§7. 欧氏空间（$\mathbb{R}$上的）

§7.1 定义

Def.7.1.1. 设 V 是 $\mathbb{R}$-linear sp. 定义一个配对

$$(,) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha , \beta \longmapsto (\alpha, \beta)$$

如果这个配对$(,)$满足以下三条公理：

(1) symmetric：$(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$，$\forall \alpha,\beta\in V$

(2) linear：

$$(\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha,\beta) \qquad \forall \alpha,\beta,\gamma\in V$$

$$(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma) \qquad \forall \lambda\in\mathbb{R}.$$

(3) positive definite：

$\forall \alpha\in V$，$(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且"="成立 iff $\alpha=0$.

则称 $(V, (,))$ 为欧氏空间，称$(,)$为欧氏内积，简称内积.

例1. 设 $V=\mathbb{R}^n$. 定义 $(\alpha,\beta) := \alpha^T\beta = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$

（V中元素为列向量）

则可验证 $(V=\mathbb{R}^n, (,))$ 满足三条公理，因而$(,)$为$\mathbb{R}^n$上的一个内积，称为标准欧氏内积.

定理7.1.1. 设 $(V, (,))$ 为欧氏空间，$\forall \alpha,\beta\in V$，

$$|(\alpha,\beta)| \leq \sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}$$

（Cauchy Schwarz 不等式）

Pf. 若$\alpha=0$，则命题成立.

若$\alpha\neq 0$，则 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$(\beta+\lambda\alpha, \beta+\lambda\alpha)\geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2(\alpha,\alpha)+2\lambda(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\geq 0, \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(\alpha,\beta)^2 - 4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\leq 0. \ \#$$

Def. 7.1.2. 设 $(V, (\,,\,))$ 为一个 n 维欧氏空间. 对于 $\alpha \in V$,

称 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为 α 的长度, 记为 $|\alpha|$.

对于 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ 称

$$\theta := \arccos \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|} \text{ 为}$$

α, β 的夹角.

若 $(\alpha,\beta) = 0$, 则称 α, β 垂直或正交.

- $\alpha = 0$ iff $|\alpha| = 0$.
- $\alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{|\alpha|}$ 为单位向量.
- 三角不等式. $\alpha, \beta \in V$.

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

pf.
$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)\\ &\leq (\alpha,\alpha) + 2|\alpha||\beta| + (\beta,\beta)\\ &= (|\alpha| + |\beta|)^2 \quad . \ \#.\end{aligned}$$

- Gram 矩阵:

设 $(V, (\,,\,))$ 为 n 维欧氏空间. 取定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组基.

$$\forall\ \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i, \qquad \beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i, \qquad a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$$

则:
$$(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\alpha_i, \alpha_j).$$

Def. 7.1.3. 定义 $G_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

称 $G = (G_{ij})_{n\times n}$ 为 $(\,,\,)$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的 Gram 矩阵.

- 对 $\forall \alpha, \beta \in V$. 记 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x$

$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)y$

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

则 $(\alpha,\beta) = x^T G y$

$(,)$ 的对称性 $\Rightarrow$ $G^T = G$. $\quad x^TGy = y^TGx = x^TG^Ty$ $\Rightarrow x^T(G-G^T)y=0$ (exercise)

$(,)$ 的正定性 $\Rightarrow$ $G x \geq 0$, "=" 成立 iff $x=0$.

反之. 设 $G=(G_{ij}) \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ 满足:

① $G = G^T$ (正定矩阵)

② $x^TGx \geq 0$, "=" 成立 iff $x=0$,

则对于一个 n 维线性空间 V, 及取定的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

$(\alpha,\beta) := x^T G y$ 给出 V 上的一个欧氏内积.

其中, x, y 分别为 α, β 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标.

除上, V: n 维 $\mathbb{R}$-linear space. 取定一组基后,

V 上的内积与对称正定阵一一对应. (geometric meaning)

. 同一个内积在不同基下的 Gram 矩阵:

$(\alpha_i,\alpha_j) = G_{ij}$.

$(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P = (\sum\alpha_iP_{i1},\cdots,\sum\alpha_iP_{in})$

$$\begin{aligned}(\beta_i,\beta_j) &= (\textstyle\sum\alpha_kP_{ki}, \sum\alpha_\ell P_{\ell j}) \\ &= \sum_{k,\ell=0}^{n}(\alpha_k,\alpha_\ell)P_{ki}P_{\ell j} \\ &= \sum_{k,\ell=0}^{n} P_{ki}G_{k\ell}P_{\ell j} \\ &= (P^TGP)_{ij}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{G} = P^TGP$

(Or, $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x = (\beta_1,\cdots,\beta_n)\tilde{x}$,

$\beta = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)y = (\beta_1,\cdots,\beta_n)\tilde{y}$,

$x = P\tilde{x}$

$y = P\tilde{y}$

$(\alpha,\beta) = x^TGy = \tilde{x}P^TGP\tilde{y} = \tilde{x}\tilde{G}\tilde{y}$)

$\Rightarrow \tilde{G} = P^TGy$.

Def. 7.1.4 设 $(V, (\,,\,))$ 是一个 n 维 Euclidean space.

V 中一组两两正交的非零向量组称为正交向量组.

由正交向量组构成的 basis 称为正交基 (orthogonal basis).

由单位向量组成的正交基称为标准正交基.

命题7.1.1. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 为欧氏空间的一个正交向量组，则 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

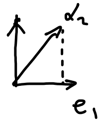
pf. $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = 0$

$$\xRightarrow{(\alpha_i,\,\cdot)} \lambda_i|\alpha_i|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, r. \ \#.$$

定理7.1.2. 设 $(V, (\,,\,))$ 为 n 维欧氏空间. 则 V 中存在关于 $(\,,\,)$ 的标准正交基.

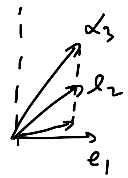
pf. 任取 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一组基.

