V 的子空间. 如定义 V 上的一个等价关系 "~",

对于 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha \sim \beta$ if $\alpha - \beta \in W$.

($\alpha \sim \alpha$. $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha - \beta \in W \Rightarrow \beta - \alpha \in W \Rightarrow \beta \sim \alpha$

$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \gamma \in W \Rightarrow \alpha - \gamma \in W \Rightarrow \alpha \sim \gamma$).

将 V 按 $\sim$ 分类.

$$\bar{\alpha} := \{\beta \in V \mid \beta \sim \alpha\} = \{\alpha + w \mid w \in W\} =: \alpha + W$$

α 为 $\bar{\alpha}$ 的一个代表元.

$\beta \in \bar{\alpha} \Leftrightarrow \beta \in \alpha + W \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

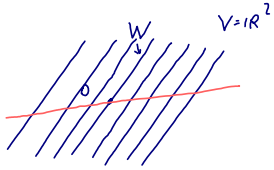
$V/W := V/\sim$ = 等价类的集合

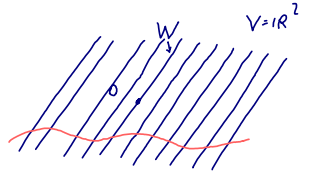
$$= \{\bar{0}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots\}$$

$V = W \cup (\alpha_1 + W) \cup (\alpha_2 + W) \cup \cdots$

e.g., $V = \mathbb{R}$.

the red line or curve can be viewed as a set of representatives of the equivalent classes





在 V/W 上定义加法: $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 := \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$.

定义 F-数乘: $\lambda \bar{\alpha} := \overline{\lambda \alpha}$.

$\alpha_1' = \alpha_1 + w_1$, $\alpha_2' = \alpha_2 + w_2$. $w_1, w_2 \in W$

则 $\alpha_1' + \alpha_2' = \alpha_1 + \alpha_2 + w_1 + w_2$.

$\Rightarrow \overline{\alpha_1' + \alpha_2'} = \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$

$\alpha' = \alpha + w$, $w \in W$

$\lambda \alpha' = \lambda \alpha + \lambda w \Rightarrow \overline{\lambda \alpha'} = \overline{\lambda \alpha}$.

·定理5.6.5. V/W 关于如上定义的加法和 F-数乘为一个 l.s.p./F.

且 $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

Pf. 作业. #.

Apr. 23. 作业 P156. 24-28.

• Exercise.

1. 证明: $\forall X \in F^{n\times n}$, $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}X}$

Proof. 记 $A(t) = e^{tX}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A(0) = I_n$

令 $f(t) = \det(A(t)) \Rightarrow f(0) = \det(I_n) = 1$.

$f(1) = \det(e^X)$.

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\det A(t)\right) = \mathrm{tr}\left(A^*(t)\frac{dA(t)}{dt}\right)$$

$A(t) = e^{tX} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = e^{tX}X = A(t)X$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \mathrm{tr}\left(A^*(t)A(t)X\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\det(A(t))I_n X\right) = f(t)\,\mathrm{tr}(X)$$

$$= \mathrm{tr}(X)\,f(t) \Rightarrow f(t) = Ce^{\mathrm{tr}(X)t}$$

$f(0)=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(t) = e^{t\,\mathrm{tr}(X)} \Rightarrow f(1) = e^{\mathrm{tr}(X)}$. #.

·一元多项式.

F: 数域. (通常 $F = \mathbb{Q}$, or $\mathbb{R}$, or $\mathbb{C}$).

x: symbol.

形如 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$, $a_i \in F$, $a_d \neq 0$, $d \geq 0$

的表达称为数域 F 上的一个 d 次多项式. a_i 称为第 i 次项数.

(系 x 的)

x 称为不定元.

F 上的多项式全体记为 $F[x]$.

$\forall P, Q \in F[x]$, 称 $P = Q$, if P 和 Q 的次数相同且各次项系数相同.

定义加法:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i := \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i, \quad \begin{matrix} a_1,\cdots,a_m \in F \\ b_1,\cdots,b_m \in F \end{matrix}$$

定义乘法:

$$\left(\sum_{i=0}^{m_1} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m_2} b_j x^j\right) := \sum_{k=0}^{m_1+m_2}\left(\sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ ij=k}} a_i b_j\right)x^k \quad \begin{matrix} a_1,\cdots,a_{m_1} \in F \\ b_1,\cdots,b_{m_2} \in F \end{matrix}$$

定义 F-数乘:

$$\lambda \sum_{i=0}^{d} a_d x^d := \sum_{i=0}^{d} (\lambda a_d) x^d, \quad \lambda, a_1,\cdots,a_d \in F.$$

2. 证明:

记 $F[x] := \{$关于x的F-系数多项式$\}$, $F = \mathbb{Q}$ or $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

则 $F[x]$关于多项式加法与 F-数乘构成一个 F-线性空间.

并且 $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ 为 $F[x]$ 的一组基.

Pf. 验证 8 条公理. (exercise).

任取 $x^{m_1}, \dots, x^{m_\ell}$, $0 \le m_1 < \dots < m_\ell$. $\ell \ge 1$.

若有 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ s.t.

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x^{m_i} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_\ell = 0 \Rightarrow x^{m_1}, \dots, x^{m_\ell}$ 线性无关. #.

---

3. 设 $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ 为实变实值函数$\}$. 我们知道:

V 关于函数的加法与 $\mathbb{R}$-数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

记 $W := \{\mathbb{R}$ 上的一元多项式函数$\}$.

证明: W 是 $\mathbb{R}$-线性空间. 且 $\{1, x, x^2, \dots\}$ 为 W 的一组基.

Pf. 显然, $W \subseteq V$, 且 W 关于函数加法和 $\mathbb{R}$-数乘运算封闭,

且 V 为 $\mathbb{R}$-线性空间 $\Rightarrow$ W 为 $\mathbb{R}$-线性空间.

$\forall f(x) \in W$. $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, $a_0, \dots a_d \in \mathbb{R}$, $a_d \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \in \langle 1, x, x^2, \dots \rangle$.

任取 $x^{m_1}, \dots, x^{m_\ell}$ $\quad 0 \le m_1 < m_2 < \dots < m_\ell$, $\ell \ge 1$

下证: $x^{m_1}, \dots, x^{m_\ell}$ 线性无关.

我们证明更强的事实: $x^0, x^1, \dots, x^{m_\ell}$ 线性无关. 记 $m_0 = m$.

若 $\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_m x^m = 0$ $(*)$, $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

则: $\dfrac{\lambda_0 x^0}{x^m} + \lambda_1 \dfrac{x^1}{x^m} + \dots + \lambda_{m-1} \dfrac{x^{m-1}}{x^m} + \lambda_m = 0$

$x \to +\infty \Rightarrow \lambda_m = 0$. 同理 $\Rightarrow \lambda_{m-1} = \dots = \lambda_0 = 0$

$\Rightarrow$ 事实成立. #

(two alternative proofs:

or 取 $x = 1$. $\Rightarrow \lambda_0 + \dots + \lambda_m = 0$

$x = 2 \Rightarrow \lambda_0 2^0 + \dots + \lambda_m 2^m = 0$

$\vdots$

$x = m \Rightarrow \lambda_0 m^0 + \dots + \lambda_m m^m = 0$

$x = m+1 \Rightarrow \lambda_0 (m+1)^0 + \dots + \lambda_m (m+1)^m = 0$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^0 & 2 & \dots & 2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m+1)^0 & (m+1) & \dots & (m+1)^m \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le m+1} (j-i) \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_m = 0$. #.

or $(*) \overset{x=1}{\Rightarrow} \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(*) \overset{x=1}{\Rightarrow} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + m\lambda_m = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(*) \overset{x=1}{\Rightarrow} 2 \cdot 1 \lambda_2 + 3 \cdot 2 \lambda_3 + \dots + m(m-1)\lambda_m = 0$

$\vdots$

$\frac{\partial^m}{\partial x^m}(*) \overset{x=1}{\Rightarrow} m! \lambda_m = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_m = 0$. #.)

