分类号：O157.2　　　　单位代码：10335

密　级：　　　　　　　学　　号：11106009

浙江大学

博士学位论文

中文论文题目： 可分组设计及其在信息科学中的应用

英文论文题目： **Group divisible designs and their applications in information science**

申请人姓名：魏恒嘉

指导教师：葛根年　教授

合作导师：

专业名称：应用数学

研究方向：组合设计与编码

所在学院：理学院数学系

论文提交日期： 二〇一四年三月

可分组设计及其在信息科学中的应用

论文作者签名：

指导教师签名：

论文评阅人 1：

评阅人 2：

评阅人 3：

评阅人 4：

评阅人 5：

答辩委员会主席：王军\教授\上海师范大学

委员 1：王军\教授\上海师范大学

委员 2：李学良\教授\南开大学

委员 3：殷剑兴\教授\苏州大学

委员 4：李雨生\教授\同济大学

委员 5：葛根年\教授\浙江大学

委员 6：冯涛\研究员\浙江大学

答辩日期：二〇一四年四月

致 谢

首先，衷心感谢我的恩师葛根年教授对我的淳淳教诲和悉心关怀。葛老师是组合设计领域构造各类设计的领军学者，他所研究的问题是组合设计理论研究的核心问题，我有幸得以拜葛老师为师。从门外汉到一知半解到今天有一定深度的研究，我的每一步都是在导师的引导下完成。几年来，我的研究从选题立题、结果分析直至文章撰写和论文的修改都得到了他悉心的指导，每篇论文的发表都凝结了导师的心血和智慧。而葛老师在科研和教学上严谨、认真的态度更是为我树立了榜样，令我敬佩。

我要感谢 Arizona State University 的 Charles J. Colbourn 教授对我工作的指导与肯定。

我要感谢 Emre Kolotoğlu 博士和我的师姐张会博士，在与他们的合作中我受益颇多。

我还要感谢浙江大学为我提供的补助、奖学金使我得以安心做研究；感谢杭州这座城市让我生活在如诗如画如此美景之中。

我还必须要感谢曾经在一起学习、科研的各位师兄、师姐、师弟、师妹们，在这共同学习和生活的岁月里留下了许多美好的回忆。

最后，我要感谢我的父亲、母亲，正是有了他们的理解和支持，我才能够顺利读完博士学位。

由于本人水平有限，论文难免有不足之处，恳请批评指正！

摘　要

可分组设计（GDD）在组合设计理论中有着极其重要的作用，它们被广泛地用来构造各类设计。例如，在组合设计理论奠基人 Wilson 和 Hanani 证明成对平衡设计存在的充分必要条件时，可分组设计是他们递归构造过程中不可缺少的一部分。类似地，可分解可分组设计和 frame 在构造具有可分解性质的设计的时候同样起着基础性的作用。我们称一个 GDD 是型一致的如果它所有组的大小均相同。本文研究了多类可分组设计的存在性问题，包括型不一致的 4-GDD，型一致的 5-GDD，4-RGDD，4-frame 以及 G-GDD 等。同时，我们也讨论了可分组设计在信息科学当中的应用，这些应用包括光纤网络中的业务疏导问题以及非线性纠错码。

在第 2 章中，我们研究了型为 g^um^1 的可分组设计存在性问题。当区组大小为 3 时，这个问题已被 Colbourn，Hoffman 和 Rees 于 1992 年解决。而区组大小是 4 的情形还没有被解决。目前关于此类 4-GDD 的存在性结果多集中于 gu 是偶数的情况。本文将考察此类 4-GDD 整个存在性问题。我们证明了对任意给定的 g，除了很小一部分的 u 外，型为 g^um^1 的 4-GDD 存在的必要条件（关于参数 u 和 m）也是充分的。作为这类型不一致的 GDD 的应用，我们构造了一些其他类型的设计，包括成对平衡设计，有向成对平衡设计，Kirkman frame，以及可分组覆盖设计。

在第 3 章中，我们继续研究了 5-GDD，4-RGDD 以及 4-frame 的存在性问题。虽然整个问题还没有彻底解决，但我们已取得了很大的进展。我们的结果主要集中在组相对比较大的情形。我们取得这些结果要归功于两类强有力的递归构造，它们是“双可分组设计构造”和“Rees 型乘积构造”。在应用的时候我们对这两类构造都做了一些改进。此外我们还构造了一些较小的设计，包括型为 2^{184}，9^{44}，18^{18} 和 36^{11} 的 4-RGDD。

在第 4 章，可分组设计的概念扩展到了 G-可分组设计。我们利用 G-GDD 构造了五个顶点的 G-设计。此类设计的存在性问题最早由 Bermond, Huang, Rosa 和 Sotteau 于 1980 年提出，并与光纤网络中的业务疏导问题密切相关，但至今仍未彻

底解决。我们完全解决了这个问题，同时对几乎所有的 n，确定了 n 阶 C-疏导的最小成本，这里 $C \le 9$。

在第 5 章，我们考察了长度为 n 的完备的 q 元 t-删位纠错码码字个数所有可能的取值。由于在 Levenshteĭn 距离下半径为 t 的球可以有不同的大小，所以完备的 t-删位纠错码的码字个数可以是不一样的，因而确定所有可能的取值是有意义的。当 $t = n - 2$ 时，t-删位纠错码和有向填充问题密切相关，后者的构造主要基于组合设计理论中的工具。在本章中，我们通过构造大量的不完全有向填充，基本上确定了完备的 $(4, 2)_q$-DCC 所有可能的大小，这里还剩下大小为 62 的 $(4, 2)_{19}$-DCC 和大小为 196 的 $(4, 2)_{34}$-DCC 没有解决。

第 6 第 7 两章主要研究常重码（CWC）和常重复合码（CCC）。已有许多种工具被用来确定常重码和常重复合码码字个数的最大值，其中包括了一些组合的手段。我们对其中的可分组码（GDC）和完全可约超单（CRSS）设计比较感兴趣。Chee, Ge 和 Ling 提出了可分组码的概念，并用来确定重量为三的最优常重复合码的大小。在第 6 章中，我们研究了重量为四、极小距离为六的最优三元常重复合码的构造问题。除了一小部分的长度外，我们基本上将这个问题解决了。完全可约超单设计与多元常重码相关，一个 (v, k, λ)-CRSS 设计就是一个最优 $(v, 2(k-1), k)_{\lambda+1}$-码。在第 7 章中，我们基本上解决了 $(v, 5, 2)$-CRSS 设计的存在性问题，除了可能的例外值 $v = 25$。利用这个结果，我们确定了当 $n \equiv 0, 1, 4, 5 \pmod{20}$ 且 $n \neq 25$ 时最优 $(n, 8, 5)_3$-码的大小。

关键词：　可分组设计，frame，可分解的可分组设计，G-设计，业务疏导，常重码，常重复合码，可分组码，完全可约超单设计

Abstract

Group divisible designs (GDD) are of critical importance in combinatorial design theory, and they have been widely used to construct various kinds of designs. For instance, group divisible designs were essential in the recursive constructions used in the seminal works of Wilson and Hanani (two of the pioneers of combinatorial design theory), which established necessary and sufficient conditions for the existence of pairwise balanced designs. Similarly, resolvable group divisible designs and frames play an instrumental role in the constructions of designs with resolvability. A GDD is called uniform if all of its groups have the same size. In this dissertation, we will study several kinds of group divisible designs, including non-uniform 4-GDDs, uniform 5-GDDs, 4-RGDDs, 4-frames, G-GDDs, etc. We also consider the applications of group divisible designs to information science. These applications include traffic grooming in optical networks and nonlinear error-correcting codes.

In Chapter 2, we investigate the existence of group divisible designs of type $g^u m^1$. For block size 3, the problem has been solved by Colbourn, Hoffman, and Rees in 1992. For block size 4, the problem is still open. Most of the progress for the existence of 4-GDDs of type $g^u m^1$ is on the case when gu is even. We consider the entire existence problem for such 4-GDDs. We show that, for each given g, up to a small number of undetermined cases of u, the necessary conditions on (u, m) for the existence of a 4-GDD of type $g^u m^1$ are also sufficient. As the applications of these GDDs, we obtain some other kinds of designs, including pairwise balanced designs, directed pairwise balanced designs, Kirkman frames, and group divisible covering designs.

In Chapter 3, we continue to investigate the existence results for 5-GDDs, 4-RGDDs and 4-frames. Much progress has been made for the existence problems of these designs, while the problems are still open. Our new results mainly lie in the cases with relatively large group size. These results are based mainly on the powerful recursive constructions

"Double Group Divisible Design Construction" and "Rees Type Product Construction", and sometimes we require double group divisible designs with proper extra resolvable properties when necessary. We also construct some smaller designs, including 4-RGDDs of types 2^{184}, 9^{44}, 14^{10}, 18^{18}, 22^{10} and 36^{11}.

In Chapter 4, the concept of group divisible designs is generalized to G-group divisible designs. We use G-GDDs to construct G-designs for five-vertex graphs. The existence problem of these kind of designs is a long standing problem posed by Bermond, Huang, Rosa and Sotteau in 1980, which is closely related to traffic grooming in optical networks. We give a complete solution to the existence problem of G-designs for five-vertex graphs completely. We also determined almost completely the minimum drop cost of C-groomings with $C \leq 9$ for all orders n.

In Chapter 5, we consider all possible sizes of perfect q-ary t-deletion-correcting codes of length n. Perfect t-deletion-correcting codes can have different number of codewords, because the balls of radius t with respect to Levenshteĭn distance may be of different sizes. Thus determining all possible sizes makes sense. When $t = n - 2$, t-deletion-correcting codes are closely related to directed packings, constructions of which are based on the tools of design theory. By constructing a considerable number of incomplete directed packings, we give an almost complete solution to the spectrum problem of sizes for perfect $(4, 2)_q$-DCCs, leaving the existence of $(4, 2)_{19}$-DCC of size 62 and $(4, 2)_{34}$-DCC of size 196 in doubt.

Chapters 6 and 7 are dedicated to constant-weight codes and constant-composition codes (CWCs and CCCs). Various methods have been applied to the problem of determining the maximum size of CWCs or CCCs, including some combinatorial methods. Here we are particularly interested in group divisible codes (GDCs) and complete reducible super-simple (CRSS) designs. The concept of group divisible codes is an analog of group divisible designs and was brought up by Chee, Ge and Ling to determine the sizes of optimal constant-composition codes of weight three. In Chapter 6, we study the problem of constructing optimal ternary constant-composition codes with weight four and minimum distance six. The problem is solved with a small number of lengths undetermined. Complete reducible super-simple designs are closely related to q-ary constant weight codes. A (v,k,λ)-CRSS design is just an optimal $(v,2(k-1),k)_{\lambda+1}$ code. In Chapter 7, we determine the spectrum of a $(v,5,2)$-CRSS design almost completely with a possible exception $v=25$. Using this result, we determine the maximum size of an $(n,8,5)_3$ code for all $n\equiv 0,1,4,5 \pmod{20}$ with the only length $n=25$ unsettled.

Keywords: Group divisible designs, frames, resolvable group divisible designs, G-designs, traffic grooming, constant-weight codes, constant-composition codes, group divisible codes, complete reducible super-simple designs

目　次

表 目 录

1 绪论

可分组设计

一个集合系统（set system）是一个二元组 $(X,\mathcal{B})$，其中 X 是一个点集，$\mathcal{B}$ 是 X 的一个子集族，里面的元素称为区组。一个集合系统的阶数就是 X 中点的个数。对一个非负整数集合 K，一个成对平衡设计（pairwise balanced design）(v,K,λ)-PBD，就是一个阶数为 v 的集合系统 $(X,\mathcal{B})$，使得 X 中的任意相异点对恰好出现在 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中，并且对任意 $B\in\mathcal{B}$，都有 $|B|\in K$。一个元素 $k\in K$ 是" 加星的"，记为 $k^\star$，就是说这个 PBD 恰好有一个大小为 k 的区组。当 $K=\{k\}$ 时，我们又称它是平衡不完全区组设计（balanced incomplete block design），记为 (v,k,λ)-BIBD。设 K 是一个正整数集合，令 $B(K)=\{v:\exists\,(v,K,1){-}\mathrm{PBD}\}$。那么 $B(K)$ 被称为是 K 的*PBD*-闭包。

令 $(X,\mathcal{B})$ 是一个集合系统，$\mathcal{G}=\{G_1,\ldots,G_u\}$ 是集合 X 的一个划分，称为组。那么一个三元组 $(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$ 被称为是一个可分组设计（group divisible design，GDD），如果 X 中不在同一个组的点对恰好出现在一个区组中，且对任意 $B\in\mathcal{B}$，$G\in\mathcal{G}$，$|B\cap G|\le 1$。如果对任意 $B\in\mathcal{B}$，$|B|\in K$，那么称 $(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$ 为 K-GDD。如果 $K=\{k\}$，简记为 k-GDD。一个 GDD 的型是一个多重集 $\{|G|:G\in\mathcal{G}\}$。我们通常用"指数"符号来表示 GDD 的型：型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\ldots g_t^{u_t}$ 表示对任意 $i=1,2,\ldots,t$，有 u_i 个大小为 g_i 的组。一个 GDD 称为**一致的**如果所有组的大小都相同。

可分组设计的概念由 Bose 于 1942 年提出，它在 Wilson 和 Hanani 构造成对平衡设计时发挥着基础性的作用[96,161–163]。国内外许多学者对这类设计做了很多研究工作，并取得了一系列的成果。区组大小为 3 或 4 的型一致的 GDD 的存在性问题已分别被 Hanani （于 1975 年）和 Brouwer 等人（于 1977 年）彻底解决。

定理 1.1 (Hanani[96]，Brouwer 等[27])： (i) 型为 g^u 的 3-GDD 存在当且仅当 $u\ge 3$，$(u-1)g\equiv 0\pmod 2$，$u(u-1)g^2\equiv 0\pmod 6$.

(ii) 型为 g^u 的 4-GDD 存在当且仅当 $u \geq 4$，$(u-1)g \equiv 0 \pmod 3$，$u(u-1)g^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 且 $(g,u) \notin \{(2,4),(6,4)\}$。

对于 $k=5$ 的情形，Hanani 于 1975 年给出了一些存在性的结果[96]，在之后的二十多年间，这个问题一直没有什么进展。直到 1996 年，Yin 等人在这方面取得了重要的成果[168]，之后，他们的结果不断被改进[3,84,86]。现在，除了有限个可能的例外，型一致的 5-GDD 的存在性问题已基本被解决了。

定理 1.2: 型为 g^u 的 5-GDD 存在的必要条件，即 $u \geq 5$，$g(u-1) \equiv 0 \pmod 4$，$g^2u(u-1) \equiv 0 \pmod{20}$，也是充分的，除了 $(g,u) \in \{(2,5),(2,11),(3,5),(6,5)\}$ 以及下述可能情况之外:

1. $g=3$，$u \in \{45,65\}$;
2. $g \equiv 2,6,14,18 \pmod{20}$:
   (a) $g=2$，$u \in \{15,35,71,75,95,111,115,195,215\}$;
   (b) $g=6$，$u \in \{15,35,75,95\}$;
   (c) $g=18$，$u \in \{11,15,71,111,115\}$;
   (d) $g \in \{14,22,26,34,38,46,58,62\}$，$u \in \{11,15,71,75,111,115\}$;
   (e) $g \in \{42,54\}$ 或者 $g=2\alpha$，这里 $\gcd(30,\alpha)=1$ 且 $33 \leq \alpha \leq 2443$，$u=15$;
3. $g \equiv 10 \pmod{20}$:
   (a) $g=10$，$u \in \{5,7,15,23,27,33,35,39,47\}$;
   (b) $g=30$，$u=15$;
   (c) $g=50$，$u \in \{15,23,27\}$;
   (d) $g=90$，$u=23$;
   (e) $g=10\alpha$，$\alpha \equiv 1 \pmod 6$ 且 $7 \leq \alpha \leq 319$，$u \in \{15,23\}$;
   (f) $g=10\beta$，$\beta \equiv 5 \pmod 6$ 且 $11 \leq \beta \leq 443$，$u \in \{15,23\}$;

(g) $g = 10\gamma$，$\gamma \equiv 1 \pmod 6$ 且 $325 \le \gamma \le 487$，$u = 15$；

(h) $g = 10\delta$，$\delta \equiv 5 \pmod 6$ 且 $449 \le \delta \le 485$，$u = 15$。

对于型不一致的情况，Colbourn 等人于 1992 证明了型为 $g^u m^1$ 的 3-GDD 存在的必要条件也是充分的[51]；而对于型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在性的研究也已取得巨大进展。设 $g, m > 0$ 且 $u \ge 4$，容易看出型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在的必要条件是 $m \le g(u-1)/2$，$gu \equiv 0 \pmod 3$，$g(u-1)+m \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $\binom{gu+m}{2} - u\binom{g}{2} - \binom{m}{2} \equiv 0 \pmod 6$。

对于比较小的 g，$g = 1$ 或 3 的情形被 Rees 等人解决[134]；$g = 4, 5, 12$ 或 15 的情形被 Ge 等人解决[82]；$g = 24$ 的情形被 Colbourn 等人解决[48]；$g = 8$ 或 16 的情形由 Schuster 解决[138]。而 $g = 2, 6$ 的情形也几乎被 Ge 等人完全解决[82,89]。我们将这些结果汇总如下。

定理 1.3: 设 $u \ge 4, m > 0$。对任意 $g \in \{1,2,3,4,5,6,8,12,15,16,24\}$，除了 $(g,u,m) = (2,6,5)$ 以及下述所列可能的情况外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在，当且仅当 $m \le g(u-1)/2$，$gu \equiv 0 \pmod 3$，$g(u-1)+m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $\binom{gu+m}{2} - u\binom{g}{2} - \binom{m}{2} \equiv 0 \pmod 6$。

(i) $g = 2$ 且 $(u,m) \in \{(21,17),(33,23),(33,29),(39,35),(57,44)\}$，或者

(ii) $g = 6$ 且 $(u,m) \in \{(7,15),(11,21),(11,24),(11,27),(13,27),(13,33),(17,39),(17,42),(19,45),(19,48),(19,51),(23,60),(23,63)\}$。

对于一般的 g，Rees 首先考察了 $u = 4$ 的情形[130]，在此基础上，Ge 等人考察了更一般的情况，得到了下面的结果[88]。

定理 1.4:

(i) 设 $g \equiv 0 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod 4$，$u = 4$ 或 $u \ge 12$，则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le g(u-1)/2$，除了可能的例外值 $u = 12$，$0 < m < g$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

(ii) 设 $g \equiv 0 \pmod 6$ 且 $u \in \{n : n \ge 79\} \setminus \{93,94,95,97,98,117,118\}$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3, 0 \le m \le g(u-1)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

(iii) 设 $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $u \equiv 0 \pmod 4$，$u \neq 8$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le (g(u-1)-3)/2$，除了可能的例外值 $u = 12$，$0 < m < g$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

(iv) 设 $g \equiv 1, 5 \pmod 6), g \notin \{11, 17\}$，并且 $u \equiv 0 \pmod{12}$，$u \neq 24$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \le (g(u-1)-3)/2$，除了可能的例外值 $u \in \{12, 72, 120, 168\}$，$0 < m < g$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

(v) 设 $g \equiv 2, 4 \pmod 6$ 且 $u \in \{n \equiv 0 \pmod 3) : n \ge 192\} \backslash \{231, 234, 237\}$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \le g(u-1)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

此外，Ge 等人还考察了 m 取极大值和极小值时的情形[85,90]。

定理 1.5:

(i) 设 $g \equiv 0 \pmod 6$，$u \ge 4$。则除了型为 $6^4 0^1$ 的 4-GDD 不存在，其他型为 $g^u 0^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD 都存在。

(ii) 设 $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $u \ge 4$，$u \not\equiv 2 \pmod 4$。若 $u \equiv 0 \pmod 4$ 则存在型为 $g^u 0^1$ 以及 $g^u((g(u-1)-3)/2)^1$ 的 4-GDD；若 $u \equiv 1 \pmod 4$ 则存在型为 $g^u 0^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD；若 $u \equiv 3 \pmod 4$ 则存在型为 $g^u 3^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD。

(iii) 设 $g \equiv 1 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod 3$，$u \ge 9$ 且 $u \not\equiv 6 \pmod{12}$。若 $u \equiv 0 \pmod{12}$ 则存在型为 $g^u 1^1$ 以及 $g^u((g(u-1)-3)/2)^1$ 的 4-GDD；若 $u \equiv 3 \pmod{12}$ 则存在型为 $g^u 1^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的4-GDD；若 $u \equiv 9 \pmod{12}$ 则存在型为 $g^u 4^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD。

(iv) 设 $g \equiv 4 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod 3$ 且 $u \ge 6$。则存在型为 $g^u 1^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD。

(v) 设 $g \equiv 2 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod 3$ 且 $u \ge 6$。则除了型为 $2^6 5^1$ 的 4-GDD 不存在，其他型为 $g^u 2^1$ 以及 $g^u (g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD 都存在。

(vi) 设 $g \equiv 5 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod 3$，$u \geq 9$ 且 $u \not\equiv 6 \pmod{12}$。若 $u \equiv 0 \pmod{12}$，则除了型为 $11^{12}2^1$ 以及 $17^{12}2^1$ 的 4-GDD 可能不存在，其他型为 g^u2^1 以及 $g^u((g(u-1)-3)/2)^1$ 的 4-GDD 都存在；若 $u \equiv 3 \pmod{12}$，则除了型为 $11^{27}5^1$ 的 4-GDD 可能不存在，其他型为 g^u5^1 以及 $g^u(g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD 都存在；若 $u \equiv 9 \pmod{12}$，则除了型为 $11^{21}2^1$ 的 4-GDD 可能不存在，其他型为 g^u5^1 以及 $g^u(g(u-1)/2)^1$ 的 4-GDD 都存在。

本文将考察了整个型为 g^um^1 的 4-GDD 存在性问题，在第 2 章中我们会证明对任意给定的 g，除了一小部分的 u 外，型为 g^um^1 的 4-GDD 存在的必要条件（关于参数 u 和 m）也是充分的。具体叙述如下。

定理 1.6: 记 $P_2 = \{(33,23),(33,29),(39,35)\}$，$P_6 = \{(13,27),(13,33),(17,39),(19,45),(19,51),(23,63)\}$。记 $[x,y]_{a(b)} = \{n : n \equiv a \pmod b,\ x \leq n \leq y\}$。设 $g,m > 0$ 且 $u \geq 4$。则除了确定的 $(g,u,m) = (2,6,5)$ 以及列在表格 1.1 中的可能的情况外，型为 g^um^1 的 4-GDD 存在的必要条件，即 $m \leq g(u-1)/2$，$gu \equiv 0 \pmod 3$，$g(u-1)+m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $\binom{gu+m}{2} - u\binom{g}{2} - \binom{m}{2} \equiv 0 \pmod 6$，也是充分的。

利用上述结果，我们对一系列设计的存在性结果做出了改进，包括成对平衡设计，有向成对平衡设计，$K_{1(3)}$-GDD，型不一致的 Kirkman frame，可分组覆盖设计。具体的结果请参阅 2.6 节。

对于一个 GDD $(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$，一个 α-平行类是区组集 $\mathcal{B}$ 的一个子集 $\mathcal{B}'$，并且满足 X 中任何一点 x 均被 $\mathcal{B}'$ 中的 α 个区组包含。当 $\alpha = 1$ 时，我们将它简称为平行类。如果区组集 $\mathcal{B}$ 可以划分成 α-平行类，那么我们称这个 GDD 是 α-可分解的（若 $\alpha = 1$ 我们就称它是可分解的，并记为 RGDD）。我们称一个 GDD $(X,\mathcal{G},\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{A}$-可分解的如果它的区组集 $\mathcal{B}$ 可以划分为子集族 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_r$，并且对任意 $i = 1,2,\ldots,r$，$\mathcal{B}_i$ 是 α_i-平行类，$\alpha_i \in \mathcal{A}$。不难看出，若 $K = \{k\}$，那么 $\mathcal{A}$-可分解的 k-GDD 的型必须是一致的。对于 $k = 3$ 的 RGDD，其存在的必要条件已被证明是充分的[47]。

表 1.1 型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在的必要条件以及未解决的值

g	u	m 的取值范围	未解决的值
$\equiv 0 \pmod 6$	无条件	$[0, \frac{g(u-1)}{2}]_{0(3)}$	$g=6$ 且 $(u,m)\in P_6$；或者 $g\geq 42$，g 不被 $12,18,30,42$ 或 66 整除，且 $(u,m)\in\{(13,6g-9),(13,6g-3)\}$
$\equiv 3 \pmod 6$	$\equiv 1 \pmod 4$ $\equiv 3 \pmod 4$	$[0, \frac{g(u-1)}{2}]_{0(6)}$ $[3, \frac{g(u-1)}{2}]_{3(6)}$	$g\geq 39$，g 不被 $15,21,27$ 或 33 整除， $u\in\{7,11\}$ 且 $0<m<g$
$\equiv 3 \pmod 6$	$\equiv 0 \pmod 4$	$[0, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{0(3)}$	$g\geq 39$，g 不被 $9,15,21$ 或 33 整除， $u=8$ 且 $3g<m<(7g-3)/2$
$\equiv 2 \pmod 6$ $\equiv 4 \pmod 6$	$\equiv 0 \pmod 3$ $\equiv 0 \pmod 3$	$[2, \frac{g(u-1)}{2}]_{2(3)}$ $[1, \frac{g(u-1)}{2}]_{1(3)}$	$g=2$ 且 $(u,m)\in P_2$；或者 $g\geq 10$ 并且： $u\in\{6,9\}$；或者 $u\in\{12,15,18,21,27\}$，$0<m<g$；或者 $(u,m)=(39,19g-3)$
$\equiv 1 \pmod 6$ $\equiv 5 \pmod 6$	$\equiv 3 \pmod{12}$ $\equiv 9 \pmod{12}$ $\equiv 3 \pmod{12}$ $\equiv 9 \pmod{12}$	$[1, \frac{g(u-1)}{2}]_{1(6)}$ $[4, \frac{g(u-1)}{2}]_{4(6)}$ $[5, \frac{g(u-1)}{2}]_{5(6)}$ $[2, \frac{g(u-1)}{2}]_{2(6)}$	$g\geq 11$ 并且： $u=9$；或者 $u\in\{15,27,39,51\}$，$0<m<g$；或者 $u\in\{21,33\}$，$0<m<4g$
$\equiv 1 \pmod 6$ $\equiv 5 \pmod 6$	$\equiv 0 \pmod{12}$ $\equiv 0 \pmod{12}$	$[1, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{1(3)}$ $[2, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{2(3)}$	$g\geq 11$ 并且： $u=12$，$0<m<g$；或者 $u=24$，$0<m<g$ 或 $10g<m<(23g-3)/2$

定理 1.7: 型为 h^u 的 3-RGDD 存在当且仅当 $u\geq 3$，$h(u-1)$ 是偶数，$hu\equiv 0 \pmod 3$ 且 $(h,u)\notin\{(2,3),(2,6),(6,3)\}$。

对于 4-RGDD，已知的有下述结果，见文献[75,78,81,83,86,139,142,143,148]。

定理 1.8: 型为 h^u 的 4-RGDD存在的必要条件，即 $u\geq 4$，$hu\equiv 0 \pmod 4$ 并且

$h(u-1) \equiv 0 \pmod 3$，除了 $(h,u) \in \{(2,4),(2,10),(3,4),(6,4)\}$ 这组确定的值以及下述可能的情况外，也是充分的：

1. $h \equiv 2, 10 \pmod{12}$：$h = 2$ 且 $u \in \{34, 46, 52, 70, 82, 94, 100, 118, 130, 178, 184, 202, 214, 238, 250, 334\}$；$h = 10$ 且 $u \in \{4, 34, 52, 94\}$；$h \in [14, 454] \cup \{478, 502, 514, 526, 614, 626, 686\}$ 且 $u \in \{10, 70, 82\}$。
2. $h \equiv 6 \pmod{12}$：$h = 6$ 且 $u \in \{6, 68\}$; $h = 18$ 且 $u \in \{18, 38, 62\}$。
3. $h \equiv 9 \pmod{12}$：$h = 9$ 且 $u = 44$。
4. $h \equiv 0 \pmod{12}$：$h = 36$ 且 $u \in \{11, 14, 15, 18, 23\}$。

对于一个可分组设计 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$，一个不完全平行类是一族划分 $X \backslash H$ 的区组，这里 H 是 $\mathcal{G}$ 中的某一个组。如果 $\mathcal{B}$ 能划分成不完全平行类，那么这个 GDD 被称为是一个 *frame*。Frame 中的组也常被称为洞。Frame 在构造具有可分解性质的设计的时候很有帮助。众所周知，在一个 k-frame 中，每一个洞的大小必须是 $k-1$ 的整数倍；事实上以给定的 H 作为洞的不完全平行类恰有 $|H|/(k-1)$ 个。

当 $k = 3$ 时，3-frame 又被称为 Kirkman frame。型一致的 Kirkman frame 的存在性问题已被 Stinson 于 1987 年完全解决[145]。而 4-frame 存在性问题还未被完全解决。我们将已知的结果汇总如下[53,74,79,86,110,135,175]。

定理 1.9: 型为 h^u 的 4-frame 存在的必要条件，即 $u \geq 5$，$h \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $h(u-1) \equiv 0 \pmod 4$，除了下述可能的情况外也是充分的：

1. $h = 36$ 且 $u = 12$;
2. $h \equiv 6 \pmod{12}$ 并且
   (a) $h = 6$ 且 $u \in \{7, 23, 27, 35, 39, 47\}$;
   (b) $h = 30$ 或者 $h \in \{n : 66 \leq n \leq 2190\}$ 且 $u \in \{7, 23, 27, 39, 47\}$;
   (c) $h \in \{42, 54\} \cup \{n : 2202 \leq n \leq 11238\}$ 且 $u \in \{23, 27\}$;
   (d) $h = 18$ 且 $u \in \{15, 23, 27\}$.