定义 $e_1 = \dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \Rightarrow |e_1| = 1.$



定义 $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, e_1)e_1$

则 $\beta_2 \neq 0$ 且 $\beta_2 \perp e_1$. 令 $e_2 = \beta_2 / |\beta_2|$.



$$\beta_3 := \alpha_3 - \big((\alpha_3, e_1)e_1 + (\alpha_3, e_2)e_2\big)$$

则 $\beta_3 \neq 0$ 且 $\beta_3 \perp e_1$ 且 $\beta_3 \perp e_2$.

$$e_3 := \frac{\beta_3}{|\beta_3|}.$$

$$\dots\dots \quad \beta_n := \alpha_n - \big((\alpha_n, e_1)e_1 + (\alpha_n, e_2)e_2 + \dots + (\alpha_n, e_{n-1})e_{n-1}\big)$$

$\Rightarrow \beta_n \neq 0$ 且 $\beta_n \perp e_1, \dots, \beta_n \perp e_{n-1}$.

令：$e_n = \dfrac{\beta_n}{|\beta_n|}$. # （标准正交基下，Gram 矩阵 $= I$.）

§7.2 正交变换

Def. 7.2.1. 设 V 为一个 n 维欧氏空间. $\mathcal{A}: V \to V$ linear transf. 若 $\mathcal{A}$ 保持 V 的内积不变，i.e.,

$$(\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的正交变换.

命题7.2.1. 设 V 为一个 n 维欧氏空间. $\mathcal{A}: V \to V$ 为 V 上的线性变换. 则 $\mathcal{A}$ 为正交变换 iff $|\mathcal{A}(\alpha)| = |\alpha|, \ \forall \alpha \in V$.

Pf. "$\Leftarrow$": $\left(\mathscr{A}(\alpha+\beta), \mathscr{A}(\alpha+\beta)\right)$

$$= \left(\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta), \mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)\right)$$

$$= \left(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\alpha)\right) + 2\left(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)\right) + \left(\mathscr{A}(\beta), \mathscr{A}(\beta)\right)$$

$$\overset{\text{条件}}{=} (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\Rightarrow \left(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)\right) = (\alpha,\beta), \quad \forall \alpha,\beta \in V.$$

<u>命题7.2.2.</u> 设V为一个n维欧氏空间. $\mathscr{A}: V\to V$为V上的一个线性变换. 则$\mathscr{A}$为正交变换 iff $\mathscr{A}$把标准正交基映到标准正交基.

Pf. "$\Rightarrow$": $e_1,\cdots,e_n$: orthonormal basis.

$$\left(\mathscr{A}(e_i), \mathscr{A}(e_j)\right) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

"$\Leftarrow$": $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \left(\mathscr{A}(e_i), \mathscr{A}(e_j)\right)$

$\alpha = \sum a_i e_i$, $\beta = \sum b_i e_i$

$$\left(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)\right) = \left(\mathscr{A}\Big(\sum_i a_i e_i\Big), \mathscr{A}\Big(\sum_j b_j e_j\Big)\right)$$

$$= \left(\sum_i a_i \mathscr{A}(e_i), \sum_j b_j \mathscr{A}(e_j)\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \left(\mathscr{A}(e_i), \mathscr{A}(e_j)\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j (e_i, e_j)$$

$$= (\alpha, \beta). \quad \#$$

<u>Remark.</u> $(V, (\,,\,))$: Euclidean space $\dim V = n$.

取 $e_1, \cdots, e_n$ orthonormal basis.

i.e. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. $\quad 1 \le i,j \le n$.

$$\alpha = (e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \beta = (e_1, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

则: $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

· 正交变换在标准正交基下的矩阵：

$(V, (,))$: n维欧氏空间. $e_1, \cdots, e_n$: orthonormal basis.

设 $\mathcal{A}: V \to V$ 为 V上的一个正交变换.

记 $\mathcal{A}$ 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A, i.e.,

$$\mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) A$$

$\mathcal{A}$ 是 V上的正交变换 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}(e_1), \cdots, \mathcal{A}(e_n)$ 为 V 的一组标准正交基.

A 为基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 到基 $\mathcal{A}(e_1), \cdots, \mathcal{A}(e_n)$ 的过渡矩阵.

$e_1, \cdots, e_n$ 的 Gram矩阵 $G = I$

$\mathcal{A}(e_1), \cdots, \mathcal{A}(e_n)$ - - - - - - - - $\tilde{G} = I$

$$\Rightarrow \quad I = A^T I A = A^T A.$$

<u>Def. 7.2.2.</u> 设 $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$. 若 $A^T A = I$ 则称 A 为正交矩阵 (正交方阵)

$$\left(\begin{array}{l} A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}). \\ A \text{ 为正交方阵} \iff A^T A = I \iff A\text{的列向量构成 } \mathbb{R}^n \text{ 的标准正交基} \\ \iff A \text{ 可逆且 } A^{-1} = A^T \\ \iff AA^T = I \\ \iff A\text{的行向量构成 } \mathbb{R}^n \text{ 的标准正交基} \end{array} \right)$$

<u>定理7.2.1.</u> 欧氏空间中的线性变换 $\mathcal{A}$ 是正交变换的一个充要条件是 $\mathcal{A}$ 在一组标准正交基下的矩阵是正交阵.

<u>命题7.2.3.</u> 设 V是 n维欧氏空间, 则:

(1) 单位变换是正交变换

(2) 两个正交变换的复合是正交变换

(3) 正交变换一定可逆, 其逆变换是正交变换.

<u>Examples.</u>

1. <u>命题7.2.4.</u> 设 $A \in O(n, \mathbb{R})$, 则: $\det A = \pm 1$.

Def. 7.2.3. $\det A = 1$: 称 $\mathcal{A}$ 为第I类正交变换;

$\det A = -1$: 称 $\mathcal{A}$ 为第II类正交变换.

2. 证明：设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 $(V, (\ ,\ ))$ 上的正交变换，则：

(1) 若 λ 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，则 $|\lambda| = 1$.

(2) 若 $\dim V =$ 奇数，且 $\mathscr{A}$ 为第 I 类正交变换，则 1 为 $\mathscr{A}$ 的一个 eigenvalue.

Pf. (1) 取 $e_1, \dots, e_n$ 为 V 的一组标准正交基.