我们看到 $F = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, or $\mathbb{C}$ 时, 多项式函数 构成的线性空间 与 F 上的多项式(全体)构成的线性空间无本质区别. F变F值

通常将它们等同起来.

• 4. V 如上题定义. $f_1, \dots, f_m \in V$ 线性无关 iff

$$\exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \det\left(f_i(a_j)\right)_{m\times m} \neq 0$$

Pf. "$\Rightarrow$": 设 $f_1, \dots, f_m$ 线性无关. 用数学归纳法.

$m=1$. f_1 线性无关 $\Rightarrow$ f_1 不是零函数 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $f_1(a) \neq 0$.

假设对于 $m=p$ 时, 存在 $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\det\left(f_i(a_j)\right)_{p\times p} \neq 0.$$

则对 $m=p+1$ 时. 由归纳假设, 可取 $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\det\left(f_i(a_j)\right)_{p\times p} \neq 0.$$

考虑 $\begin{pmatrix} (f_i(a_j))_{p\times p} & \begin{matrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{matrix} \\ f_{p+1}(a_1) \cdots f_{p+1}(a_p) & f_{p+1}(a) \end{pmatrix}_{(p+1)\times(p+1)} = \Delta(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

若 $\Delta(a) \equiv 0$, 则

$\det(f_i(a_j)) \neq 0 \Rightarrow$ 前 p 行线性无关 $\Rightarrow \left(f_{p+1}(a_1), \dots, f_{p+1}(a_p), f_{p+1}(a)\right) = \sum_{i=1}^{p} k_i(a) r_i(a)$

r_i 为 $\Delta(a)$ 的第 i 行. 由于 $\left(f_{p+1}(a_1), \dots, f_{p+1}(a_p)\right)$ 由前 p 行的表出系数唯一 $\Rightarrow k_i(a) = k_i$ (independent of a!) $\forall a$ $\Rightarrow f_1, \dots, f_{p+1}$ 线性相关. 矛

$\Rightarrow f_{p+1}(a) = k_1 f_1(a) + \dots + k_p f_p(a)$

"$\Leftarrow$": 设存在 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\det\left(f_i(a_j)\right) \neq 0$$

若 $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \dots + \lambda_m f_m(a_1) = 0 \\ \lambda_1 f_1(a_m) + \dots + \lambda_m f_m(a_m) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. $\Rightarrow f_1, \dots, f_m$ 线性无关.

• 定义: V: v. sp. / F. 若映射

$\varphi: V \to V$ 满足

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in V$$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in F.$$

则称 φ 为 V 上的一个线性变换.

5. $V := F[x]$. $F = \mathbb{Q}$ or $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

定义 $\frac{d}{dx}: V \to V$.

$$\sum_{i=0}^{d} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{d} i a_i x^{i-1}$$

称为 V 上的求导算子.

证明：① $\frac{\partial}{\partial x}$ 为 V 上的一个线性变换.

② $x\cdot$ 为 V 上的一个线性变换.

(↳ 多项式乘法)

③ $\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = id$.

Pf. ①、② easy.

③ : $\forall f \in F[x]$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x - x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)(f)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xf) - x\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= f + x\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial x} = f \quad \#.$$

· 多元多项式.

$F[x_1, \cdots, x_m]$

形如 $\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_m\geq 0 \\ \text{finite sum}}} a_{k_1,\cdots,k_m} x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m} =: f$, $a_{k_1,\cdots,k_m}\in F$ 的表达式

称为关于 $x_1,\cdots,x_m$ 的 $\overbrace{\text{F-系数}}$ 多项式. $a_{k_1,\cdots,k_m}$ 称为 $x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}$ 的系数.

$\max\left\{k_1+\cdots+k_m \mid a_{k_1,\cdots,k_m}\neq 0\right\}$ =: 称为 f 的次数 (degree). $\forall i,j,\ x_ix_j = x_jx_i$

$x_1,\cdots,x_m$ 为不定元. 关于 $x_1,\cdots,x_m$ 的多项式全体记为 $F[x_1,\cdots,x_m]$.

其上可定义 "+", "·", F-数乘.

$F[x_1,\cdots,x_m]$ 关于 "+" 与 F-数乘构成一个 F-线性空间.

basis : $1,\ x_1,\cdots,x_m,\ x_1^2,\ x_1x_2,\cdots,x_1x_m,\ x_2^2,\ x_2x_3,\cdots,x_2x_m,$

$x_3^2,\cdots,x_m^2,\ \cdots$

i.e., $k\geq 0$, $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$, $1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k\leq m$

$x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ 称为一个单项式, degree $= k$.

Def. $f\in F[x_1,\cdots,x_m]$ 若 f 的每个单项式的 degree $= d$ 则称 f 是 degree $=d$ 的齐次多项式. 所有 degree $=d$ 的齐次多项式记为 $F^{[d]}[x_1,\cdots,x_m]$

规定：零多项式可视为任一次数齐次多项式.

· $f_1 = \sum a_{k_1,\cdots,k_m} x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}$

$f_2 = \sum b_{\ell_1,\cdots,\ell_m} x_1^{\ell_1}\cdots x_m^{\ell_m}$

$$f_1\cdot f_2 = \sum a_{k_1,\cdots,k_m} b_{\ell_1,\cdots,\ell_m} x_1^{k_1+\ell_1}\cdots x_m^{k_m+\ell_m}.$$

· $F[x_1,\cdots,x_m] = F\oplus F^{[1]}[x_1,\cdots,x_m]\oplus F^{[2]}[x_1,\cdots,x_m]\oplus\cdots$

Lemma. $x_i\cdot : F[x_1,\cdots,x_m]\to F[x_1,\cdots,x_m]$ is a linear transf.

特别地, $x_i\cdot : F^{[d]}[x_1,\cdots,x_m]\to F^{[d+1]}[x_1,\cdots,x_m]$.

$\frac{\partial}{\partial x_i}: F[x_1,\cdots,x_m] \to F[x_1,\cdots,x_m]$. $i=1\cdots m$

$\sum a_{k_1,\cdots,k_m} x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m} \longmapsto \sum a_{k_1,\cdots,k_m} k_i\, x_1^{k_1}\cdots \hat{x_i^{k_i}}\cdots x_m^{k_m} x_i^{k_i-1}$

Lemma. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ is a linear transf.

In particular, $\frac{\partial}{\partial x_i}: F^{[d]}[x_1,\cdots,x_m] \to F^{[d-1]}[x_1,\cdots,x_m]$

Def. $E := \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Lemma. $f \in F^{[d]}[x_1,\cdots,x_m]$ iff $Ef = df$.

Lemma. $\dim_F F^{[d]}[x_1,\cdots,x_m] = \binom{d+m-1}{d}$

e.g. $m=2$.

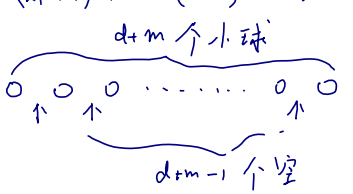
$x_1^d,\ x_1^{d-1}x_2,\ \cdots,\ x_1x_2^{d-1},\ x_2^d \qquad d+1 = \binom{d+2-1}{1}$

Pf. $x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}$

$k_1+\cdots+k_m = d$

$k_1,\cdots,k_m \geq 0$

$(k_1+1)+\cdots+(k_m+1) = d+m$



插入隔板共有 $\binom{d+m-1}{m-1}$ 种方法 #.

f

- A_n $x_1^{n+1} + x_2^2$
- D_n $x_1^{n-1} + x_1x_2^2$
- E_6 $x_1^4 + x_2^3$
- E_7 $x_1^3x_2 + x_2^3$
- E_8 $x_1^5 + x_2^3$

$F[x_1,x_2] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$

Recall: 设 W 是 V 的子空间.