本文对上述 5-GDD，4-frame 以及 4-RGDD 的存在性结果作出了改进。我们将证明下面几个定理。

定理 1.10: 型为 g^u 的 5-GDD 存在的必要条件，即 $u \geq 5$，$g(u-1) \equiv 0 \pmod 4$，$g^2u(u-1) \equiv 0 \pmod{20}$，也是充分的，除了 $(g,u) \in \{(2,5),(2,11),(3,5),(6,5)\}$ 以及下述可能的情况之外:

1. $g = 3$，$u \in \{45, 65\}$;
2. $g \equiv 2, 6, 14, 18 \pmod{20}$:
   (a) $g = 2$，$u \in \{15, 35, 71, 75, 95, 111, 115, 195, 215\}$;
   (b) $g = 6$，$u \in \{15, 35, 75, 95\}$;
   (c) $g \in \{14, 18, 22, 26\}$，$u \in \{11, 15, 71, 111, 115\}$;
   (d) $g \in \{34, 46, 62\}$，$u \in \{11, 15\}$;
   (e) $g \in \{38, 58\}$，$u \in \{11, 15, 71, 111\}$;
   (f) $g = 2\alpha$，这里 $\gcd(30, \alpha) = 1$，$33 \leq \alpha \leq 2443$，$u = 15$;
3. $g \equiv 10 \pmod{20}$:
   (a) $g = 10$，$u \in \{5, 7, 15, 23, 27, 33, 35, 39, 47\}$;
   (b) $g = 30$，$u = 15$;
   (c) $g = 50$，$u \in \{15, 23, 27\}$;
   (d) $g = 90$，$u = 23$;
   (e) $g = 10\alpha$，这里 $\alpha \in \{7, 11, 13, 17, 35, 55, 77, 85, 91, 119, 143, 187, 221\}$，$u = 23$。

定理 1.11: 型为 h^u 的 4-frame 存在的必要条件，即 $u \geq 5$，$h \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $h(u-1) \equiv 0 \pmod 4$，除了下述可能的情况外也是充分的:

1. $h = 36$，$u = 12$;

2. $h \equiv 6 \pmod{12}$：

   (a) $h = 6$，$u \in \{7, 23, 27, 35, 39, 47\}$；

   (b) $h = 18$，$u \in \{15, 23, 27\}$；

   (c) $h \in \{30, 66, 78, 114, 150, 174, 222, 246, 258, 282, 318, 330, 354, 534\}$，$u \in \{7, 23, 27, 39, 47\}$；

   (d) $h \in \{n : 42 \le n \le 11238\} \backslash \{66, 78, 114, 150, 174, 222, 246, 258, 282, 318, 330, 354, 534\}$，$u \in \{23, 27\}$。

定理 1.12: 型为 h^u 的 4-RGDD 存在的必要条件，即 $u \ge 4$，$hu \equiv 0 \pmod 4$ 并且 $h(u-1) \equiv 0 \pmod 3$，除了确定的 $(h, u) \in \{(2, 4), (2, 10), (3, 4), (6, 4)\}$ 以及下述可能的情况外，也是充分的：

1. $h \equiv 2, 10 \pmod{12}$: $h = 2$，$u \in \{34, 46, 52, 70, 82, 94, 100, 118, 130, 178, 202, 214, 238, 250, 334\}$；$h = 10$，$u \in \{4, 34, 52, 94\}$；$h = 26$，$u \in \{10, 70, 82\}$；$h \in \{38, 58, 74, 82, 86, 94, 106\}$，$u = 10$。

2. $h \equiv 6 \pmod{12}$：$h = 6$，$u \in \{6, 68\}$；$h = 18$，$u \in \{38, 62\}$。

3. $h \equiv 0 \pmod{12}$：$h = 36$，$u \in \{14, 15, 18, 23\}$。

图分解问题

设 $G_1, G_2, \ldots, G_t$ 以及 H 都是有限的无向的简单图。令 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_t\}$。$H$ 的一个 $\mathcal{G}$-分解就是把 H 的边做划分，称为区组，使得每个区组中的边构成的图同构于 $\mathcal{G}$ 中某个 G_i。一个 n 阶 $\mathcal{G}$-设计是一个 n 阶完全图（记为 K_n）的 $\mathcal{G}$-分解。当 $\mathcal{G} = \{G\}$ 时，简单地记为 G-设计。一个图 G 的谱是一个正整数集合 S，使得 $n \in S$ 当且仅当存在 n 阶 G-设计。一个 n 阶 G-设计存在，需要满足下面三个必要条件：

1. 若 $n > 1$，$|V(G)| \le n$；

2. $n(n-1) \equiv 0 \pmod{|2E(G)|}$；并且

3. $n-1 \equiv 0 \pmod d$，这里 d 是 G 中所有顶点度数的最大公约数。

对于至多有四个顶点的图，它们的谱最后是由 Bermond 和 Schönheim 于 1977 年完全确定的[19]。而不同构的、没有孤立点的五点图有 23 个。Bermond, Huang, Rosa 和 Sotteau[18] 于 1980 年开始研究这些图的谱问题，并将它们标号为 G_i,$1 \le i \le 23$。之后，这个问题的研究取得了很多成果，见文献[33,49,54,101,114,115,136]。感兴趣的读者可以参阅 Adams, Bryant 和 Buchanan 的文章[9] 以了解这个问题的研究历史。目前，除了图 G_{20}，G_{21} 和 G_{22} 外，其他五点图的谱问题已被彻底解决。G_{20} 和 G_{21} 是唯一的两个不同构的五个顶点八条边的简单图，如图 1.1 所示。G_{22} 是唯一的一个五个顶点九条边的简单图，它可以由 K_5 删去一条边得到，因此我们也将它记为 $K_5\backslash e$。下面的定理是对文献[9]中定理的更新，其中阶为 $27, 135, 162$ 以及 216 的 G_{22}-设计已由 Kolotoğlu 构造出来了[108]。

定理 1.13: 对于一个没有孤立点的五点图 G，除了下述情形外，n 阶 G-设计存在的必要条件也是充分的：

例外：

$(n,G) \in \{(5,G_7),(5,G_8),(5,G_9),(6,G_9),(9,G_{14}),(12,G_{14}),(7,G_{16}),(8,G_{16}),$
$(8,G_{18}),(14,G_{18}),(8,G_{19}),(16,G_{21}),(9,G_{22}),(10,G_{22}),(18,G_{22})\}$。

可能的例外：

$(n,G) \in \{(32,G_{20}),(48,G_{20}),(48,G_{21}),(36,G_{22}),(54,G_{22}),(64,G_{22}),(72,G_{22}),$
$(81,G_{22}),(90,G_{22}),(144,G_{22}),(234,G_{22})\}$。

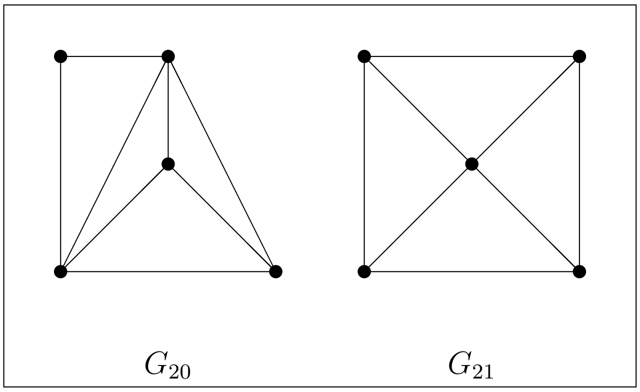

图 1.1 G_{20} 和 G_{21}

为了解决定理 1.13 中剩下的值，我们需要可分组 $\mathcal{G}$-设计的概念。设 $T = g_1^{u_1}\cdots g_s^{u_s}$。我们用 $G(T)$ 来记一个完全多部图，它有 u_i 个大小为 g_i 的组，$i = 1,2,\ldots,s$。一个型为 T 的可分组 $\mathcal{G}$-设计 ($\mathcal{G}$-GDD) 是将 $G(T)$ 中的所有边分解为一些子图，使得每一个子图同构于 $\mathcal{G}$ 中的某个图。当 $\mathcal{G} = \{G\}$ 时，简单的记为 *G-GDD*。当 G 为 k 阶完全图 K_k 时，K_k-GDD 就是我们之前介绍过的 k-GDD。通过直接构造和利用 $\mathcal{G}$-GDD 递归构造，我们将把定理 1.13 中剩下的值完全解决掉。

常重码与常重复合码

常重码是编码理论中一类重要的码[121]，它要求码中的每个码字的重量都是相同的。编码理论中研究的很多重要的码都是特殊的常重码，如光正交码、常重复合码、完美常重码、等距常重码等。历史上，由于常重码可以用来计算一般纠错码的界，其一直有着重要的理论意义。近年来，常重码在现实生活中也得到了大量的应用，被用于CDMA系统、并行异步通讯、自动纠错系统等许多领域。另外，常重码的构造问题与组合学中的许多著名难题和猜想相联系。因为在理论研究和实际应用中的双重意义，常重码引起了人们广泛的研究。

最近，由于在有效带宽信道[55]、DNA计算中核苷酸序列的设计[107,123]等方面的重要应用，非二元常重码引起了人们的重视，越来越多的文章对其界及构造等方面的问题展开了研究，并取得了重要的成果，如[23,31,35,40,68,69,109,125,149–151,153,173]等。

常重复合码是一类特殊的常重码，它要求码中的每个码字的元素组成都是相同的。具有非常重要应用的置换码就是一种常重复合码。由于其在多址通信、DNA码、电力线通讯、跳频序列等许多方面的应用，上世纪九十年代末，对常重复合码就有了系统的研究[22,25,151]。

对于多元常重码或常重复合码，其核心问题是确定特定参数下最大的码字个数，即 $A_q(n,d,w)$ 或 $A_q(n,d,\overline{w})$。关于这类问题，一般从两个方面展开研究：一是其上界的确定，二是构造出达到上界的最优的多元码。

关于上界的确定，最初分别由 Svanström[151] 和 Fu[69] 给出了 Johnson 类型的递归界。虽然很多情况下可以证明这个界是紧的，但是在有些情况下它与已知的下界

还有一定距离。而其他的更好的上界通常需要用一些特别的方法得到，比如计数、线性规划等方法或者对特定参数的码进行具体的分析。

对最优多元常重码的构造，组合的手段包括广义 Steiner 系[21,43,44,66,73,105,126,127,169]，完全可约超单可分组设计[40,173,174]，Hanani三元系[39]。本文基本解决了区组大小为 5，指数为 2 的完全可约超单设计的存在性问题，从而得到了一类新的最优$(n,8,5)_3$-码。

而对最优常重复合码的构造，组合的手段包括填充设计[46,59,60,102,160,165,166,170]，竞赛设计[171]，PBD 闭包方法[37,42]，可分组码[37,72,176]。本文将利用可分组码确定重量为 4，距离为 6 的最优三元常重复合码的码字个数。

2 型不一致的 4-GDD 及其应用

在本章中，我们要研究型不一致的 4-GDD 存在性问题。易知，对于一个型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD，$g, m > 0$ 并且 $u \geq 4$，其存在的必要条件是 $m \leq g(u-1)/2$，$gu \equiv 0 \pmod 3$，$g(u-1)+m \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $\binom{gu+m}{2} - u\binom{g}{2} - \binom{m}{2} \equiv 0 \pmod 6$。我们将证明对任意给定的 g，除了一小部分的 u 外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在的必要条件（关于参数 u 和 m）也是充分的。

2.1 基本构造方法和预备结论

我们所使用的最主要的递归构造方法是 Wilson 基本构造法（WFC），见[47]。

构造 2.1: 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个 GDD，w 是一个从 X 到 $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 的权重函数。若对任意 $B \in \mathcal{B}$，型为 $\{w(x) : x \in B\}$ 的 K-GDD 都存在，则型为 $\{\sum_{x\in G} w(x) : G \in \mathcal{G}\}$ 的 K-GDD 存在。

一个不完全可分组设计（IGDD）是一个四元组 $(X, Y, \mathcal{G}, \mathcal{B})$，其中 X 是点集，Y 是 X 的一个子集（称为洞），$\mathcal{G}$ 是 X 的一个划分（称为组），$\mathcal{B}$ 是一族 X 中的子集（称为区组）使得：

(i) 对任意区组 $B \in \mathcal{B}, |B \cap Y| \leq 1$；

(ii) X 中任意一对不同属于 Y 的点或者出现在某一组中或者出现在同一个区组中，但两者不能兼有。

每个区组大小是 K 中的元素，有 u_i 个大小为 g_i 的组，且每个组和洞相交于 h_i 个点，$i = 1, 2, \ldots, s$，这样的 IGDD 记为型为 $(g_1, h_1)^{u_1}(g_2, h_2)^{u_2} \ldots (g_s, h_s)^{u_s}$ 的 K-IGDD。有时我们也把这样的 IGDD 称为型为 S 的 K-IGDD，这里 S 是一个多重集，它包含 u_i 个 (g_i, h_i)，$i = 1, 2, \ldots, s$。对于 IGDD，我们有下述构造方法[133]。

构造 2.2: 设 $(X, Y, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个型为 S 的 K-IGDD，w, d 是两个从 X 到 $\mathbb{Z}$ 的权重函数，并且对任意 $x \in X$，有 $w(x) \geq d(x) \geq 0$。若对任意 $B \in \mathcal{B}$ 型为 $\{(w(x), d(x)) :$

$x \in B\}$ 的 K'-IGDD 都存在，并且型为 $\{(\sum_{x\in G\cap Y} w(x), \sum_{x\in G\cap Y} d(x)) : G \in \mathcal{G}\}$ 的 K'-IGDD 也存在，则型为 $\{(\sum_{x\in G} w(x), \sum_{x\in G} d(x)) : G \in \mathcal{G}\}$ 的 K'-IGDD 存在。

在之后的构造中，我们将会用到下面的 IGDD[132,133]。

引理 2.1: 对任意 $0 \le k_1 \le 5$，$0 \le k_2 \le 6$，型为 $(9,3)^{k_1}(6,0)^{5-k_1}$ 和 $(9,3)^{k_2}(6,0)^{6-k_2}$ 的 4-IGDD 均存在。型为 $(9,3)^4$ 的 4-IGDD 也存在。

利用构造 2.2 以及引理 2.1 中的 IGDD，我们可以得到下面的结果，证明见文献[88]。

定理 2.1: 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个 $\{5,6\}$-GDD，它的组为 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$。则对任意整数序列 $n_1, n_2, \ldots, n_s$ 且 $0 \le n_i \le |G_i|$，$i = 1, 2, \ldots, s$，型为 $\{(6|G_i| + 3n_i, 3n_i) : i = 1, 2, \ldots, s\}$ 的 4-IGDD 均存在。

我们可以利用下面的方法由 IGDD 构造 GDD，证明见文献[133]。

构造 2.3: 设 $(X, Y, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个型为 $(g_1, h_1)^{u_1}(g_2, h_2)^{u_2} \ldots (g_s, h_s)^{u_s}$ 的 K-IGDD 并设 $a \ge 0$。若对任意 $i = 1, 2, \ldots, s$，都存在一个 K-GDD，它有 $a + g_i$ 个点并且有一个大小为 a 的组和一个大小为 h_i 的组，则存在一个 K-GDD，它有 $a + \sum_i u_i g_i$ 个点并且有一个大小为 $\sum_i u_i h_i$ 的组。

一个双可分组设计（DGDD）是一个四元组 $(X, \mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$，其中 X 是一个点集，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是 X 的划分（分别称为洞和组），$\mathcal{B}$ 是一族 X 中的子集（称为区组）使得：

(i) 对任意区组 $B \in \mathcal{B}$ 和任意洞 $H \in \mathcal{H}$，$|B \cap H| \le 1$；

(ii) X 中的任意一对不在同一洞中的点或者出现在同一组中或者出现在同一个区组中，两者不可兼有。

每个区组大小是 K 中的元素，有 u_i 个大小为 g_i 的组，且每个组交 v 个洞 h_i 个点，$i = 1, 2, \ldots, s$，这样的 DGDD 记为型为 $(g_1, h_1^v)^{u_1}(g_2, h_2^v)^{u_2} \ldots (g_s, h_s^v)^{u_s}$ 的 K-DGDD。（这样，对于所有 $i = 1, 2, \ldots, s$ 有 $g_i = h_i v$。当然不是所有 DGDD 都可以用这种方式表示，但它已包含所有本文中将会涉及到的 DGDD 了。）一个改进

可分组设计，是一个型为 $(g, 1^g)^u$ 的 K-DGDD，记为型为 g^u 的 K-MGDD。若一个 DGDD 的区组集可以划分成平行类，这个 DGDD 被称为是可分解的。关于 DGDD 的存在性，我们有下述结果[10,32,91,92,117,158]。

定理 2.2: 型为 $(mn, m^n)^t$ 的 4-DGDD 存在当且仅当 $t, n \geq 4$，$(t-1)(n-1)m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $(m, n, t) \notin \{(1,4,6), (1,6,4)\}$。

定理 2.3: 型为 g^u 的可分解 3-MGDD 存在当且仅当 $g \geq 3, u \geq 3, gu \equiv 0 \pmod 3$，$(g-1)(u-1) \equiv 0 \pmod 2$ 且 $(g, u) \notin \{(3,6), (6,3)\}$。

关于 DGDD，我们有下述构造方法，证明见[90]。

构造 2.4: 若型为 $g_1^{u_1} g_2^{u_2} \ldots g_s^{u_s}$ 的 K-GDD 存在，并且对任意 $k \in K$ 型为 $(hv, h^v)^k$ 的 K'-DGDD 都存在，则型为 $(hvg_1, (hg_1)^v)^{u_1} (hvg_2, (hg_2)^v)^{u_2} \ldots (hvg_s, (hg_s)^v)^{u_s}$ 的 K'-DGDD 存在。

构造 2.5: 若型为 $(g_1, h_1^v)^{u_1} (g_2, h_2^v)^{u_2} \ldots (g_s, h_s^v)^{u_s}$ 的 K-DGDD 存在，并且对任意 $i = 1, 2, \ldots, s$ 存在型为 $h_i^v m^1$ 的 K-GDD，这里 m 是一个固定的非负整数。则型为 $h^v m^1$ 的 K-GDD 存在，$h = \sum_{i=1}^{s} u_i h_i$。

综合构造 2.4 和 2.5，我们可以得到下面的构造方法。在后面的章节中，我们会发现这个方法是构造 GDD 的强有力的工具，其思想已在文献[90]中出现了。

构造 2.6: 设 u 是一个大于等于 4 的整数并且 $u \neq 6$。若型为 $g^v m_0^1$ 的 4-GDD 存在，并且:

1. 型为 $g^u m_1^1$ 的 4-GDD 存在，则型为 $(gv)^u (m_0(u-1) + m_1)^1$ 的 4-GDD 存在;
2. 型为 $g^v m_2^1$ 的 4-GDD 存在，则型为 $(gu)^v (m_0(u-1) + m_2)^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 我们由给定的型为 $g^v m_0^1$ 的 4-GDD 出发，删去大小为 m_0 的组得到一个型为 g^v 的 $\{3, 4\}$-GDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 m_0 个平行类。对每个点赋权 u，用型为 u^4 的 4-MGDD 替换大小为 4 的区组，用型为 u^3 的可分解 3-MGDD 替换大小为 3 的区组，(这里所需要的 MGDD 来自于定理 2.2 和 2.3)，应用构造

2.4 可以得到一个型为 $(gu, g^u)^v$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，其中大小为 3 的区组可以划分成 $m_0(u-1)$ 平行类。对于这个 DGDD，我们可以用下面的方法填充组或者洞。

填充组。额外添加 m_1 个点，在每个组以及这 m_1 个点上构造型为 $g^u m_1^1$ 的 4-GDD。这样我们就得到了一个型为 $(gv)^u m_1^1$ 的 $\{3,4\}$-GDD。最后补全所有平行类得到型为 $(gv)^u((m_0(u-1)+m_1)^1$ 的 4-GDD。

填充洞。额外添加 m_2 个点，在每个洞以及这 m_2 个点上构造型为 $g^v m_2^1$ 的 4-GDD。这样我们就得到了一个型为 $(gu)^v m_2^1$ 的 $\{3,4\}$-GDD。最后补全所有平行类得到型为 $(gu)^v(m_0(u-1)+m_2)^1$ 的 4-GDD。 □

在之后的构造中，我们还需要用到下面的概念和结论。

定理 2.4 (Abel等[5])：对任意整数 $v \geq 7$，$v \notin \{\mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}, \mathbf{14}, \mathbf{15}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{23}\}$，都存在一个 $(v, \{4,5,6\}, 1)$-PBD.

定理 2.5 (Abel等[5])：对任意整数 $v \geq 10$，$v \notin \{\mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}, \mathbf{14}, \mathbf{15}, \mathbf{18}, \mathbf{19}, \mathbf{23}\}$，都存在一个 $(v, \{4,5,6,7,8,9\}, 1)$-PBD.

定理 2.6 (Abel等[5])：对任意整数 $v \geq 10$，$v \notin [\mathbf{10}, \mathbf{20}] \cup [\mathbf{22}, \mathbf{24}] \cup [\mathbf{27}, \mathbf{29}] \cup [\mathbf{32}, \mathbf{34}]$，都存在一个 $(v, \{5,6,7,8,9\}, 1)$-PBD。

定理 2.7 (Abel等[5])：设 $v \equiv 1 \pmod 2$。对任意 $v \geq 21$ 且 $v \notin \{\mathbf{23}, \mathbf{27}, \mathbf{29}, \mathbf{31}, \mathbf{33}, \mathbf{39}, 43, 51, 59, 71, 75, 83, 87, 95, 99, 107, 111, 113, 115, 119, 139, 179\}$，都存在一个 $(v, \{5,7,9\}, 1)$-PBD。

一个型为 m^k 的 k-GDD 也被称为是一个横截设计（transversal design，TD），记为 $\mathrm{TD}(k,m)$。众所周知，一个 $\mathrm{TD}(k,m)$ 等价于 $k-2$ 个 m 阶正交拉丁方。

定理 2.8 (Abel 等[1,7]，Todorov[155])：令 m 为一个正整数。那么：

i) 若 $m \notin \{2,6\}$，存在 $\mathrm{TD}(4,m)$；

ii) 若 $m \notin \{2,3,6,10\}$，存在 $\mathrm{TD}(5,m)$；

iii) 若 $m \notin \{2,3,4,6,10,22\}$，存在 $\mathrm{TD}(6,m)$；

iv) 若 $m \notin \{2,3,4,5,6,10,14,15,20,22,26,30,34,38,46\}$，存在 TD$(7,m)$；

v) 若 $m \notin \{2,3,4,5,6,10,12,14,15,18,20,21,22,26,28,30,33,34,35,38,39,42,44,46,51,52,54,58,60,62,66,68,74\}$，存在 TD$(8,m)$。

定理 2.9 (MacNeish **定理**[120])：若正整数 m 有素因子分解 $m = p_1^{e_1}\dots p_l^{e_l}$，其中 p_i 是不同的素数，并且对所有 $1 \le i \le l$ 有 $e_i \ge 1$。设 $s = \min\{p_i^{e_i} - 1 : 1 \le i \le l\}$。则存在 s 个 m 阶正交拉丁方.

2.2 $g \equiv 0 \pmod 6$ 的情形

本节中我们研究型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 的存在性问题。我们先来改进定理 1.3 中关于型为 $6^u m^1$ 的 4-GDD 存在性结果。

2.2.1 型为 $6^u m^1$ 的 4-GDD

引理 2.2：对任意$(u,m) \in \{(7,15),(11,21),(11,24),(11,27),(17,42),(19,48),(23,60)\}$，型为 $6^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

证明. 对任意 (u,m)，我们在集合 $\mathbb{Z}_{6u} \cup M$ 上构造所需设计，它们的组是 $\{\{0,u,2u,\dots,5u\}+i : 0 \le i \le u-1\} \cup \{M\}$。把下边所给基区组按如下方式展开：$\mathbb{Z}_{6u}$ 中的元素 $+3 \pmod{6u}$ 或 $+6 \pmod{6u}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素代表 (x,i)，把它们的下标 $+1 \pmod n$ 展开，M 中的无穷点保持不变。这样就可得到所要的区组集。

$6^7 15^1$:

$+6 \pmod{42}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_7) \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_7\}$

4	22	16	a_0	40	25	36	a_0	17	2	28	a_0
37	19	31	a_0	6	18	0	a_0	20	15	32	a_0
41	23	29	a_0	12	21	34	a_0	33	9	3	a_0
14	30	38	a_0	8	39	13	a_0	35	1	24	a_0
26	11	27	a_0	7	5	10	a_0	0	17	27	∞_0
2	4	13	∞_0	5	9	31	∞_1	4	30	8	∞_1
0	41	37	∞_2	4	3	26	∞_2	2	11	31	∞_3
0	34	3	∞_3	4	38	19	∞_4	0	5	39	∞_4
2	15	19	∞_5	5	24	22	∞_5	0	1	2	∞_6
3	28	5	∞_6	4	17	14	∞_7	3	12	37	∞_7
2	12	8	41	1	10	33	11	0	10	13	15

$6^{11} 21^1$:

$+6 \pmod{66}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{11}) \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_9\}$

0	54	38	a_0	37	25	61	a_0	30	27	50	a_0
24	22	31	a_0	18	48	42	a_0	34	11	6	a_0
49	1	57	a_0	16	28	64	a_0	41	33	12	a_0
29	53	59	a_0	26	62	2	a_0	32	35	36	a_0
21	51	9	a_0	15	44	10	a_0	13	40	5	a_0
39	4	14	a_0	47	20	8	a_0	17	55	65	a_0
19	23	3	a_0	45	63	60	a_0	7	58	56	a_0
43	52	46	a_0	4	63	23	∞_0	0	56	31	∞_0
4	41	0	∞_1	2	21	55	∞_1	4	25	21	∞_2
5	48	14	∞_2	0	15	43	∞_3	5	50	46	∞_3
0	40	2	∞_4	1	47	15	∞_4	0	13	47	∞_5
2	16	3	∞_5	5	54	64	∞_6	3	43	20	∞_6
2	11	37	∞_7	3	28	42	∞_7	0	57	37	∞_8
2	17	22	∞_8	5	22	7	∞_9	0	14	9	∞_9
5	55	8	26	3	63	65	53	3	38	46	30
2	52	53	15	2	42	1	61	3	24	4	17
4	28	31	36	1	3	22	62	0	1	18	53

$6^{11}24^1$:

$+3 \pmod{66}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{11}) \cup (\{b, c, \ldots, g\} \times \mathbb{Z}_2) \cup \{\infty\}$

55	59	35	a_0	27	10	1	a_0	5	17	31	a_0
49	45	37	a_0	13	33	3	a_0	6	7	8	a_0
14	54	62	a_0	44	51	63	a_0	32	23	53	a_0
24	48	42	a_0	28	58	52	a_0	3	31	12	b_0
2	53	10	b_0	0	45	65	c_0	4	32	7	c_0
5	61	2	d_0	0	64	3	d_0	3	28	26	e_0
1	30	17	e_0	4	35	39	f_0	0	50	13	f_0
3	42	17	g_0	1	50	16	g_0	4	65	27	∞
0	16	29	35	4	63	31	49	5	32	0	15

$6^{11}27^1$:

$+6 \pmod{66}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{11}) \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_{15}\}$

35	11	42	a_0	38	25	55	a_0	52	16	58	a_0
21	49	63	a_0	17	65	5	a_0	54	59	29	a_0
43	46	41	a_0	33	45	51	a_0	14	57	28	a_0
39	53	3	a_0	24	27	0	a_0	7	31	32	a_0
20	26	62	a_0	60	23	40	a_0	34	2	50	a_0
44	48	56	a_0	37	8	47	a_0	15	36	6	a_0
13	61	1	a_0	18	30	12	a_0	19	64	10	a_0
9	4	22	a_0	4	23	14	∞_0	0	63	37	∞_0
1	40	6	∞_1	5	8	15	∞_1	0	16	7	∞_2
3	56	35	∞_2	2	23	7	∞_3	4	0	21	∞_3
2	37	54	∞_4	5	40	9	∞_4	1	52	53	∞_5
0	2	39	∞_5	5	33	1	∞_6	0	52	56	∞_6
3	10	50	∞_7	0	25	65	∞_7	0	31	28	∞_8
2	51	5	∞_8	0	17	32	∞_9	1	9	28	∞_9
4	2	27	∞_{10}	0	13	47	∞_{10}	0	64	23	∞_{11}
3	8	1	∞_{11}	1	51	0	∞_{12}	5	34	14	∞_{12}
4	55	17	∞_{13}	2	33	42	∞_{13}	3	5	13	∞_{14}
2	10	18	∞_{14}	4	11	3	∞_{15}	0	43	20	∞_{15}
1	20	21	47	0	15	19	40	0	38	10	53

$6^{17}42^1$:

$+3 \pmod{102}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{17}) \cup (\{b, c, \ldots, m\} \times \mathbb{Z}_2) \cup \{\infty\}$

23	33	59	a_0	75	76	77	a_0	99	85	7	a_0
5	68	14	a_0	30	3	63	a_0	35	95	13	a_0
6	27	62	a_0	71	47	1	a_0	87	82	16	a_0
42	41	53	a_0	83	89	96	a_0	40	101	29	a_0
51	28	69	a_0	19	37	72	a_0	46	100	4	a_0
43	10	73	a_0	39	15	9	a_0	4	48	11	b_0
2	37	21	b_0	3	35	6	c_0	4	20	7	c_0
2	28	6	d_0	5	21	1	d_0	2	42	47	e_0
4	33	97	e_0	3	53	74	f_0	1	60	28	f_0
1	78	101	g_0	2	57	46	g_0	5	43	20	h_0
4	93	0	h_0	4	98	29	i_0	0	63	7	i_0
1	46	48	j_0	3	17	44	j_0	4	19	14	k_0
0	59	15	k_0	1	29	9	l_0	2	16	66	l_0
4	77	25	m_0	2	96	51	m_0	3	22	77	∞
4	66	78	30	5	67	30	8	1	13	32	50

$6^{19}48^1$:

$+3 \pmod{114}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{19}) \cup (\{b, c, \ldots, o\} \times \mathbb{Z}_2) \cup \{\infty\}$

111	57	105	a_0	81	58	88	a_0	26	20	43	a_0
2	65	49	a_0	50	47	17	a_0	69	93	30	a_0
63	21	71	a_0	86	44	68	a_0	40	5	19	a_0
9	95	35	a_0	108	109	110	a_0	55	37	10	a_0
41	96	16	a_0	64	4	103	a_0	89	99	82	a_0
18	80	91	a_0	28	22	70	a_0	27	15	45	a_0
60	113	33	a_0	2	85	15	b_0	4	36	65	b_0
1	99	110	c_0	0	28	41	c_0	5	102	73	d_0
3	70	74	d_0	2	24	71	e_0	4	67	9	e_0
2	46	101	f_0	3	55	108	f_0	3	58	86	g_0
1	72	95	g_0	2	79	81	h_0	0	46	5	h_0
5	85	6	i_0	3	68	28	i_0	2	89	67	j_0
3	18	40	j_0	0	49	40	k_0	3	101	110	k_0
0	10	21	l_0	2	23	73	l_0	2	31	34	m_0
3	0	77	m_0	4	56	12	n_0	5	13	9	n_0
2	27	41	o_0	0	94	13	o_0	5	87	61	∞
0	20	56	68	2	28	4	106	3	48	84	34

$6^{23}60^1$:

$+3 \pmod{138}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{23}) \cup (\{b, c, \ldots, s\} \times \mathbb{Z}_2) \cup \{\infty\}$