设 A 为 $\mathscr{A}$ 在 $e_1, \dots, e_n$ 下的矩阵，则 $A^TA = I$.

λ 为 $\mathscr{A}$ 的一个 eigenvalue $\Rightarrow$ λ 为 A 的一个 eigenvalue, i.e.,

$\exists\ x \neq 0$ s.t. $Ax = \lambda x$.

$$\Rightarrow x^T A^T = \lambda x^T$$

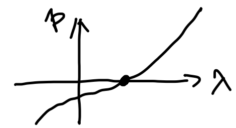
$$\Rightarrow \bar{x}^T A^T = \bar{\lambda} \bar{x}^T$$

$$\bar{x}^T x = \bar{x}^T A^T A x = \bar{\lambda} \bar{x}^T \lambda x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x$$

$$\Rightarrow (1 - |\lambda|^2)\bar{x}^T x = 0 \xRightarrow{x \neq 0} |\lambda|^2 = 1$$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$. （在命题 6.3.3 (4) 中，我们做过此练习）

(2) $\dim V =$ 奇数



$\Rightarrow$ $p_A(\lambda)$ 为奇数次多项式

$\Rightarrow$ $p_A(\lambda) = 0$ 存在实根.

由(1)知 $p_A(\lambda) = 0$ 的任一根 λ_0 满足 $|\lambda_0| = 1$.

$\Rightarrow$ 实根必为 ± 1. 因而可设

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^a (\lambda + 1)^b (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \bar{\lambda}_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)(\lambda - \bar{\lambda}_s)$$

这里 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为虚数. $a + b + 2s = \dim V$

$$\det A = (-1)^b |\lambda_1|^2 \cdots |\lambda_s|^2 = (-1)^b \overset{\text{I类}}{=\!=} 1$$

$\Rightarrow$ b 为偶数 $\Rightarrow$ a 为奇数 $\Rightarrow a \geq 1$. #.

3. 设 $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. A 有 n 个互异 eigenvalues. 且 $AB = BA$ 则 B 可对角化.

Pf. A 有 n 个互异 eigenvalues $\Rightarrow$ A 可对角化, i.e.

$\exists\ P$ 可逆 s.t. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互不相同.

$AB = BA \Rightarrow P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}BP = P^{-1}BP \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\xRightarrow{\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{互不相同}}$ $P^{-1}BP$ 为对角阵. #.

4. 定理：任何一个复方阵相似于一个上三角阵.（定理6.4.2）

5. 定理7.2.2. 设 A 为实方阵，则存在正交阵 Q s.t.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & A_s & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中，A_i 为 2×2 实方阵(且无实特征值)，

$\lambda_{2s+1}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Pf. 记：$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\overline{\lambda_1})\cdots(\lambda-\lambda_s)(\lambda-\overline{\lambda_s})(\lambda-\lambda_{2s+1})\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_s \notin \mathbb{R}$.

λ_1 为 A 的一个 eigenvalue $\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{C}^n \setminus\{0\}$ s.t.

$$Ax = \lambda_1 x$$

记 $x = p + iq$，$p, q \in \mathbb{R}^n$.

$\lambda_1 = a + ib$，$a, b \in \mathbb{R}$

$$Ax = Ap + iAq = (a+ib)(p+iq) = ap - bq + i(aq + bp)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ap = ap - bq, \\ Aq = aq + bp. \end{cases}$$

i.e. $A(p, q) = (p, q)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

将 p, q 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基：

$$\{p, q, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$$

作 Schmidt 正交化 $\Rightarrow \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$.

记 $Q_1 = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，则：

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right).$$

且 $P_\lambda(A_1) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\overline{\lambda_1})$

对 C_1 考虑 λ_2. ……　　$Q_2 = \begin{pmatrix} I & \\ & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \exists\, Q_2, Q_3, \cdots, Q_s$ s.t.

$$Q_s^{-1}\cdots Q_1^{-1}AQ_1\cdots Q_s = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & & * & * \\ & A_2 \ddots & A_s & \\ \hline & 0 & & C_s \end{array}\right)$$

对 C_s，考虑 λ_{2s+1}：

$\exists\ x \in \mathbb{R}^{n-2s}\setminus\{0\}$ s.t.

$$C_s x = \lambda_{2s+1} x$$

扩充 $\{x\}$ 为 $\mathbb{R}^{n-2s}$ 的标准正交基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-2s}\}$

记: $$Q_{s+1} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & (\beta_1,\cdots,\beta_{n-2s}) \end{array}\right)$$

则 $$Q_{s+1}^{-1}\, Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}\, A\, Q_1 \cdots Q_s\, Q_{s+1}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} A_1 & \ddots & * & & * \\ & & A_s & & \\ \hline & 0 & & \lambda_{2s+1} & * \\ & & & 0 & C_{s+1} \end{array}\right)$$

依次下去. #.

命题7.2.5. 设 $Q \in O(n,\mathbb{R})$. 则存在 $\Omega \in O(n,\mathbb{R})$ s.t.

$$\Omega^{-1} Q\, \Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{pmatrix}\cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s\end{pmatrix} & & \\ & & & \pm1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \pm1 \end{pmatrix}$$

Pf. 由上述定理知: 存在 $\Omega_1 \in O(n,\mathbb{R})$, s.t.

$$\Omega_1^{-1} Q\, \Omega_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & \ddots & * & & * & \\ 0 & & A_s & & & \\ \hline & & & \lambda_{2s+1} & \ddots & * \\ & 0 & & 0 & & \lambda_n \end{array}\right) =: Q_1$$

这里, $A_1,\cdots,A_s$ 为 2×2 实方阵, 且 A_i 的 eigenvalues 为 $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$, 且 λ_i 为虚数, $i=1,\cdots,s$. $\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n$ 为实数.

$$\left.\begin{array}{l} Q \in O(n,\mathbb{R}) \\ \Omega_1 \in O(n,\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow Q_1 \in O(n,\mathbb{R})$$

Q_1 的第1,2列 相互正交且长度均为1 $\Rightarrow A_1 \in O(2,\mathbb{R})$.