定义: $\bar{\alpha_1} + \bar{\alpha_2} := \overline{\alpha_1+\alpha_2}$, 则 $\bar{\alpha_1}+\bar{\alpha_2} = \bar{\alpha_2}+\bar{\alpha_1}$

$\lambda\bar{\alpha} := \overline{\lambda\alpha}$.

$(\bar{\alpha_1}+\bar{\alpha_2})+\bar{\alpha_3} = \bar{\alpha_1}+(\bar{\alpha_2}+\bar{\alpha_3}) = \overline{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$

$\bar{0}+\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$

$-\bar{\alpha}+\bar{\alpha} = \bar{0}$

$\lambda(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) = \lambda\overline{\alpha+\beta} = \overline{\lambda\alpha+\lambda\beta}$

$= \overline{\lambda\alpha} + \overline{\lambda\beta}$

$(\lambda_1+\lambda_2)\bar{\alpha} = \overline{(\lambda_1+\lambda_2)\alpha} = \overline{\lambda_1\alpha} + \overline{\lambda_2\alpha}$

$(\lambda_1\lambda_2)\bar{\alpha} = \overline{(\lambda_1\lambda_2)\alpha} = \overline{\lambda_1(\lambda_2\alpha)}$

$= \lambda_1\overline{\lambda_2\alpha}$

$1\bar{\alpha} = \overline{1\alpha} = \bar{\alpha}$.

$\Rightarrow V/W$ 关于以上 + 和数乘构成个向量空间.

设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 是 W 的一组基.

可扩充为 V 的一组基

$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\ \varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$.

$\forall \alpha \in V.\quad \alpha = \lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_r\varepsilon_r + \lambda_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$

$\Rightarrow \bar{\alpha} = \lambda_1\bar{\varepsilon_1}+\cdots+\lambda_r\bar{\varepsilon_r}+\lambda_{r+1}\bar{\varepsilon_{r+1}}+\cdots+\lambda_n\bar{\varepsilon_n}$

$\bar{\varepsilon}_1 = \cdots \bar{\varepsilon}_r = 0 \Longrightarrow \bar{\alpha} = \lambda_{r+1}\bar{\varepsilon}_{r+1} + \cdots + \lambda_n \bar{\varepsilon}_n$

若有 $c_{r+1}, \cdots, c_n \in F$ s.t.

$$c_{r+1}\bar{\varepsilon}_{r+1} + \cdots + c_n\bar{\varepsilon}_n = \bar{0}$$

$\Rightarrow c_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + c_n\varepsilon_n \in W$

$\Rightarrow c_{r+1} = \cdots = c_n = 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon}_{r+1}, \cdots, \bar{\varepsilon}_n$ 线性无关.

$\Rightarrow \dim_F V/W = n-r.$

- $V = F[x_1, \cdots, x_m]$. $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, or $\mathbb{C}$.

$\forall P \in V$. 定义 $W := P\cdot V := \{P\cdot Q \mid Q \in V\}$.

则 W 关于 + 和 F-数乘 构成一个 F 上的 v.sp.

类似地, $\forall P_1, \cdots, P_s \in V$.

$$W := P_1V + P_2V + \cdots + P_sV$$
$$= \{P_1Q_1 + P_2Q_2 + \cdots + P_sQ_s \mid Q_1, \cdots, Q_s \in V\}$$

则 W 关于 + 和 F 数乘 构成 F 上的一个 v.sp.

Pf. $w_1 + w_2 = P_1Q_1 + \cdots + P_sQ_s + P_1\widetilde{Q_1} + \cdots + P_s\widetilde{Q_s}$
$= P_1(Q_1 + \widetilde{Q_1}) + \cdots + P_s(Q_s + \widetilde{Q_s}) \in W.$

$\lambda w \in W$. #.

e.g. $V = F[x]$.

$P = 1$. $W = P\cdot V = V$

$V/V = \{\bar{0}\}$.

$P = x$. $W = x\cdot V$

$V/W = \mathrm{Span}_F\{\bar{1}\}$

$P = x^2$. $W = x^2V$

$V/W = \mathrm{Span}_F\{\bar{1}, \bar{x}\}$.

Exercise.

- $V = F[x_1, x_2]$

(E_6) $f = x_1^4 + x_2^3$

$P_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3$ $\qquad W := P_1V + P_2V$

$P_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2$

$1, x_1, x_1^2, x_2, x_1x_2, x_1^2x_2 \Rightarrow \dim_F V/W = 6.$

Last time and digression:

$F^{[d]}[x_1, \cdots, x_m]$ is a l. sp. / F.

维数:

$$\dim_F F^{[d]}[x_1, \cdots, x_m] = \binom{d+m-1}{d}, d \geq 0. \qquad \sum_{d=0}^{\infty} \dim F^{[d]}[x_1, \cdots, x_m] t^d = \frac{1}{(1-t)^m}.$$

交换子. e.g. $m=1$.

$x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot x = ?$

这里 $x, \frac{\partial}{\partial x}$ 为 $F[x]$ 上的线性变换

$\forall\, p \in F[x]$,

$$\left(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot x\right) p$$

$$= x \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(xp)$$

$$= x \frac{\partial p}{\partial x} - p - x \frac{\partial p}{\partial x} = -p$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot x = -id.$$

对一般的 m,

$$x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot x_i = -\delta_{ij}\, id$$

上面我们用到了 Leibniz rule. $\frac{\partial}{\partial x_i}(p \cdot q) = \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot q + p \cdot \frac{\partial q}{\partial x_i}$

Claim: $E = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 也满足 Leibniz rule.

若 $p \in F^{[d_1]}$, $q \in F^{[d_2]}$, 则 $pq \in F^{[d_1+d_2]}$.

indeed, $E(p \cdot q) = E(p)\, q + p \cdot E(q) = d_1 pq + d_2 pq = (d_1+d_2) pq$.

E_8 $\quad f = x_1^5 + x_2^3$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^4$$

$$P_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2$$

$$W = P_1 \cdot V + P_2 \cdot V$$

V/W basis

$\bar{1}, \bar{x_1}, \bar{x_1^2}, \bar{x_1^3}, \bar{x_2}, \bar{x_1 x_2}, \bar{x_1^2 x_2}, \bar{x_1^3 x_2}$ $\quad \Rightarrow \dim V/W = 8$

E_7.

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3$$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2$$

$$P_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^3 + 3x_2^2$$

V/W basis.

$\bar{1}, \bar{x_1}, \bar{x_1^2}, \bar{x_1^3}, \bar{x_2}, \bar{x_1 x_2}, \bar{x_2^3}$ $\quad \Rightarrow \dim V/W = 7$

D_4

$f = x_1^3 + x_1 x_2^2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + x_2^2$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 x_1 x_2$.

basis: $\bar{1}$, $\overline{x_1}$, $\overline{x_1^2}$, $\overline{x_2}$

练习: ① E_6, E_7, E_8, D_4

② $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求 Q^{-1}.

③ $Q = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 15 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求 Q^{-1}.

④ $Q = \begin{pmatrix} 1 & -15 & 10 & 105 & -105 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求 Q^{-1}.

§App. Symmetric polynomials 这一节，我们介绍一个有趣的线性空间.

$S[x_1, \cdots, x_m] \subseteq F[x_1, \cdots, x_m]$

定义:

称 $f \in F[x_1, \cdots, x_m]$ 是一个对称多项式，如果 f 在 $x_1, \cdots, x_m$ 的任意置换下保持不变.