86	38	54	a_0	76	72	9	a_0	55	114	11	a_0
49	111	63	a_0	56	75	14	a_0	34	64	85	a_0
68	82	79	a_0	69	116	106	a_0	108	109	110	a_0
52	71	5	a_0	77	97	102	a_0	51	1	57	a_0
127	119	131	a_0	104	44	20	a_0	61	21	105	a_0
128	134	26	a_0	53	98	81	a_0	23	27	87	a_0
117	129	93	a_0	22	4	94	a_0	30	15	135	a_0
31	67	43	a_0	32	19	115	a_0	5	105	134	b_0
4	30	79	b_0	0	135	97	c_0	4	104	101	c_0
4	21	127	d_0	2	72	113	d_0	4	51	113	e_0
0	85	50	e_0	3	101	90	f_0	4	68	43	f_0
2	109	84	g_0	4	137	111	g_0	1	130	132	h_0
3	107	74	h_0	4	115	12	i_0	2	23	9	i_0
3	132	67	j_0	4	125	74	j_0	0	45	128	k_0
1	29	82	k_0	4	81	120	l_0	1	8	107	l_0
1	111	53	m_0	0	10	8	m_0	1	84	89	n_0
2	81	100	n_0	3	119	30	o_0	1	80	106	o_0
0	95	58	p_0	3	104	37	p_0	4	62	47	q_0
3	73	84	q_0	1	74	21	r_0	4	126	53	r_0
3	120	2	s_0	1	17	94	s_0	2	106	54	∞
2	59	15	122	0	13	42	108	1	7	83	61

$\square$

综合定理 1.3 以及引理 2.2，我们得到下述结论。

定理 2.10: 设 $u \geq 4$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \leq m \leq 3u-3$，除了确定的例外值 $(u, m) = (4, 0)$ 以及可能的例外值 $(u, m) \in \{(13, 27), (13, 33), (17, 39), (19, 45), (19, 51), (23, 63)\}$ 外，型为 $6^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

2.2.2 型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD

在本节中，我们将证明型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD 存在的必要条件也是充分的。

引理 2.3: 对任意 $u \geq 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $6(u-1) \leq m \leq 9(u-1)$，除了 $(u, m) \in \{(13, 99), (13, 105), (17, 135), (19, 153), (19, 159), (23, 195)\}$ 外，型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

证明. 由定理 1.7，型为 6^u 的 3-RGDD 存在。对这个 RGDD 的每个点赋予权重 3，利用构造 2.4 以及型为 3^3 的可分解 3-MGDD（定理 2.3）可以得到一个型为 $(18,6^3)^u$ 的可分解 3-DGDD。添加 $6(u-1)$ 个无穷点把所有平行类补全。再额外添加 $m-6(u-1)$ 个无穷点，并在洞中填入型为 $6^u(m-6(u-1))^1$ 的 4-GDD（定理 2.10），这样我们就得到了所需要的型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.4: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 45$，型为 $18^6 m^1$ 的 4-GDD 都存在。

证明. 对于 $30 \le m \le 45$ 的情形，见引理 2.3。对于 $m = 0, 9, 18, 27$，由定理 2.10，存在型为 $6^6(m/3)^1$ 的 4-GDD，应用 WFC 并赋权 3 就可得到所要的型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD。

对于剩下的值，我们在集合 $\mathbb{Z}_{108} \cup M$ 上构造所要的设计。它们的组是 $\{\{0,6,12,\ldots,102\}+i : 0 \le i \le 5\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{108}$ 的元素 $+1 \pmod{108}$ 或 $+2 \pmod{108}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到了所要的区组集。

$18^6 3^1$:

$+1 \pmod{108}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	16	60	99	1	59	63	100	1	22	69	107
1	30	52	83	1	2	29	36	1	76	90	93
1	21	66	77	1	6	14	a_0				

$18^6 6^1$:

$+2 \pmod{108}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_3)$

2	55	89	102	2	48	87	103	2	17	27	60
2	33	34	47	2	3	30	53	1	9	47	88
2	13	22	99	2	9	11	76	1	18	40	89
2	12	91	106	1	4	6	41	2	18	21	65
2	19	70	75	5	33	37	a_0	4	30	74	a_0
5	54	87	b_0	1	26	82	b_0				

$18^6 12^1$:

$+2 \pmod{108}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_6)$

1	5	84	93	1	6	8	82	2	54	65	75
2	37	45	89	2	5	39	106	2	30	81	94
2	3	28	41	1	44	52	90	1	3	20	78
1	41	42	56	1	10	27	59	9	42	103	a_0
1	24	29	a_0	10	87	98	a_0	11	64	104	a_0
1	4	63	b_0	5	32	42	b_0	12	59	98	b_0
7	70	93	b_0								

$18^6 15^1$:

$+1 \pmod{108}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_6)$

1	57	89	90	1	60	83	100	1	40	45	47
1	56	81	94	1	38	42	52	3	34	37	a_0
2	23	45	a_0	8	58	105	a_0	1	64	93	b_0
2	29	102	b_0								

$18^6 21^1$:

$+1 \pmod{108}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_6) \cup (\{c,d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	20	41	64	1	2	34	99	1	39	53	70
1	4	38	105	6	11	26	a_0	3	16	32	a_0
1	9	58	a_0	1	82	107	b_0	6	15	68	b_0
6	53	79	c_0	1	23	51	d_0				

$18^6 24^1$:

$+2 \pmod{108}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_6) \cup (\{c,d,e\} \times \mathbb{Z}_3)$

2	12	16	49	1	3	92	0	1	5	38	87
2	22	54	89	1	12	51	80	2	25	33	65
2	7	59	102	17	20	63	a_0	6	59	75	a_0
15	25	40	a_0	12	14	73	a_0	10	44	65	a_0
13	36	106	a_0	11	25	45	b_0	7	26	90	b_0
16	89	96	b_0	3	8	70	b_0	5	18	68	c_0
1	81	82	c_0	15	42	53	d_0	4	26	103	d_0
4	13	30	e_0	14	21	65	e_0				

$\square$

引理 2.5: 对任意 $u \geq 4$，$u \equiv 0 \pmod 2$ 并且 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \leq m \leq 9(u-1)$，型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

证明. 对于 $6(u-1) \leq m \leq 9(u-1)$，见引理 2.3。对任意 $0 \leq m \leq 6(u-1)$ 且 $u \notin \{6, 68\}$，由定理 1.8 存在型为 6^u 的 4-RGDD。补全所有平行类可以得到一个型为 $6^u(2u-2)^1$ 的 5-GDD。对最后一个组中的点赋权 0 或 3，对其他点赋权 3，注意到型为 3^4 和 3^5 的 4-GDD 均存在（定理 1.1），应用 WFC 就可以得到所要的型为 $18^u m^1$ 的 4-GDD。最后，$u = 6$ 的情形见引理 2.4；$u = 68$ 的情形见定理 1.4。 □

综合引理 2.5 以及定理 1.4, 我们仅需考虑 $u \equiv 1 \pmod 2$ 并且 $u \in [5, 77] \cup \{93, 95, 97, 117\}$ 的情况。下面我们来处理这些情况。

引理 2.6: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 36$，型为 $18^5 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. $24 \leq m \leq 36$ 的情形见引理 2.3。对于 $m \in \{0, 9, 18\}$，由定理 2.10，型为 $6^5(m/3)^1$ 的 4-GDD 存在，应用 WFC 并赋权 3。对于 $m = 6$，由定理 2.2 型为 $(18, 3^6)^5$ 的 4-DGDD 存在，在它的洞中填入型为 $3^5 6^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $m = 3, 12, 15, 21$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{90} \cup M$ 上构造所要设计。它们的组是 $\{\{0, 5, 10, \ldots, 85\} + i : 0 \leq i \leq 4\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{90}$ 的元素 $+1 \pmod{90}$ 或 $+2 \pmod{90}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到所要的区组集。

$18^5 3^1$:

$+2 \pmod{90}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_3)$

14	25	36	77	4	66	30	33	1	70	78	82
2	55	33	19	16	77	34	58	11	19	42	43
9	57	30	53	18	62	11	24	13	1	75	19
11	52	20	54	2	89	18	1	4	37	11	a_0
9	48	62	a_0								

$18^5 12^1$:

$+1 \pmod{90}$; $M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_6)$

1	13	54	67	1	15	58	74	1	43	69	87
1	57	84	85	3	35	54	a_0	2	31	40	a_0
6	14	17	b_0	1	3	70	b_0				

$18^5 15^1$:

$+2 \pmod{90}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b, c\} \times \mathbb{Z}_3)$

2	23	40	41	2	9	13	15	2	29	50	53
2	20	83	86	2	34	70	78	1	12	14	45
1	37	53	65	12	21	53	a_0	4	16	33	a_0
10	44	67	a_0	2	18	55	a_0	11	45	59	a_0
6	25	32	a_0	14	73	81	b_0	6	10	53	b_0
12	61	83	c_0	2	63	64	c_0				

$18^5 21^1$:

$+2 \pmod{90}$; $M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

5	38	2	31	18	42	46	24	13	85	1	37
5	56	67	68	1	5	42	74	6	47	13	a_0
1	72	69	a_0	10	12	71	a_0	8	52	9	a_0
7	74	21	a_0	14	40	23	a_0	9	53	1	b_0
7	84	65	b_0	6	49	58	b_0	16	50	2	b_0
3	62	5	b_0	10	18	87	b_0	16	67	0	c_0
2	65	81	c_0								

□

引理 2.7: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 54$，型为 $18^7 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. $36 \le m \le 54$ 的情形见引理 2.3。对于 $m \in \{0, 9, 18, 27\}$，型为 $6^7(m/3)^1$ 的 4-GDD 存在（定理 2.10），应用 WFC 并赋权 3。对于 $m = 3$，由定理 2.2 型为 $(18, 3^6)^7$ 的 4-DGDD 存在，在它的洞中填入型为 3^8 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于剩下的值，我们在集合 $\mathbb{Z}_{126} \cup M$ 上构造所要设计。它们的组是 $\{\{0, 7, 14, \ldots, 119\} + i : 0 \le i \le 6\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{126}$ 的元素 $+1 \pmod{126}$ 或 $+2 \pmod{126}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到所要的区组集。

$18^7 6^1$:

$+1 \pmod{126}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_6)$

0	8	33	46	0	10	62	110	0	60	92	103
0	87	111	117	0	72	73	123	0	18	20	47
0	19	59	114	0	68	85	90	3	40	85	a_0
0	65	122	a_0								

$18^7 12^1$:

$+1 \pmod{126}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_3)$

0	9	108	123	0	2	8	54	0	22	75	100
0	13	32	82	0	17	62	102	0	11	90	106
0	58	96	125	0	4	43	a_0	6	66	71	a_0
1	11	104	a_0	3	37	74	b_0				

$18^7 15^1$:

$+2 \pmod{126}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b, c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	94	98	118	1	32	51	68	0	25	80	93
1	16	116	124	1	12	27	73	0	12	53	55
0	64	65	66	1	5	41	65	1	7	76	115
0	75	97	107	0	69	96	113	1	26	48	53
0	38	86	92	12	35	94	a_0	7	44	117	a_0
11	19	49	a_0	10	95	104	a_0	3	6	51	a_0
2	54	70	a_0	5	39	44	b_0	12	43	88	b_0
1	21	44	c_0	5	84	94	c_0				

$18^7 21^1$:

$+2 \pmod{126}$; $M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	14	62	72	1	21	48	61	0	34	52	124
0	31	43	86	0	27	94	102	0	25	103	121
0	57	76	93	1	73	81	83	0	47	64	73
0	16	45	104	1	65	89	90	13	22	117	a_0
6	102	106	a_0	8	11	69	a_0	0	41	75	a_0
17	20	32	a_0	1	7	46	a_0	4	10	15	b_0
12	32	78	b_0	7	18	57	b_0	1	38	53	b_0
11	52	121	b_0	8	9	41	b_0	2	46	99	c_0
6	25	29	c_0								

$18^7 24^1$:

$+1 \pmod{126}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{18}) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_6)$

0	3	85	110	0	43	66	76	0	12	58	73
0	18	90	124	0	22	51	96	0	38	109	a_0
14	76	103	a_0	8	34	65	a_0	9	17	41	a_0
6	7	12	a_0	3	51	118	a_0	0	47	87	b_0
7	16	20	b_0								

$18^7 30^1$:

$+1 \pmod{126}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{18}) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

0	44	80	104	0	39	43	54	0	68	108	113
0	38	65	71	16	42	95	a_0	3	22	97	a_0
1	32	110	a_0	8	11	100	a_0	15	84	125	a_0
13	63	72	a_0	0	52	62	b_0	1	13	119	b_0
5	6	102	b_0	14	16	39	c_0				

$18^7 33^1$:

$+2 \pmod{126}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{21}) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	12	97	116	0	15	16	88	0	61	71	73
0	40	52	65	1	55	70	89	0	20	46	75
1	67	104	107	15	60	108	a_0	36	38	105	a_0
9	53	77	a_0	23	69	87	a_0	14	64	82	a_0
12	44	48	a_0	41	68	115	a_0	37	50	84	a_0
17	20	117	a_0	4	28	34	a_0	1	91	123	a_0
19	25	58	a_0	13	30	89	a_0	10	74	113	a_0
27	108	116	b_0	2	7	29	b_0	3	120	121	b_0
1	86	96	b_0	23	28	71	b_0	22	88	105	b_0
9	40	84	c_0	1	17	26	c_0				

□

引理 2.8: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 72$，型为 $18^9 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $18 \leq m \leq 72$，由定理 2.8 存在 $\mathrm{TD}(10,9)$，对最后一个组中的点赋予权重 2，5 或者 8，对其他点赋权 2，由于型为 2^{10}，$2^9 5^1$ 以及 $2^9 8^1$ 的 4-GDD 均存在（定理 1.3），应用 WFC 就可得到所要的型为 $18^9 m^1$ 的 4-GDD。对于 $m = 0, 6, 12$，由定理 2.2 型为 $(18, 3^6)^9$ 的 4-DGDD 存在，在它的洞中填入型为 $3^9 m^1$ 的 4-GDD 就

可得到所要设计。对于 $m=9$，型为 $6^9 3^1$ 的 4-GDD 存在（定理 2.10），应用 WFC 并赋权 3。

最后，对于 $m \in \{3,15\}$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{162} \cup M$ 上构造所要设计。它们的组是 $\{\{0,9,18,\ldots,153\}+i : 0 \le i \le 8\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{162}$ 的元素 +2 (mod 162) 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 +1 (mod n) 展开，就得到所要的区组集。

$18^9 3^1$:

$M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	146	31	144	4	161	69	97	4	17	59	34
4	88	129	98	4	154	96	122	2	131	13	125
3	7	145	92	0	43	35	119	4	10	25	107
5	119	157	82	0	141	134	5	3	109	15	14
2	107	156	73	2	82	41	66	0	4	50	110
0	88	57	128	0	66	89	86	2	44	145	113
3	49	151	149	1	23	24	75	2	117	157	50
3	82	104	69	3	18	32	56	2	161	102	a_0
4	91	33	a_0								

$18^9 15^1$:

$M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b,c\} \times \mathbb{Z}_3)$

0	96	118	152	1	26	43	67	1	62	101	111
0	29	61	114	1	41	156	157	1	52	138	152
1	44	90	132	1	56	59	135	1	65	69	70
0	91	103	105	1	75	94	106	0	64	115	156
0	5	43	145	0	33	82	147	0	26	123	158
0	8	40	68	1	17	92	142	1	31	38	51
0	84	151	159	6	139	152	a_0	16	71	155	a_0
5	72	87	a_0	9	112	136	a_0	3	37	146	a_0
12	14	97	a_0	8	28	66	b_0	15	41	85	b_0
13	119	152	c_0	0	52	141	c_0				

□

引理 2.9: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le 90$ 且 $m \notin \{21,24,30,42,48,51,57\}$，型为 $18^{11} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. $60 \le m \le 90$ 的情形见引理 2.3。对于 $m \equiv 0 \pmod 9$ 且 $0 \le m \le 54$，型为 $6^{11}(m/3)^1$ 的 4-GDD 存在（定理 2.10），应用 WFC 并赋权 3。对于 $m = 3, 15$，由定理 2.2 型为 $(18, 3^6)^{11}$ 的 4-DGDD 存在，在它的洞中填入型为 $3^{11}m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $m = 33, 39$，我们由型为 $3^5 6^1$ 的 4-GDD 出发，删去一个大小为 3 的组得到一个型为 $3^4 6^1$ 的 $\{3,4\}$-GDD，其中所有大小为 3 的区组可以划分成 3 个平行类。对每一点赋权 11，应用构造 2.4，利用型为 11^4 的 4-MGDD 和型为 11^3 的可分解 3-MGDD（定理 2.2 和 2.3），得到型为 $(33, 3^{11})^4(66, 6^{11})^1$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，这里所有大小为 3 的区组可以划分成 30 个平行类。添加 30 个无穷点补全这些平行类。额外再添加 $m-30$ 个点，在每个组以及这 $m-30$ 个点上构造型为 $3^{11}(m-30)^1$ 或者 $6^{11}(m-30)^1$ 的 4-GDD（定理 1.3）。这样我们就得到了所要的设计。

最后，对于 $m \in \{6, 12\}$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{198} \cup M$ 上构造所要设计。它们的组是 $\{\{0, 11, 22, \dots, 187\} + i : 0 \le i \le 10\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{198}$ 的元素 $+1 \pmod{198}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开，就得到所要的区组集。

$18^{11}6^1$:

$M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_6)$

0	73	167	196	0	45	61	114	0	27	41	191
0	4	126	156	0	128	146	195	0	10	103	189
0	35	148	174	0	32	57	140	0	54	101	190
0	12	17	80	0	20	56	158	0	38	116	197
0	23	74	87	0	37	43	170	1	22	101	a_0
0	92	183	a_0								

$18^{11}12^1$:

$M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_6)$

0	2	27	149	0	19	29	153	0	14	67	142
0	4	63	94	0	98	158	190	0	13	54	82
0	23	150	186	0	1	152	178	0	24	119	137
0	3	87	192	0	30	37	126	0	86	148	164
0	58	73	115	4	105	122	a_0	1	156	161	a_0
3	68	120	b_0	1	40	131	b_0				

□

引理 2.10: 设 $m \in \{21, 24, 30, 42, 48, 51, 57\}$，则型为 $18^{11}m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 我们首先构造型为 $(18, 3^6)^{11}$ 的 $\{3, 4\}$-DGDD，其中大小为 3 的区组可以划分成 p 个平行类，这里 $p \in \{12, 21, 33, 42\}$。该设计的点集为 $\mathbb{Z}_{198}$，组为 $\{\{0, 11, 22, \ldots, 187\} + i : 0 \le i \le 10\}$，洞为 $\{\{0, 6, 12, \ldots, 192\} + i : 0 \le i \le 5\}$。我们把基区组列在表格 2.1 中。这个表格由三列组成：第一列指明生成这个设计所需要的群；第二列是一个整除 198 的整数 u，并且在第三列中，相应基区组中的元素模 u 不同，这样这些基区组在 u 生成的循环群的作用下形成一个平行类。

现在我们可以添加 p 个点去补全这些平行类。再额外添加 a 个点，$a = 3, 9, 15$，在每个洞以及这 a 个点上构造型为 $3^{11}a^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了所要的型为 $18^{11}m^1$ 的 4-GDD，这里 $m = p + a$。 □

综合引理 2.9 和 2.10，我们有：

引理 2.11: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 90$，型为 $18^{11}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

引理 2.12: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le 108$ 且 $m \notin \{39, 51, 57, 60, 66, 69, 99, 105\}$，型为 $18^{13}m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 对于 $72 \le m \le 108$ 且 $m \ne 99, 105$ 的情形，见引理 2.3。对于 $0 \le m \le 36$，我们由一个型为 3^{15} 的 7-GDD[11]出发，删去一个组得到型为 3^{14} 的 $\{6, 7\}$-GDD，给一个组中的点赋予权重 $0, 3, 6, 9, 12$，对其他点赋权 6，应用 WFC 我们就可得到所要的设计。对于 $m \equiv 0 \pmod 9$ 且 $0 \le m \le 63$，将 WFC 应用到型为 $6^{13}(m/3)^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

最后，对于 $m = 42, 48$，由一个型为 $3^5 6^1$ 的 4-GDD 出发，删去一个组得到一个型为 $3^4 6^1$ 的 $\{3, 4\}$-GDD，其中大小为 3 的区组可以划分成 3 个平行类。对每一点赋权 13，应用构造 2.4，利用型为 13^4 的 4-MGDD 和型为 13^3 的可分解 3-MGDD（定理 2.2 和 2.3）我们可以得到一个型为 $(39, 3^{13})^4(78, 6^{13})^1$ 的 $\{3, 4\}$-DGDD，这里所有大小为 3 的区组可以划分成 36 个平行类。添加 36 个无穷点补全这些平行类。

表 2.1　型为 $(18, 3^6)^{11}$ 的 $\{3, 4\}$-DGDD 的基区组

	u	基区组			
$p = 12$	−	$0, 26, 35, 100$	$1, 60, 153, 154$	$0, 20, 63, 157$	$1, 29, 112, 165$
$+2 \pmod{198}$		$1, 27, 48, 143$	$0, 1, 51, 179$	$1, 44, 126, 185$	$0, 37, 112, 135$
		$0, 47, 148, 188$	$0, 32, 49, 161$	$0, 75, 91, 184$	$0, 46, 80, 147$
		$0, 2, 29, 142$	$0, 109, 117, 149$	$1, 54, 59, 69$	$1, 39, 118, 134$
		$0, 62, 169, 173$	$0, 113, 128, 189$	$1, 116, 119, 192$	$0, 4, 134, 175$
		$1, 32, 40, 53$			
	6	$1, 68, 93$	$0, 52, 71$		
	6	$5, 7, 10$	$2, 33, 162$		
	6	$2, 129, 193$	$5, 18, 124$		
	6	$0, 28, 181$	$2, 41, 165$		
$p = 21$	−	$11, 148, 42, 147$	$10, 161, 156, 158$	$9, 54, 169, 140$	
$+1 \pmod{198}$		$11, 106, 74, 60$	$9, 32, 67, 60$	$15, 143, 133, 106$	
		$11, 188, 120, 184$	$5, 187, 147, 74$	$0, 19, 53, 94$	
	9	$2, 129, 121$	$16, 98, 55$	$5, 105, 18$	
	6	$13, 110, 191$	$16, 138, 81$		
	6	$9, 68, 192$	$13, 185, 4$		
$p = 33$	−	$17, 93, 175, 162$	$17, 178, 14, 73$	$15, 145, 5, 54$	$0, 14, 43, 89$
$+1 \pmod{198}$		$17, 69, 49, 184$	$16, 143, 122, 9$	$17, 174, 74, 79$	
	18	$0, 117, 16$	$13, 86, 131$	$6, 8, 73$	
		$17, 177, 2$	$12, 4, 21$	$7, 119, 154$	
	9	$17, 190, 111$	$6, 34, 185$	$11, 81, 85$	
	6	$4, 30, 3$	$2, 139, 89$		
$p = 42$	−	$8, 72, 76, 133$	$2, 161, 147, 54$	$15, 197, 160, 97$	$0, 20, 67, 153$
$+2 \pmod{198}$		$16, 55, 90, 135$	$16, 121, 6, 191$	$11, 153, 151, 42$	$8, 94, 66, 51$
		$2, 89, 25, 94$	$11, 130, 135, 128$	$1, 95, 104, 136$	
	18	$8, 57, 83$	$9, 70, 36$	$10, 7, 41$	
		$12, 130, 159$	$1, 53, 110$	$13, 176, 114$	
	18	$14, 33, 6$	$0, 21, 173$	$2, 16, 174$	
		$13, 89, 81$	$10, 26, 25$	$1, 5, 76$	
	18	$12, 82, 85$	$16, 168, 185$	$17, 183, 98$	
		$14, 145, 162$	$9, 115, 56$	$4, 29, 69$	
	18	$1, 161, 60$	$4, 13, 183$	$8, 108, 59$	
		$16, 120, 176$	$2, 115, 105$	$9, 29, 136$	
	6	$2, 163, 15$	$11, 10, 126$		
	6	$2, 179, 43$	$6, 82, 75$		

额外再添加 $m-36$ 个点，在每个组以及这 $m-36$ 个点上构造型为 $3^{13}(m-36)^1$ 或者 $6^{13}(m-36)^1$ 的 4-GDD（定理 1.3）。这样我们就得到了所要的设计。 □

引理 2.13: 设 $m \in \{39, 51, 57, 60, 66, 69, 99, 105\}$，则型为 $18^{13}m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 对于 $m = 99, 105$，我们首先构造型为 $(18, 3^6)^{13}$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，其中大小为 3 的区组可以划分成 87 个平行类。该设计的点集为 $\mathbb{Z}_{234}$，组为 $\{\{0, 13, 26, \ldots, 221\} + i : 0 \le i \le 12\}$，洞为 $\{\{0, 6, 12, \ldots, 228\} + i : 0 \le i \le 5\}$。我们把所要设计的基区组列在表格 2.2 中。这个表格由三列组成：第一列指明生成这个设计所需要的群；第二列是一个整除 234 的整数 u，并且在第三列中，相应基区组中的元素模 u 不同，这样这些基区组在 u 生成的循环群的作用下形成一个平行类。

表 2.2 型为 $(18, 3^6)^{13}$ 的 $\{3,4\}$-DGDD 的基区组

	u	基区组		
$+2 \pmod{234}$	–	$0, 15, 164, 217$		
	18	$6, 79, 82$	$4, 123, 55$	$0, 47, 214$
		$5, 182, 9$	$8, 71, 57$	$14, 175, 30$
	18	$8, 197, 39$	$4, 5, 175$	$15, 187, 216$
		$10, 158, 60$	$9, 160, 174$	$11, 2, 217$
	18	$17, 142, 78$	$8, 126, 149$	$1, 2, 76$
		$7, 86, 183$	$12, 191, 117$	$10, 195, 175$
	18	$14, 125, 106$	$5, 231, 139$	$1, 114, 99$
		$8, 137, 162$	$12, 218, 94$	$10, 147, 97$
	18	$8, 43, 83$	$13, 131, 6$	$9, 40, 163$
		$14, 17, 39$	$16, 54, 182$	$15, 136, 102$
	18	$17, 40, 152$	$2, 204, 47$	$16, 45, 72$
		$12, 115, 14$	$10, 3, 1$	$5, 157, 195$
	18	$4, 138, 155$	$17, 136, 141$	$2, 199, 6$
		$5, 99, 205$	$13, 70, 116$	$14, 3, 36$
	18	$2, 228, 185$	$17, 208, 33$	$1, 72, 225$
		$13, 80, 168$	$16, 155, 43$	$14, 147, 58$
	18	$15, 36, 163$	$6, 64, 17$	$4, 99, 176$
		$2, 23, 201$	$16, 26, 97$	$13, 83, 210$
	6	$2, 57, 142$	$5, 198, 193$	
	6	$4, 139, 198$	$17, 105, 158$	

现在我们可以添加 87 个点去补完这些平行类。再额外添加 a 个点，$a = 12, 18$，在每个洞以及这 a 个点上构造型为 $3^{13}a^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了所要的 4-GDD。

对于 $m \in \{39, 51, 57, 60, 66, 69\}$，过程类似，我们先构造型为 6^{13} 的 $\{3,4\}$-

表 2.3　型为 6^{13} 的 $\{3,4\}$-MGDD 的基区组

	u	基区组			
$p/3=9$	$-$	$1,4,33,41$	$2,59,66,75$	$2,30,34,51$	$2,7,9,60$
$+2 \pmod{78}$		$1,21,64,65$	$2,43,53,0$	$1,10,32,48$	
	6	$3,22,25$	$5,38,72$		
	6	$2,57,72$	$5,22,55$		
	6	$3,7,62$	$4,71,72$		
$p/3=15$	$-$	$1,59,70,74$	$1,22,65,72$	$1,44,75,0$	
$+2 \pmod{78}$		$1,35,52,54$	$1,33,38,58$		
	6	$1,3,62$	$4,41,72$		
	6	$2,24,64$	$3,43,53$		
	6	$2,5,13$	$3,4,36$		
	6	$6,20,75$	$4,37,53$		
	6	$1,23,50$	$3,58,66$		
$p/3=18$	$-$	$1,32,72,76$	$1,21,29,58$		
$+1 \pmod{78}$	6	$4,31,47$	$6,21,38$		
	6	$3,5,28$	$1,6,20$		
	6	$1,46,68$	$3,71,72$		
$p/3=21$	$-$	$1,26,59,60$	$2,22,37,65$	$1,54,56,57$	
$+2 \pmod{78}$	6	$5,16,66$	$3,8,49$		
	6	$6,70,74$	$3,17,19$		
	6	$5,39,46$	$1,32,72$		
	6	$5,14,22$	$6,55,63$		
	6	$3,50,77$	$1,24,70$		
	6	$4,63,66$	$2,7,47$		
	6	$1,58,69$	$2,24,53$		

MGDD，其中大小为 3 的区组可以划分成 $p/3$ 个平行类，$p\in\{27,45,54,63\}$。然后对每个点赋权 3 得到一个型为 $(18,3^6)^{13}$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，大小为 3 的区组可以划分成 p 个平行类。补全这些平行类，再添加 a 个点，$a=6,12$，在每个洞以及这 a 个点上构造型为 $3^{13}a^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了所要的设计。这里需要的 $\{3,4\}$-MGDD 在点集 $\mathbb{Z}_{78}$ 上构造，组为 $\{\{0,13,26,\dots,65\}+i:0\le i\le 12\}$，洞为 $\{\{0,6,12,\dots,72\}+i:0\le i\le 5\}$。我们把基区组列在表格 2.3 中。

□

综合引理 2.12 和 2.13，我们有：

引理 2.14: 对任意 $m\equiv 0 \pmod 3$ 且 $0\le m\le 108$，型为 $18^{13}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

引理 2.15: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 126$，型为 $18^{15}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $18 \le m \le 126$，由定理 2.8 存在 TD(6,9)，对最后一个组中的点赋予权重 $0,3,6,9,12$，对其他点赋权 6，应用 WFC 可以得到型为 $54^5(m-18)^1$ 的 4-GDD。添加 18 个点，在每个大小为 54 的组中填入一个型为 18^4 的 4-GDD，这样就得到了型为 $18^{15}m^1$ 的 4-GDD。对于 $0 \le m \le 15$，由引理 2.11 存在型为 $18^{11}(72+m)^1$ 的 4-GDD，在大小为 $72+m$ 的组中填入一个型为 18^4m^1 的 4-GDD （定理 1.4）就可得到所要设计。 □

引理 2.16: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 144$，型为 $18^{17}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $96 \le m \le 144$，$m \neq 135$ 的情形，见引理 2.3。对于 $m = 135$，由定理 1.9 存在型为 9^5 的 4-frame，添加三个无穷点来补全三个以最后一个组为洞的不完全平行类。这样我们得到了型为 $9^4 12^1$ 的 $\{4,5\}$-GDD。对这三个无穷点赋予双权重 $(6,0)$，对其他点赋予双权重 $(9,3)$，由于型为 $(9,3)^4(6,0)^1$ 和 $(9,3)^4$ 的 4-IGDD 均存在（引理 2.1），这样我们就可以得到一个型为 $(81,27)^4(99,27)^1$ 的 4-IGDD。再额外添加 18 个点并在每个组中填入型为 $18^4 27^1$ 或者 $18^5 27^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了型为 $18^{17}135^1$ 的 4-GDD。