记: $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$$

记 $$Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ y_1 & \cdots & y_{n-2} \end{matrix} \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right)$$

Q_1 的第1,2行 长度均为1 $\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2 = 1 \\ c^2+d^2+y_1^2+\cdots+y_{n-2}^2 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2 = 0 \\ y_1^2+\cdots+y_{n-2}^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1=\cdots=x_{n-2}=y_1=\cdots=y_{n-2}=0.$$

i.e. $Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$.

类似地，我们知道：

$$
Q_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc}
A_1 & & 0 & & & \\
 & A_2 & & & 0 & \\
0 & & \ddots\ A_s & & & \\
\hline
 & & & \lambda_{2s+1} & & * \\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & \lambda_n
\end{array}\right)
$$

$\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}\Rightarrow\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n=\pm1.$

类似上面知：
$$
Q_1=\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & \ddots\ A_s & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}\det(A_i)=\lambda_i\overline{\lambda_i}>0\\ A_i\in O(2,\mathbb{R})\end{array}\right\}\Rightarrow\det(A_i)=1.
$$

$$
A_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}
$$

$a_i^2+b_i^2=1.$

$\Rightarrow a_i=\cos\theta_i,\quad b_i=\sin\theta_i$

$c_ia_i+d_ib_i=0$

i.e., $c_i\cos\theta+b_i\sin\theta=0$

$(c_i,d_i)=k(-\sin\theta_i,\cos\theta_i),\quad k\in\mathbb{R}.$

$c_i^2+d_i^2=k^2=1\Rightarrow k=\pm1.$

$$
\Rightarrow A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix},\ \text{or}
$$

$$
A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i\end{pmatrix}
$$

$\det(A_i)=1$

$$
\Rightarrow A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}.\quad\#.
$$

$O(n,\mathbb{R})$

推论：设 $\mathcal{A}$ 为 $(V,(,))$ 上的正交变换，则 $\mathcal{A}$ 可分解为一系列反射变换的复合.

回顾到，设 $(V^n,(,))$ 为一欧氏空间，对于 $\alpha\in V\setminus\{0\}$ 定义 $R:V\to V$,

by $\quad R(\psi):=\psi-2\dfrac{(\psi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$，称为关于与 α 垂直的超平面的反射. 反射是正交变换.

§8. 对称双线性型 （$\mathbb{R}$上的）

§8.1 定义

Def.8.1.1. 设 V是一个 $\mathbb{R}$-线性空间. V上的一个 pairing

$$\langle\,,\,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$

称为是V上的一个双线性型, if $\forall \alpha,\beta,\gamma\in V,\ k\in\mathbb{R}$,

$$\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$$

$$\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,k\beta\rangle$$

$$\langle\alpha,\beta+\gamma\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\gamma\rangle.$$

称 $\langle\,,\,\rangle$ 是个对称双线性型, if

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle,\quad\forall\alpha,\beta\in V.$$

（广义内积）

· 取 V的一组基：

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_n.$$

对于 $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, $\beta=\sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$,

有：
$$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j\rangle=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\sum_{i,j=1}^n x_iy_jG_{ij}=x^TGy.$$

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\langle\,,\,\rangle$ is symmetric $\Rightarrow$ $G=G^T$

Def.8.1.2. 若 G 是非退化的，我们称 $\langle\,,\,\rangle$ 是非退化的.

$$G_{ij}=\langle\alpha_i,\beta_j\rangle$$

· 同一个对称双线性型在不同基下的矩阵：

$$\alpha=\sum x_i\alpha_i=\sum x_i'\beta_i$$

$$\beta=\sum y_i\alpha_i=\sum y_i'\beta_i$$

$$G_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$$

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡阵为 P

i.e., $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$

$$(\beta_i,\beta_j)=\left(\sum_k\alpha_kP_{ki},\sum_l\alpha_lP_{lj}\right)=\sum_{k,l}P_{ki}G_{kl}P_{lj}=(P^TGP)_{ij}=\widetilde{G}_{ij}$$

$\Rightarrow \tilde{G} = P^T G P$.

<u>Def.8.1.3.</u> 设 $A, B \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ 称 A, B 相合，若

$\exists$ 可逆实方阵 P, s.t.

$B = P^T A P$. 记为 $\underset{\text{相合}}{A \sim B}$, or $A \approx B$.

<u>引理8.1.1.</u> 相合关系是一个等价关系.

Pf. i) $A \underset{\text{相合}}{\sim} A$. $A = I^T A I$

ii) $\underset{\text{相合}}{A \sim B} \Rightarrow \exists\ P$ 可逆实方阵 s.t.

$B = P^T A P \Rightarrow A = (P^{-1})^T B P^{-1}$.

$\Longrightarrow B \sim A$.

iii) $A \sim B$, $B \sim C$

$\Rightarrow B = P^T A P$, $C = Q^T B Q$

$\Rightarrow C = Q^T P^T A P Q = (PQ)^T A P Q$. #.

希望研究 $\{n$阶实对称阵$\}/\underset{\text{相合}}{\sim}$.

<u>定理8.1.1.</u> $\forall A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$, $A = A^T$. $\exists Q \in O(n, \mathbb{R})$. s.t. $Q^T A Q$ 为对角阵.
且对角线元素为 A 的eigenvalues.
这些特征值均为实数.

证明: 由上一章定理 7.2.2 知:

$\exists\ Q \in O(n, \mathbb{R})$, s.t.,

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} A_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & A_s & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ 为准上三角阵.

其中, $A_i \in Mat(2\times 2, \mathbb{R})$, $i = 1, \cdots, s$ 且 A_i 无实特征值,
$\lambda_{2s+1}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

先证 $s = 0$.

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n} \det(\lambda I - A_i) \cdot (\lambda - \lambda_{2s+1}) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \bar{\lambda}_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)(\lambda - \bar{\lambda}_s)(\lambda - \lambda_{2s+1}) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为虚数.

若 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 为 A 的一个 eigenvalue.

$\exists\ x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ s.t.