所有 $x_1, \cdots, x_m$ 的对称多项式全体记为 $S[x_1, \cdots, x_m]$.

$= \bigoplus_{d=0}^{\infty} S^{[d]}[x_1, \cdots, x_m]$

- Newton: $p_0 = 1$,
  $p_1 = x_1 + \cdots + x_m$,
  $p_2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2$,
  $\vdots$
  $p_k = x_1^k + \cdots + x_m^k$,
  $\cdots$

- Elementary symm. polynomials.

$(z - x_1) \cdots (z - x_m) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k z^{n-k}$

$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_m$,

$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $\cdots$, $\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, $\cdots$

- Monomial symm. polynomials:

对于 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$,

记 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$.

对称化: $Symm(x^\alpha) := \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\sigma(m)}^{\alpha_m} \left(= \sum_{\sigma \in S_m} x_1^{\alpha_{\sigma(1)}} \cdots x_m^{\alpha_{\sigma(m)}} \right)$

$\in S[x_1, \cdots, x_m]$.

e.g. $\alpha = (k, 0, 0, \cdots)$

$Symm(x^\alpha) = x_1^k + \cdots + x_m^k$

e.g. $\alpha = (3, 2, 0, \cdots)$

$Symm(x_1^3 x_2^2) = \sum_{1 \le i < j \le m} \left(x_i^3 x_j^2 + x_i^2 x_j^3 \right)$

e.g. $\alpha = (2, 2, 0, \cdots)$

$Symm(x_1^2 x_2^2) = 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i^2 x_j^2$

- Partitions and Young diagrams

Def. A non-increasing seq. of nonnegative integers w/ finitely many non-zero integers is called a partition:

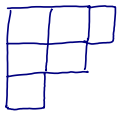
$\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge 0 \ge 0 \ge \cdots \ge 0)$

$\sum_{i\geq 1}\lambda_i$ is called the weight of λ, 记为 $|\lambda|$.

# of nonzero components in λ is called the length of λ, 记为 $\ell(\lambda)$. λ is called a partition of $|\lambda|$.

e.g. $\lambda = (3\ 2\ 1\ 0\ \cdots)$

$|\lambda| = 6$. $\ell(\lambda) = 3$.



Young diagram

· The set of all partitions is denoted by $\mathcal{P}$.

· $\mathcal{P}(d,m) := \{$ all partitions of d w/ length $\leq m\}$.

定理: $\dim S^{[d]}[x_1,\cdots,x_m] = \#\,\mathcal{P}(d,m)$.

Sketch of proof.

$\forall\, \alpha \in \mathcal{P}(d,m)$

$S(x^\alpha) \in S^{[d]}[x_1,\cdots,x_m]$

记 $\#\mathcal{P}(d,m) = N(d,m)$. $\mathcal{P}(d,m) = \{\alpha_{(1)},\cdots,\alpha_{(N(d,m))}\}$

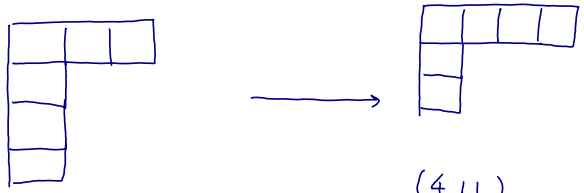
则 $S_{sym}(x^{\alpha_{(1)}}),\cdots,S_{sym}(x^{\alpha_{(N(d,m))}})$ form a basis of $S^{[d]}[x_1,\cdots,x_m]$. #

设: $\tilde{\mathcal{P}}(d,m) = \left\{ 1^{n_1}\cdots m^{n_m} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} i n_i = d \right\}$

Prop. $\sum_{d=0}^{\infty} \#\left(\tilde{\mathcal{P}}(d,m)\right) t^d = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{m}(1-t^i)}$

Pf. $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{m}(1-t^i)} = \prod_{i=1}^{m}\sum_{n_i=0}^{\infty} t^{i n_i}$

$= \sum_{n_1,\cdots,n_m\geq 0} t^{\sum_{i=1}^{m} i n_i} = \sum_{d=0}^{\infty} \#\left(\tilde{\mathcal{P}}(d,m)\right) t^d$.



$(3\,1\,1\,1)$ $\qquad$ $(4\,1\,1)$

rows $\leq m$ $\qquad$ columns $\leq m$

$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(d,m) \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(d,m)$

$\Rightarrow \quad \#\,\mathcal{P}(d,m) = \#\,\tilde{\mathcal{P}}(d,m)$

Cor. $\sum_{d=0}^{\infty} \dim\left(S^{[d]}[x_1,\cdots,x_m]\right) t^d = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{d}(1-t^i)}$.

· Newton 和初等对称多项式的关系.

$$p_1 = x_1 + \cdots + x_m \,, \qquad e_1 = x_1 + \cdots + x_m$$

$$\Rightarrow \quad e_1 = p_1$$

$$p_2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2 \,, \qquad e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\Rightarrow \quad 2e_2 = p_1^2 - p_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$p_3 = x_1^3 + \cdots + x_n^3 \,, \qquad e_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$$

$$3!\, e_3 = p_1^3 + 2p_3 - 3p_1 p_2$$

$$= (x_1 + \cdots + x_m)^3 - 3(x_1 + \cdots + x_m)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + 2(x_1^3 + \cdots + x_n^3)$$

$$k!\, e_k = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{k-1} & p_k \\ k-1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-2} & p_{k-1} \\ 0 & k-2 & p_1 & \cdots & p_{k-3} & p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$k e_k = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} p_r e_{k-r} \qquad (\text{Newton formula})$$

§6. 线性变换　　作业：P189. 1~5.

§6.1 定义、例子

Def. 设 V_1, V_2 为 F 上的两个 l.sp. 若映射 $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ 满足：$\forall x, y \in V_1, \lambda \in F$，有：

$$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$$

$$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 V_1 到 V_2 的线性映射.

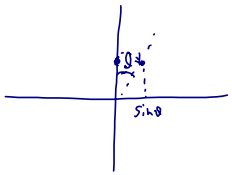
若 $V_1 = V_2$ 则称 $\mathcal{A}$ 为 V_1 上的一个线性变换.

e.g. $\mathrm{id}: V \to V$　　恒等变换是线性变换.

e.g. $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. 固定 $\theta \in \mathbb{R}$. 旋转变换是一个线性变换.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\theta}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



e.g. $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 τ 是一个线性变换. 这里，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. (伸缩变换)

e.g. 设 A 为一个 $n\times n$ 方阵. Fix A.

定义 $\mathcal{A}: F^n \to F^n$

$$x \longmapsto Ax \qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

则 $\mathcal{A}$ 为一个线性变换.

类似地, 设 $A\in Mat(F,\ m\times n)$

定义 $\mathcal{A}: F^n \to F^m$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

则 $\mathcal{A}$ 为一个线性映射.

e.g. $F[x]$: x 的一元多项式全体.

定义 $\mathcal{A}: F[x] \to F[x]$

$$f(x) \longmapsto \frac{df}{dx}(x)$$

则 $\mathcal{A}$ 为一个线性变换.

Lemma 6.1 线性变换的复合为线性变换. Composition

pf. exercise. #

$$\begin{cases}\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(v_1+v_2)=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(v_1)+\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(v_2)\\ \mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\lambda v)=\lambda\mathcal{A}(v).\end{cases}\quad \forall v_1,v_2,v\in V,\ \lambda\in F$$

命题 6.1. 设 V 是 F 上的 l.sp. $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 则:

(1) $\mathcal{A}(0)=0$.

(2) $\mathcal{A}(-\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha)$, $\forall\alpha\in V$.