对于 $36 \le m \le 93$，由定理 2.8 存在 TD(6,12)，对前四个组中的点赋权 6，对第五个组中的点赋权 0 或 6，对最后一个组中的点赋权 3，6 或 9，由于型为 6^4a^1 以及 6^5a^1 的 4-GDD 均存在（定理2.10），这里 $a \in \{3,6,9\}$，应用 WFC 可得到型为 $72^4 18^1 m^1$ 的 4-GDD。在大小为 72 的组中填入型为 18^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $m \in \{30,33\}$，我们将会构造型为 6^{17} 的 $\{3,4,5\}$-MGDD，其中大小为 3 的区组可以划分成 $p/3$ 个平行类，$p \in \{18,27\}$。对每个点赋权 3，由于存在型为 3^3 的 3-RGDD 以及型为 3^4 和 3^5 的 4-GDD，我们就可以得到型为 $(18,3^6)^{17}$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，并且大小为 3 的区组可以划分成 p 个平行类。补全这些平行类，再额外添加 a 个点，$a = 12$ 或 6，在每个洞以及这 a 个点上构造型为 $3^{17}a^1$ 的 4-GDD，

表 2.4　型为 6^{17} 的 $\{3,4,5\}$-MGDD 的基区组

	u	基区组			
$p/3=6$	$-$	$6,25,2,34,39$	$10,11,57,12,73$	$2,60,13,41$	$9,61,46,86$
$+2 \pmod{102}$		$12,26,53,64$	$9,67,0,29$	$14,45,49,71$	$10,92,36,3$
		$11,8,24,3$	$0,21,53,80$		
	6	$2,75,73$	$16,6,65$		
	6	$8,16,95$	$1,96,93$		
$p/3=9$	$-$	$7,63,5,76,86$	$15,77,12,62,76$	$15,92,90,34$	$13,18,29,9$
$+2 \pmod{102}$		$10,85,53,86$	$7,42,87,95$	$7,45,74,90$	$10,38,30,23$
		$0,22,71,99$			
	6	$9,0,61$	$17,80,10$		
	6	$0,47,37$	$2,93,64$		
	6	$2,6,65$	$1,22,27$		

这样我们就得到了所要的设计。我们在点集 $\mathbb{Z}_{102}$ 上构造需要的 $\{3,4,5\}$-MGDD，组为 $\{\{0,17,34,\ldots,85\}+i : 0\le i\le 16\}$，洞为 $\{\{0,6,12,\ldots,96\}+i : 0\le i\le 5\}$。我们把基区组列在表格 2.4 中。

对于 $0\le m\le 27$，由引理 2.14 存在型为 $18^{13}(72+m)^1$ 的 4-GDD，在大小为 $72+m$ 的组中填入一个型为 18^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.17: 设 u 是一个奇数，$u\in[19,77]\cup\{93,95,97,117\}\backslash\{23,27,33,35,37\}$。则对任意 $m\equiv 0 \pmod 3$ 且 $0\le m\le 9u-9$，型为 18^um^1 的 4-GDD 均存在。

证明. 设 $t\in[3,13]\cup\{16,21\}$ 且 $t\ne 6$，则 u 可写为 $u=5t+x+1$，其中 $x=0$ 或 $3\le x\le t$，m 可写为 $m=3n_1+3n_2+\cdots+3n_6$，这里 $0\le n_i\le 3t$，$i=1,2,\ldots,5$ 并且 $0\le n_6\le 3x$。由定理 2.8 存在一个 TD$(6,3t)$。把其中一个组截得 $3x$ 个点得到一个型为 $(3t)^5(3x)^1$ 的 $\{5,6\}$-GDD。应用定理 2.1 可以得到一个型为 $(\prod_{i=1}^5(18t+3n_i,3n_i)^1)(18x+3n_6,3n_6)^1$ 的 4-IGDD。添加 18 个无穷点，在组中填入型为 $18^{t+1}(3n_i)^1$ 或者 $18^{x+1}(3n_6)^1$ 的 4-GDD（引理 2.5–2.16），这样就得到了所要的型为 $18^{5t+x+1}(\sum_{i=1}^6 3n_i)^1\equiv 18^um^1$ 的 4-GDD。 □

现在我们还剩下 $u\in\{23,27,33,35,37\}$ 这几个值需要处理。

引理 2.18: 对任意 $m\equiv 0 \pmod 3$ 且 $0\le m\le 198$，型为 $18^{23}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 首先考虑 $18 \le m \le 198$ 的情形。我们由一个 TD$(6,12)$ 出发，把它的一个组截取一部分剩下 6 个点。应用定理 2.1 得到一个型为 $\prod_{i=1}^{5}(72+3n_i,3n_i)^1(54,18)^1$ 的 4-IGDD，这里 $0 \le n_i \le 12$。添加 18 个无穷点并在组中填入型为 $18^5(3n_i)^1$ 或者 18^4 的 4-GDD，这样就得到了所要的型为 $18^{23}(\sum_{i=1}^{5}3n_i+18)^1$ 的 4-GDD。对于 $0 \le m \le 15$，由引理 2.17 存在型为 $18^{19}(72+m)^1$ 的 4-GDD，在大小为 $72+m$ 的组中填入型为 18^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.19: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 234$，型为 $18^{27}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 首先考察 $18 \le m \le 234$ 的情形。我们由一个 TD$(10,9)$ 出发，对最后一个组中的点赋权 $0,3,6,\ldots,24$，对其他点赋权 6，应用 WFC 我们可以得到型为 $54^9(m-18)^1$ 的 4-GDD。添加 18 个无穷点并在组中填入型为 18^4 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $18^{27}m^1$ 的 4-GDD。对于 $0 \le m \le 15$，由引理 2.18 存在型为 $18^{23}(72+m)^1$ 的 4-GDD，在大小为 $72+m$ 的组中填入型为 18^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.20: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 288$，型为 $18^{33}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $192 \le m \le 288$ 的情形，见引理 2.3。对于 $18 \le m \le 189$，由一个 TD$(10,11)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $9^{11}11^1$ 的 $\{10,12\}$-GDD。这里要注意的是每个大小为 12 的区组都与大小为 11 的组相交于无穷点 ∞，每个大小为 10 的区组也都与大小为 11 的组相交，但不交于无穷点 ∞。现在，在大小为 11 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{0,3,6,\ldots,18\}$，对剩下的点赋权 0 或者 18。对这个设计其他的点赋权 6。由于型为 6^9，6^918^1 以及 $6^{11}a^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到型为 $54^{11}(m-18)^1$ 的 4-GDD。再添加 18 个点，并且在大小为 54 的组中填入型为 18^4 的 4-GDD 就得到所要的型为 $18^{33}m^1$ 的 4-GDD。最后，对于 $0 \le m \le 15$，由引理 2.17 存在型为 $18^{29}(72+m)^1$ 的 4-GDD，在大小为 $72+m$ 的组中填入型为 18^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.21: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 306$，型为 $18^{35}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由一个 TD(6, 7) 出发，对前五个组中的点赋权 18，对最后一个组中的点赋权 $0, 3, 6, \ldots, 36$，应用 WFC 我们可以得到一个型为 126^5x^1 的 4-GDD，其中 $x \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le x \le 252$；这里所需要的输入设计已在引理 2.6 中得到。现在添加 y 个无穷点，$y \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le y \le 54$，在大小为 126 的组中填入型为 18^7y^1 的 4-GDD，我们就得到了所要的型为 $18^{35}(x+y)^1 \equiv 18^{35}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.22: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 324$，型为 $18^{37}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由定理 1.8 存在型为 12^7 的 4-RGDD，把所有平行类补全得到一个型为 12^724^1 的 5-GDD。应用定理 2.1，我们可以得到一个型为 $\prod_{i=1}^{7}(72+3n_i, 3n_i)^1(144+3n_8, 3n_8)^1$ 的 4-IGDD，这里 $0 \le n_i \le 12$，$1 \le i \le 7$，$0 \le n_8 \le 24$。添加 18 个无穷点，在每个组中填入型为 $18^5(3n_i)^1$ 或者 $18^9(3n_8)^1$ 的 4-GDD 我们就得到了所要的 4-GDD。 □

综合定理 1.4 以及引理 2.5–2.22，我们有下述结论。

定理 2.11: 对任意 $u \ge 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 9u-9$，型为 18^um^1 的 4-GDD 均存在。

2.2.3 型为 36^um^1 的 4-GDD

在本节中，我们将证明型为 36^um^1 的 4-GDD 存在的必要条件也是充分的。

定理 2.12: 对任意 $u \ge 4$ 并且 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le 18u-18$，型为 36^um^1 的 4-GDD 均存在。

证明. 先来考察 $0 \le m \le 12u-12$ 的情形。由定理 1.8，存在型为 12^u 的 4-RGDD，补全所有的平行类得到一个型为 $12^u(4u-4)^1$ 的 5-GDD。对大小为 $4u-4$ 的组中的点赋权 0 或 3，对其他点赋权 3，应用 WFC 就可得到所要设计。

对于 $12u-9 \le m \le 18u-18$，由型为 12^u 的 3-RGDD 出发，对所有点赋权 3，

利用型为 3^3 的可分解 3-MGDD 可以得到型为 $(36,12^3)^u$ 的可分解 3-DGDD。补全所有平行类并在洞中填入型为 $12^u(m-12(u-1))^1$ 的 4-GDD 就可得到型为 $36^u m^1$ 的 4-GDD。 □

2.2.4 一般的 $g \equiv 0 \pmod 6$ 情形

在本节中，我们将讨论一般的型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 的存在性问题。由于 $t = \{1,2,3,4,6\}$ 的情形已在定理 1.3 以及 2.10–2.12 中讨论了，在本节的构造中我们都仅讨论 $t \geq 5$ 且 $t \neq 6$ 的情况。首先，利用构造 2.6 我们可以得到绝大部分的 GDD。令 $E = \{13,17,19,23\}$。

引理 2.23: 设 $u \geq 4, u \notin \{6\} \cup E$ 且 $t \geq 2, t \notin E$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 3t(u-1)$，型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们将 m 写为 $m = m_0(u-1)+m_1$，这里 $m_0, m_1 \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $0 \leq m_0 \leq 3(t-1), 0 \leq m_1 \leq 3(u-1)$。根据定理 2.10，存在型为 $6^t m_0^1$ 以及 $6^u m_1^1$ 的 4-GDD。应用构造 2.6(i)，取 $g = 6, v = t$ 就可得到型为 $(6t)^u(m_0(u-1)+m_1)^1 \equiv (6t)^u m^1$ 的 4-GDD。 □

在引理 2.23 的证明中，如果 t 是偶数，我们可以用型为 $12^{t/2} m_0^1$ 以及 $12^u m_1^1$ 的 4-GDD 作为输入设计得到下述结论。

引理 2.24: 设 $t \equiv 0 \pmod 2, u \geq 4$ 并且 $u \neq 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3, 0 \leq m \leq 3t(u-1)$，型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

引理 2.25: 设 $t \in E$ 且 $u \geq 4, u \notin E$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3, 0 \leq m \leq 3t(u-1)$，型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 若 $u \geq t-1$，则 $3(u-1)+3 \geq 3(t-1)$。对任意 $m \equiv 0 \pmod 3, 0 \leq m \leq 3t(u-1)$，我们可以把 m 写为 $m = m_0(t-1)+m_2$，其中 $m_0, m_2 \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $0 \leq m_0, m_2 \leq 3(u-1)$。由定理 2.10 存在型为 $6^u m_0^1$ 以及 $6^u m_2^1$ 的 4-GDD。应用构造 2.6(ii) 我们就可以得到型为 $(6t)^u(m_0(t-1)+m_2)^1 \equiv (6t)^u m^1$ 的 4-GDD。

若 $u < t-1$，我们由一个 TD$(u+1,t)$ 出发，对前 u 个组中的点赋权 6，对最

后一个组中的点赋权 $0, 3, 6, \ldots, 3(u-1)$。由于对任意 $i \in \{0, 3, 6, \ldots, 3(u-1)\}$ 型为 $6^u i^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD。 □

综合引理 2.23–2.25，我们有下述结论。

引理 2.26: 设 $u \geq 4$ 且 $u \neq 6$，$t \geq 2$ 并且当 $u \in E$ 时 $t \equiv 0 \pmod 2$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 < m \leq 3t(u-1)$，型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 存在。

下面我们考察引理 2.26 中剩下的情况。

引理 2.27: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 15t$，型为 $(6t)^6 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 首先，对于 $t = 5$，应用构造 2.6(ii)，这里我们取 $g = 6$，$v = 6$，$u = 5$ 就可得到所要设计。对于 $t \geq 7$ 并且 $t \notin \{10, 14, 15, 20, 22, 26, 30, 34, 38, 46\}$，由一个 TD$(7, t)$ 出发（见定理 2.8），对前六个组中的点赋权 6，对最后一个组中的点赋权 $0, 3, \ldots, 15$，由于对任意 $i \in \{0, 3, \ldots, 15\}$，型为 $6^6 i^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 就可得到所要的设计。对于 $t \in \{14, 22, 26, 34, 38, 46\}$，由一个 TD$(7, t/2)$ 出发，对前六个组中的点赋权 12，对最后一个组中的点赋权 $0, 3, \ldots, 30$，由于对任意 $i \in \{0, 3, \ldots, 30\}$，型为 $12^6 i^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 就可得到所要的设计。最后，我们利用构造 2.6(ii) 来处理 $t \in \{10, 15, 20, 30\}$ 的情况，这里我们取 $v = 6$ 并且 $(g, u) \in \{(12, 5), (18, 5), (12, 10), (18, 10)\}$ 即可。 □

现在，对 $t \equiv 0 \pmod 2$，我们已构造出所有型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD。注意到 $t = 3$ 的情况已经在定理 2.11 中解决，本小节剩下的部分中我们仅讨论 t 为奇数且 $t \geq 5$ 的情况。

引理 2.28: 设 $t \equiv 1 \pmod 2$ 且 $t \geq 5$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 54t$，型为 $(6t)^{19} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 将 m 写为 $m = 3n_1 + 3n_2 + \cdots + 3n_6$，这里 $0 \leq n_i \leq 3t$。将定理 2.1 应用于一个 TD$(6, 3t)$ 可以的得到一个型为 $\prod_{i=1}^{6}(18t + 3n_i, 3n_i)^1$ 的 4-IGDD。添加 $6t$ 个

无穷点，在每个组上填入型为 $(6t)^4(3n_i)^1$ 的 4-GDD，我们就可得到所要的型为 $(6t)^{19}(\sum_{i=1}^{6}3n_i)^1 \equiv (6t)^{19}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.29: 设 $t \equiv 1 \pmod 2$ 且 $t \geq 5$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 66t$，型为 $(6t)^{23}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对任意 $6t \leq m \leq 66t$，我们可将 m 写为 $m = 3n_1 + 3n_2 + \cdots + 3n_5 + 6t$，这里 $0 \leq n_i \leq 4t$，$i = 1, 2, \ldots, 5$。由一个 TD$(6, 4t)$ 出发，把它的一个组截去一部分剩下 $2t$ 个点，这样就得到一个型为 $(4t)^5(2t)^1$ 的 $\{5, 6\}$-GDD。应用定理 2.1 得到一个型为 $(\prod_{i=1}^{5}(24t + 3n_i, 3n_i)^1)(18t, 6t)^1$ 的 4-IGDD。添加 $6t$ 个无穷点，在每个组上填入型为 $(6t)^5(3n_i)^1$ 或 $(6t)^4$ 的 4-GDD，我们就得到所要的型为 $(6t)^{23}(\sum_{i=1}^{5}3n_i + 6t)^1 \equiv (6t)^{23}m^1$ 的 4-GDD。对于 $0 \leq m < 6t$ 的情形，由引理 2.28，存在型为 $(6t)^{19}(24t + m)^1$ 的 4-GDD，在大小为 $24t + m$ 的组中填入一个型为 $(6t)^4m^1$ 的 4-GDD 就得到我们所要的设计。 □

综合引理 2.26–2.29 我们有下述结果。

引理 2.30: 设 $u \geq 4$ 且 $u \notin \{13, 17\}$，$t \geq 2$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 3t(u-1)$，型为 $(6t)^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

最后，我们来考察 $u \in \{13, 17\}$ 的情形。我们将会对一个 TD$(u + 1, t)$ 赋予合适的权重，应用 WFC 来解决大部分情况。然而，当 t 含有比较小的素因子的时候，不妨设为 p，TD$(u + 1, t)$ 的存在性是未知的。对于这种情况我们将利用构造 2.6(i) 以及型为 $(6p)^u m^1$ 的 4-GDD 来得到所要的设计。现在我们先来构造一些型为 $(6p)^u m^1$ 的 4-GDD。

引理 2.31: 设 $p \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$，$u \in \{13, 17\}$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 3p(u-1)$，除了可能的例外值 $p = 13$，$u = 13$ 且 $m = 459, 465$，型为 $(6p)^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由于 $p \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$，$u \in \{13, 17\}$，我们由一个 TD$(p + 1, u)$ 出发，对所有的组添加一个无穷点形成新的区组，同时删去原有的一个点，并利用删去的这个点定义新的组，我们就得到了一个型为 $p^u u^1$ 的 $\{p + 1, u + 1\}$-GDD。这里要注意的

是每个大小为 $u+1$ 的区组都与大小为 u 的组相交于无穷点 ∞，每个大小为 $p+1$ 的区组也都与大小为 u 的组相交，但不交于无穷点 ∞。现在，在大小为 u 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 $3a$，这里 $0 \le a \le u-1$ 并且当 $u=13$ 时 $a \ne 9,11$，当 $u=17$ 时 $a \ne 13$；对剩下的点赋权 $3x_i$，这里 $i=1,2,\dots,u-1$，$0 \le x_i \le p-1$，并且当 $p=13$ 时 $x_i \ne 9,11$。对于这个设计中其他的点赋权 6。由于型为 $6^p(3x_i)^1$ 以及 $6^u(3a)^1$ 的 4-GDD 均存在（定理 2.10），应用 WFC 我们就可以得到所要的 4-GDD。

□

引理 2.32: *设 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le 36t$，且当 g 不被 $12, 18, 30, 42$ 或 66 整除时 $m \notin \{36t-9, 36t-3\}$。则型为 $(6t)^{13}m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 对于 $t = 5,7,9,11$，见引理 2.30–2.31。对于 $t \ge 13$，我们分两种情况讨论：

(i) 当 t 被某一 $p \in \{3,5,7,11\}$ 整除时，我们应用构造 2.6(i)，取 "$g=6p, v=t/p$ 且 $u=13$" 就可得到所要的 4-GDD；这当中所要用到的 GDD 来自于定理 2.11 以及引理 2.30–2.31。

(ii) 当 t 不被任意 $p \in \{3,5,7,11\}$ 整除时，TD$(14,t)$ 存在，对最后一个组中的点赋权 $0,3,6,\dots,21,24,30,36$，对其他点赋权 6，应用 WFC 就得到了型为 $(6t)^{13}m^1$ 的 4-GDD，这里 $m \ne 36t-9, 36t-3$。

□

引理 2.33: *设 $t \ge 2$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le 48t$，型为 $(6t)^{17}m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 对于 $t = 5,7,9,11,13$，见引理 2.30–2.31。对于 $t \ge 15$，我们分两种情况讨论：

(i) 当 t 被某一 $p \in \{3,5,7,11,13\}$ 整除时，我们应用构造 2.6(i)，取 "$g=6p, v=t/p$ 且 $u=17$" 就可得到所要的 4-GDD；这当中所要用到的 GDD 来自于定理 2.11 以及引理 2.30–2.31。

(ii) 当 t 不被任意 $p \in \{3,5,7,11,13\}$ 整除时，TD$(18,t)$ 存在，对最后一个组中的点赋权 $0,3,6,\dots,33,36,42,45,48$，对其他点赋权 6，应用 WFC 就得到了型

为 $(6t)^{17}m^1$ 的 4-GDD，这里 $m \neq 48t-9$。最后，对于 $m = 48t-9$，我们由一个型为 $(3t)^5$ 的 4-frame 出发（定理 1.9），添加 t 个无穷点并补全以最后一个组为洞的不完全平行类，这样就可以得到一个型为 $(3t)^4(4t)^1$ 的 $\{4,5\}$-GDD。我们对其中的三个无穷点赋予双权重 $(6,0)$，对其余的点赋权 $(9,3)$，这样我们就可以得到一个型为 $(27t,9t)^4(36t-9,12t-9)^1$ 的 4-IGDD。再添加 $6t$ 个点并在每个组中填入型为 $(6t)^4(9t)^1$ 或 $(6t)^5(12t-9)^1$ 的 4-GDD，我们就得到了所要的型为 $(6t)^{17}(48t-9)^1$ 的 4-GDD。

□

综合引理 2.30 和 2.32–2.33，我们得到了下面的结果。

定理 2.13: 设 $g \equiv 0 \pmod 6$ 并且 $g \geq 12$。则对任意 $u \geq 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq g(u-1)/2$，除了可能的例外值 $(u,m) \in \{(13,36t-9),(13,36t-3)\}$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

2.3 $g \equiv 2,4 \pmod 6$ 的情形

在本节中，我们将对定理 1.4(v) 中关于 $g \equiv 2,4 \pmod 6$ 的结果做出改进。我们首先考察 $g = 2$ 的情形。

引理 2.34: 型为 $2^{21}17^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{42} \cup M$ 上构造所要的 GDD，它的组是 $\{\{0,21\}+i : 0 \leq i \leq 20\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{42}$ 的元素 $+6 \pmod{42}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到所要 GDD 的区组集。

$2^{21}17^1$:

$+6 \pmod{42}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_7) \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_9\}$

10	5	16	a_0	31	9	24	a_0	36	18	30	a_0
7	37	13	a_0	33	21	39	a_0	22	38	40	a_0
14	20	2	a_0	35	0	1	a_0	34	15	4	a_0
32	19	27	a_0	23	29	41	a_0	11	26	25	a_0
12	17	8	a_0	28	3	6	a_0	3	30	17	∞_0
4	19	38	∞_0	1	39	41	∞_1	0	26	16	∞_1
3	1	32	∞_2	4	11	0	∞_2	2	30	19	∞_3
4	23	39	∞_3	4	8	33	∞_4	0	37	41	∞_4
5	9	2	∞_5	4	12	31	∞_5	4	17	1	∞_6
0	2	33	∞_6	3	11	31	∞_7	2	36	22	∞_7
0	13	10	∞_8	2	3	35	∞_8	0	20	17	∞_9
1	34	33	∞_9	0	9	25	32	3	40	23	0
4	37	32	5								

□

引理 2.35: *型为 $2^{57}44^1$ 的 4-GDD 存在。*

证明. 为了得到所要的设计，我们先在集合 $\mathbb{Z}_{88} \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_{25}\} \cup (\{a\} \times \mathbb{Z}_{44})$ 上构造型为 $2^{44}26^1 44^1$ 的 4-GDD。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{88}$ 的元素 $+2 \pmod{88}$ 展开，元素 $a_0 \in \{a\} \times \mathbb{Z}_{44}$ 的下标 $+1 \pmod{44}$ 展开。这样就得到所要 GDD 的区组集。

$34, 9, \infty_0, a_0$	$47, 68, \infty_1, a_0$	$62, 69, \infty_2, a_0$	$53, 80, \infty_3, a_0$
$55, 12, \infty_4, a_0$	$76, 27, \infty_5, a_0$	$64, 83, \infty_6, a_0$	$16, 29, \infty_7, a_0$
$26, 81, \infty_8, a_0$	$7, 74, \infty_9, a_0$	$60, 37, \infty_{10}, a_0$	$36, 35, \infty_{11}, a_0$
$44, 1, \infty_{12}, a_0$	$51, 48, \infty_{13}, a_0$	$6, 59, \infty_{14}, a_0$	$17, 22, \infty_{15}, a_0$
$66, 77, \infty_{16}, a_0$	$71, 30, \infty_{17}, a_0$	$5, 70, \infty_{18}, a_0$	$63, 4, \infty_{19}, a_0$
$25, 86, \infty_{20}, a_0$	$32, 79, \infty_{21}, a_0$	$65, 78, \infty_{22}, a_0$	$11, 82, \infty_{23}, a_0$
$75, 84, \infty_{24}, a_0$	$13, 8, \infty_{25}, a_0$	$20, 49, 57, a_0$	$18, 33, 3, a_0$
$43, 31, 45, a_0$	$21, 58, 28, a_0$	$73, 38, 39, a_0$	$56, 0, 46, a_0$
$50, 54, 14, a_0$	$19, 15, 85, a_0$	$24, 10, 2, a_0$	$42, 40, 23, a_0$
$87, 41, 67, a_0$	$72, 52, 61, a_0$	$0, 6, 31, 70$	$0, 72, 60, 34$
$1, 4, 61, 37$	$1, 57, 41, 51$		

在上面构造的 GDD 的大小为 26 的组中填入型为 2^{13} 的 4-GDD 就得到了我们所要的设计。 □

综合定理 1.3 以及引理 2.34–2.35，我们有下面的结果。

定理 2.14：对任意 $u \geq 6$，$u \equiv 0 \pmod 3$ 并且 $m \equiv 2 \pmod 3$，$2 \leq m \leq u-1$，除了确定的例外值 $(u,m) = (6,5)$ 以及可能的例外值 $(u,m) \in \{(33,23),(33,29),(39,35)\}$，型为 $2^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

注意到型为 $4^u m^1$ 以及 $8^u m^1$ 的 4-GDD 的存在谱问题已在定理 1.3 中完全解决，所以在下面的证明中我们仅考虑 $g \geq 10$ 的情形。

对于 $u \equiv 0 \pmod{12}$ 的情形，文献[88]中有下述结果。

引理 2.36：设 $g \equiv 2,4 \pmod 6$ 且 $u \equiv 0 \pmod{12}$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq (gu-g)/2$，除了 $u = 12$ 且 $0 < m < g$ 外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

对于 u 模 12 的其他共轭类，我们有下述结果。

引理 2.37：设 $g \equiv 2,4 \pmod 6$，$g \geq 10$ 并且 $u \equiv 0 \pmod 3$，$u \geq 12$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$g \leq m \leq (gu-g)/2$，除了 $(u,m) = (39, 19g-3)$ 外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对任意 $(u,m) \notin \{(39,19g-9),(39,19g-3)\}$，由定理 2.13 存在型为 $(3g)^{u/3}(m-g)^1$ 的 4-GDD。添加 g 个无穷点并在组中填入型为 g^4 的 4-GDD，我们就得到了型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD。

对于 $(u,m) = (39, 19g-9)$，我们由型为 $2^{39}38^1$ 的 4-GDD 出发（定理 2.14），应用构造 2.6(ii)，取“$u = g/2$”并填入型为 $2^{39}29^1$ 的 4-GDD 就得到所要的设计。

□

引理 2.38：设 $g \equiv 2,4 \pmod 6$，$g \geq 10$ 且 $u \equiv 0 \pmod 3$，$u \geq 75$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \geq g$ 的情形，见引理 2.37。对于 $0 < m < g$，由于 $u \geq 75$，由引理 2.37 存在型为 $g^{u-24}(24g+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 $g^{24}m^1$ 的 4-GDD（引理 2.36）就得到所要的设计。□

现在还剩下 $u \equiv 3,6,9 \pmod{12}$ 且 $u \leq 69$ 的情况需要讨论。

引理 2.39: 设 $g \equiv 2, 4 \pmod 6), g \geq 10$ 并且 $u \in \{30, 42, 45, 54, 63, 66\}$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq (gu - g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \geq g$ 的情况，见引理 2.37。对于 $0 < m < g$，我们把 m 写为 $m = s + t$，这里当 $g \equiv 4 \pmod 6$ 时 $s = 1$，当 $g \equiv 2 \pmod 6$ 时 $s = 2$，而 $t \equiv 0 \pmod 3$。对于 $u \in \{30, 42, 54, 66\}$，我们由一个型为 $(6g)^{u/6} t^1$ 的 4-GDD 出发（定理 2.13），添加 s 个无穷点并在组中填入型为 $g^6 s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5），这样我们就得到了型为 $g^u (s + t)^1 \equiv g^u m^1$ 的 4-GDD。对于 $u \in \{45, 63\}$，构造过程类似，我们由一个型为 $(9g)^{u/9} t^1$ 的 4-GDD 出发，填入型为 $g^9 s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5）就得到了所要设计。 □

引理 2.40: 设 $g \equiv 2, 4 \pmod 6$，$g \geq 10$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq 34g$，型为 $g^{69} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \geq g$ 的情况，见引理 2.37。对于 $0 < m < g$，我们把 m 写为 $m = s + t$，这里当 $g \equiv 4 \pmod 6$ 时 $s = 1$，当 $g \equiv 2 \pmod 6$ 时 $s = 2$，而 $t \equiv 0 \pmod 3$。我们由一个 TD$(6, 5)$ 出发，对前四个组中的点赋权 $3g$，对第五个组中的点赋权 0 或 $3g$，对最后一个组中的点赋权 $0, 3, \ldots, 9g/2$。由于型为 $(3g)^4 (3i)^1$ 以及 $(3g)^5 (3i)^1$ 的 4-GDD 存在，$i \in \{0, 1, \ldots, 3g/2\}$，应用 WFC 我们得到了型为 $(15g)^4 (9g)^1 t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个无穷点并在组中填入型为 $g^9 s^1$ 或 $g^{15} s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5）就可得到型为 $g^{69} (s + t)^1 \equiv g^{69} m^1$ 的 4-GDD。 □

为了讨论剩下的情况，我们需要下面的结果。

引理 2.41: 对任意 $m \in \{1, 4, 7\}$，型为 $10^6 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m = 1$ 的情形，见定理 1.5。对于 $m \in \{4, 7\}$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{60} \cup M$ 上构造所要设计。它们的组是 $\{\{0, 6, 12, \ldots, 54\} + i : 0 \leq i \leq 5\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{60}$ 的元素 $+1 \pmod{60}$ 或 $+2 \pmod{60}$ 展开，M 中形如 $a_0 \in \{a\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开，这样就得到所要 GDD 的区组集。注意包含无穷点 ∞ 的基区组展开后生成了短轨道。

$10^6 4^1$:

$+2 \pmod{60}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty\}$			
$0, 4, 21, 37$	$2, 11, 10, 48$	$2, 57, 52, 31$	$1, 14, 30, 33$
$3, 56, 28, 41$	$4, 55, 6, 47$	$5, 51, 40, 55$	$0, 59, 57, a_0$
$4, 38, 31, a_0$	$0, 20, 40, \infty$	$1, 21, 41, \infty$	

$10^6 7^1$:

$+1 \pmod{60}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_6) \cup \{\infty\}$			
$0, 5, 14, 49$	$0, 4, 41, 33$	$0, 15, 22, 32$	$1, 0, 3, a_0$
$5, 26, 52, a_0$	$0, 20, 40, \infty$		

□

引理 2.42: 对任意 $m \equiv 1 \pmod 3$ 且 $0 < m \leq 19$，型为 $22^6 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m = 1$ 的情形，见定理 1.5。对于 $4 \leq m \leq 19$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{132} \cup M$ 上构造所要设计。它们的组是 $\{\{0, 6, 12, \ldots, 126\} + i : 0 \leq i \leq 5\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{132}$ 的元素 $+1 \pmod{132}$ 或 $+2 \pmod{132}$ 展开，M 中形如 $x_0 \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开，这样就得到所要 GDD 的区组集。注意包含无穷点 ∞ 的基区组展开后生成了短轨道。

$22^6 4^1$:

$+2 \pmod{132}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty\}$			
$0, 106, 63, 55$	$0, 15, 41, 116$	$0, 3, 112, 83$	$1, 23, 94, 32$
$1, 82, 65, 128$	$1, 75, 28, 66$	$1, 15, 35, 122$	$3, 106, 102, 92$
$3, 85, 14, 131$	$3, 125, 97, 38$	$3, 19, 6, 56$	$3, 86, 114, 22$
$4, 26, 84, 5$	$5, 7, 102, 46$	$5, 37, 30, 38$	$5, 52, 18, 45$
$5, 118, 61, 120$	$0, 32, 109, a_0$	$3, 65, 70, a_0$	$0, 44, 88, \infty$
$1, 45, 89, \infty$			

$22^6 7^1$:

$+1 \pmod{132}$; $M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty\}$			
$0, 1, 21, 95$	$1, 131, 98, 51$	$1, 110, 71, 124$	$1, 116, 27, 12$
$2, 42, 83, 105$	$2, 107, 7, 126$	$2, 70, 77, 73$	$2, 47, 57, 103$
$0, 25, 98, a_0$	$3, 52, 119, b_0$	$0, 44, 88, \infty$	

$22^6 10^1$:

$+2 \pmod{132}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty\}$			
$0, 4, 11, 63$	$0, 116, 15, 55$	$0, 77, 28, 13$	$0, 103, 86, 111$
$2, 31, 69, 28$	$0, 123, 65, 22$	$0, 37, 51, 122$	$1, 77, 38, 76$
$1, 52, 114, 35$	$2, 114, 75, 107$	$3, 89, 56, 4$	$3, 36, 1, 112$
$4, 31, 128, 54$	$4, 123, 95, 73$	$5, 25, 30, 16$	$4, 87, 91, a_0$
$5, 92, 24, a_0$	$2, 91, 94, b_0$	$5, 75, 0, b_0$	$5, 15, 121, c_0$
$4, 102, 104, c_0$	$0, 44, 88, \infty$	$1, 45, 89, \infty$	

$22^6 13^1$:

$+1 \pmod{132}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_6) \cup \{\infty\}$			
$0, 1, 40, 53$	$1, 95, 105, 74$	$2, 27, 118, 53$	$2, 29, 22, 25$
$2, 125, 64, 79$	$2, 87, 13, 89$	$2, 126, 112, 37$	$2, 84, 117, a_0$
$4, 41, 73, a_0$	$0, 5, 103, b_0$	$2, 51, 70, b_0$	$0, 44, 88, \infty$

$22^6 16^1$:

$+2 \pmod{132}$; $M = (\{a,b,c,d,e\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty\}$			
$0, 14, 52, 81$	$0, 4, 74, 99$	$0, 23, 49, 28$	$1, 114, 23, 124$
$1, 87, 32, 59$	$2, 5, 9, 48$	$4, 77, 24, 26$	$4, 38, 125, 117$
$4, 87, 17, 44$	$5, 3, 12, 103$	$5, 90, 40, 15$	$5, 57, 120, 73$
$5, 99, 22, 98$	$2, 17, 37, a_0$	$0, 16, 75, a_0$	$0, 119, 8, b_0$
$4, 49, 9, b_0$	$2, 73, 102, c_0$	$4, 15, 65, c_0$	$2, 1, 119, d_0$
$3, 70, 6, d_0$	$0, 33, 109, e_0$	$5, 100, 74, e_0$	$0, 44, 88, \infty$
$1, 45, 89, \infty$			

$22^6 19^1$:

$+1 \pmod{132}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_6) \cup \{\infty\}$			
$0, 11, 27, 67$	$2, 47, 105, 12$	$3, 5, 86, 103$	$3, 89, 88, 80$
$3, 85, 64, 71$	$3, 94, 72, 131$	$5, 10, 36, a_0$	$3, 26, 115, a_0$
$1, 4, 29, b_0$	$2, 15, 72, b_0$	$0, 113, 80, c_0$	$4, 19, 57, c_0$
$0, 44, 88, \infty$			

□

引理 2.43: 对任意 $n \in \{4,5,6\}$，型为 $(4n, 4^n)^6 (10n, 10^n)^1$ 的 4-DGDD 均存在。

证明. 对于 $n \in \{4,5\}$，由定理 1.3 存在型为 $4^6 10^1$ 的 4-GDD。对每个点赋权 n，利用型为 n^4 的 4-MGDD 就可以得到所要设计。对于 $n = 6$，我们首先在

集合 $\mathbb{Z}_{120} \cup (\{a\} \times \mathbb{Z}_{24})$ 上构造一个型为 $(24, 4^6)^6$ 的 3-DGDD，它的洞由集合 $\{0, 6, \ldots, 114, a_0, a_6, a_{12}, a_{18}\}$ 展开得到，组由集合 $\{0, 5, \ldots, 115\}$ 展开外加集合 $\{a\} \times \mathbb{Z}_{24}$ 得到。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{120}$ 的元素按 $+1 \pmod{120}$ 展开，元素 $a_0 \in \{a\} \times \mathbb{Z}_{24}$ 的下标按 $+1 \pmod{24}$ 展开。

$(24, 4^6)^6(60, 10^6)^1$:

$56, 22, a_1$	$27, 19, a_2$	$62, 16, a_3$	$99, 103, a_4$	$55, 68, a_5$	$69, 83, a_7$
$52, 51, a_8$	$113, 49, a_9$	$63, 20, a_{10}$	$44, 33, a_{11}$	$95, 32, 4$	$41, 85, 34$
$118, 31, 15$	$107, 14, 81$	$119, 37, 46$	$89, 1, 50$	$100, 77, 98$	$57, 88, 5$
$26, 67, 45$	$10, 13, 71$				

注意到把上面所给基区组的元素 $+60 \pmod{120}$ 展开可以得到一个初始的以集合 $\{0, 6, \ldots, 114, a_0, a_6, a_{12}, a_{18}\}$ 为洞的不完全平行类。所以我们一共可以得到 60 个不完全平行类。添加 60 个点以补全这些不完全平行类我们就得到了型为 $(24, 4^6)^6(60, 10^6)^1$ 的 4-DGDD。 $\square$

引理 2.44: 设 $u \in \{6, 9, 12\}$。则对任意 $g \equiv 4 \pmod 6$，型为 $g^u 4^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $u \in \{9, 12\}$，由定理 2.2 存在型为 g^u 的 4-MGDD，在每个洞中填入型为 $1^u 4^1$ 的 4-GDD（定理 1.3）就得到了所要设计。

现在我们来考察 $u = 6$ 的情形。对于 $g = 4$，见定理 1.3。对于 $g \equiv 4 \pmod{12}$ 且 $g \geq 16$，由定理 2.2 存在型为 $(g, 4^{g/4})^6$ 的 4-DGDD，在每个洞中填入型为 4^7 的 4-GDD 就得到了所要设计。对于 $g \in \{10, 22\}$，见引理 2.41–2.42。对于 $g = 34$，由引理 2.43 存在型为 $(24, 4^6)^6(60, 10^6)^1$ 的 4-DGDD，在每个组中填入型为 4^7 或 $10^6 4^1$ 4-GDD 就可得到所要设计。最后，对于 $g \equiv 10 \pmod{12}$ 且 $g \geq 46$，我们把 g 写为 $g = 12n + 10$，$n \geq 3$。由一个型为 $2^{3n} 5^1$ 的 4-GDD 出发，对每个点赋权 12，由于型为 $(12, 2^6)^4$ 的 4-DGDD 存在，应用构造 2.4 得到型为 $(24, 4^6)^{3n}(60, 10^6)^1$ 的 4-DGDD。添加 4 个无穷点并在每个组上填入型为 4^7 或 $10^6 4^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了型为 $(12n + 10)^6 4^1 \equiv g^6 4^1$ 的 4-GDD。 $\square$

引理 2.45：设 $u \in \{6, 9, 12\}$。则对任意 $g \equiv 2 \pmod 6$，除了 $(g, u) \in \{(2, 6), (44, 6)\}$ 外，型为 $g^u 5^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $u \in \{9, 12\}$，由定理 2.2 存在型为 $(g, 2^{g/2})^u$ 的 4-DGDD，在每个洞中填入型为 $2^u 5^1$ 的 4-GDD（定理 1.3）就得到了所要设计。

现在我们来考察 $u = 6$ 的情形。对于 $g \in \{2, 8\}$，见定理 1.3。对于 $g \in \{14, 20, 26, 38, 74\}$，所要的 4-GDD 可以看成是一个型为 g^6 的 $\{3, 4\}$-GDD，其中所有大小为 3 的区组可以划分为 5 个平行类。我们在集合 $\mathbb{Z}_{6g} = \mathbb{Z}_{3x}$ 上构造这样的 $\{3, 4\}$-GDD，它们的组由 $\{0, 6, 12, \ldots, 6g-6\}$ 生成。我们把所有的大小为 3 的基区组列在下面，每一个都是 $+3 \pmod{6g}$ 展开并且生成一个平行类。

$$\begin{array}{lll} 0, 3x-2, x-2 & 0, 2x-1, x+1 & 0, 1, 2 \\ 0, x, 3x-1 & 0, 2x+2, 2x & \end{array}$$

其他大小为 4 的基区组如下所示，把它们 $+1 \pmod{6g}$ 或 $+2 \pmod{6g}$ 展开就可得到所要的设计。

$g = 14, +1 \pmod{84}$:

$$\begin{array}{llll} 0, 10, 21, 59 & 3, 82, 55, 11 & 4, 66, 73, 57 & 4, 54, 7, 21 \\ 5, 25, 70, 66 & & & \end{array}$$

$g = 20, +2 \pmod{120}$:

$$\begin{array}{llll} 0, 23, 69, 85 & 0, 67, 74, 111 & 0, 58, 109, 9 & 0, 73, 107, 20 \\ 0, 88, 27, 91 & 0, 55, 105, 110 & 0, 47, 99, 92 & 0, 15, 5, 103 \\ 0, 70, 86, 43 & 0, 44, 83, 57 & 0, 101, 97, 52 & 0, 56, 17, 31 \\ 0, 94, 63, 35 & 0, 21, 29, 116 & 0, 8, 19, 22 & \end{array}$$

$g = 26, +1 \pmod{156}$:

$$\begin{array}{llll} 4, 1, 17, 27 & 5, 62, 40, 133 & 3, 64, 20, 85 & 4, 62, 19, 135 \\ 5, 142, 0, 75 & 4, 8, 115, 126 & 3, 65, 152, 120 & 4, 101, 37, 152 \\ 5, 134, 25, 105 & 0, 9, 46, 77 & & \end{array}$$

$g = 38, +1 \pmod{228}$:

$$\begin{array}{llll} 4, 182, 145, 125 & 3, 29, 176, 18 & 4, 187, 194, 71 & 2, 184, 126, 65 \\ 0, 188, 99, 28 & 4, 197, 201, 66 & 4, 200, 181, 90 & 1, 116, 137, 180 \\ 1, 118, 219, 74 & 5, 58, 204, 217 & 2, 54, 7, 87 & 2, 132, 105, 10 \\ 1, 170, 95, 129 & 3, 152, 175, 12 & 0, 3, 17, 206 & \end{array}$$

$g = 74, +1 \pmod{444}$:

$0, 188, 241, 123$	$0, 127, 183, 16$	$0, 63, 392, 169$	$0, 121, 75, 238$
$0, 212, 311, 334$	$0, 377, 181, 62$	$0, 219, 331, 374$	$0, 399, 430, 235$
$0, 273, 82, 293$	$0, 429, 416, 292$	$0, 125, 61, 142$	$0, 40, 260, 21$
$0, 107, 199, 33$	$0, 89, 271, 274$	$0, 38, 269, 27$	$0, 134, 418, 51$
$0, 200, 365, 57$	$0, 197, 297, 7$	$0, 194, 159, 335$	$0, 189, 104, 265$
$0, 397, 356, 405$	$0, 103, 32, 407$	$0, 55, 227, 50$	$0, 44, 130, 139$
$0, 346, 201, 230$	$0, 58, 266, 371$	$0, 101, 91, 4$	$0, 237, 80, 215$
$0, 419, 68, 226$	$0, 34, 128, 187$		

对于 $g \geq 32$ 且 $g \notin \{38, 44, 50, 74\}$，令 $a \in \{4, 7, 10, 13\}$，由一个型为 $4^{3n}a^1$ 的 4-GDD 出发（这里 n 分别大于或等于 1，2，2 和 3）。对这个 GDD 赋权 12，利用型为 $(12, 2^6)^4$ 的 4-DGDD 可以得到一个型为 $(48, 8^6)^{3n}(12a, (2a)^6)^1$ 的 4-DGDD。添加 5 个无穷点并在每个组中填入型为 $8^6 5^1$ 或 $(2a)^6 5^1$ 的 4-GDD，这样就得到了型为 $(24n + 2a)^6 5^1 \equiv g^6 5^1$ 的 4-GDD。

最后，对于 $g = 50$，由定理 1.5 存在型为 $10^6 1^1$ 的 4-GDD，赋权 5 就可以得到所要的设计。 □

现在我们来处理 $u \in \{33, 39, 51, 57\}$ 的情况。首先，对任意 $m \equiv g \pmod 3$，我们将其写为 $m = s + t$，这里当 $g \equiv 2 \pmod 6$ 时 $s = 2, 5$，当 $g \equiv 4 \pmod 6$ 时 $s = 1, 4$，而 $t \equiv 0 \pmod 6$。

引理 2.46: *设 $g \equiv 2, 4 \pmod 6$ 且 $g \geq 10$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq 16g$，型为 $g^{33}m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 由引理 2.37，我们仅需考虑 $0 < m < g$ 的情况。对于 $g \geq 16$ 且 $g \notin \{22, 44\}$，由定理 2.8 存在 TD$(6, g)$。对前四个组中的点赋权 6，对第五个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 0 或 6，由于型为 $6^4 9^1$ 以及 $6^5 9^1$ 的 4-GDD 均存在，我们得到了型为 $(6g)^4(9g)^1 t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个点并在组中填入型为 $g^6 s^1$ 或 $g^9 s^1$ 的 4-GDD（见定理 1.5 以及引理 2.44–2.45）。这样我们就得到了所要的型为 $g^{33}(s + t)^1 \equiv g^{33}m^1$ 的 4-GDD。

对于 $g = 10$，由引理 2.37 存在型为 $10^{27}(60 + m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 $10^6 m^1$ 的 4-GDD（引理 2.41）就得到所要设计。对于 $g = 22$，通过类似的构造可以得到所要设计。对于 $g = 14$，由一个型为 $(14, 2^7)^{33}$ 的 4-DGDD 出

发，在洞中填入型为 $2^{33}m^1$ 的 4-GDD。最后，对于 $g=44$，由一个型为 $4^{33}1^1$ 的 4-GDD 出发，应用构造 2.6(ii)，取“$u=11$”并填入型为 $4^{33}(3i+1)^1$ 的 4-GDD，$i\in\{0,1,\dots,21\}$，我们就得到了型为 $44^{33}(3i+11)^1\equiv 44^{33}m^1$ 的 4-GDD，这里 $m\geq 11$；对于 $m=2,5,8$，在型为 $(44,2^{22})^{33}$ 的 4-DGDD 中填入型为 $2^{33}m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.47: *设 $g\equiv 2,4 \pmod 6$ 且 $g\geq 10$。则对任意 $m\equiv g \pmod 3$，$0<m\leq 19g$ 且 $m\neq 19g-3$，型为 $g^{39}m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 由引理 2.37，我们仅需考虑 $0<m<g$ 的情况。

对于 $g\geq 16$ 且 $g\notin\{20,22,26,34,38,44,46\}$，由定理 2.8 存在 TD$(7,g)$。对前五个组中的点赋权 6，对第六个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 0 或 6，应用 WFC 我们得到了一个型为 $(6g)^5(9g)^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个点并在组中填入型为 g^6s^1 的 g^9s^1 的 4-GDD （见定理 1.5 以及引理 2.44–2.45），这样我们就得到了所要的型为 $g^{39}(s+t)^1\equiv g^{39}m^1$ 的 4-GDD。现在我们还要考虑 $g\in\{10,14,20,22,26,34,38,44,46\}$ 的情形。

对于 $g=10,22$，由引理 2.46 存在型为 $g^{33}(6g+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 g^6m^1 的 4-GDD（引理 2.41–2.42）就得到所要设计。对于 $g=14,20,26$，由一个型为 $(g,2^{g/2})^{39}$ 的 4-DGDD 出发，在洞中填入型为 $2^{39}m^1$ 的 4-GDD。

对于 $g=34,46$，由一个型为 4^n10^1 的 4-GDD 出发，这里 $n=6$ 或者 9，对每个点赋权 39，应用构造 2.4 得到型为 $(156,4^{39})^n(390,10^{39})^1$ 的 4-DGDD。添加 m 个无穷点并在每个组上填入型为 $4^{39}m^1$ 或 $10^{39}m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要的 4-GDDs。

对于 $g=38$ 且 $0<m\leq 32$，在型为 $(38,2^{19})^{39}$ 的 4-DGDD 中填入型为 $2^{39}m^1$ 的 4-GDD。对于 $g=38$ 且 $m=35$，我们由一个 TD$(7,19)$ 出发，对前五个组中的点赋权 12，在第六个组中对其中一个点赋权 12，八个点赋权 15，剩下的十个点赋权 21，对最后一个组中的点赋权 0 或者 30。由于型为 $12^515^130^1$，$12^521^130^1$（见文献[77]），12^630^1 以及 12^5x^1 的 4-GDD 均存在，这里 $x\in\{12,15,21\}$。这样我们就得到了一个型为 $228^5342^130^1$ 的 4-GDD。添加 5 个无穷点并在组中填入型为 38^65^1 以及 38^95^1 的 4-GDD（引理 2.45），我们就得到了型为 $38^{39}35^1$ 的 4-GDD。

最后，对于 $g=44$，构造过程与引理 2.46 中的完全一样。 □

引理 2.48：设 $g \equiv 2,4 \pmod 6$ 且 $g \geq 10$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$ 且 $0 < m \leq 25g$，型为 $g^{51}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由引理 2.37，我们仅需考虑 $0 < m < g$ 的情况。

对于 $g \geq 14$ 且 $g \notin \{20, 44\}$，由定理 2.8 存在 TD$(7, 3g/2)$。对前五个组中的点赋权 6，在第六个组中对 g 个点赋权 6，对剩下的 $g/2$ 个点赋权 0，对最后一个组中的点赋权 0，6 或 12，应用 WFC 我们得到了一个型为 $(9g)^5(6g)^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个点并在组中填入型为 g^6s^1 或 g^9s^1 的 4-GDD。这样我们就得到了所要的型为 $g^{51}(s+t)^1 \equiv g^{51}m^1$ 的 4-GDD。

对于 $g = 10$，由引理 2.39 存在型为 $10^{45}(60+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 10^6m^1 的 4-GDD 就得到所要设计。

对于 $g = 20$，由一个 TD$(9, 40)$ 出发（见文献[7]），对前七个组中的点赋权 3，在第八个组中对 30 个点赋权 3，对剩下的 10 个点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 0 或 3。由于型为 3^79^1，3^89^1，3^8 以及 3^9 的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $120^7180^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个点并填充组就可以得到所要设计。

最后，对于 $g = 44$，在型为 $(44, 2^{22})^{51}$ 的 4-DGDD 中填入型为 $2^{51}m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.49：设 $g \equiv 2,4 \pmod 6$ 且 $g \geq 10$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq 28g$，型为 $g^{57}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由引理 2.37，我们仅需考虑 $0 < m < g$ 的情况。对于 $g \geq 10$，我们由一个 TD$(6, 2g)$ 出发，对前四个组中的点赋权 6，在第五个组中对 g 个点赋权 6，对剩下的 g 个点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0 或 6，应用 WFC 我们得到了一个型为 $(12g)^4(9g)^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个点并在组中填入型为 g^9s^1 或 $g^{12}s^1$ 的 4-GDD。这样我们就得到了所要的型为 $g^{57}(s+t)^1 \equiv g^{57}m^1$ 的 4-GDD。 □

综合引理 2.36–2.40 和 2.46–2.49 以及定理 1.3，我们有下述结论。

定理 2.15：设 $g \equiv 2,4 \pmod 6$，$g \geq 10$ 并且 $u \equiv 0 \pmod 3$，$u \geq 12$。则对任意 $m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \leq (gu-g)/2$，除了下述情况外，型为 g^um^1 的 4-GDD 均存在：

(i) $u \in \{12, 15, 18, 21, 27\}$ 且 $0 < m < g$；或者

(ii) $(u, m) = (39, 19g - 3)$。

2.4 $g \equiv 3 \pmod 6$ 的情形

在本节中，我们处理 $g \equiv 3 \pmod 6$ 的情形。我们首先证明，对任意 $g \in \{9, 21, 27, 33\}$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在的必要条件也是充分的。然后我们利用这些 GDD，以及定理 1.3 中的 4-GDD，对一般的 $g \equiv 3 \pmod 6$，构造型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD。

2.4.1 型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD

引理 2.50: 对任意 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le (9u - 12)/2$，型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $u = 4$ 或 $u \ge 16$ 的情形，见文献[88]定理 4.1。对于 $u = 8$ 的情形，见文献[88]定理 3.1。对于 $u = 12$ 并且 $9 \le m \le 48$，见文献[88]定理 4.1。最后，对于 $u = 12$ 并且 $0 \le m \le 6$，由定理 1.8 存在型为 3^{12} 的 4-RGDD。将它的平行类补全得到型为 $3^{12}11^1$ 的 5-GDD。对最后一个组中的点赋权 0 或 3，对其他点赋权 3。由于型为 3^4 以及 3^5 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就得到了所要的型为 $9^{12}m^1$ 的 4-GDD。 □

现在我们来考虑 u 为奇数的情况。下面的结果在之后的构造中将会经常用到。

引理 2.51: 设 u 是一个奇数且 $u \ge 5$。对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $3(u - 1) \le m \le (9u - 9)/2$，或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3u \le m \le (9u - 9)/2$，型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由一个 TD$(4, u)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $3^u u^1$ 的 $\{4, u + 1\}$-GDD。这里要注意的是每个大小为 $u + 1$ 的区组都与大小为 u 的组相交于无穷点 ∞，每个大小为 4 的区组也都与大小为 u 的组相交，但不交于无穷点 ∞。现在，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a = m - 3(u - 1)$，对其他点赋权 3。由于型为 3^4 以

及 $3^u a^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD。

□

引理 2.52: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 18$，型为 $9^5 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 根据定理 1.5 以及引理 2.51，我们仅需考虑 $m = 6$ 的情形。我们在集合 $\mathbb{Z}_{45} \cup M$ 上直接构造这个 GDD，它的组是 $\{\{0,5,10,\ldots,40\}+i : 0 \le i \le 4\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{45}$ 的元素 $+3 \pmod{45}$ 展开，M 中形如 $a_0 \in \{a\} \times \mathbb{Z}_5$ 的元素的下标 $+1 \pmod 5$ 展开，这样就得到所要 GDD 的区组集。

$9^5 6^1$:

$+3 \pmod{45}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_5) \cup \{\infty\}$

1	2	10	34	1	3	7	29	3	27	44	0
3	5	17	39	2	38	40	44	3	19	36	37
13	16	39	a_0	5	23	34	a_0	3	11	32	a_0
6	37	0	a_0	10	29	42	a_0	4	35	42	∞

□

引理 2.53: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 27$，型为 $9^7 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 根据定理 1.5 以及引理 2.51，我们仅需考虑 $m = 15$ 的情形。我们在集合 $\mathbb{Z}_{63} \cup M$ 上构造这个 GDD，它的组是 $\{\{0,7,14,\cdots,56\}+i : 0 \le i \le 6\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{63}$ 的元素 $+1 \pmod{63}$ 展开，M 中形如 $x_0 \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开，这样就得到所要 GDD 的区组集。

$9^7 15^1$:

$+1 \pmod{63}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_3) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_9)$

1	13	24	32	1	37	55	59	2	22	48	a_0
1	14	30	b_0	3	36	42	c_0	7	8	10	c_0
4	14	29	c_0								

□

下面的引理为我们提供了一种递归构造型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 的方法。

引理 2.54: 设 $t \geq 3$ 且 $t \neq 6$。若对任意 $2 \leq a \leq t$，对所有可能的 m_a，型为 $9^{2a+1}m_a^1$ 的 4-GDD 均存在。则对任意 $u \in \{10t+1\} \cup [10t+5, 12t+1]$，以及 $m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (9u-9)/2$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时），或者 $m \equiv 3 \pmod 6$，$3 \leq m \leq (9u-9)/2$（当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时），型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由于 $t \geq 3$ 并且 $t \neq 6$，由定理 2.8 存在 TD$(6, 3t)$。我们由这个 TD 出发，把它的一个组截为 $3a$ 个点，$0 \leq a \leq t$ 且 $a \neq 1$，这样我们就得到了一个型为 $(3t)^5(3a)^1$ 的 $\{5,6\}$-GDD。把定理 2.1 应用到这个 $\{5,6\}$-GDD 得到一个型为 $(\prod_{i=1}^{5}(18t+3n_i, 3n_i)^1)(18a+3n_6, 3n_6)^1$ 的 4-IGDD，其中

(i) 对任意 $i = 1, 2, \ldots, 5$，当 $2t+1 \equiv 1 \pmod 4$ 时，$n_i \equiv 0 \pmod 2$ 且 $0 \leq n_i \leq 3t$，当 $2t+1 \equiv 3 \pmod 4$ 时，$n_i \equiv 1 \pmod 2$ 且 $1 \leq n_i \leq 3t$，

(ii) 对于 $i = 6$，当 $2a+1 \equiv 1 \pmod 4$ 时，$n_6 \equiv 0 \pmod 2$ 且 $0 \leq n_6 \leq 3a$，当 $2a+1 \equiv 3 \pmod 4$ 时，$n_6 \equiv 1 \pmod 2$ 且 $1 \leq n_6 \leq 3a$。

添加 9 个无穷点，在每个组中填入型为 $9^{2t+1}(3n_i)^1$ 或者 $9^{2a+1}(3n_6)^1$（若 $a \neq 0$）的 4-GDD，我们就得到了所要的型为 $9^{10t+2a+1}(\sum_{i=1}^{6} 3n_i)^1 \equiv 9^u m^1$ 的 4-GDD，这里 $u = 10t+2a+1 \in \{10t+1\} \cup [10t+5, 12t+1]$，并且当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时，$18 \leq m \leq (9u-9)/2$，当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时，$15 \leq m \leq (9u-9)/2$。

最后，对于 $u \equiv 1 \pmod 4$ 且 $m \in \{0, 6, 12\}$，由于 $t \geq 3$，我们必然有 $u \geq 37$。由引理 2.50 存在型为 $9^{u-5}(45+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $9^5 m^1$ 的 4-GDD（引理 2.52）就得到所要的设计。对于 $u \equiv 3 \pmod 4$ 且 $m \in \{3, 9\}$ 的情形，见定理 1.5。 □

注 为使 $10(t+1)+5 \leq 12t+1+2$，我们必有 $t \geq 6$。在引理 2.54 的题设条件下，我们应取 $t \geq 7$，亦即 $u \geq 75$。这样，如果对所有 $5 \leq u \leq 73$ 以及所有可能的 m，型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均构造出来的话，我们便可以利用引理 2.54 去递归构造所有 $u \geq 75$ 的型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD。

现在我们来考察 $9 \leq u \leq 73$ 的情况。

引理 2.55: 设 $u \in \{9, 11, 13, 17, 19, 23\}$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq$

$(9u-9)/2$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时），或者 $m \equiv 3 \pmod 6$，$3 \le m \le (9u-9)/2$（当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时），型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 根据定理 1.5 以及引理 2.51，我们只需考察 $(u,m) \in \{(9,6), (9,12), (9,18), (11,15), (11,21), (11,27), (13,6), (13,12), (13,18), (13,24), (13,30), (17,6), (17,12), (17,18), (17,24), (17,30), (17,36), (17,42), (19,15), (19,21), (19,27), (19,33), (19,39), (19,45), (19,51), (23,15), (23,21), (23,27), (23,33), (23,39), (23,45), (23,51), (23,57), (23,63)\}$。对于 $(u,m) \in \{(9,18), (11,27), (13,18), (17,18), (17,36), (19,27), (19,45), (23,27), (23,45), (23,63)\}$，我们由型为 $3^u(m/3)^1$ 的 4-GDD 出发，对每个点赋权 3，由于型为 3^4 的 4-GDD 存在，应用 WFC 我们就可以得到所要设计。对于 $u=17$ 且 $m=6,12$，由引理 2.51，存在型为 $9^{13}(36+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 9^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于剩下的值，我们在集合 $\mathbb{Z}_{9u} \cup M$ 上构造所要的设计。它们的组是 $\{\{0,u,2u,\ldots,8u\}+i : 0 \le i \le u-1\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{9u}$ 的元素 $+1 \pmod{9u}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到所要的区组集。

$9^9 6^1$:

$+1 \pmod{81}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	35	54	58	1	7	22	32	1	13	45	52
1	6	39	74	1	4	30	71	2	61	63	a_0
1	2	18	b_0								

$9^9 12^1$:

$+1 \pmod{81}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	2	4	52	1	6	14	76	1	11	54	70
1	15	40	47	1	27	48	a_0	4	41	70	a_0
2	6	26	a_0	1	18	41	b_0				

$9^{11}15^1$:

$+1 \pmod{99}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b,c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	32	61	68	1	7	25	52	1	39	48	51
1	58	72	98	1	17	22	75	2	36	37	a_0
4	12	88	a_0	5	15	35	a_0	7	11	93	b_0
1	20	57	c_0								

$9^{11}21^1$:

$+1 \pmod{99}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	18	63	65	1	4	27	35	1	10	37	42
1	11	17	29	6	59	98	a_0	9	38	88	a_0
4	28	84	a_0	5	35	83	b_0	7	22	81	b_0
3	60	64	b_0	1	2	15	c_0				

$9^{13}6^1$:

$+1 \pmod{117}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	11	17	51	1	83	87	95	1	15	34	94
1	76	81	96	1	10	28	69	1	8	71	82
1	45	90	93	1	31	52	116	1	2	57	a_0
1	18	47	b_0								

$9^{13}12^1$:

$+1 \pmod{117}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	4	48	90	1	22	24	91	1	63	88	104
1	16	34	69	1	23	47	59	1	33	62	99
1	64	73	84	4	11	12	a_0	6	10	16	a_0
9	26	86	a_0	1	6	44	b_0				

$9^{13}24^1$:

$+1 \pmod{117}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c,d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	67	110	112	1	22	26	109	1	2	83	100
1	61	108	115	1	38	50	65	8	13	37	a_0
3	74	88	a_0	5	27	60	a_0	1	76	107	b_0
5	33	81	b_0	2	25	75	b_0	8	46	105	c_0
1	17	57	d_0								

$9^{13}30^1$:

$+1 \pmod{117}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	5	32	34	1	25	99	108	1	47	63	83
1	43	55	100	9	32	88	a_0	1	29	96	a_0
8	13	66	a_0	1	50	101	b_0	3	99	114	b_0
8	49	52	b_0	2	16	27	c_0	1	48	78	c_0
4	41	89	c_0	3	4	11	d_0				