$A x = \lambda_0 x$

$\bar{A} \bar{x} = \bar{\lambda}_0 \bar{x} \Rightarrow A \bar{x} = \bar{\lambda}_0 \bar{x}$

$\bar{x}^T A^T = \bar{\lambda}_0 \bar{x}^T \qquad \bar{x}^T A = \bar{\lambda}_0 \bar{x}^T$

$$\bar{x}^T A x = \bar{\lambda}_0 \bar{x}^T x$$
$$= \lambda_0 \bar{x}^T x$$

$x \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = \bar{\lambda}_0$.

$\Rightarrow s = 0$.

$\Rightarrow \exists Q \in O(n, \mathbb{R})$

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$Q^{-1} = Q^T$.

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(Q^T A Q)^T = Q^T A^T Q = Q^T A Q \Rightarrow * = 0$. #.

下面，我们将给出实对称阵在相合等价关系下的分类定理.

定理 8.1.2. Part I. 设 A 为 n 阶实对称阵. 则存在可逆实矩阵 P, s.t.

$$P^T A P = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ 相合标准型.

Part II. 若

$$\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \text{ 与 } \begin{pmatrix} I_{r'} & & \\ & -I_{s'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ 相合,

则一定有: $r = r'$, 且 $s = s'$.

Pf. (Part I.) 由定理 8.1.1 知: 存在 $Q \in O(n, \mathbb{R})$, s.t.

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

不妨设: $\lambda_1, \cdots, \lambda_r > 0$

$\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_{r+s} < 0$

(注意到: 这里, 设 $Q = (b_1, \cdots, b_n)$, b_i 为列向量, $i = 1, \cdots, n$.

对于满足定理 8.1.1 结论的 Q, 有 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}$.

其，$\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ 为 A 的全部特征值（计重数）.

令 $\tilde{Q} = (b_1, \cdots, b_j, \cdots, b_i, \cdots, b_n)$ ， $i<j$.

（= 交换 Q 的第 i 列和第 j 列，其余不变）.

则：$\tilde{Q}^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_j' & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_i' \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n' \end{pmatrix}$)

定义 $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

则：$D^T Q^T A Q D = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

令 $P = QD$. Part I is proved.

Part II. 定义 $Q_A(x_1, \cdots, x_n) := x^T A x$, $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

则 $Q_{A_1}(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$

$A_1 := \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

由于 $A_1 \overset{相合}{\sim} \begin{pmatrix} I_{r'} & & \\ & -I_{s'} & \\ & & 0 \end{pmatrix} =: A_2$,

则：$A_1 \overset{相抵}{\sim} A_2 \Rightarrow r+s = r'+s' =: m$,

且存在实可逆 P, s.t. $A_2 = P^T A_1 P$.

记 $\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$, $\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & -I_{s'} \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \hat{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := A_2 = \begin{pmatrix} P_1^T & P_3^T \\ P_2^T & P_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}_2 = P_1^T \hat{A}_1 P_1$.

$\det \hat{A}_2 \neq 0$, $\det \hat{A}_1 \neq 0 \Rightarrow \det P_1 \neq 0$.

记 $\hat{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, 令 $\hat{x} = P_1 \hat{y}$, $\hat{y} = (y_1, \cdots, y_m)$.

则 $Q_{\hat{A}_1}(x_1, \cdots, x_m) = \hat{x}^T \hat{A}_1 x_1 = \hat{y}^T P_1^T \hat{A}_1 P_1 \hat{y}$

$x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_m^2 = \hat{y}^T \hat{A}_2 \hat{y} = y_1^2 + \cdots + y_{r'}^2 - y_{r'+1}^2 - \cdots - y_m^2$

若 $r \neq r'$. 不妨设：$r < r'$.

$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{y} = P_1^{-1}\hat{x}$ 有：$x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_m^2 = y_1^2 + \cdots + y_{r'}^2 - y_{r'+1}^2 - \cdots - y_m^2$

取 $x_1=\cdots=x_r=0 \Rightarrow$

$$-x_{r+1}^2-\cdots-x_m^2=y_1^2+\cdots+y_{r'}^2-y_{r'+1}^2-\cdots-y_m^2 \quad (*)$$

其中，$\hat{y}=P_1^{-1}\hat{x}$.

$$y_{r'+1}=(P_1^{-1})_{r'+1,1}x_1+\cdots+(P_1^{-1})_{r'+1,m}x_m$$
$$=(P_1^{-1})_{r'+1,r+1}x_{r+1}+\cdots+(P_1^{-1})_{r'+1,m}x_m$$
$$\vdots$$
$$y_m=(P_1^{-1})_{m,r+1}x_{r+1}+\cdots+(P_1^{-1})_{m,m}x_m$$

考虑关于 $x_{r+1},\cdots,x_m$ 的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} y_{r'+1}=0 \\ \cdots \\ y_m=0 \end{cases}$$

$(m-r)$ 个未知数，$(m-r')$ 个方程. $m-r>m-r'$

$\Rightarrow$ 有非零解 $\begin{cases} x_{r+1}=x_{r+1}^* \\ \vdots \\ x_m=x_m^* \end{cases}$ 定义 $x_1^*=\cdots=x_r^*=0$.

由(*)知：$-x_{r+1}^{*2}-\cdots-x_m^{*2}=y_1^{*2}+\cdots+y_{r'}^{*2} \quad (**)$

这里，$\hat{y}^*:=P_1^{-1}\hat{x}^*$. $\hat{x}^*\neq 0 \Rightarrow \hat{y}^*\neq 0$

$\Rightarrow$ left of (**) <0, right of (**) >0. 矛盾 #.

$\forall A\in\{$实对称阵$\}$,

$$A \overset{相合}{\sim} \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

且 r,s 由 A 唯一确定. 称 r 为正惯性系数，s 为负惯性系数.

$r+s=\operatorname{rank}(A)$.

(r,s) 为实对称阵在相合等价下的完全不变量系统.

---

§8.2 实二次形及其应用

设 V 为一个 $\mathbb{R}$-线性空间. $\langle,\rangle$ 为 V 上的一个对称双线性型.

Def. 8.2.1. 定义 $Q: V\to\mathbb{R}$ by $Q(v):=\langle v,v\rangle$. 称 Q 为 V 上的一个实二次形 (与 $\langle,\rangle$ 相联系的).