(3) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$ 线性相关, 则 $\mathcal{A}(\alpha_1),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_m)$ 线性相关.

pf. (1) $\mathcal{A}(0+0)=2\mathcal{A}(0) \Rightarrow \mathcal{A}(0)=0$.

(2) 取 $\lambda=-1$ in $\mathcal{A}(\lambda\alpha)=\lambda\mathcal{A}(\alpha)$.

(3) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

$\Rightarrow \exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 不全为零 s.t.

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1\mathcal{A}(\alpha_1)+\cdots+\lambda_m\mathcal{A}(\alpha_m)=0. \quad \#$$

§6.2. 线性变换在一组基下的矩阵.

设 V 为 l.sp. $/F$. $\dim V=n$.

$\mathcal{A}: V\to V$ 为一个线性变换.

取 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基.

$\mathcal{A}(e_i)\in V \Rightarrow \mathcal{A}(e_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$

$$\left(\mathcal{A}(e_1),\cdots,\mathcal{A}(e_n)\right)=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&&\vdots\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=(e_1,\cdots,e_n)A$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$ 称 A 为线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵

显然, A 的第 j 列为 $\mathcal{A}(e_j)$ 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的坐标.

记 $\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)=(\mathcal{A}(e_1),\cdots,\mathcal{A}(e_n))$

$=(e_1,\cdots,e_n)A$.

命题 6.2.1 V: l.sp./F. $\dim V=n$. $\mathcal{A}:V\to V$ 为一个线性变换. 若 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$ 下对应的矩阵为 A. $\forall x\in V$, 记 $y=\mathcal{A}(x)$. 并记 X,Y 分别为 x,y 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的坐标. 则

$$Y=AX.$$

Pf. $(\mathcal{A}e_1,\cdots,\mathcal{A}e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A$

$x=(e_1,\cdots,e_n)X$, 记 $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$

$\Rightarrow \mathcal{A}x=x_1\mathcal{A}(e_1)+\cdots+x_n\mathcal{A}(e_n)$

$=(\mathcal{A}(e_1),\cdots,\mathcal{A}(e_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\mathcal{A}e_1,\cdots,\mathcal{A}e_n)X$

$=(e_1,\cdots,e_n)AX$

$=y=(e_1,\cdots,e_n)Y$

$\Rightarrow Y=AX$. #.

Remark. $e_1,\cdots,e_n$ basis of V.

$\mathcal{A}:V\to V$. $e_i'=\mathcal{A}(e_i)$. 若 $e_1',\cdots,e_n'$ 为 V 的 basis

$\Rightarrow$ $e_1,\cdots,e_n$ 到 $e_1',\cdots,e_n'$ 的过渡矩阵 $=A$ (=$\mathcal{A}$ 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵)

$x\in V$. x 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的坐标记为 X.

$\mathcal{A}(x)$ 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下 $\cdots\cdots=AX$.

若 $e_1',\cdots,e_n'$ 为 V 的 basis

则 x 在 $e_1',\cdots,e_n'$ 下的坐标 $=A^{-1}X$.

$x=(e_1,\cdots e_n)X$ $\qquad (e_1',\cdots,e_n')=(e_1,\cdots,e_n)A$

$=(e_1',\cdots,e_n')A^{-1}X$.

· 同一个线性变换在不同基下的矩阵:

$\mathcal{A}:V\to V$ l. transf. (V: l.sp/F of $\dim=n$)

$e_1,\cdots,e_n$ basis of V

$f_1,\cdots,f_n$ ------

$(e_1,\cdots,e_n)$ 到 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的过渡矩阵记为 C, i.e.,

$$(f_1,\cdots,f_n)=(e_1,\cdots,e_n)C$$

$\mathcal{A}$ 在 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵记为 A.

------ $f_1,\cdots,f_n$ ------ ~ ------ B.

$\Rightarrow \mathcal{A}(f_1,\cdots,f_n)=(f_1,\cdots,f_n)B$

$\Rightarrow \mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)C=(e_1,\cdots,e_n)CB$

$\Rightarrow \mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)CBC^{-1}\Rightarrow A=CBC^{-1}$. alternatively, $B=C^{-1}AC$.

· Recall from last time:

$\mathcal{A}: V \to V$ 线性变换，这里 V 是 F 上的 n维 线性空间.

取定 V 的一组基 $e_1, \cdots, e_n$，则

线性变换 $\mathcal{A}$ 与矩阵 $A \in Mat(n\times n, F)$ 等同起来. 即:

$$\mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) A$$

称 A 为线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵.

· 取 $f_1, \cdots, f_n$ 为 V 的另一组基，记线性变换在基 $f_1, \cdots, f_n$ 下的矩阵为 B.

记 $e_1, \cdots, e_n$ 到 $f_1, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵为 C.

即: $(f_1, \cdots, f_n) = (e_1, \cdots, e_n) C$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(f_1, \cdots, f_n) = \mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) C$$

$$\Rightarrow (f_1, \cdots, f_n) B = (e_1, \cdots, e_n) A C$$

$$\Rightarrow (e_1, \cdots, e_n) C B = (e_1, \cdots, e_n) A C$$

$$\Rightarrow CB = AC \overset{C\text{可逆}}{\Rightarrow} B = C^{-1} A C.$$

· This motivates us to the following definition:

Def. 6.2.1. 如下定义 $Mat(n\times n, F)$ 上的一个等价关系:

称 $A, B \in Mat(n\times n, F)$ 相似等价 或 相似，

如果存在 n 阶可逆方阵 C, s.t.

$$B = C^{-1} A C$$

记为 $A \overset{\text{相似}}{\sim} B$.

· 我们来验证 $\sim$ 确实给出 $Mat(n\times n, F)$ 上的一个等价关系:

① $A \sim A$ $\quad I^{-1} A I = A$.

② $A \sim B \Rightarrow \exists P$ 可逆 s.t. $B = P^{-1} A P$

$$\Rightarrow A = P B P^{-1} = (P^{-1})^{-1} B P^{-1} \Rightarrow B \sim A.$$

③ $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow \exists P, Q$ 可逆 s.t.

$$B = P^{-1} A P, \quad C = Q^{-1} B Q$$

$$\Rightarrow C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A PQ \Rightarrow A \sim C.$$ #

· 分类

· 相似不变量之例: determinant, rank, trace, ... (not sufficient!)

· 这里，"不变量"是指分类意义下不变的. $f: Mat(n\times n, F) \to \mathbb{R}$

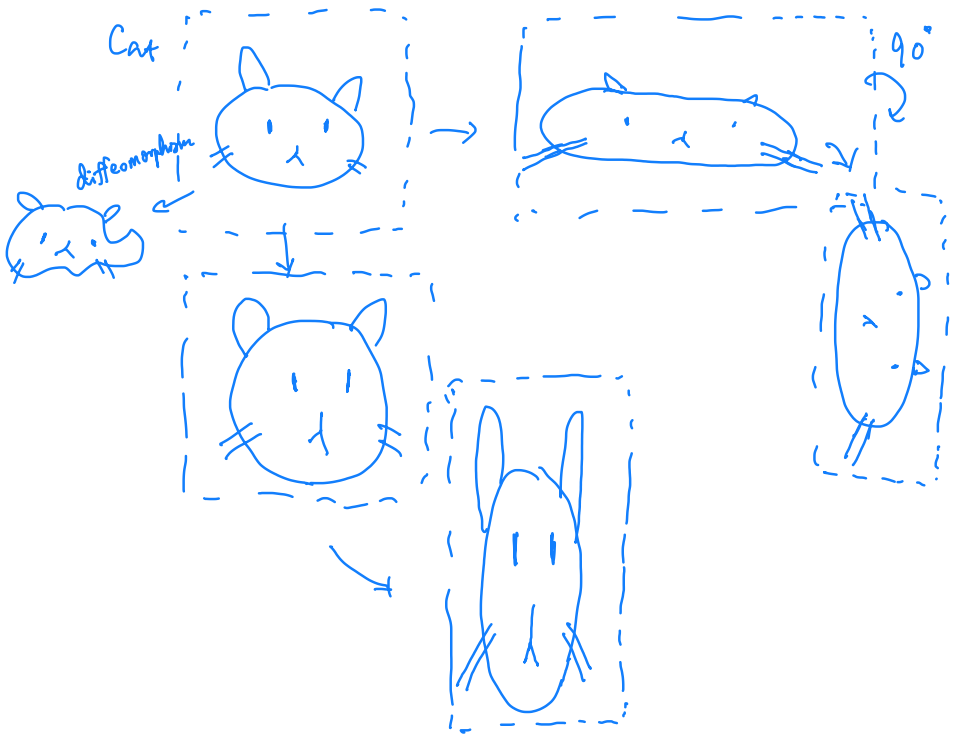
若 $A \sim B$ 蕴含 $f(A) = f(B)$ 则称 f 为一个相似不变量. To be Continued!