$9^{17}24^1$:

$+1 \pmod{153}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c,d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	88	142	144	1	37	74	129	1	76	96	148
1	110	121	136	1	30	126	135	1	28	116	151
1	83	87	132	1	25	65	115	5	6	47	a_0
9	16	85	a_0	8	91	138	a_0	2	62	124	b_0
3	24	103	b_0	5	10	18	b_0	8	22	129	c_0
1	17	60	d_0								

$9^{17}30^1$:

$+1 \pmod{153}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	114	119	133	1	16	73	127	1	84	102	147
1	30	34	151	1	9	50	80	1	51	90	99
1	11	78	0	5	33	70	a_0	3	90	136	a_0
2	49	62	a_0	3	47	144	b_0	5	28	97	b_0
6	49	143	b_0	3	5	29	c_0	4	10	132	c_0
7	45	98	c_0	1	23	81	d_0				

$9^{17}42^1$:

$+1 \pmod{153}$; $M = (\{a,b,c,d\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{e,f\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	30	73	142	1	33	54	141	1	10	28	98
1	15	17	121	1	37	61	100	3	130	150	a_0
1	65	143	a_0	9	34	86	a_0	8	90	100	b_0
6	21	25	b_0	5	49	128	b_0	2	82	124	c_0
8	30	126	c_0	4	5	42	c_0	1	41	108	d_0
6	13	111	d_0	8	11	70	d_0	4	129	152	e_0
6	14	109	f_0								

$9^{19}15^1$:

$+1 \pmod{171}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b, c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	73	91	124	1	66	83	158	1	13	141	164
1	10	79	111	1	17	117	162	1	2	31	85
1	60	126	151	1	99	135	138	1	16	51	159
1	87	98	145	1	3	25	132	5	10	132	a_0
2	8	111	a_0	4	108	115	a_0	7	60	101	b_0
7	11	126	c_0								

$9^{19}21^1$:

$+1 \pmod{171}$; $M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	15	40	56	1	124	136	142	1	27	28	30
1	67	76	140	1	82	104	119	1	22	50	55
1	105	109	155	1	11	46	102	1	87	100	161
1	25	107	149	6	13	125	a_0	9	109	129	a_0
2	79	113	a_0	8	70	148	b_0	1	9	93	b_0
5	74	132	b_0	3	91	134	c_0				

$9^{19}33^1$:

$+1 \pmod{171}$; $M = (\{a, b, c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d, e\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	17	59	79	1	89	148	166	1	47	64	128
1	139	149	0	1	35	85	158	1	10	13	145
1	29	54	80	1	55	100	141	3	32	107	a_0
6	88	109	a_0	4	9	128	a_0	3	33	139	b_0
2	73	113	b_0	8	99	142	b_0	5	18	20	c_0
8	16	118	c_0	3	58	69	c_0	6	76	80	d_0
4	11	60	e_0								

$9^{19}39^1$:

$+1 \pmod{171}$; $M = (\{a, b, c, d\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{e\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	68	109	136	1	29	30	156	1	74	85	124
1	3	89	121	1	129	147	150	1	118	125	148
1	91	137	163	2	17	117	a_0	6	39	97	a_0
1	103	113	a_0	2	109	121	b_0	6	12	169	b_0
9	71	167	b_0	8	90	139	c_0	7	118	123	c_0
2	39	131	c_0	5	39	145	d_0	6	99	116	d_0
2	103	169	d_0	6	80	100	e_0				

$9^{19}51^1$:

$+1 \pmod{171}$; $M = (\{a,b,c,d,e\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{f,g\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	29	31	89	1	42	135	162	1	64	75	141
1	13	99	166	1	10	82	136	4	95	142	a_0
1	66	128	a_0	8	9	33	a_0	3	43	51	b_0
8	54	77	b_0	4	74	100	b_0	6	143	157	c_0
1	83	88	c_0	9	77	138	c_0	5	133	154	d_0
9	101	165	d_0	4	17	33	d_0	7	46	146	e_0
4	8	120	e_0	5	123	126	e_0	5	22	57	f_0
6	121	128	g_0								

$9^{23}15^1$:

$+1 \pmod{207}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b,c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	67	69	144	1	8	91	134	1	73	111	123
1	11	32	184	1	6	36	180	1	14	92	168
1	72	124	160	1	45	105	163	1	23	189	193
1	50	107	146	1	10	28	57	1	26	52	166
1	17	71	103	1	95	109	0	3	90	151	a_0
2	10	13	a_0	5	78	206	a_0	3	23	103	b_0
1	126	191	c_0								

$9^{23}21^1$:

$+1 \pmod{207}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	44	77	177	1	9	53	56	1	19	36	100
1	84	112	151	1	123	155	179	1	14	120	146
1	16	46	111	1	49	115	121	1	59	118	119
1	81	83	117	1	104	124	131	1	55	194	199
1	62	74	99	7	174	193	a_0	8	46	50	a_0
6	56	135	a_0	2	24	160	b_0	8	102	113	b_0
9	19	175	b_0	2	18	88	c_0				

$9^{23}33^1$:

$+1 \pmod{207}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d,e\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	110	119	151	1	23	75	136	1	34	145	181
1	4	55	68	1	76	84	0	1	82	107	137
1	7	46	180	1	59	71	166	1	152	190	192
1	21	25	118	1	66	109	194	5	40	55	a_0
7	44	51	a_0	9	111	128	a_0	6	54	65	b_0
5	85	163	b_0	7	84	188	b_0	1	83	203	c_0
4	51	70	c_0	9	30	206	c_0	3	71	157	d_0
7	69	98	e_0								

$9^{23}39^1$:

$+1 \pmod{207}$; $M = (\{a,b,c,d\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{e\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	117	190	0	1	89	98	196	1	40	121	125
1	42	131	136	1	37	51	64	1	31	109	124
1	12	60	163	1	138	164	192	1	30	151	171
1	32	137	143	3	163	185	a_0	7	60	135	a_0
8	148	155	a_0	2	5	160	b_0	6	40	189	b_0
8	46	48	b_0	5	56	66	c_0	8	16	141	c_0
9	148	181	c_0	3	35	130	d_0	1	56	77	d_0
9	51	115	d_0	7	50	69	e_0				

$9^{23}51^1$:

$+1 \pmod{207}$; $M = (\{a,b,c,d,e\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{f,g\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	57	188	194	1	6	106	122	1	20	97	133
1	25	154	183	1	10	82	83	1	88	145	196
1	4	118	178	1	22	163	190	1	134	156	a_0
2	81	169	a_0	6	68	166	a_0	4	35	200	b_0
3	151	195	b_0	9	37	203	b_0	1	27	111	c_0
5	69	205	c_0	8	56	58	c_0	3	40	83	d_0
6	14	109	d_0	9	161	178	d_0	3	61	200	e_0
4	8	150	e_0	1	54	86	e_0	1	107	141	f_0
1	90	125	g_0								

$9^{23}57^1$:

$+1 \pmod{207}$; $M = (\{a,b,c,d,e,f\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{g\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	101	156	187	1	46	75	194	1	64	67	99
1	12	83	158	1	37	136	154	1	166	193	199
1	6	132	169	5	48	99	a_0	6	46	157	a_0
8	25	137	a_0	4	183	185	b_0	9	25	29	b_0
1	69	170	b_0	2	106	197	c_0	3	82	202	c_0
6	140	189	c_0	2	82	147	d_0	8	157	167	d_0
9	43	186	d_0	1	20	186	e_0	9	34	156	e_0
4	17	122	e_0	3	4	127	f_0	2	95	142	f_0
6	63	116	f_0	1	71	201	g_0				

□

引理 2.56: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 63$，型为 $9^{15}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m = 3$，见定理 1.5。对于 $9 \le m \le 63$，我们由一个 TD$(6, 9)$ 出发，对前五个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0 或 6。由于型为 3^5 以及 3^56^1 的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $27^5(m-9)^1$ 的 4-GDD。添加 9 个点并在组中填入型为 9^4 的 4-GDD 就可以得到所要设计。□

引理 2.57: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 90$，型为 $9^{21}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{0, 6, 12, 18\}$，由引理 2.50，存在型为 $9^{16}(45+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 9^5m^1 的 4-GDD 就得到了所要设计。对于 $u \in \{24, 30\}$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{189} \cup M$ 上构造所要的设计。它们的组是 $\{\{0, 21, 42, \ldots, 168\} + i : 0 \le i \le 20\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{189}$ 的元素 $+1 \pmod{189}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到了所要 GDD 的区组集。

$9^{21}24^1$:

$+1 \pmod{189}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{21}) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	11	19	135	1	112	139	186	1	18	72	174
1	15	77	159	1	47	81	138	1	57	60	188
1	24	147	175	1	8	120	168	1	25	38	146
1	107	160	171	1	10	89	130	1	13	33	a_0
2	38	77	a_0	5	99	188	a_0	8	9	112	a_0
6	31	103	a_0	18	108	158	a_0	21	88	184	a_0
20	55	60	b_0								

$9^{21}30^1$:

$+1 \pmod{189}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{21}) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_9)$

1	32	102	147	1	4	34	54	1	78	90	114
1	11	17	45	1	24	62	97	1	6	28	176
1	2	19	99	1	8	60	86	1	10	49	109
1	16	139	150	4	33	136	a_0	6	38	133	a_0
9	65	119	a_0	11	78	142	a_0	18	22	139	a_0
19	66	68	a_0	20	126	134	a_0	1	47	165	b_0
5	18	125	b_0	7	94	159	b_0				

对于 $36 \le m \le 90$，由一个 TD$(8,9)$ 出发，对前七个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 3 或 9。由于型为 3^8 以及 $3^7 9^1$ 的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $27^7(m-9)^1$ 的 4-GDD。添加 9 个点并在组中填入型为 9^4 的 4-GDD 就可以得到所要设计。 □

引理 2.58: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 117$，型为 $9^{27}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m = 3$ 的情形，见定理 1.5。对于 $9 \le m \le 117$，由一个 TD$(10,9)$ 出发，对前九个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0，6 或 12。由于型为 3^9，$3^9 6^1$ 以及 $3^9 12^1$ 的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $27^9(m-9)^1$ 的 4-GDD。添加 9 个点并在组中填入型为 9^4 的 4-GDD 就可以得到所要设计。 □

引理 2.59: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 126$，型为 $9^{29}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{0,6,12,18\}$，由引理 2.50，存在型为 $9^{24}(45+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $9^5 m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要设计。对于 $m \in \{24,30\}$，我

们在集合 $\mathbb{Z}_{261} \cup M$ 上构造所要的设计。它们的组是 $\{\{0, 29, 58, \ldots, 232\} + i : 0 \le i \le 28\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{261}$ 的元素 $+1 \pmod{261}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod{n}$ 展开。这样就得到所要 GDD 的区组集。

$9^{29}24^1$:

$+1 \pmod{261}; M = (\{a, b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c, d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	192	231	256	1	22	113	181	1	36	197	252
1	43	109	170	1	37	89	158	1	15	58	243
1	132	136	139	1	165	182	0	1	60	68	142
1	143	169	216	1	91	235	253	1	52	114	199
1	137	208	221	1	31	84	187	1	25	41	73
1	133	153	155	1	134	184	228	2	124	248	a_0
4	93	105	a_0	9	127	242	a_0	2	39	240	b_0
5	61	171	b_0	8	13	163	b_0	3	80	166	c_0
3	215	253	d_0								

$9^{29}30^1$:

$+1 \pmod{261}; M = (\{a, b, c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	24	70	138	1	113	151	245	1	21	82	190
1	119	137	240	1	54	67	160	1	108	165	212
1	11	32	145	1	102	143	197	1	17	53	116
1	129	164	219	1	2	235	254	1	97	186	223
1	35	46	176	1	52	174	257	1	25	85	237
1	5	8	83	3	5	202	a_0	1	33	81	a_0
7	92	197	a_0	6	225	255	b_0	4	19	206	b_0
7	158	191	b_0	1	139	183	c_0	7	107	198	c_0
2	69	257	c_0	5	19	240	d_0				

对于 $36 \le m \le 90$，由一个 TD(9, 9) 出发，对前七个组中的点赋权 3，对第八个组中的点赋权 0 或 9，对最后一个组中的点赋权 3 或 9。由于型为 3^8，$3^7 9^1$，$3^8 9^1$ 以及 $3^7 9^2$（见文献[94]）的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $27^7 72^1 (m-9)^1$ 的 4-GDD。添加 9 个无穷点并在组中填入型为 9^4 或 9^9 的 4-GDD 就可以得到所要设计。

最后，对于 $90 < m \le 126$ 的情形，见引理 2.51. □

引理 2.60: 设 $u \in \{31, 35, 37, 41, 45, 47, 49, 51, 55, 57, 59, 61\}$。对于 $u \equiv 1 \pmod{4}$，

$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (9u-9)/2$，或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$3 \leq m \leq (9u-9)/2$，型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 利用引理 2.54，取 $t = 3, 4, 5$，就可以得到结论。这里需要用到型为 $9^v m^1$ 的 4-GDD，$v \in \{5, 7, 9, 11\}$，它们来自于引理 2.52, 2.53 以及 2.55。 □

引理 2.61: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq 144$，型为 $9^{33} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{0, 6\}$，由引理 2.50，存在型为 $9^{28}(45+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $9^5 m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要设计。

对于 $12 \leq m \leq 144$，由一个 TD$(10, 11)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $9^{11}11^1$ 的 $\{10, 12\}$-GDD。在大小为 11 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{3, 9, 15\}$，对剩下的点赋权 0，6 或者 12。对于这个设计中其他的点赋权 3。由于型为 $3^{11}a^1$，3^9，$3^9 6^1$ 以及 $3^9 12^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到型为 $27^{11}(m-9)^1$ 的 4-GDD。再添加 9 个点并在组中填入型为 9^4 的 4-GDD 就得到所要的型为 $9^{33} m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.62: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \leq m \leq 171$，型为 $9^{39} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m = 3$ 的情形，见定理 1.5。对于 $9 \leq m \leq 171$，我们由一个 TD$(10, 13)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $9^{13}13^1$ 的 $\{10, 14\}$-GDD。在大小为 13 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{0, 6, 12, 18\}$，对剩下的点赋权 0，6 或者 12。对于这个设计中其他的点赋权 3。由于型为 $3^{13}a^1$，3^9，$3^9 6^1$ 以及 $3^9 12^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到型为 $27^{13}(m-9)^1$ 的 4-GDD。再添加 9 个点并在组中填入型为 9^4 的 4-GDD 就得到了所要的型为 $9^{39} m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.63: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \leq m \leq 189$，型为 $9^{43} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $9 \leq m \leq 153$，由一个 TD$(6, 12)$ 出发，对前四个组中的点赋权 6，对第五个组中的三个点赋权 6，剩下九个点赋权 9，对于最后一个组中的点赋权 0，6 或者 12。由于对任意 $a \in \{0, 6, 9, 12\}$，型为 $6^5 a^1$，$6^4 9^1$ 以及 $6^4 9^1 12^1$（见文献[94]）的

4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $72^4 99^1 (m-9)^1$ 的 4-GDD。添加 9 个点并在组中填入型为 9^4 的 4-GDD 就可以得到所要设计。对于其他情形，见定理 1.5 以及引理 2.51。 □

引理 2.64: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 279$，型为 $9^{63} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{3, 9, 15, 21\}$，由引理 2.50，存在型为 $9^{56}(63+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $9^7 m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要设计。

对于 $27 \le m \le 243$，由一个 TD$(8, 9)$ 出发，对前七个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 3，9，15，21 或者 27。应用 WFC 我们得到了一个型为 $81^7 m^1$ 的 4-GDD。在大小为 81 的组中填入型为 9^9 的 4-GDD 就可以得到所要设计。对于 $249 \le m \le 279$ 的情形，见引理 2.51。 □

引理 2.65: 设 $u \in \{25, 53, 65, 67, 69, 71, 73\}$。对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le (9u-9)/2$，或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$3 \le m \le (9u-9)/2$，型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 根据定理 1.5 以及引理 2.51，当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时，我们仅需考察 $6 \le m \le 3u-9$ 的情形，当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时，仅需考察 $15 \le m \le 3u-6$ 的情形。我们将 u 写为 $u = 4x + y$，这里 $x \equiv 0$ 或 $u \pmod 4$ 且 $5 \le y \le 2x$，见表格 2.5。我们考虑下面两种情形。

(i) $5 \le y \le x$。由一个 TD$(6, x)$ 出发，对前四个组中的点赋权 9，对第五个组中的 y 个点赋权 9，剩下 $x-y$ 个点赋权 0，对于最后一个组中的点赋权 0，6 或者 12。由于对任意 $a \in \{0, 6, 12\}$，型为 $9^4 a^1$ 以及 $9^5 a^1$ 的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $(9x)^4 (9y)^1 (6n)^1$ 的 4-GDD，这里 n 可以取任意不超过 $2x$ 的非负整数。若 $u \equiv 1 \pmod 4$，我们直接填充组就可以得到所要的型为 $9^{4x+y}(6n)^1$ 的 4-GDD；若 $u \equiv 3 \pmod 4$，我们先添加 9 个无穷点再填充组就可以得到型为 $9^{4x+y}(6n+9)^1$ 的 4-GDD。

(ii) $x \le y \le 2x$。由一个 TD$(6, x)$ 出发，对前四个组中的点赋权 9，对第五个组中的 $2x-y$ 个点赋权 9，剩下 $y-x$ 个点赋权 18，对最后一个组中的点赋权

表 2.5 引理 2.65 中用到的 u 的分解

u	$u=4x+y$	m
25	$25=4\times5+5$	$0\le m\le 90$
53	$53=4\times12+5$	$0\le m\le 144$
	$53=4\times9+17$	$108\le m\le 162$
65	$65=4\times13+13$	$0\le m\le 234$
67	$67=4\times15+7$	$9\le m\le 189$
	$67=4\times12+19$	$153\le m\le 225$
69	$69=4\times16+5$	$0\le m\le 192$
	$69=4\times13+17$	$156\le m\le 234$
71	$71=4\times15+11$	$9\le m\le 189$
	$71=4\times12+23$	$153\le m\le 225$
73	$73=4\times16+9$	$0\le m\le 192$
	$73=4\times13+21$	$156\le m\le 234$

12 或者 18。由于型为 $9^5 12^1$，$9^5 18^1$，$9^4 12^1 18^1$（见文献[56]）以及 $9^4 18^2$（见文献[157]）的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $(9x)^4(9y)^1(6n)^1$ 的 4-GDD，这里 n 可以取任意介于 $2x$ 和 $3x$ 之间的整数。若 $u\equiv 1 \pmod 4$，我们直接填充组就可以得到所要的型为 $9^{4x+y}(6n)^1$ 的 4-GDD；若 $u\equiv 3 \pmod 4$，我们先添加 9 个无穷点再填充组就可以得到型为 $9^{4x+y}(6n+9)^1$ 的 4-GDD。

□

综合引理 2.50, 2.52–2.53, 2.55–2.65，以及引理 2.54 和它的注，我们得到下述结论。

定理 2.16: 设 $u\ge 4$。对任意 $u\equiv 0 \pmod 4$，$m\equiv 0 \pmod 3$，$0\le m\le (9u-12)/2$；或者 $u\equiv 1 \pmod 4$，$m\equiv 0 \pmod 6$，$0\le m\le (9u-9)/2$；或者 $u\equiv 3 \pmod 4$，$m\equiv 3 \pmod 6$，$3\le m\le (9u-9)/2$，型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

2.4.2 $g\in\{21,27,33\}$

首先我们来考察 $u\equiv 0 \pmod 4$ 的情形。

引理 2.66: 设 $u\equiv 0 \pmod 4$ 且 $u\ge 4$。则对任意 $m\equiv 0 \pmod 3$，$0\le m\le (21u-24)/2$，型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $u=4$ 或 $u\geq 16$ 的情形，以及 $u=12$ 且 $21\leq m\leq 114$ 的情形，见定理 1.4。对于 $u=8$ 的情形，见文献[88]中的引理 3.1。现在我们仅需考虑 $u=12$ 且 $0\leq m\leq 18$ 的情形。

对于 $u=12$ 且 $0\leq m\leq 15$，由定理 2.2 存在型为 $(21,3^7)^{12}$ 的 4-DGDD。在洞中填入型为 $3^{12}m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要的设计。对于 $u=12$ 且 $m=18$，我们由一个型为 $3^{12}3^1$ 的 4-GDD 出发，利用构造 2.6(ii) 以及型为 3^{12} 的 4-GDD，就可以得到所要的型为 $21^{12}18^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.67: *设 $u\equiv 0 \pmod 4$ 且 $u\geq 4$。则对任意 $m\equiv 0 \pmod 3$，$0\leq m\leq (27u-30)/2$，型为 $27^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 对于 $u=4$ 或 $u\geq 16$ 的情形，以及 $u=12$ 且 $27\leq m\leq 147$ 的情形，见定理 1.4。对于 $u=8$ 的情形，见文献[88]中的引理 3.1。现在我们仅需考虑 $u=12$ 且 $0\leq m\leq 24$ 的情形。

对于 $u=12$ 且 $0\leq m\leq 24$，由定理 1.8 存在型为 3^{12} 的 4-GDD。添加 11 个点补全所有平行类得到一个型为 $3^{12}11^1$ 的 5-GDD。对这个 5-GDD 最后一个组中的点赋权 0 或 3，对其他点赋权 9，由于型为 9^4 以及 $9^4 3^1$ 的 4-GDD 均存在（定理 2.16），我们就得到了所要的型为 $27^{12}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.68: *设 $u\equiv 0 \pmod 4$ 且 $u\geq 4$。则对任意 $m\equiv 0 \pmod 3$，$0\leq m\leq (33u-36)/2$，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 对于 $u=4$ 或 $u\geq 16$ 的情形，以及 $u=12$ 且 $33\leq m\leq 180$ 的情形，见定理 1.4。对于 $u=12$ 且 $0\leq m\leq 30$，我们由一个型为 $6^4 9^1$ 的 4-GDD 出发，对每个点赋权 u，利用型为 u^4 的 4-MGDD 得到型为 $(6u,6^u)^4(9u,9^u)^1$ 的 4-DGDD。添加 m 个无穷点，在每个组中填入型为 $6^u m^1$ 或 $9^u m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要的型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD。

对于 $u=8$ 且 $0\leq m\leq 99$ 的情形，见文献[88]中的引理 3.1。对于 $u=8$ 且 $105\leq m\leq 114$，我们由一个型为 $3^{11}15^1$ 的 4-GDD 出发，利用构造 2.6(i) 以及型为 $3^8 t^1$ 的 4-GDD，$t\in\{0,3,6,9\}$，就可以得到所要的型为 $21^{12}18^1$ 的 4-GDD。最后，对于 $u=8$ 且 $m=102$，我们由型为 $6^4 9^1 12^1$ 的 4-GDD 出发，删去大小为 12 的组，

对剩下的点赋权 8，利用型为 8^4 的 4-MGDD 以及型为 8^3 的可分解的 3-MGDD 可以得到一个型为 $(48,6^8)^4(72,9^8)^1$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 84 个平行类。添加 84 个点补全这些平行类，再在组中填入型为 $6^8 18^1$ 或 $9^8 18^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $33^8 102^1$ 的 4-GDD。 □

下面我们来考察 u 是奇数的情形。

引理 2.69: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 2g$，型为 $g^5 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $g \in \{3,9,15\}$ 的情形，见定理 1.3 和 2.16。对于 $g \ge 21$，由定理 2.8 存在 TD$(6,g/3)$。对前五个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0 或者 6，这样我们就可以得到所要的型为 $g^5 m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.70: 设 $u, v \equiv 1 \pmod 2$ 且 $v \ge 5$，$u \ge 4v-7$，则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 < m \le (3v)(u-1)/2$，或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (3v)(u-1)/2$，型为 $(3v)^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \le (3u-3)/2$，由定理 2.2 存在型为 $(3v, 3^v)^u$ 的 4-DGDD，在洞中填入型为 $3^u m^1$ 的 4-GDD 就得到了我们所要的型为 $(3v)^u m^1$ 的 4-GDD。

对于 $m > (3u-3)/2$，由于 $u \ge 4v-7$，我们有 $(3u-3)/2+6 \ge 6(v-1)$。因此我们可以将 m 写为 $m = s(v-1)+t$，这里 $s,t \le (3u-3)/2$，并且当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时 $s \equiv t \equiv 0 \pmod 6$，当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时 $s \equiv t \equiv 3 \pmod 6$。我们利用构造 2.6(ii) 以及型为 $3^u s^1$ 和 $3^u t^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要设计。但为了避免参数上的混淆，我们这里再简单描述下我们的构造过程。我们由型为 $3^u s^1$ 的 4-GDD 出发，删去大小为 s 的组，对剩下的点赋权 v，利用型为 v^4 的 4-MGDD 以及型为 v^3 的可分解的 3-MGDD 可以得到一个型为 $(3v, 3^v)^u$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 $s(v-1)$ 个平行类。添加 $s(v-1)$ 个点补全这些平行类，在洞中填入型为 $3^u t^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $(3v)^u (s(v-1)+t)^1 \equiv (3v)^u m^1$ 的 4-GDD。 □

由引理 2.66–2.70，对于型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD，我们现在只需考虑 $7 \le u \le 19$ 的情形。

引理 2.71: 对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$u \ge 9$ 以及 $m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le (3u-3)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$u \ge 7$ 以及 $m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (3u-3)/2$，型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由定理 2.2 存在型为 $(21, 3^7)^u$ 的 4-DGDD，在洞中填入型为 $3^u m^1$ 的 4-GDD 就得到了我们所要的型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.72: 假设存在一个 TD$(8, u)$。则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$u \ge 9$ 以及 $m \equiv 0 \pmod 6$，$3u - 3 \le m \le (21u - 21)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$u \ge 7$ 以及 $m \equiv 3 \pmod 6$，$3u \le m \le (21u - 21)/2$，型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由所给的 TD$(8, u)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $7^u u^1$ 的 $\{8, u+1\}$-GDD。现在，在大小为 u 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{0, 6, \cdots, \frac{3u-3}{2}\}$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$），或者 $a \in \{3, 9, \cdots, \frac{3u-3}{2}\}$（当 $u \equiv 3 \pmod 4$）。给这个组剩下的点赋权 3 或者 9。对于这个设计中其他的点赋权 3。由于型为 3^8，$3^7 9^1$ 以及 $3^u a^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.73: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 63$，型为 $21^7 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{3, 9\}$，见引理 2.71。

对于 $m = 15$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{147} \cup M$ 上构造所要的设计。它的组是 $\{\{0, 7, 14, \cdots, 140\} + i : 0 \le i \le 6\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{147}$ 的元素 $+1 \pmod{147}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_3$ 的元素的下标 $+1 \pmod 3$ 展开。这样就可以得到所要的区组集。

$21^7 15^1$:

$+1 \pmod{147}$; $M = \{a,b,c,d,e\} \times \mathbb{Z}_3$

1	10	11	110	1	82	87	132	1	26	119	130
1	91	118	124	1	107	109	126	1	14	74	86
1	21	90	145	1	16	52	104	3	79	146	a_0
1	69	122	b_0	1	47	111	c_0	1	35	66	d_0
1	9	41	e_0								

对于 $21 \le m \le 63$，见引理 2.72。 □

引理 2.74: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 84$，型为 $21^9 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{0,6,12\}$，见引理 2.71。

对于 $m = 18$，由定理 1.3 存在型为 $1^{24}7^1$ 的 4-GDD。删去一个不在大小为 7 的组中的点，利用这个删去的点重新定义组可以得到一个型为 3^{10} 的 $\{4,7\}$-GDD。注意到这个 GDD 中仅有一个大小为 7 的区组，那么存在一个大小为 3 的组不与其相交。删去这个组中的所有的点，对剩下的点赋权 7，利用型为 7^4 和 7^7 的 4-MGDD 以及型为 7^3 的可分解的 3-MGDD 我们可以得到一个型为 $(21,3^7)^9$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 18 个平行类。添加 18 个点补全这些平行类，在洞中填入型为 3^9 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $21^9 18^1$ 的 4-GDD。

对于 $24 \le m \le 84$，见引理 2.72。 □

引理 2.75: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 105$，型为 $21^{11} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{3,9,15\}$，见引理 2.71。对于 $m \in \{21,27\}$，我们由一个型为 $3^{11}3^1$ 的 4-GDD 出发，利用构造 2.6(ii)，取 “$u = 7$”，最后填入型为 $3^{11}3^1$ 或 $3^{11}9^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $21^{11} m^1$ 的 4-GDD。最后，对于 $33 \le m \le 105$ 的情形，见引理 2.72。 □

引理 2.76: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 126$，型为 $21^{13} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{0, 6, 12, 18\}$，见引理 2.71。对于 $m \in \{24, 30\}$，由定理 1.3 存在型为 $1^{36}7^1$ 的 4-GDD。删去一个不在大小为 7 的组中的点，利用这个删去的点重新定义组可以得到一个型为 3^{14} 的 $\{4, 7\}$-GDD。注意到这个 GDD 中仅有一个大小为 7 的区组，那么存在一个大小为 3 的组不与其相交。删去这个组中的所有的点，对剩下的点赋权 7，利用型为 7^4 和 7^7 的 4-MGDD 以及型为 7^3 的可分解的 3-MGDD 我们可以得到一个型为 $(21, 3^7)^{13}$ 的 $\{3, 4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 18 个平行类。添加 18 个点补全这些平行类，在洞中填入型为 $3^{13}6^1$ 或 $3^{13}12^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的 4-GDD。最后，对于 $36 \leq m \leq 126$ 的情况，见引理 2.72。 □

引理 2.77: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \leq m \leq 147$，型为 $21^{15}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{3, 9, 15, 21\}$，见引理 2.71。

对于 $27 \leq m \leq 147$，由一个 TD$(6, 21)$ 出发，对前五个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0 或 6。应用 WFC 我们可以得到一个型为 $63^5(m-21)^1$ 的 4-GDD。添加 21 个点并在组中填入型为 21^4 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $21^{15}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.78: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq 168$，型为 $21^{17}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{0, 6, 12, 18, 24\}$，见引理 2.71。

对于 $m \in \{30, 36, 42\}$，由定理 1.3 存在型为 $1^{48}7^1$ 的 4-GDD。删去一个不在大小为 7 的组中的点，利用这个删去的点重新定义组可以得到一个型为 3^{18} 的 $\{4, 7\}$-GDD。注意到这个 GDD 中仅有一个大小为 7 的区组，那么存在一个大小为 3 的组不与其相交。删去这个组中的所有的点，对剩下的点赋权 7，我们可以得到一个型为 $(21, 3^7)^{17}$ 的 $\{3, 4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 18 个平行类。添加 18 个点补全这些平行类，在洞中填入型为 $3^{17}12^1$，$3^{17}18^1$ 或 $3^{17}24^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $21^{17}m^1$ 的 4-GDD。最后，对于 $48 \leq m \leq 168$，见引理 2.72。 □

引理 2.79: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $3 \le m \le 189$，型为 $21^{19}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{3, 9, 15, 21, 27\}$，见引理 2.71。