取 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

$v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

v 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

$\langle v, w \rangle = x^T A y$

x, y 分别为 v, w 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

A 为 $\langle , \rangle$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的 Gram 矩阵.

A 为实对称阵. $A_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$.

有:

$Q(v) = \langle v, v \rangle = x^T A x$, (*)

i.e., Q 为坐标的二次函数.

· $Q(v+w) = \langle v+w, v+w \rangle$

$= Q(v) + 2\langle v, w \rangle + Q(w)$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\right)$.

· 设 V^n 为 $\mathbb{R}$-linear space. 取定一组基后,

V^n 上的对称双线性型与实对称阵对应起来.

由(*)知: V^n 上的二次形与实对称阵对应起来.

· 以下我们只需考虑 $\mathbb{R}^n$. 先取定自然基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

<u>Def. 8.2.2.</u> 设 A 为实对称阵. 记 $A = (a_{ij})$.

称 $Q(x) = x^T A x$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个<u>二次形</u>.

这里, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$Q(x) = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le i, j \le n} x_i a_{ij} x_j = a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j. \quad (**)$$

(**) 告诉我们如何由二次函数读出矩阵 A.

注: 对应到一般定义. 我们只需注意到 A 给出 $\mathbb{R}^n$ 上的一个对称双线性型: $\langle , \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x, y \longmapsto \langle x, y \rangle := x^T A y$.

则上面的 $Q(x)$ 为与 $\langle , \rangle_A$ 相联系的 $\mathbb{R}^n$ 上的二次形

且 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \alpha_i^T A \alpha_j = (0, \cdots, \underset{i\text{列}}{1}, \cdots, 0) A \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$

$= A_{ji} = A_{ij}$.

i.e., A 为 $\langle,\rangle$ 在自然基下的 Gram 矩阵.

设 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$ 为 $\overset{\mathbb{R}^n\text{的}}{\text{另}}$一组基.

并设 $\langle,\rangle$ 在 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的 Gram 阵为 B. 则有:

$$B=P^TAP.$$

$$x=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\,y$$

$$y=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad\text{or}\quad\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

$$x=Py.$$

$$v=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x\ (=x)$$
$$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\,y$$

$$Q(v)=Q(x)=x^TAx=y^TP^TAPy=y^TBy.$$

因而, 同一个二次形在不同基下对应的矩阵是相合的.

(Obvious from the point of view that $\underset{=\langle v,v\rangle}{Q(v)}$).

由定理 8.1.2 知: $\exists\, P$ 实可逆 s.t.

$$P^TAP=\begin{pmatrix}I_r&&\\&-I_s&\\&&0\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow Q(x)=x^TAx$$

$$\overset{x=Py}{=\!=}\ y^TP^TAPy=y^T\begin{pmatrix}I_r&&\\&-I_s&\\&&0\end{pmatrix}y$$

$$=y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2.$$

($x=Py$ 也可理解为可逆线性变换)

二次形 $\longleftrightarrow$ 实对称阵.

· 用配方法重新证明定理 8.1.2 的 Part I.

<u>定理 8.1.2 Part I 的等价描述</u>: 设 $Q(x)=x^TAx$ 为一个实二次形. 这里, A 为给定的 n 阶实对称阵, $x\in\mathbb{R}^n$. 则存在可逆实方阵 P, s.t., $Q(x)\big|_{x=Py}=y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2$.

证明：对 n 作数学归纳法.

$n=1$. $Q(x)=ax^2$.

若 $a>0$，作线性变换：$x=\frac{1}{\sqrt{a}}y$. $\Rightarrow$ $Q(x)=y^2$.

若 $a<0$，$Q(x)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{-a}}y}=-y^2$.

若 $a=0$，$Q(x)\equiv 0$.

OK!

设命题对 $n-1$ 成立 $(n\geq 2)$，则对 n，有：

i). 某个 $a_{ii}\neq 0$. 不妨设 $a_{11}\neq 0$.

$$Q(x)=a_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$$

$$-a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$$

$$+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

令：$y_1=x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$,

$y_2=x_2$,

$\vdots$

$y_n=x_n$

$$y=P_1^{-1}x\ ,\quad P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q(x)=Q(P_1y)=a_{11}y_1^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j.$$

由归纳假设：存在 $(n-1)$ 阶实可逆阵 P_2，s.t.

在变换 $y=P_2z$ 下，$\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j=\sum_{i=2}^{n}\pm z_i^2$

$(z=(z_2,\cdots,z_n)^T)$

在变换 $x=P_1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&P_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}}&\\&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z\end{pmatrix}$

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\pm z_i^2.$$

ii). 若所有 $a_{ii}=0$，$i=1,\cdots,n$，但存在 j，s.t. $a_{1j}\neq 0$，$j=2,\cdots,n$.

不妨设 $a_{12}\neq 0$. 令：$x_1=y_1+y_2$

$x_2=y_1-y_2$

$x_3=y_3,\cdots,x_n=y_n$.

i.e., $x = P_0 y$,

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \\ 0 & & I \end{pmatrix},$$

则: $Q(x) = Q(P_0 y) = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + \cdots$

化为情形 i).

iii). 若所有 $a_{ii}=0$, $i=1,\dots,n$ 且 $a_{1j}=0$ $\forall j$.

$\Rightarrow Q(x)$ 与 x_1 无关,

i.e., $Q(x) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j$

由归纳假设: $Q(x)$ 可化为标准形. #.

(即: $P^TAP = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$).

July 3. 周三. 期末考试.