§6.3. 特征值和特征向量

We want to understand

geometry of a linear transformation.

(注意到研究相似等价之分类就是研究线性变换，我们从几何上尝试理解线性变换.



So how do we understand a linear transf.?

Def. 6.3.1. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间，$\mathcal{A}: V \to V$ 为一个线性变换. 如果存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 及非零向量 $\alpha \in V$ 满足 $\mathcal{A}(\alpha) = \lambda\alpha$，则称 λ 为 $\mathcal{A}$ 的一个**特征值**，α 为 $\mathcal{A}$ 的从属于特征值 λ 的一个**特征向量**.

Rmk. 显然，if α 为从属于 λ（特征值）的一个特征向量，则 $\forall k \in \mathbb{F}, k \neq 0$，$k\alpha$ 均为从属于特征值 λ 的特征向量.

将 $k\alpha, k \in \mathbb{F}$ 想象成 V 给出的仿射空间 (O, V) 中的 straight line，则该直线在线性变换 $\mathcal{A}$ 下不变.

- 取定 V 的一组基：$e_1, \cdots, e_n$

设 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A. i.e.,

$$\mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) A$$

设 $\alpha = (e_1, \cdots, e_n) X$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}((e_1, \cdots, e_n) X) = (e_1, \cdots, e_n) A X$$

因此 $\mathcal{A}(\alpha) = \lambda\alpha \iff (e_1, \cdots, e_n) A X = (e_1, \cdots, e_n) \lambda X \iff AX = \lambda X$.

Def. 6.3.2. 设 A 为 n 阶方阵. 若存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 及非零向量 $X \in \mathbb{F}^n$

s.t. $AX = \lambda X$

则称 λ 为 A 的一个特征值, X 为 A 的从属于特征值 λ 的一个特征向量.

· 如何求特征值?

$$AX = \lambda X \quad (*)$$

$\lambda \in \mathbb{F}$ 为特征值 $\Leftrightarrow$ $(*)$ 存在非零解

(λ 为 A 的)

$\Leftrightarrow$ $(\lambda I - A)X = 0$ 存在非零解

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$

显然: $\det(\lambda I - A)$ 为一个关于 λ 的 n 阶多项式. 称为 A 的特征多项式. 记为 $P_A(\lambda)$.

· 例子 设 $A \in Mat(3\times 3, \mathbb{R})$, 若 $A^TA = I$, 且 $\det A > 0$

则 1 为 A 的一个特征值.

Pf. $\det(I - A) = \det(A^TA - A) = \det(A^T - I)\det(A)$

$= \det(A^T - I) = \det(A - I)$

$= \det(-I(I-A))$

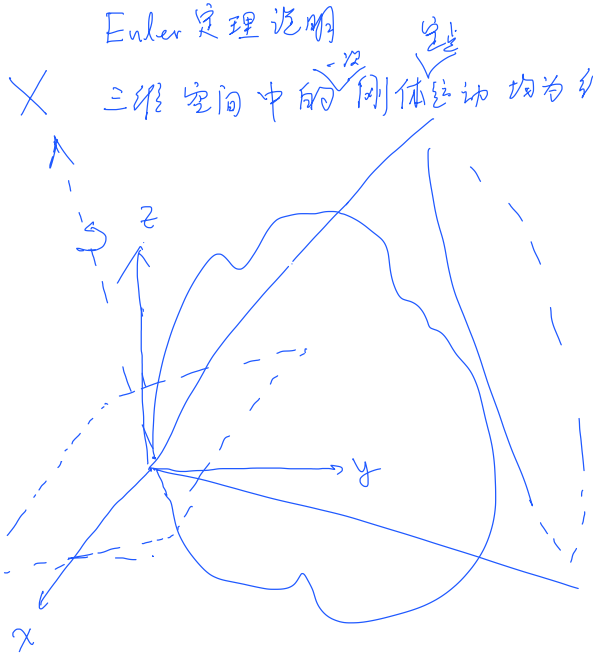
$= -\det(I-A)$

$\det(A^T)\det(A) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = 1.$

$\Rightarrow \det(I-A) = 0.$ #. (Euler定理)

Euler 定理说明

三维空间中的刚体运动均为绕某轴的一个转动.



a new way of counting degree of freedom for the motion of a rigid body w/ a fixed pt: 瞬时转动轴.

$A = A(t), \quad t \in \mathbb{R}.$

$A(t)X(t) = X(t).$

方向: 2个自由度. + 绕转动轴: 1个自由度 $\Rightarrow 3$.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

后面我们将看到：对于线性变换，作比

$\Rightarrow$ 作商 $\Rightarrow$ "刚体"运动.

$A^TA = I$.

Def. 6.3.3. 若 λ 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，定义

$$V_{\mathcal{A}}(\lambda) := \{\alpha \in V \mid \mathcal{A}(\alpha) = \lambda\alpha\}$$

我们称 $V_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 为 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

Claim: $V_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 为 V 的一个子空间.

$\forall \alpha, \beta \in V_{\mathcal{A}}(\lambda)$, $\mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$

$= \lambda\alpha + \lambda\beta$

$= \lambda(\alpha+\beta)$

$\forall k \in F, \alpha \in V_{\mathcal{A}}(\lambda)$, $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha) = k\lambda\alpha = \lambda k\alpha$.

#.

Similarly.

Def. 6.3.4. 设 λ 是 A 的一个 eigenvalue，定义

$$V_A(\lambda) := \{X \in F^n \mid AX = \lambda X\}$$

称 $V_A(\lambda)$ 为 A 的从属于特征值 λ 的特征子空间.

* $V_A(\lambda)$ 为 F^n 的线性子空间. 显然，$\dim V_A(\lambda) = n - \operatorname{rank}(\lambda I - A)$.

命题 6.3.1. 设 V 是 F 上的 l.sp. $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的一组基. 设 $\mathcal{A}: V \to V$ 为 V 上的一个线性变换，记 A 为 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵.

则：① $\mathcal{A}$ 与 A 有相同的特征值

② 若 λ 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，则：

$$V_{\mathcal{A}}(\lambda) = \{(e_1, \cdots, e_n)X : X \in V_A(\lambda)\}$$

Pf. ①② 设 λ 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值. α 为 $\mathcal{A}$ 的从属于 λ 的一个 eigenvector. 记 $\alpha = (e_1, \cdots, e_n)X$

$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}((e_1, \cdots e_n)X) = (e_1, \cdots e_n)AX = \lambda\alpha = \lambda(e_1, \cdots e_n)X = (e_1, \cdots, e_n)\lambda X$

反之，若 λ 为 A 的一个 eigenvalue $\Rightarrow AX = \lambda X$

$\Rightarrow (e_1, \cdots e_n)\lambda X$ 为 $\mathcal{A}$ 的属于 λ 的一个 eigenvector. (A 的属于 λ 的一个 eigenvector) #.