对于 $m \in \{33, 39, 45, 51\}$，由定理 1.3 存在型为 $6^8 15^1$ 的 4-GDD。任选一个大小为 6 的组并删去其中一个点，利用这个删去的点重新定义组可以得到一个型为 $3^{19}5^1$ 的 $\{4, 6, 15\}$-GDD。注意到大小为 5 的组不与大小为 6 或 15 的区组相交。删去这个组中的所有的点，对剩下的点赋权 7，利用型为 7^4，7^6 和 7^{15} 的 4-MGDD 以及型为 7^3 的可分解的 3-MGDD 我们可以得到一个型为 $(21, 3^7)^{19}$ 的 $\{3, 4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 30 个平行类。添加 30 个点补全这些平行类，再额外添加 t 个点，$t \in \{3, 9, 15, 21\}$，在洞中填入型为 $3^{19}t^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $21^{19}m^1$ 的 4-GDD。

对于 $57 \le m \le 189$，见引理 2.72。 □

综合引理 2.66, 2.69, 2.70 和 2.73–2.79，我们有下述结论。

定理 2.17: 对任意 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le (21u - 24)/2$；或 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le (21u-21)/2$；或 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (21u - 21)/2$，型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

下面我们来考察型为 $27^u m^1$ 的 4-GDD 的存在性。由引理 2.69 和 2.70，我们仅需考察 $7 \le u \le 27$ 的情形。

引理 2.80: 对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 81$，型为 $27^7 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \in \{3, 9\}$，由定理 2.2 存在型为 $(27, 3^9)^7$ 的 4-DGDD，在洞中填入型为 $3^7 m^1$ 的 4-GDD 就得到所要设计。

对于 $m \in \{15, 21\}$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{189} \cup M$ 上构造所要的设计。它们的组是 $\{\{0, 7, 14, \ldots, 182\} + i : 0 \le i \le 6\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{189}$ 的元素 $+1 \pmod{189}$ 展开，M 中形如 $x_0 \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod n$ 展开。这样就得到所要的区组集。

$27^7 15^1$:

$+1 \pmod{189}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{b,c\} \times \mathbb{Z}_3)$

1	185	103	23	17	78	147	146	3	77	158	127
2	116	80	159	4	49	37	89	3	146	183	89
3	177	174	126	2	120	21	32	4	6	187	45
1	21	93	166	0	13	67	96	1	180	164	a_0
5	30	130	a_0	6	61	44	a_0	15	128	151	b_0
16	78	74	c_0								

$27^7 21^1$:

$+1 \pmod{189}$; $M = (\{a,b\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{c\} \times \mathbb{Z}_3)$

12	8	170	167	9	155	74	48	9	60	66	126
9	21	174	120	8	66	187	21	7	164	81	76
6	93	140	102	6	133	151	23	7	55	107	22
0	2	22	116	3	176	100	a_0	9	179	76	a_0
15	74	124	a_0	3	128	139	b_0	14	55	54	b_0
15	179	133	b_0	16	8	168	c_0				

最后，对于 $27 \le m \le 81$，我们由一个 TD$(8,9)$ 出发，对前七个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 3 或 9。应用 WFC 我们就可以得到型为 $27^7 m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.81: 对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 108$，型为 $27^9 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由一个 TD$(10,9)$ 出发，对前七个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0，6 或 12。应用 WFC 我们就可以得到型为 $27^9 m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.82: 设 $u \in \{11,13,17,19,23,25,27\}$。则对 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le (27u-27)/2$，或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (27u-27)/2$，型为 $27^u m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 我们由一个 TD$(10,u)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $9^u u^1$ 的 $\{10,u+1\}$-GDD。在大小为 u 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{0,6,\ldots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时），或者 $a \in \{3,9,\ldots,\frac{3u-3}{2}\}$ （当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时），对剩下的点

赋权 0，6 或者 12。对于这个设计中其他的点赋权 3。由于型为 $3^u a^1$，3^9，$3^9 6^1$ 以及 $3^9 12^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $27^u m^1$ 的 4-GDD。

□

引理 2.83：对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 189$，型为 $27^{15} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $27 \leq m \leq 189$，我们由一个 TD(6, 9) 出发，对前五个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 0，6，12 或 18。应用 WFC 我们可以得到型为 $81^5(m-27)^1$ 的 4-GDD。添加 27 个无穷点并填入型为 27^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $3 \leq m \leq 21$，由引理 2.82 存在型为 $27^{11}(108+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 $27^4 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.84：对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 270$，型为 $27^{21} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $54 \leq m \leq 270$，我们由一个 TD(8, 9) 出发，对前七个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3, 9, \ldots, 27$。应用 WFC 我们可以得到型为 $81^7(m-27)^1$ 的 4-GDD。添加 27 个无穷点并填入型为 27^4 的 4-GDD 就可以得到型为 $27^{21} m^1$ 的 4-GDD。

对于 $0 \leq m \leq 48$，由引理 2.67 存在型为 $27^{16}(135+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 $27^5 m^1$ 的 4-GDD（引理 2.69）就可得到所要设计。 □

综合引理 2.67, 2.69, 2.70 和 2.80–2.84，我们有下述结论。

定理 2.18：对任意 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \leq m \leq (27u-30)/2$；或 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (27u-27)/2$；或 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (27u-27)/2$，型为 $27^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

下面我们来考察型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 的存在性。由引理 2.69 和 2.70，我们仅需考察 $7 \leq u \leq 35$ 的情形。

引理 2.85：设 $u \geq 4$。则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq 3u-3$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 3u-6$，除了 $(u,m) \in \{(19,45),(19,51),(23,63)\}$ 外，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由一个型为 $6^4 9^1$ 的 4-GDD 出发，对每个点赋权 u，利用型为 u^4 的 4-MGDD 得到型为 $(6u,6^u)^4(9u,9^u)^1$ 的 4-DGDD。添加 m 个无穷点，在每个组中填入型为 $6^u m^1$ 或 $9^u m^1$ 的 4-GDD 就得到了所要的型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.86：对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 99$，型为 $33^7 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $33 \leq m \leq 99$，我们由一个 TD$(8,11)$ 出发，对前七个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 3 或 9。应用 WFC 我们就可以得到型为 $33^7 m^1$ 的 4-GDD。

对于 $m \in \{3,9,15\}$，见引理 2.85。对于 $m \in \{21,27\}$，我们由一个型为 $3^{11}3^1$ 的 4-GDD 出发，利用构造 2.6(i)，取“$u=7$”，最后填入型为 3^8 或 $3^7 9^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $33^7 m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.87：对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq 132$，型为 $33^9 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由一个 TD$(10,11)$ 出发，对前九个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0，6 或 12。应用 WFC 就可以得到型为 $33^9 m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.88：对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 165$，型为 $33^{11} m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $3 \leq m \leq 27$，见引理 2.85。对于 $33 \leq m \leq 165$，由一个 TD$(12,11)$ 出发，对前十一个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 3，9 或 15。应用 WFC 我们就可以得到型为 $33^{11} m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.89：假设存在一个 TD$(12,u)$。则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$3u-3 \leq m \leq (33u-33)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$3u \leq m \leq (33u-33)/2$，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由所给的 TD$(12,u)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $11^u u^1$ 的 $\{12,u+1\}$-GDD。现在，在大小为 u 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a\in\{0,6,\ldots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u\equiv 1 \pmod 4$），或者 $a\in\{3,9,\ldots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u\equiv 3 \pmod 4$）。对这个组中剩下的点赋权 3，9 或者 15。对这个设计其他的点赋权 3。由于型为 3^{12}，$3^{11}9^1$，$3^{11}15^1$ 以及 $3^u a^1$ 的 4-GDD 均存在，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.90: *设 $u\in\{13,17,19,23,25,27,29,31\}$。则对于 $u\equiv 1 \pmod 4$，$m\equiv 0 \pmod 6$，$0\le m\le(33u-33)/2$；或者 $u\equiv 3 \pmod 4$，$m\equiv 3 \pmod 6$，$0<m\le(33u-33)/2$，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 存在。*

证明. 对于 $u\equiv 1 \pmod 4$ 且 $m\ge 3u-3$，或者 $u\equiv 3 \pmod 4$ 且 $m\ge 3u$，由于 $u\in\{13,17,19,23,25,27,29,31\}$，TD$(12,u)$ 存在，应用引理 2.89，就可得到所要设计。对于 $u\equiv 1 \pmod 4$ 且 $m<3u-3$，或者 $u\equiv 3 \pmod 4$ 且 $m<3u$，根据引理 2.85，除了 $(u,m)\in\{(19,45),(19,51),(23,63)\}$ 之外，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 都存在。

对于 $u=19$ 且 $m=45,51$，由定理 1.3 存在型为 $1^{48}13^1$ 的 4-GDD。删去一个不在大小为 13 的组中的点，利用这个删去的点重新定义组可以得到一个型为 3^{20} 的 $\{4,13\}$-GDD。注意到这个 GDD 中仅有一个大小为 13 的区组，那么存在一个大小为 3 的组不与其相交。删去这个组中的所有的点，对剩下的点赋权 11，利用型为 11^4 和 11^{13} 的 4-MGDD 以及型为 11^3 的可分解的 4-MGDD，我们可以得到一个型为 $(33,3^{11})^{19}$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 30 个平行类。添加 30 个点补全这些平行类，在洞中填入型为 $3^{19}15^1$ 或 $3^{19}21^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要设计。

对于 $u=23$ 且 $m=63$，由定理 1.3 存在型为 $1^{60}13^1$ 的 4-GDD。删去一个不在大小为 13 的组中的点，利用这个删去的点重新定义组可以得到一个型为 3^{24} 的 $\{4,13\}$-GDD。删去一个组并对剩下的点赋权 11，我们可以得到一个型为 $(33,3^{11})^{23}$ 的 $\{3,4\}$-DGDD，这里大小为 3 的区组可以划分成 30 个平行类。添加 30 个点补全这些平行类，在洞中填入型为 $3^{23}33^1$ 的 4-GDD 就可以得到所要设计。 □

引理 2.91：对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 231$，型为 $33^{15}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对任意 $33 \le m \le 231$，由一个 TD$(6, 11)$ 出发，对前五个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0，6，12 或 18。应用 WFC 我们就可以得到型为 $99^5(m-33)^1$ 的 4-GDD。添加 33 个点并填入型为 33^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $m \le 27$ 的情形，见引理 2.85。 □

引理 2.92：设 $u \in \{21, 33\}$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le (33u-33)/2$，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \le 60$ 的情形，见引理 2.85。对于 $66 \le m \le (33u-33)/2$，我们由一个 TD$(u/3+1, 11)$ 出发，对前 $u/3$ 个组的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3, 9, \ldots, (3u-9)/2$。应用 WFC 我们可以得到一个型为 $99^{u/3}(m-33)^1$ 的 4-GDD。添加 33 个点并填入型为 33^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.93：对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 561$，型为 $33^{35}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们把 m 写为 $m = s + t$，这里 $s \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < s \le 99$，$t \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le t \le 462$。我们由一个 TD$(6, 11)$ 出发，对前五个组中的点赋权 21，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, 42$。由定理 2.17 型为 $21^5(6i)^1$ 的 4-GDD 存在，应用 WFC 我们得到了一个型为 231^5t^1 的 4-GDD。添加 s 个点并填入型为 33^7s^1 的 4-GDD（引理 2.86）就可得到所要的型为 $33^{35}(s+t)^1 \equiv 33^{35}m^1$ 的 4-GDD。 □

综合引理 2.68, 2.69, 2.70 和 2.86–2.93，我们有下述结论。

定理 2.19：对任意 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le (33u-36)/2$；或 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le (33u-33)/2$；或 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (33u-33)/2$，型为 $33^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

2.4.3 一般的 $g \equiv 3 \pmod 6$ 的情形

在本小节中我们将对一般的 $g \equiv 3 \pmod 6$ 的情形进行讨论。注意到 $g \in \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$ 的情况已在定理 1.3 和 2.16–2.19 中完全解决。因此在下面的证明中若没有具体指明 g 的范围我们均默认 $g \geq 39$。

下面的两个引理在后面的证明中将会经常用到。

引理 2.94: 设 $g \equiv 9 \pmod{18}$ 且 $g \geq 45$。若存在 TD$(g/9+1, u)$，则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m \leq (9u-9)/2$，由定理 2.2 存在型为 $(g, 9^{g/9})^u$ 的 4-DGDD。添加 m 个点并在洞中填入型为 $9^u m^1$ 的 4-GDD 就得到所要设计。

对于 $m > (9u-9)/2$，由一个 TD$(g/9+1, u)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $(g/9)^u u^1$ 的 $\{g/9+1, u+1\}$-GDD。这里要注意的是每个大小为 $u+1$ 的区组都与大小为 u 的组相交于无穷点 ∞，每个大小为 $g/9+1$ 的区组也都与大小为 u 的组相交，但不交于无穷点 ∞。现在，在大小为 u 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{0, 6, \ldots, (9u-9)/2\}$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时），或者 $a \in \{3, 9, \ldots, (9u-9)/2\}$（当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时），对剩下的点赋权 $0, 6, \ldots, (g-9)/2$（当 $g/9 \equiv 1 \pmod 4$ 时），或者 $3, 9, \ldots, (g-9)/2$（当 $g/9 \equiv 3 \pmod 4$ 时）。对于这个设计中其他的点赋权 9。根据定理 2.16 这里需要的输入设计均存在，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.95: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $g \geq 15$，$u \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$，$v \equiv 1 \pmod 2$。若对任何容许的 m_u, m_v，型为 $g^u m_u^1$ 和 $g^v m_v^1$ 的 4-GDD 均存在，则对任意 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \leq m \leq (gv(u-1)-3)/2$；或者 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq gv(u-1)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq gv(u-1)/2$，型为 $(gv)^u m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 对于 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \leq (g(u-1)-3)/2$ 的情形，或者 $u \equiv 1, 3 \pmod 4$，

$m \le (gu-g)/2$ 的情形，由定理 2.2 存在型为 $(gv, g^v)^u$ 的 4-DGDD。添加 m 个点并填入型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m > (g(u-1)-3)/2$，或者 $u \equiv 1,3 \pmod 4$，$m > (gu-g)/2$，由于 $g \ge 15$，我们必然有 $(gu-g)/2 \ge 6(u-1)$。因此我们可以将 m 写为 $m = (u-1)s + t$，这里

(i) 当 $u \equiv 0 \pmod 4$ 时，$t \le (g(u-1)-3)/2$，$t \equiv 0 \pmod 3$，

(ii) 当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时，$t \le (gu-g)/2$，$t \equiv 0 \pmod 6$，

(iii) 当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时，$t \le (gu-g)/2$，$t \equiv 3 \pmod 6$，

并且

(1) 当 $v \equiv 1 \pmod 4$ 时，$s \le (gv-g)/2$，$s \equiv 0 \pmod 6$，

(2) 当 $v \equiv 3 \pmod 4$ 时，$s \le (gv-g)/2, s \equiv 3 \pmod 6$。

现在我们由一个型为 $g^v s^1$ 的 4-GDD 出发，应用构造 2.6(i)，填入型为 $g^u t^1$ 的 4-GDD 就可得到所要的型为 $(gv)^u((u-1)s+t)^1 \equiv (gv)^u m^1$ 的 4-GDD。 □

现在我们来处理 $7 \le u \le 15$ 的情形，注意 $u = 5$ 的情形已在引理 2.69 中解决。

引理 2.96: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $g \le m \le 3g$，型为 $g^7 m^1$ 的 4-GDD 均存在。进一步地，若 g 是 $15, 21, 27$ 或 33 的倍数，则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 3g$，型为 $g^7 m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \ge 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5, 7, 9, 11\}$，q 整除 s：设 p 是满足条件的最小的 q。我们先来考察 $s = 3p$ 的情形。对于 $s \in \{15, 21\}$，TD$(s/3+1, 7)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \in \{27, 33\}$ 且 $m \le 27$，由定理 2.2 存在型为 $(3s, 9^{s/3})^7$ 的 4-DGDD。添加 m 个点并填入型为 $9^7 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $s \in \{27, 33\}$ 且 $m \ge 33$，我们由一个 TD$(8, s/3)$ 出发，对前七个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3, 9, \ldots, 27$，应用 WFC 就可得到所要设计。

现在考察 $s \geq 5p$ 的情形。应用引理 2.95，取“$g = 3p, v = s/p, u = 7$”就可得到所要的型为 $(3s)^7 m^1$ 的 4-GDD，$0 < m \leq 9s$；这里需要的输入设计来自于定理 1.3 和 2.16–2.19。

(ii) 若对任意 $q \in \{5, 7, 9, 11\}$，q 均不能整除 s：当 $3 \mid s$ 时，存在 TD$(8, s/3)$。对前七个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3, 9, \ldots, 27$，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^7 m^1$ 的 4-GDD，$s \leq m \leq 9s$。当 $3 \nmid s$ 时，存在 TD$(8, s)$。对前七个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 3 或 9，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^7 m^1$ 的 4-GDD，$3s \leq m \leq 9s$。

□

引理 2.97: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq 3g$，型为 $g^8 m^1$ 的 4-GDD 均存在。进一步地，若 g 是 $9, 15, 21$ 或 33 的倍数，则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq (7g-3)/2$，型为 $g^8 m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \geq 13$。我们来考察下面三种情况：

(i) 若 3 整除 s：文献[88]中的定理 3.1 已解决这一情况。

(ii) 若存在 $q \in \{5, 7, 11\}$，q 整除 s：设 p 是满足条件的最小的 q。$s = 3p$ 的情形已包含在 $3 \mid s$ 的情形中。对于 $s \geq 5p$，应用引理 2.95，取“$g = 3p, v = s/p, u = 8$”就可得到所要的型为 $(3s)^8 m^1$ 的 4-GDD，$0 \leq m \leq (21s-3)/2$；这里需要的输入设计来自于定理 1.3 和 2.17–2.19。

(iii) 若对任意 $q \in \{3, 5, 7, 11\}$，q 均不能整除 s：存在 TD$(9, s)$。对前八个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 $0, 3, 6$ 或 9，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^8 m^1$ 的 4-GDD，$0 \leq m \leq 9s$。

□

引理 2.98: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq 4g$，型为 $g^9 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \geq 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5,7,9\}$，q 整除 s：设 p 是满足条件的最小的 q。对于 $s = 3p$，TD$(p+1,9)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \geq 5p$，应用引理 2.95，取"$g = 3p, v = s/p, u = 9$"就可得到所要设计。

(ii) 若对任意 $q \in \{5,7,9\}$，q 均不能整除 s：当 $3 \mid s$ 时，存在 TD$(10, s/3)$。对前九个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, 36$，应用 WFC 就可得到所要的 4-GDD。当 $3 \nmid s$ 时，存在 TD$(10, s)$。对前九个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0，6 或 12，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^9 m^1$ 的 4-GDD。

$\square$

引理 2.99: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $g \leq m \leq 5g$，型为 $g^{11}m^1$ 的 4-GDD 均存在。进一步地，若 g 是 $15, 21, 27$ 或 33 的倍数，则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 5g$，型为 $g^{11}m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \geq 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5,7,9,11\}$，q 整除 s：设 p 是满足条件的最小的 q。我们先来考察 $s = 3p$ 的情形。对于 $s = 3p$，TD$(p+1, 11)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \geq 5p$，应用引理 2.95，取"$g = 3p, v = s/p, u = 11$"就可得到所要的型为 $(3s)^{11}m^1$ 的 4-GDD，$0 < m \leq 15s$。

(ii) 若对任意 $q \in \{5,7,9,11\}$，q 均不能整除 s：当 $3 \mid s$ 时，存在 TD$(12, s/3)$。对前十一个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3, 9, \ldots, 45$，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^{11}m^1$ 的 4-GDD，$s \leq m \leq 15s$。当 $3 \nmid s$ 时，存在 TD$(12, s)$。对前十一个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 3，9 或 15，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^{11}m^1$ 的 4-GDD，$3s \leq m \leq 15s$。

$\square$

引理 2.100: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \leq m \leq (11g-3)/2$，型为 $g^{12}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $g \le m \le (11g-3)/2$，见定理 1.4(iii)。对于 $0 \le m < g$，记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \ge 13$。我们来考察下面三种情况：

(i) 若 3 整除 s：我们由一个型为 3^{12} 的 4-RGDD 出发（定理 1.8），添加三个无穷点去补全三个平行类可以得到一个型为 3^{13} 的 $\{4,5\}$-GDD。对每个无穷点赋权 $0, 3, \ldots, s$，对其他点赋权 s，注意到对于任意 $i \in \{0, 1, 2, \ldots, \frac{s}{3}\}$，型为 $s^4(3i)^1$ 的 4-GDD 均存在（定理 1.4(iii)），应用 WFC 我们就得到了所要的型为 $(3s)^{12}m^1$ 的 4-GDD。

(ii) 若存在 $q \in \{5, 7, 11\}$，q 整除 s：设 p 是满足条件的最小的 q。$s = 3p$ 的情形已包含在 $3 \mid s$ 的情形中。对于 $s \ge 5p$，应用引理 2.95，取“$g = 3p, v = s/p, u = 12$”就可得到所要的型为 $(3s)^{12}m^1$ 的 4-GDD。

(iii) 若对任意 $q \in \{3, 5, 7, 11\}$，q 均不能整除 s：存在 TD$(13, s)$。对前十二个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0 或 3，应用 WFC 就可得到所要的 4-GDD。

□

综合定理 1.4(iii), 1.5(ii)，以及引理 2.97, 2.100，我们有下述结论。

引理 2.101: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod 4$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le (g(u-1)-3)/2$，除了 $u = 8$ 且 $3g < m < (7g-3)/2$ 外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。进一步地，若 g 是 $9, 15, 21$ 或 33 的倍数，则对任意 $m \equiv 0 \pmod 3$ 且 $0 \le m \le (7g-3)/2$，型为 $g^8 m^1$ 的 4-GDD 存在。

引理 2.102: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 6g$，型为 $g^{13}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \ge 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5, 7, 9, 11\}$，q 整除 s：设 p 是满足条件的最小的 q。对于 $s = 3p$，TD$(p+1, 13)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \ge 5p$，应用引理 2.95，取“$g = 3p, v = s/p, u = 13$”就可得到所要设计。

(ii) 若对任意 $q \in \{5,7,9,11\}$，q 均不能整除 s：当 $3 \mid s$ 时，存在 TD$(14, s/3)$。对前十三个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, 54$，应用 WFC 就可得到所要的 4-GDD。当 $3 \nmid s$ 时，存在 TD$(14, s)$。对前十三个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 0，6，12 或 18，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^{13}m^1$ 的 4-GDD。

□

引理 2.103：设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 7g$，型为 $g^{15}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $g \leq m \leq 7g$，由引理 2.69 存在型为 $(3g)^5(m-g)^1$ 的 4-GDD。添加 g 个无穷点并在组中填入型为 g^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $0 < m < g$，由引理 2.99 存在型为 $g^{11}(4g+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 g^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要的型为 $g^{15}m^1$ 的 4-GDD。 □

下面我们利用 IGDD 递归地构造型为 g^um^1 的 4-GDD。

引理 2.104：设 $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $t \geq 6$。若对任意 $2 \leq a \leq t$，$a \notin \{3,5\}$，对所有可能的 m_a，型为 $g^{2a+1}m_a^1$ 的 4-GDD 均存在。则对任意 $u \in \{10t+1\} \cup [10t+5, 12t+1]$，以及 $m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (gu-g)/2$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$ 时），或者 $m \equiv 3 \pmod 6$，$3 \leq m \leq (gu-g)/2$（当 $u \equiv 3 \pmod 4$ 时），型为 g^um^1 的 4-GDD 均存在。

证明. 由于 $g \geq 39$ 且 $t \geq 6$，由定理 2.8 存在 TD$(6, tg/3)$。我们由这个 TD 出发，把它的一个组截为 $ag/3$ 个点，$0 \leq a \leq t$ 且 $a \neq 1$，这样我们就得到了一个型为 $(tg/3)^5(ag/3)^1$ 的 $\{5,6\}$-GDD。把定理 2.1 应用到这个 $\{5,6\}$-GDD 得到一个型为 $(\prod_{i=1}^{5}(2tg+3n_i, 3n_i)^1)(2ag+3n_6, 3n_6)^1$ 4-IGDD，其中

(i) 对任意 $i = 1,2,\ldots,5$，当 $2t+1 \equiv 1 \pmod 4$ 时，$n_i \equiv 0 \pmod 2$，$0 \leq n_i \leq tg/3$；当 $2t+1 \equiv 3 \pmod 4$ 时，$n_i \equiv 1 \pmod 2$，$1 \leq n_i \leq tg/3$，

(ii) 对于 $i = 6$，当 $2a+1 \equiv 1 \pmod 4$ 时，$n_6 \equiv 0 \pmod 2$，$0 \leq n_6 \leq ag/3$；当

$2a+1\equiv 3 \pmod 4$ 且 $2a+1\notin\{7,11\}$ 时，$n_6\equiv 1 \pmod 2$，$1\le n_6\le ag/3$；

当 $2a+1\in\{7,11\}$ 时，$n_6\equiv 1 \pmod 2$ 且 $g/3\le n_6\le ag/3$。

根据本引理的假设以及引理 2.96, 2.99，型为 $g^{2t+1}(3n_i)^1$ 和 $g^{2a+1}(3n_6)^1$ 的 4-GDD 存在。添加 g 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^{2t+1}(3n_i)^1$ 或者 $g^{2a+1}(3n_6)^1$（若 $a\neq 0$）的 4-GDD，我们就得到了所要的型为 $g^{10t+2a+1}(\sum_{i=1}^{6}3n_i)^1\equiv g^um^1$ 的 4-GDD，这里 $u=10t+2a+1\in\{10t+1\}\cup[10t+5,12t+1]$，并且当 $u\equiv 1 \pmod 4$ 时，$g+15\le m\le (gu-g)/2$，当 $u\equiv 3 \pmod 4$ 时，$g\le m\le (gu-g)/2$。

最后，对于 $u\equiv 1 \pmod 4$ 且 $0\le m<g+15$，由于 $t\ge 6$，我们必然有 $u\ge 61$。由引理 2.101 存在型为 $g^{u-5}(5g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 g^5m^1 的 4-GDD（引理 2.69）就得到所要的设计。对于 $u\equiv 3 \pmod 4$ 且 $0<m<g$，由于 $t\ge 6$，我们必然有 $u\ge 67$。由引理 2.101 存在型为 $g^{u-15}(15g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^{15}m^1$ 的 4-GDD（引理 2.103）就可得到所要的设计。 □

注 若 $10(t+1)+5\le 12t+1+2$，则有 $t\ge 6$，这与引理 2.104 的前提条件一致，此时 $u\ge 65$。这样，如果对所有 $17\le u\le 63$ 以及所有可能的 m，型为 g^um^1 的 4-GDD 均能构造出来的话，我们便可以利用引理 2.104 去递归构造所有 $u\ge 65$ 的型为 g^um^1 的 4-GDD。

为了处理 $u\in\{17,19\}$ 的情形，我们要借助到型为 39^um^1 以及 51^um^1 4-GDD，接下来我们先来构造它们。

引理 2.105: *设 $u\in\{13,17,19,23,25,27,29,31,37,41,43\}$。则对 $u\equiv 1 \pmod 4$，$m\equiv 0 \pmod 6$，$0\le m\le (39u-39)/2$；或者 $u\equiv 3 \pmod 4$，$m\equiv 3 \pmod 6$，$0<m\le (39u-39)/2$，型为 39^um^1 的 4-GDD 均存在。*

证明. 由于 $u\in\{13,17,19,23,25,27,29,31,37,41,43\}$，存在 TD$(14,u)$。对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 13^uu^1 的 $\{14,u+1\}$-GDD。现在，在大小为 u 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a\in\{0,6,\ldots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u\equiv 1 \pmod 4$），或者 $a\in\{3,9,\ldots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u\equiv 3 \pmod 4$）。对这个组剩下的点赋权 0，6，12 或者 18。对于这个设计中其

他的点赋权 3。由于型为 $3^u a^1$ 以及 $3^{13}(6i)^1$ 的 4-GDD 均存在，$i \in \{0,1,2,3\}$，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $39^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.106: 设 $u \equiv 1 \pmod 2$ 且 $u \geq 13$。则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (39u-39)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (39u-39)/2$，型为 $39^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 综合引理 2.70, 2.103 和 2.105，我们仅需考察 $u \in \{21,33,35,39\}$ 的情形。

对于 $u \in \{21,33\}$ 且 $0 \leq m \leq 78$，由引理 2.101 存在型为 $39^{u-5}(195+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $39^5 m^1$ 的 4-GDD（引理 2.69）就得到所要的设计。对于 $u \in \{21,33\}$ 且 $m > 78$，由一个 $\mathrm{TD}(u/3+1,13)$ 出发，对前 $u/3$ 个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3,9,\ldots,(3u-9)/2$，应用 WFC 可得到一个型为 $117^{u/3}(m-39)^1$ 的 4-GDD。添加 39 个无穷点并填入型为 39^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $u = 35$ 且 $0 < m \leq 39$，由引理 2.105 存在型为 $39^{31}(156+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $39^4 m^1$ 的 4-GDD 就得到所要的设计。对于 $m > 39$，由引理 2.69，对任意 $s \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq s \leq 546$ 存在型为 $273^5 s^1$ 的 4-GDD，添加 t 个无穷点，$t \equiv 3 \pmod 6$，$39 \leq t \leq 117$，填入型为 $39^7 t^1$ 的 4-GDD 就可得到型为 $39^{35}(s+t)^1 \equiv 39^{35} m^1$ 的 4-GDD。

对 $u = 39$ 且 $0 < m \leq 39$，由上面构造的型为 $39^{35}(156+m)^1$ 的 4-GDD 出发，填入型为 $39^4 m^1$ 的 4-GDD 就得到所要的设计。对于 $m > 39$，由引理 2.102 存在型为 $117^{13}(m-39)^1$ 的 4-GDD，添加 39 个无穷点并填入型为 39^4 的 4-GDD 就得到所要的设计。 □

引理 2.107: 设 $u \in \{17,19,23,25,27,29,31,37,41,43,47,49,53,59\}$。则对 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (51u-51)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (51u-51)/2$，型为 $51^u m^1$ 的 4-GDD 存在。

证明. 由于 $u \in \{17,19,23,25,27,29,31,37,41,43,47,49,53,59\}$，存在 $\mathrm{TD}(18,u)$。对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $17^u u^1$ 的 $\{18,u+1\}$-GDD。现在，在大小为 u 的组

中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，这里 $a \in \{0,6,\dots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u \equiv 1 \pmod 4$），或者 $a \in \{3,9,\dots,\frac{3u-3}{2}\}$（当 $u \equiv 3 \pmod 4$）。对这个组剩下的点赋权 $0,6,\dots,24$。对于这个设计中其他的点赋权 3。由于型为 $3^u a^1$ 以及 $3^{17}(6i)^1$ 的 4-GDD 均存在，$i \in \{0,1,2,3,4\}$，应用 WFC 我们就可以得到所要的型为 $51^u m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.108: *设 $u \equiv 1 \pmod 2$ 且 $u \geq 17$。则对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (51u-51)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (51u-51)/2$，型为 $51^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 综合引理 2.70 和 2.107，我们仅需考察 $u \in \{21,33,35,39,45,51,55,57\}$ 的情形。