Applications

① 欧氏几何、非欧几何 (Lorenzian geometry)

$\downarrow$

(广义)黎曼几何 (非退化 Gram matrix $\to$ metric)

即: 流形上每点的切空间给出一个非退化对称双线性型. 点动时对称双线性型连续依赖于点

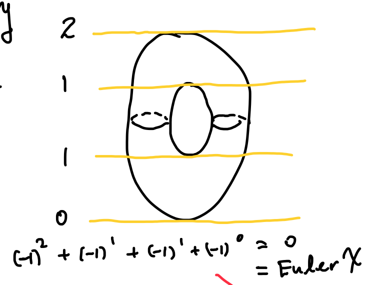
② Morse theory

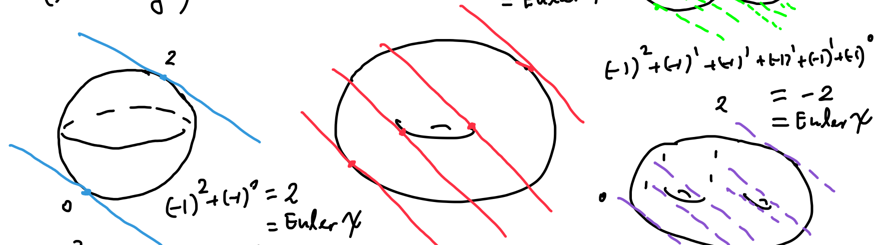
$z = -x^2 - y^2$

$z = x^2 + y^2$

$z = x^2 - y^2$

(locally)





③ ⓐ $\mathbb{R}^2$上二次曲线:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0.$$

(a_{11}, a_{12}, a_{22} 不全为零)

令: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

由定理 8.1.1 知:

存在 $Q \in O(2,\mathbb{R})$, s.t.,

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

作坐标变换:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (e_1, e_2) \mapsto (f_1, f_2) = (e_1, e_2) Q.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1 x' + b_2 y' + c' = 0.$$

不妨设 $\lambda_1 \neq 0$.

i) $\lambda_2 \neq 0$. $\Rightarrow \lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \tilde{c} = 0$.

$$\Rightarrow \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0.$$

λ_1, λ_2 同号 $\Rightarrow$ 椭圆型

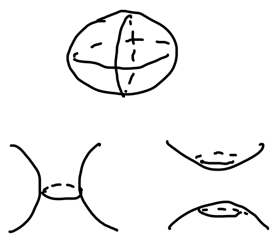
λ_1, λ_2 异号 $\Rightarrow$ 双曲线型

ii). $\lambda_2 = 0$. $\Rightarrow$ 抛物线性.

⑥ $\mathbb{R}^3$ 中二次曲面:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0.$$

$A = (a_{ij})_{3\times 3}$.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3' z' + c' = 0$$

· $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同号: 椭球面型: $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \lambda_4 = 0.$

· $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均不为零且不同号:

双曲面型: $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \lambda_4 = 0.$ $(\lambda_4 \neq 0)$

二次锥面: $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 = 0.$

· $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中两个不为零, 一个为零. 不妨设 $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.

抛物面型: $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{b}_3 \tilde{z} = 0.$ $(\tilde{b}_3 \neq 0)$

二次柱面：

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c} = 0.$$

具体画图参考 pdf 文件：

quadratic.pdf

下面我们对 相合于 I_n 的二次形作进一步讨论.

· 给定 A 为 n 阶实对称阵.

Def. 8.2.3. 称 n 元二次形

$$Q_A(x) := x^T A x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

为正定二次形, if $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Q_A(x) \geq 0$ 且 "=" 成立 iff $x = 0$.

$Q_A(x)$ 为正定二次形，也说 A 为正定实对称阵. 简记为 $A > 0$.

· 注：本课程中，A 为正定阵 指 A 为 正定实对称阵.

· **Thm. 8.2.1.** 设 A 为 n 阶实对称阵. $Q_A(x)$ 正定 iff

$$A \simeq I_n.$$

proof. using the geometric meaning. #.

· **Thm. 8.2.2.** 设 A 为 n 阶实对称阵. 则：

(1) 若 $B = P^T A P$ 且 P 为 n 阶可逆实方阵. 则：

$$B > 0 \text{ iff } A > 0.$$

(2) $A > 0$ iff $\exists$ 可逆实方阵 P, s.t.

$$A = P^T P.$$

(3) 若 $A > 0$ 则 $\det(A) > 0$.

proof. (1)、(2) using the geometric meaning. ((2) 与 Thm 相同)

(2) $\Rightarrow$ (3). #.

· **Thm. 8.2.3.** 设 A 为 n 阶实对称阵.

$Q_A(x) = x^T A x$ 正定 iff

A 的各阶顺序主子式 > 0.

i.e., $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\cdots$, $|A| > 0$.

proof. "$\Rightarrow$". $Q_A(x)$ 正定 $\Rightarrow \det A > 0$

$$Q_A(x_1,\cdots,x_{n-1},0) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j \geq 0$$

$\forall\, x_1,\cdots,x_{n-1} \in \mathbb{R}$

且 "=" 成立 iff $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$.

$\Rightarrow (a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$ 正定 $\Rightarrow |a_{ij}|_{(n-1)\times(n-1)} > 0$.

类似地，$Q_A(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}x_ix_j \geq 0$

且 "=" 成立 iff $x_1=\cdots=x_r=0$

$\Rightarrow (a_{ij})_{r\times r}$ 正定 $\Rightarrow |a_{ij}|_{r\times r} > 0$. #.

"$\Leftarrow$". 对n作数学归纳法.

$n=1$. ✓.

假设命题对 $(n-1)$ 成立. 对于 n，记 $A_n=A=(a_{ij})_{n\times n}$.

现已知 A_n 的各阶顺序主子式 >0.

定义 $A_{n-1}=(a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$

$\Rightarrow A_{n-1}$ 的各阶顺序主子式 $>0 \xRightarrow{\text{归纳假设}} A_{n-1}$ 正定

因而，存在可逆实方阵 P_{n-1} s.t.

$$P_{n-1}^T A_{n-1} P_{n-1} = I_{n-1}$$

写 $A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$

A_{n-1} 正定 $\Rightarrow A_{n-1}$ 可逆

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -C^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ 0 & a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{n-1}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -C^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{记为 } R}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C \end{pmatrix}$$

即：$R^TA_nR = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\det(R)\right)^2 \det A_n = a_{nn} - c^T A_{n-1}^{-1} c$$

$$LHS > 0 \Rightarrow a_{nn} - c^T A_{n-1}^{-1} c > 0$$

$\Rightarrow A_n$ 正定. #.