推论：相似的矩阵具有相同的特征值.

直接证明：设 $B = C^{-1}AC$. ($\det C \neq 0$)

$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - C^{-1}AC)$

$= \det(\lambda I - A) \Rightarrow$ 相同的特征值. #.

由上述证明，我们看到：相似的矩阵有相同的特征多项式.

对于 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

由代数基本定理： $\det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ (*)

由行列式定义： $\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \lambda-a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ (**)

比较 (*) 与 (**) 我们得到如下命题.

命题 6.3.2. $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$,

$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

推论：A 可逆 iff A 的 n 个 eigenvalues 均不等于零.

Some History

Emmy Noether 1882–1935

Erlangen 德国数学家

B.L. van der Waerden 荷兰数学和数学史家

de Vries, Noether

Hilbert,

May 16

Recall from last time

V: n-dim v.sp. / F

$\mathcal{A}: V \to V$ linear transformation

We call $\lambda \in F$ an eigenvalue of $\mathcal{A}$ if

$\exists\ \alpha \in V \setminus \{0\}$, s.t.

$\mathcal{A}(\alpha) = \lambda\alpha$

α is called an eigenvector subjected to λ.

We showed that $\lambda_0 \in F$ is an eigenvalue of $\mathcal{A}$ iff $\det(\lambda_0 I - A) = 0$.

这里，A 为 $\mathcal{A}$ 在 V 的取定的一组基下的矩阵

(证明见上节讲义命题)

记 $p_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ 称为 A 的特征多项式 (characteristic polynomial)

- 显然 $\deg p_A(\lambda) = n$.
- $\lambda_0 \in F$ 为 A 的一个 eigenvalue, iff λ_0 为 $p_A(\lambda) = 0$ 的零点.
- 由代数学基本定理知, 对于 $F = \mathbb{C}$, 有:

$p_A(\lambda) = 0$ 至多有 n 个不同的零点.

计算重数时, $p_A(\lambda) = 0$ 有 n 个零点: $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. → 即 A 的 n 个 eigenvalues.

即: $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

以后, 如果不加说明, 我们均在复数域 $\mathbb{C}$ 上.

考虑特征值的计算.

例 1. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

求 A 的特征值和特征向量.

Solution.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

$$= \cos\theta \pm i|\sin\theta|$$

取 $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \quad (= e^{i\theta})$

$\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta \quad (= e^{-i\theta})$

若 $\sin\theta \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$,

考虑 $(\lambda_1 I - A)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i\sin\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\theta & i\sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = i x_2$$

$\Rightarrow X_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 A 的从属于 $\lambda_1 = e^{i\theta}$ 的一个特征向量.

类似地, 考虑 $(\lambda_2 I - A)X = 0$

$\Rightarrow X_2 := \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 A 的从属于 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ 的一个特征向量.

若 $\sin\vartheta = 0$, $\vartheta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \cos(k\pi)\, I$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cos\vartheta$$

取 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{ k_1 X_1 + k_2 X_2 \;\middle|\; k_1, k_2 \in \mathbb{C} \right\} \setminus \{0\}$$

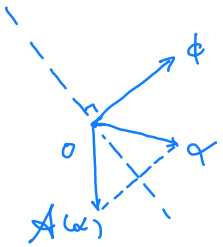
为 A 的 从属于 $\cos(k\pi)$ 的特征向量全体 $(= \mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$.

例2. 给定 $\mathbb{R}^2$ 上一个非零向量 ϕ.

记 $\mathcal{A}$ 为关于与 ϕ 垂直的直线的反射变换.

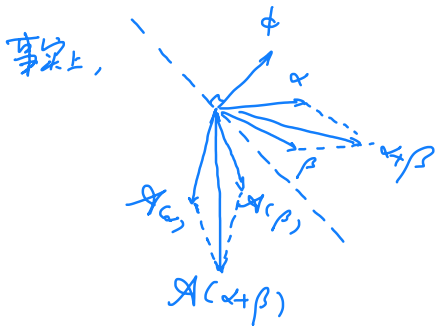
证明: $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一个线性变换.

求 $\mathcal{A}$ 的特征值、相应特征向量及特征多项式.



Pf. $\mathcal{A}(k\alpha) = k\,\mathcal{A}(\alpha)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

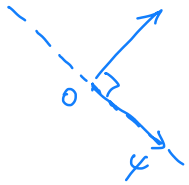
$\mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$.



$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换.

我们现在来计算 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量.

方法一:



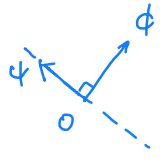
取 ψ 为与 ϕ 垂直的任一非零向量

则: $\begin{cases} \mathcal{A}(\phi) = -\phi \\ \mathcal{A}(\psi) = \psi. \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} -1$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个 eigenvalue 且 ϕ 为 $\mathcal{A}$ 的从属于 -1 的一个 eigenvector;
1 为 $\mathcal{A}$ 的一个 eigenvalue 且 ψ 为 $\mathcal{A}$ 的从属于 1 的一个 eigenvector.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1) = \lambda^2 - 1.$$

方法二:



取 ψ 为与 ϕ 垂直的任一非零向量.

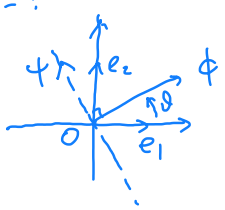
$$\Rightarrow \mathcal{A}(\phi, \psi) = (\phi, \psi) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, ϕ 为 λ_1 的 eigenvector

$\lambda_2 = 1$, ψ - - - — ~ - -.

$P_\lambda(A) = P_\lambda\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (\lambda+1)(\lambda-1) = \lambda^2 - 1$.

方法二：



取 e_1, e_2 为标准正交基.

设 $\phi = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$. $r > 0$. $\theta \in \mathbb{R}$.

取 $\psi = \begin{pmatrix} r\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ r\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$

$A(\phi, \psi) = (\phi, \psi)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (\phi, \psi) R \qquad R := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

记：$A(e_1, e_2) = (e_1, e_2) A$

$(\phi, \psi) = (e_1, e_2) C$

$C = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$R = C^{-1} A C \Rightarrow A = CRC^{-1}$

$= \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

$P_\lambda(A) = P_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \lambda - \cos 2\theta \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \lambda^2 - 1$.

$\lambda_1 = 1$. $\quad X_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$. $\quad X_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

(思考) 三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的反射. (下次)

例13.(特征值的一些性质)

命题6.33. 设 λ 为 A 的一个 eigenvalue，则：

(1) λ^k 为 A^k 的一个 eigenvalue. $\forall k \geq 1$.

(2) λ 为 A^T 的 ·-·-··-·-·-.

(3) 若 $\lambda \neq 0$ 则 $\frac{1}{\lambda}\det(A)$ 为 A^* 的一个 eigenvalue.

(4) 若 $A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ 且 $AA^T = I$ 则

$$|\lambda| = 1.$$

Proof. λ 为 A 的一个 eigenvalue

$\Rightarrow \exists X \neq 0$ s.t. $AX = \lambda X$.

(1) $\Rightarrow A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$, ..., $A^kX = \lambda^k X$.

(2) $|\lambda I - A| = |\lambda I - A^T|$.

(3) $\left|\frac{1}{\lambda}\det(A) I - A^*\right|$

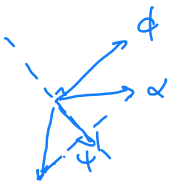
$= \left|\frac{1}{\lambda} AA^* - A^*\right| = \left|\frac{1}{\lambda}A - I\right||A^*| = 0$.

(4) $AX = \lambda X \Rightarrow \bar{X}^T\bar{A}^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T \Rightarrow \bar{X}^TA^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T$

$\Rightarrow \bar{X}^TA^TAX = |\lambda|^2\bar{X}^TX \Rightarrow (|\lambda|^2-1)\bar{X}^TX = 0 \Rightarrow |\lambda| = 1$. #

May 21.

例14.



回顾：上一次我们学习了 $\mathbb{R}^2$ 上的 reflection (反射)：

$$A(\phi) = -\phi$$

$$A(\psi) = \psi$$

定义：$B(\alpha) = \alpha - 2\frac{\alpha\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^2$.

则：$B(\alpha+\beta) = \alpha+\beta - 2\frac{(\alpha+\beta)\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi$

$= \alpha - 2\frac{\alpha\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi + \beta - 2\frac{\beta\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi$

$= B(\alpha) + B(\beta)$

$B(k\alpha) = kB(\alpha)$

$\Rightarrow B$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的一个线性变换.

$B(\phi) = \phi - \frac{2\phi\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi = -\phi$

$B(\psi) = \psi - 2\frac{\psi\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi = \psi$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

- $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ 上的反射.

设 ϕ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任一非零向量.

$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$

$y = (y_1, \cdots, y_n)^T$

$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$= x^T y$

如下定义 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性变换：

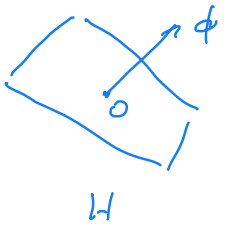
$$\mathcal{R}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\alpha \longmapsto \alpha - \frac{2\alpha\cdot\phi}{\phi\cdot\phi}\phi$$

容易验证：$\mathcal{R}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性变换.

记 $H := \{\psi \in \mathbb{R}^n \mid \psi \cdot \phi = 0\}$

为 $\mathbb{R}^n$ 中与 ϕ 正交的所有向量的全体.



显然 H 关于 $\mathbb{R}^n$ 上的加法和 $\mathbb{R}$ 数乘封闭 $\Rightarrow H$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间.

H 的维数 $=$?

记 $\psi = (x_1, \cdots, x_n)^T$

$\phi =: (b_1, \cdots, b_n)^T$

$\psi \cdot \phi = 0 \iff b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} (b_1, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \\ \operatorname{rank}\left((b_1, \cdots, b_n)\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim H = n-1.$$

我们称 $\mathbb{R}^n$ 的这个 $(n-1)$-维线性子空间 H 为与 ϕ 垂直的超平面.

任取 H 的一组基 $\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$, 则

$(\phi, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1})$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

(Indeed, 由于 $\dim \mathbb{R}^n = n$, 只需说明 $\phi, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ 线性无关. 若

$\lambda\phi + \lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\psi_{n-1} = 0$ 则

$\lambda\phi\cdot\phi + \lambda_1\psi_1\cdot\phi + \cdots + \lambda_{n-1}\psi_{n-1}\cdot\phi = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$

$\Rightarrow \lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\psi_{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0.$

$R(\phi, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1})$

$= (\phi, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1}) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow$ eigenvalues of R: -1, 1.

$V_R(1) = H.$

$V_R(-1) = \mathbb{R}\phi.$

$P_\lambda(R) = (\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1).$

例5. 设 n 阶方阵 A 的 n 个 eigenvalue, 为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 求 $I+A$ 的 eigenvalues.

Solution. $\det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$\Rightarrow \det(\lambda I - (I+A)) = \det((\lambda-1)I - A)$

$= (\lambda-1-\lambda_1)\cdots(\lambda-1-\lambda_n)$

$\Rightarrow 1+\lambda_1, \cdots, 1+\lambda_n$ 为 $I+A$ 的 n 个 eigenvalues.

§6.4. 对角化

(May 23).

引理 6.4.1. 设 $A \in M_{at}(n\times n, \mathbb{C})$. 则 A 的从属于不同特征值的特征向量 (各取一个) 是线性无关的.

证明: 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为 A 的 k 个互不相同的 eigenvalues.

$x_1, \cdots, x_k$ 为从属于它们的特征向量 (相应)

若 $k=1$, $x_1 \neq 0 \Rightarrow \{x_1\}$ 线性无关.

若 $k=2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1\lambda_1 x_1 + \alpha_2\lambda_2 x_2 = 0 \\ \alpha_1 \lambda_2 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0.$

一般地，用数学归纳法.

假定引理对 $k-1$ 成立，则对 k.

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \quad , \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \\ \alpha_1 \lambda_k x_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \cdots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = 0$$

由归纳假设 $\Longrightarrow$ $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = \cdots = \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 互不相同 $\Longrightarrow$ $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. #.

定理6.4.1. 一个 n 阶方阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 相似于对角阵当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明: "$\Rightarrow$" 设存在 P 可逆 s.t.

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

写 $P = (p_1, \cdots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{C}^n$ 为 P 的第 i 列.

$$\Rightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(p_1, \cdots, p_n) = (p_1, \cdots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Ap_1, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \cdots, \lambda_n p_n)$$

$\Rightarrow$ $Ap_i = \lambda_i p_i$ $\Rightarrow$ p_i 为 A 的从属于 λ_i 的特征向量.

P 可逆 $\Rightarrow$ $p_1, \cdots, p_n$ 线性无关.

"$\Leftarrow$": 设 $p_1, \cdots, p_n$ 为 A 的 n 个线性无关的 eigenvectors，分别从属于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

令 $P = (p_1, \cdots, p_n)$ $\Rightarrow$ P 可逆.

且 $AP = A(p_1, \cdots, p_n)$

$= (\lambda_1 p_1, \cdots, \lambda_n p_n)$

$= (p_1, \cdots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^{-1} A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. #.

推论：若 A 的特征值两两不同，则 A 相似于对角阵。

Def. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，设 $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同。则称 n_i 为 λ_i 的代数重数。

称 $m_i := \dim V_A(\lambda_i)$ 为 λ_i 的几何重数。

推论：A 可对角化，iff $n_i = m_i$ for all $i=1,\cdots,s$.

定理 6.4.2. 任何一个 n 阶复方阵 A 相似于某个上三角阵。且主对角线上元素为 A 的 eigenvalues.

证明：先证 A 相似于某上三角阵。对阶数 n 作数学归纳法。

- $n=1$ 成立。
- 假设命题对于 $n=k-1$ $(k\geq 2)$ 时成立。对于 $n=k$，设 λ_1 为 A 的一个 eigenvalue。取 x_1 为 A 的从属于 λ_1 的一个 eigenvector.

将 x_1 扩充为 $\mathbb{C}^k$ 的一组基：$x_1,\cdots,x_k$

令：$P = (x_1,\cdots,x_k)$，则 P 可逆且

$$AP = (Ax_1,\cdots,Ax_k) = (\lambda_1 x_1, Ax_2,\cdots,Ax_k)$$

$$= (x_1,x_2,\cdots,x_k)\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

由归纳假设，存在 $(n-1)$ 阶方阵 P_1，s.t.

$P_1^{-1}A_1P_1$ 为上三角阵

令：$S = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$ 则

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & P_1^{-1}A_1P_1\end{pmatrix}$$ 为上三角阵。

即命题对于 $n=k$ 成立。

故 A 相似于 $\begin{pmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}$.

($\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 eigenvalues)

$$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$= P_{\begin{pmatrix}\mu_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}}(\lambda) = (\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n) \Rightarrow \mu_1,\cdots,\mu_n \text{ 为 } A \text{ 的特征值}$$

作业：18(1),(4) 19-23. #