Def-Summary. 设 A 为 n 阶实对称阵, $A \approx \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} r+s=n & \text{非退化型} \\ r+s<n & \text{退化型} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=n & \text{正定} \\ s=n & \text{负定} \\ s=0 & \text{半正定} \\ r=0 & \text{半负定} \end{cases}$$

Examples.

1. Thm.8.2.4. 设 A 为实对称阵. 则存在一系列初等阵 $P_1, \cdots, P_m$, s.t.

$$P_m^T P_{m-1}^T \cdots P_1^T A P_1 \cdots P_m = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Proof. Using Thm.4.3.7 and Thm.8.1.2. Part I. #.

上面的证明中,我们用到了Thm.8.1.2. 这个定理我们给出过本质不同的两个证明: 正交相似法与配方法. Thm.8.2.4等价于Thm8.1.2的Part I. 下面我们将配方法翻译为矩阵语言以给出Thm 8.2.4的直接证明.

Proof. 先对 n 归纳证明可通过一系列初等阵化 A 为对角形.

- $n=1$. ✓
- 假设命题对 $(n-1)$ 成立, $n\geq 2$. 则对 n 阶实对称阵 A:

i). $a_{11} \neq 0$.

$$A \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{C_i + C_1\frac{a_{i1}}{a_{11}} \text{替换} C_i} \tilde{A} \xrightarrow{r_i + C_1\frac{a_{i1}}{a_{11}} \text{替换} r_i}$$

$\Rightarrow \exists\ P_1, \cdots, P_m$ 初等阵 s.t. $P_m^T \cdots P_1^T A P_1 \cdots P_m = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$

由归纳假设知: $\exists\ S_1, \cdots, S_k$ $(n-1)$ 阶初等阵,

s.t. $S_k^T \cdots S_1^T A_{n-1} S_1 \cdots S_k = \begin{pmatrix} \mu_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_k^T \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1^T \end{pmatrix} P_m^T \cdots P_1^T A P_1 \cdots P_m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

ii). 若 $a_{11}=0$，若有 $a_{ii}\neq 0$, $i=2,\dots,n$.

$$A \xrightarrow{交换 c_1, c_i} \tilde{A} \xrightarrow{交换 r_1, r_i} 化为情形 i).$$

iii). all $a_{ii}=0$. 若第一行有元素不为零，

不妨设 $a_{1i}\neq 0$.

$$\begin{array}{cc} T_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots\lambda & \\ & & & \vdots\;1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{---}\, i行 \\ \text{---}\, j行 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} i行 \\ j行 \end{array} A\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & x & \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$T_{1i}(1)\, A\, T_{1i}(1)^T = \begin{pmatrix} 2a_{1i} & C \\ C^T & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

化为 i).

iv). all $a_{ii}=0$. 且第一行均为零

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\quad} \end{pmatrix}.$$ 由归纳假设 ⇒ 成立.

由对角形 $\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ 化为标准形 $\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

是容易的. 定理得证. #.

上述证明也给出我们计算一个实对称阵相合标准形的算法.

算法: $$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[对I作相应的初等列变换]{对A作成对的初等列、行变换} \begin{pmatrix} P^TAP \\ P \end{pmatrix}$$

e.g. $$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_1 替换 c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1 替换 r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2 替换 c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ 令: $x = Py$ 则

$$Q(x) = Q(Py) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

2. 设 $(V^n, (\,,\,))$ 为欧氏空间. $\mathcal{A}: V \to V$ 线性变换.

若 $\forall\ \alpha, \beta \in V$ 有:

$$(\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\mathcal{A}\alpha, \beta)$$ 则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的对称变换.

Thm. 8.2.5. 设 $\mathcal{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 则 $\mathcal{A}$ 是对称变换 iff $\mathcal{A}$ 在任一标准正交基下的矩阵 A 是实对称阵.

proof. "$\Rightarrow$" 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的任一 orthonormal basis.

$$\mathcal{A}(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) A. \qquad A = (A_{ij})$$

$$(e_i, \mathcal{A}e_j) = \left(e_i, \sum_{k=1}^n A_{kj} e_k\right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}$$

$$(\mathcal{A}e_i, e_j) = (e_j, \mathcal{A}e_i) = A_{ji}$$

$$\Rightarrow A_{ij} = A_{ji}.$$

"$\Leftarrow$" 设 $\mathcal{A}$ 在某标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵 A 满足 $A = A^T$.

$$\Rightarrow (e_i, \mathcal{A}e_j) = (\mathcal{A}e_i, e_j)$$

$\forall \alpha, \beta \in V$ 记 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n b_i e_i$

$$(\alpha, \mathcal{A}\beta) = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i, \mathcal{A}e_j)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j (\mathcal{A}e_i, e_j) = (\mathcal{A}\alpha, \beta). \ \#$$

Rmk. 实对称阵的从属于不同特征值的特征向量正交

$\rightarrow$ 欧氏空间上对称变换的不同特征值对应的特征向量正交. (也可直接证明, easy!)

3. $Q = \lambda(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$

问: Q 何时正定? 何时负定?

Sol. $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Q 正定, i.e., A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式 >0

$\Leftrightarrow$ $\lambda > 0$ 且 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} > 0$ 且 $|A| > 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda > 2$.

Q 负定, i.e., A 负定 $\Leftrightarrow$ $-A$ 正定

$\Leftrightarrow$ $-\lambda > 0$ 且 $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} > 0$ 且 $|-A| > 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda < -1$.

4. 设 A 为正定实对称阵. 则存在正定实对称阵 B, s.t. $A=B^2$.

Proof. A 为正定实对称阵 $\Rightarrow$

$\exists$ 正交阵 Q s.t. $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

且 $\lambda_1>0,\cdots,\lambda_n>0$.

令: $B=Q\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}Q^T$

则 $B^2=Q\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}Q^TQ\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}Q^T$

$=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^T=A$.

显然 $B=B^T$ 且 $\lambda_1^{\frac{1}{2}}>0,\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2}}>0\Rightarrow B$ 正定. #.

复习:

1. 求解多元线性方程组 (Gauss 消元法)
2. 空间 (线性空间、欧氏空间、广义内积空间)
3. 变换 (线性变换、正交变换、……) "对称"
4. 函数

矩阵
实现