对于 $u \in \{21,33,45\}$ 且 $0 \leq m \leq 102$，由引理 2.101 存在型为 $51^{u-5}(255+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $51^5 m^1$ 的 4-GDD（引理 2.69）就得到所要的设计。对于 $m > 102$，由一个 TD$(u/3+1,17)$ 出发，对前 $u/3$ 个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $3,9,\dots,(3u-9)/2$，应用 WFC 可得到一个型为 $153^{u/3}(m-51)^1$ 的 4-GDD。添加 51 个无穷点并填入型为 51^4 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $u \in \{35,55\}$ 且 $0 < m \leq 51$，由引理 2.107 存在型为 $51^{u-8}(408+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $51^8 m^1$ 的 4-GDD 就得到所要的设计。对于 $m > 51$，由引理 2.69，对任意 $s \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq s \leq 102u/5$ 存在型为 $(51u/5)^5 s^1$ 的 4-GDD，添加 t 个无穷点，$t \equiv 3 \pmod 6$，$51 \leq t \leq 51(u-5)/10$，填入型为 $51^{u/5} t^1$ 的 4-GDD 就可得到型为 $51^u(s+t)^1 \equiv 51^u m^1$ 的 4-GDD。

对 $u = 39$ 且 $0 < m \leq 51$，由上面构造的型为 $51^{35}(204+m)^1$ 的 4-GDD 出发，填入型为 $51^4 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要的设计。对于 $m > 51$，由引理 2.102 存在型为 $153^{13}(m-51)^1$ 的 4-GDD，添加 51 个无穷点并填充组就可得到所要的设计。

对于 $u = 51$ 且 $0 < m \leq 51$，或者 $u = 57$ 且 $0 \leq m \leq 48$，由引理 2.107 存在型为 $51^{u-4}(204+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $51^4 m^1$ 的 4-GDD 即可。对于 $u = 51$ 且 $m > 51$，或 $u = 57$ 且 $m > 48$，由引理 2.94 存在型为 $153^{u/3}(m-51)^1$ 的 4-GDD，添加 51 个无穷点并填充组就可得到所要的设计。 □

引理 2.109: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 8g$，型为 $g^{17}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \ge 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5,7,9,11,13\}$，q 整除 s：对于 $s = q = 13$，见引理 2.106。对于 $s = 3q$，TD$(q+1,17)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \ge 5q$，设 p 是满足条件的最小的 q。我们必然有 $s \ge p^2$。应用引理 2.95，取 "$g = 3p, v = s/p, u = 17$" 就可得到所要的型为 $(3s)^{17}m^1$ 的 4-GDD；这里需要的输入设计来自于定理 1.3 和 2.16–2.19 以及引理 2.106。

(ii) 若对任意 $q \in \{5,7,9,11,13\}$，q 均不能整除 s：当 $3 \mid s$ 时，存在 TD$(18, s/3)$。对前十七个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, 72$，应用 WFC 就可得到所要设计。当 $3 \nmid s$ 时，存在 TD$(18, s)$。对前十七个组中的点赋权 3，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, 24$，应用 WFC 就可得到所要的型为 $(3s)^{17}m^1$ 的 4-GDD。

□

引理 2.110: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 9g$，型为 $g^{19}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \ge 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5,7,9,11,13,17\}$，q 整除 s：对于 $s = q \in \{13, 17\}$，见引理 2.106 和 2.108。对于 $s = 3q$，TD$(q+1, 19)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \ge 5q$，设 p 是满足条件的最小的 q，则必有 $s \ge p^2$。应用引理 2.95，取 "$g = 3p, v = s/p, u = 19$" 就可得到所要的型为 $(3s)^{19}m^1$ 的 4-GDD；这里需要的型为 $51^v m_v^1$ 的 4-GDD 来自于引理 2.108。

(ii) 若对任意 $q \in \{5,7,9,11,13,17\}$，q 均不能整除 s：对于 $0 < m \le 3s$，由引理 2.103 存在型为 $(3s)^{15}(12s+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $(3s)^4m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $m > 3s$，当 $3 \mid s$ 时，将 WFC 应用于 TD$(20, s/3)$ 即可；当 $3 \nmid s$ 时，将 WFC 应用于 TD$(20, s)$ 就可得到所要设计。

$\square$

引理 2.111: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $u \in \{21, 33\}$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们首先考察 $u = 21$ 的情形。对于 $0 \leq m \leq 4g$，我们由一个 TD$(6,5)$ 出发，对前四个组中的点赋权 g，对第五个组中的一个点赋权 g，剩下四个点赋权 0，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, g-3$。由于对任意 $i \in \{0, 1, \ldots, (g-3)/6\}$，型为 $g^4(6i)^1$ 以及 $g^5(6i)^1$ 的 4-GDD 均存在，我们得到了一个型为 $(5g)^4 g^1 m^1$ 的 4-GDD。填充大小为 $5g$ 的组就得到了所要的设计。对于 $4g < m \leq 10g$，由引理 2.96 存在型为 $(3g)^7(m-g)^1$ 的 4-GDD，添加 g 个无穷点并填充组就可得到型为 $g^{21}m^1$ 的 4-GDD。

对于 $u = 33$ 的情形，构造过程类似。对于 $0 \leq m \leq 4g$，由一个 TD$(6,8)$ 出发可以得到型为 $(8g)^4 g^1 m^1$ 的 4-GDD。填充大小为 $8g$ 就得到了所要的设计。对于 $4g < m \leq 16g$，由引理 2.99 存在型为 $(3g)^{11}(m-g)^1$ 的 4-GDD，添加 g 个无穷点并填充组就可得到型为 $g^{33}m^1$ 的 4-GDD。 $\square$

引理 2.112: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \leq 11g$，型为 $g^{23}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 < m \leq g$，由引理 2.110 存在型为 $g^{19}(4g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^4 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $m > g$，由一个 TD$(6, 2g/3)$ 出发，把它的一个组截为 $g/3$ 个点，这样我们就得到了一个型为 $(2g/3)^5(g/3)^1$ 的 $\{5,6\}$-GDD。把定理 2.1 应用到这个 $\{5,6\}$-GDD 得到一个型为 $(\prod_{i=1}^{5}(4g+3n_i, 3n_i)^1)(3g, g)^1$-IGDD，这里 $n_i \equiv 0 \pmod 2$ 且 $0 \leq n_i \leq 2g/3$，$i = 1, 2, \ldots, 5$。添加 g 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^5(3n_i)^1$ 或 g^4 的 4-GDD，这样我们就得到了所要的型为 $g^{23}(\sum_{i=1}^{5} 3n_i + g)^1 \equiv g^{23}m^1$ 的 4-GDD。 $\square$

引理 2.113: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \leq m \leq 12g$，型为 $g^{25}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 \leq m \leq 12g$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $s \equiv t \equiv 0 \pmod 6$ 且

$0 \le s \le 10g$，$0 \le t \le 2g$。我们由型为 $(5g)^5 s^1$ 的 4-GDD 出发，添加 t 个无穷点并填入型为 $g^5 t^1$ 的 4-GDD，这样就得到了所要的型为 $g^{25}(s+t)^1 \equiv g^{25}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.114：设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 13g$，型为 $g^{27}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 < m \le g$，由引理 2.110 存在型为 $g^{19}(8g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^8 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $g < m \le 13g$，由引理 2.98 存在型为 $(3g)^9(m-g)^1$ 的 4-GDD，添加 g 个无穷点并填充组就可得到所要的型为 $g^{27}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.115：设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 15g$，型为 $g^{31}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 < m \le g$，由引理 2.114 存在型为 $g^{27}(4g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^4 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $g < m \le 5g$，和 $u = 21$ 的情形类似，我们由一个 TD$(6,7)$ 出发，对前四个组中的点赋权 g，对第五个组中的三个点赋权 g，剩下四个点赋权 0，对最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, g-3$。应用 WFC 我们得到了一个型为 $(7g)^4(3g)^1(m-g)^1$ 的 4-GDD。添加 g 个无穷点并填充组就得到了所要的设计。对于 $5g < m \le 15g$，由一个 TD$(5,g)$ 出发，应用定理 2.1 得到一个型为 $\prod_{i=1}^{5}(6g+3n_i, 3n_i)^1$ 的 4-IGDD，这里 $n_i \equiv 1 \pmod 2$ 且 $g/3 \le n_i \le g$，$i = 1, 2, \ldots, 5$。添加 g 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^7(3n_i)^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了所要的型为 $g^{31}(\sum_{i=1}^{5} 3n_i)^1 \equiv g^{31}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.116：设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 17g$，型为 $g^{35}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 < m \le g$，由引理 2.115 存在型为 $g^{31}(4g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^4 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $g < m \le 17g$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $s \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le s \le 14g$，$t \equiv 3 \pmod 6$，$g \le t \le 3g$。我

们由型为 $(7g)^5s^1$ 的 4-GDD 出发，添加 t 个无穷点并填入型为 g^7t^1 的 4-GDD，这样就得到了所要的型为 $g^{35}(s+t)^1 \equiv g^{35}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.117: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 18g$，型为 $g^{37}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 \le m \le 6g$，和 $u = 21$ 的情形类似，我们由一个 TD(6, 8) 出发，对前四个组中的点赋权 g，对第五个组中的五个点赋权 g，剩下三个点赋权 0，对于最后一个组中的点赋权 $0, 6, \ldots, g-3$。应用 WFC 我们得到了一个型为 $(8g)^4(5g)^1m^1$ 的 4-GDD。填充组就得到了所要的设计。对于 $6g < m \le 18g$，由 TD$(6, g)$ 出发，应用定理 2.1，得到一个型为 $\prod_{i=1}^{6}(6g+3n_i, 3n_i)^1$ 的 4-IGDD，这里 $n_i \equiv 1 \pmod 2$ 且 $g/3 \le n_i \le g$，$i = 1, 2, \ldots, 6$。添加 g 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^7(3n_i)^1$ 的 4-GDD，这样我们就得到了所要的型为 $g^{37}(\sum_{i=1}^{6} 3n_i)^1 \equiv g^{37}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.118: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 3 \pmod 6$ 且 $0 < m \le 19g$，型为 $g^{39}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0 < m \le g$，由引理 2.116 存在型为 $g^{35}(4g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 g^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $g < m \le 19g$，由引理 2.102 存在型为 $(3g)^{13}(m-g)^1$ 的 4-GDD，添加 g 个无穷点并填充组就可得到所要的型为 $g^{39}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.119: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$，$u \in \{41, 43, 45, 47, 49\}$。对任意 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$，型为 g^um^1 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们由 TD$(6, 4g/3)$ 出发，把它的一个组截为 $ag/3$ 个点，$a \in \{0, 1, \ldots, 4\}$，这样我们就得到了一个型为 $(4g/3)^5(ag/3)^1$ 的 $\{5, 6\}$-GDD。把定理 2.1 应用到这个 $\{5, 6\}$-GDD 得到一个型为 $(\prod_{i=1}^{5}(8g+3n_i, 3n_i)^1)(2ag+3n_6, 3n_6)^1$ 的 4-IGDD，这里对 $i = 1, 2, \ldots, 5$，$n_i \equiv 0 \pmod 2$ 且 $0 \le n_i \le 4g/3$，而 n_6 的取值范围由 a 决定，见表格 2.6。现在添加 g 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^9(3n_i)^1$ 或 $g^{2a+1}(3n_6)^1$

（若 $a \neq 0$）的 4-GDD，这样我们就得到了所要的型为 $g^{40+2a+1}(\sum_{i=1}^{6} 3n_i)^1 \equiv g^u m^1$ 的 4-GDD，这里 m 的取值范围也列在表格 2.6 中。

表 2.6　引理 2.119 构造细节

a	n_6 的范围	u	m 的范围
0	$n_6 = 0$	41	$m \equiv 0 \pmod 6$, $0 \leq m \leq 20g$
1	$n_6 = g/3$	43	$m \equiv 3 \pmod 6$, $g \leq m \leq 21g$
2	$n_6 \equiv 0 \pmod 2$, $0 \leq n_6 \leq 2g/3$	45	$m \equiv 0 \pmod 6$, $0 \leq m \leq 22g$
3	$n_6 \equiv 1 \pmod 2$, $g/3 \leq n_6 \leq g$	47	$m \equiv 3 \pmod 6$, $g \leq m \leq 23g$
4	$n_6 \equiv 0 \pmod 2$, $0 \leq n_6 \leq 4g/3$	49	$m \equiv 0 \pmod 6$, $0 \leq m \leq 24g$

最后，对于 $u \in \{43, 47\}$ 且 $0 < m < g$，由引理 2.116 和 2.118，存在型为 $g^{u-8}(8g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^8 m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.120: *设 $g \equiv 3 \pmod 6$，$u \in \{51, 53, 55, 57, 59, 61\}$。对 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq m \leq (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 构造过程和引理 2.119 类似。我们先考虑 m 取值比较大的情形。由 TD$(6, 5g/3)$ 出发，把它的一个组截为 $ag/3$ 个点，$a \in \{0, 1, \ldots, 5\}$，这样我们就得到了一个型为 $(5g/3)^5(ag/3)^1$ 的 $\{5,6\}$-GDD。把定理 2.1 应用到这个 $\{5,6\}$-GDD 就得到一个型为 $(\prod_{i=1}^{5}(10g+3n_i, 3n_i)^1)(2ag+3n_6, 3n_6)^1$-IGDD，这里对 $i = 1, 2, \ldots, 5$，$n_i \equiv 0 \pmod 2$ 且 $g/3 \leq n_i \leq 5g/3$，而 n_6 的取值范围列在表格 2.7 中。现在添加 g 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^{11}(3n_i)^1$ 或 $g^{2a+1}(3n_6)^1$（若 $a \neq 0$）的 4-GDD，这样我们就得到了所要的型为 $g^{50+2a+1}(\sum_{i=1}^{6} 3n_i)^1 \equiv g^u m^1$ 的 4-GDD，这里 m 的取值范围也列在表格 2.7 中。

现在我们考虑 m 取小值的情形。对于 $u \in \{53, 57, 61\}$ 且 $0 \leq m < 6g$，由引理 2.101，存在型为 $g^{u-13}(13g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^{13}m^1$ 的 4-GDD 就得到所要设计。对于 $u \in \{51, 55, 59\}$ 且 $g \leq m < 5g$，由引理 2.101，存在型为 $g^{u-11}(11g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^{11}m^1$ 的 4-GDD；对于

表 2.7　引理 2.120 构造细节

a	n_6 的取值范围	u	m 的取值范围
0	$n_6=0$	51	$m\equiv 3\pmod 6,\ 5g\le m\le 25g$
1	$n_6=g/3$	53	$m\equiv 0\pmod 6,\ 6g\le m\le 26g$
2	$n_6\equiv 0\pmod 2,\ 0\le n_6\le 2g/3$	55	$m\equiv 3\pmod 6,\ 5g\le m\le 27g$
3	$n_6\equiv 1\pmod 2,\ g/3\le n_6\le g$	57	$m\equiv 0\pmod 6,\ 6g\le m\le 28g$
4	$n_6\equiv 0\pmod 2,\ 0\le n_6\le 4g/3$	59	$m\equiv 3\pmod 6,\ 5g\le m\le 29g$
5	$n_6\equiv 1\pmod 2,\ g/3\le n_6\le 5g/3$	61	$m\equiv 0\pmod 6,\ 6g\le m\le 30g$

$0<m<g$，由引理 2.118 和 2.119，存在型为 $g^{u-12}(12g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $g^{12}m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 2.121：设 $g\equiv 3\pmod 6$。则对任意 $m\equiv 3\pmod 6$ 且 $0<m\le 31g$，型为 $g^{63}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $0<m\le g$，由引理 2.120，存在型为 $g^{59}(4g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 g^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于 $g<m\le 31g$，由引理 2.111 存在型为 $(3g)^{21}(m-g)^1$ 的 4-GDD，添加 g 个无穷点并填充组就可得到所要的型为 $g^{63}m^1$ 的 4-GDD。 □

综合引理 2.69, 2.96–2.103, 2.109–2.121 以及引理 2.104 和它的注，现在我们只剩下 $u=29$ 的情形需要讨论，为此我们要构造型为 57^um^1 以及 69^um^1 的 4-GDD。

引理 2.122：设 $g\in\{57,69\}$，$u\ge 19$。则对任意 $u\equiv 1\pmod 4$，$m\equiv 0\pmod 6$，$0\le m\le (gu-g)/2$；或者 $u\equiv 3\pmod 4$，$m\equiv 3\pmod 6$，$0<m\le (gu-g)/2$，型为 g^um^1 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们仅需考虑 $u=29$ 的情形。对于 $u=29$ 且 $84\le m\le 14g$，我们由一个 TD$(g/3+1,29)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $(g/3)^{29}29^1$ 的 $\{g/3+1,30\}$-GDD。现在，在大小为 29 的组中，我们给无穷点 ∞ 赋权 a，$a\in\{0,6,\ldots,42\}$，对剩下的点赋权 $3,9,\ldots,(g-3)/2$。对于这个设计中其他的点赋权 3。应用 WFC 我们就

可以得到所要的 4-GDD。对于 $u = 29$ 且 $0 \le m < 84$，由引理 2.113，存在型为 $g^{25}(4g+m)^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 g^4m^1 的 4-GDD 就可得到所要设计。 $\square$

引理 2.123: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$。则对任意 $m \equiv 0 \pmod 6$ 且 $0 \le m \le 14g$，型为 $g^{29}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 记 $g = 3s$，$s \equiv 1 \pmod 2$ 且 $s \ge 13$。我们来考察下面两种情况：

(i) 若存在 $q \in \{5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23\}$，$q$ 整除 s：对于 $s = q \in \{13, 17, 19, 23\}$，见引理 2.106, 2.108 和 2.122。对于 $s = 3q$，TD$(q+1, 29)$ 存在，应用引理 2.94 就可得到所要设计。对于 $s \ge 5q$，设 p 是满足条件的最小的 q，则必有 $s \ge p^2$。应用引理 2.95，取 "$g = 3p, v = s/p, u = 29$" 就可得到所要的型为 $(3s)^{19}m^1$ 的 4-GDD；这里需要的型为 $51^v m_v^1$ 的 4-GDD 来自于引理 2.108。

(ii) 若对任意 $q \in \{5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23\}$，$q$ 均不能整除 s：当 $3 \mid s$ 时，将 WFC 应用于 TD$(30, s/3)$ 即可；当 $3 \nmid s$ 时，将 WFC 应用于 TD$(30, s)$ 就可得到所要设计。

$\square$

综合引理 2.69, 2.96–2.103, 2.109–2.121, 2.123 以及引理 2.104 和它的注，我们可以得到下述结论。

定理 2.20: 设 $g \equiv 3 \pmod 6$ 且 $u \ge 4$。则除了下述情况外，对任意 $u \equiv 0 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 3$，$0 \le m \le (g(u-1)-3)/2$；或者 $u \equiv 1 \pmod 4$，$m \equiv 0 \pmod 6$，$0 \le m \le g(u-1)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod 4$，$m \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le g(u-1)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在。

(i) $u = 8$，g 不被 9，15，21 或 33 整除，且 $3g < m < (7g-3)/2$；

(ii) $u \in \{7, 11\}$，g 不被 15，21，27 或 33 整除，且 $0 < m < g$。

2.5 $g \equiv 1, 5 \pmod 6$ 的情形

本节中我们考虑 $g \equiv 1, 5 \pmod 6$ 的情形。

引理 2.124: 对于任意 $m \equiv 4 \pmod 6$，$4 \leq m \leq 28$，型为 $7^9 m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $m = 4, 28$，见定理 1.5(iii)。对于 $m \in \{10, 16, 22\}$，我们将会构造型为 7^9 的 $\{3, 4\}$-MGDD，其中区组大小为 3 的点可以划分成 $p = m - 4$ 个平行类。添加 p 个无穷点补全这些平行类，再额外添加 4 个无穷点并填入型为 $1^9 4^1$ 的 4-GDD（定理 1.3）就可得到所要设计。这里我们在集合 $\mathbb{Z}_{63}$ 上构造需要的 $\{3, 4\}$-MGDD，它们的组为 $\{\{0, 9, 18, \ldots, 54\} + i : 0 \leq i \leq 8\}$，洞为 $\{\{0, 7, 14, \ldots, 56\} + i : 0 \leq i \leq 6\}$。我们把所要设计的基区组列在表格 2.8 中。

表 2.8 型为 7^9 的 $\{3, 4\}$-MGDD 的基区组

	u	基区组				
$p = 6$	$-$	$2, 60, 17, 43$	$0, 12, 25, 31$	$2, 36, 52, 40$	$7, 40, 38, 60$	$7, 11, 30, 36$
$+3 \pmod{63}$	$-$	$0, 52, 23, 60$	$2, 41, 25, 35$	$5, 16, 13, 15$	$0, 8, 11, 24$	
	9	$1, 47, 59$	$6, 54, 8$	$4, 30, 52$		
	9	$0, 32, 33$	$1, 20, 40$	$8, 12, 7$		
$p = 12$	$-$	$2, 7, 48, 22$	$0, 2, 8, 32$			
$+1 \pmod{63}$	9	$5, 21, 2$	$6, 40, 44$	$7, 18, 19$		
	3	$1, 51, 41$				
$p = 18$	$-$	$0, 3, 16, 26$				
$+1 \pmod{63}$	9	$1, 3, 44$	$6, 2, 54$	$7, 32, 13$		
	9	$0, 58, 46$	$2, 26, 34$	$5, 6, 39$		

□

定理 2.21: 设 $u \equiv 0, 3, 9 \pmod{12}$ 且 $u \geq 9$。则对任意 $u \equiv 3 \pmod{12}$，$m \equiv 1 \pmod 6$，$1 \leq m \leq (7u - 7)/2$；或者 $u \equiv 9 \pmod{12}$，$m \equiv 4 \pmod 6$，$4 \leq m \leq (7u - 7)/2$；或者 $u \equiv 0 \pmod{12}$，$m \equiv 1 \pmod 3$，$1 \leq m \leq (7u - 10)/2$，型为 $7^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $u = 9$，见引理 2.124。对于 $u \geq 12$，$m \geq 7$，由定理 2.17，存在型为 $21^{\frac{u}{3}}(m - 7)^1$ 的 4-GDD。添加 7 个无穷点并填充组就可得到所要的型为 $7^u m^1$ 的 4-GDD。

对于 $u=12$，$m=4$，我们首先在集合 $\mathbb{Z}_{84}$ 上构造型为 7^{12} 的 $\{3,4\}$-MGDD，它的组为 $\{\{0,12,24,\ldots,72\}+i:0\le i\le 11\}$，洞为 $\{\{0,7,14,\ldots,77\}+i:0\le i\le 6\}$。将下列基区组 $+1 \pmod{84}$ 展开。

1	12	14	53	1	47	51	80	1	4	19	27
1	7	23	32	1	31	41	68	1	2	21	

注意到大小为 3 的基区组展开后可以得到三个平行类。添加 3 个无穷点补全这些平行类，再填入型为 $1^{12}1^1$ 的 4-GDD（定理 1.3）就可得到所要的型为 $7^{12}4^1$ 的 4-GDD。对于 $u=24$，$m=4$，构造过程类似。我们由一个型为 7^{24} 的 $\{3,4\}$-MGDD 出发，补全三个平行类，再填入型为 $1^{24}1^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。我们在集合 $\mathbb{Z}_{168}$ 上构造需要的 $\{3,4\}$-MGDD，它的组为 $\{\{0,24,\ldots,144\}+i:0\le i\le 23\}$，洞为 $\{\{0,7,14,\ldots,161\}+i:0\le i\le 6\}$。将下列基区组 $+1 \pmod{168}$ 展开。

1	72	115	152	1	9	32	136	1	76	96	135
1	79	109	125	1	6	159	165	1	37	84	150
1	108	111	137	1	75	100	157	1	19	41	142
1	12	14	93	1	2	54	119	1	39	101	

对于 $u=36$，$m=4$，我们由一个型为 63^4 的 4-GDD 出发，添加 4 个无穷点，在每个组上填入型为 7^94^1 的 4-GDD 就可得到所要的型为 $7^{36}4^1$ 的 4-GDD。对于 $u\ge 48$，$u\equiv 0 \pmod{12}$ 且 $m=4$，由一个型为 $84^{u/12}$ 的 4-GDD 出发，添加 4 个无穷点，在每个组上填入型为 $7^{12}4^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。对于剩余的情形，见定理 1.5(iii)。 □

引理 2.125: 对任意 $u\equiv 0 \pmod{12}$，$m\equiv 2 \pmod 3$ 且 $0<m\le(11(u-1)-3)/2$，除了可能的例外值 $(u,m)\in\{(12,2),(24,8)\}$，型为 $11^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $u=12$ 且 $m\ge 11$, 见文献[88] 定理 2.5。对于 $u=12$ 且 $m=5$，见文献[85]引理 2.16。对于 $u=12$ 且 $m=8$，所要设计等价于一个型为 11^{12} 的 $\{3,4\}$-GDD，其中大小为 3 的区组可以划分成八个平行类。我们在集合 $\mathbb{Z}_{132}$ 上构造这样的设计，它的组由集合 $\{0,12,24,\ldots,120\}$ 生成。它的区组集中包含五个大小为 3 的基区组，每一个 $+3 \pmod{132}$ 展开都可以生成一个平行类：

$$0,130,86 \qquad 0,43,89 \qquad 0,1,2 \qquad 0,88,131 \qquad 0,46,44$$

另外还有两个大小为 3 的基区组 $14, 61, 54$ 和 $9, 34, 29$，将它们 $+2 \pmod{132}$ 展开可以得到三个平行类。我们把其余的大小为 4 的基区组列在下面，它们均是 $+2 \pmod{132}$ 展开，其中最后一个基区组生成一个短轨道。

$9, 40, 92, 109$	$12, 17, 90, 86$	$0, 18, 83, 94$	$13, 103, 111, 118$
$13, 84, 16, 7$	$5, 28, 63, 85$	$4, 66, 45, 27$	$11, 122, 67, 81$
$15, 96, 80, 43$	$3, 7, 54, 57$	$3, 22, 119, 109$	$13, 26, 130, 108$
$6, 0, 31, 20$	$7, 36, 45, 109$	$17, 110, 120, 78$	$9, 88, 96, 122$
$10, 23, 40, 115$	$0, 33, 66, 99$		

对于 $u = 24$ 且 $m \geq 11$，由引理 2.68 存在型为 $33^8(m-11)^1$ 的 4-GDD，添加 11 个无穷点并填入型为 11^4 的 4-GDD 就可以得到所要设计。对于 $u = 24$ 且 $m = 2$，见定理 1.5(vi)。对于 $u = 24$ 且 $m = 5$，所要设计等价于一个型为 11^{24} 的 $\{3, 4\}$-GDD，其中大小为 3 的区组可以划分成五个平行类。我们在集合 $\mathbb{Z}_{264}$ 上构造这样的设计，它的组由集合 $\{0, 24, 48, \ldots, 240\}$ 生成。它的区组集中包含五个大小为 3 的基区组，每一个 $+3 \pmod{264}$ 展开都可以生成一个平行类。

$0, 262, 86$	$0, 175, 89$	$0, 1, 2$	$0, 88, 263$	$0, 176, 178$

我们把其余的大小为 4 的基区组列在下面，它们均是 $+1 \pmod{264}$ 展开，其中最后一个基区组生成一个短轨道。

$7, 146, 22, 168$	$5, 238, 191, 69$	$6, 108, 27, 176$	$2, 8, 215, 21$
$5, 90, 165, 106$	$4, 64, 161, 125$	$4, 115, 97, 7$	$9, 199, 18, 58$
$7, 257, 232, 98$	$4, 33, 86, 96$	$3, 237, 226, 79$	$9, 118, 47, 145$
$9, 109, 65, 32$	$3, 194, 239, 202$	$5, 60, 67, 55$	$5, 211, 59, 85$
$7, 134, 91, 24$	$2, 81, 116, 150$	$4, 248, 216, 103$	$0, 4, 46, 133$
$0, 66, 132, 198$			

对于 $u = 36$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $s = 2, 44$，$0 \leq t \leq 147$ 且 $t \equiv 0 \pmod{3}$。由定理 1.4(iii) 存在型为 $99^4 t^1$ 的 4-GDD，添加 s 个无穷点并填入型为 $11^9 s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5(vi)），这样就可以得到所要的型为 $11^{36}(s+t)^1 \equiv 11^{36}m^1$ 的 4-GDD。

对于 $u \geq 48$ 且 $m = 2$，见定理 1.5(vi)。对于 $u \geq 48$ 且 $m \geq 5$，将 u 写为 $u = 12n$，$n \geq 4$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $s = 5, 59$，$0 \leq t \leq 66(n-1)$，$t \equiv 0 \pmod{3}$。由定理 2.13 存在型为 $132^n t^1$ 的 4-GDD，添加 s 个无穷点并填入型为 $11^{12} s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5(vi)），这样就可以得到所要的型为 $11^{12n}(s+t)^1 \equiv 11^{12n}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.126: 设 $u \equiv 0 \pmod{12}$ 且 $u \geq 12$。则对任意 $m \equiv 2 \pmod 3$ 且 $0 < m \leq (17(u-1)-3)/2$，除了 $u = 12$ 且 $0 < m < 17$，或者 $u = 24$ 且 $170 < m < 194$ 之外，型为 $17^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 我们先来考察 $0 < m < 17$ 的情形。对于 $u \geq 24$，由定理 2.4 存在 PBD$(u, \{4,5,6\})$。将它看作一个型为 1^u 的 $\{4,5,6\}$-GDD，对每个点赋权 17，利用文献[85]引理 2.14 中的型为 $(2n, 2^n)^6(5n, 5^n)^1$ 的 4-DGDD，这里 $n \in \{4,5,6\}$，我们可以得到一个型为 $(2u, 2^u)^6(5u, 5^u)^1$ 的 4-DGDD。添加 m 个无穷点，在每个组中填入型为 $2^u m^1$ 或 $5^u m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

现在我们来考察 $m \geq 17$ 的情形。对于 $u = 12$，见文献[88]定理 2.5。对于 $u = 24$ 且 $17 \leq m \leq 170$，由定理 2.101 存在型为 $51^8(m-17)^1$ 的 4-GDD，添加 17 个无穷点并填充组就可得到所要设计。对于 $u = 24$ 且 $m = 194$，见定理 1.5(vi)。对于 $u = 36$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $s = 2, 68$，$0 \leq t \leq 228$ 且 $t \equiv 0 \pmod 3$。由定理 1.4(iii) 存在型为 $153^4 t^1$ 的 4-GDD，添加 s 个无穷点并填入型为 $17^9 s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5(vi)）就可得到所要设计。对于 $u \geq 48$，将 u 写为 $u = 12n$，$n \geq 4$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $s = 17, 92$，$0 \leq t \leq 102(n-1)$ 且 $t \equiv 0 \pmod 3$。由定理 2.13 存在型为 $204^n t^1$ 的 4-GDD，添加 s 个无穷点并填入型为 $17^{12} s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5(vi)），这样就可以得到所要的型为 $17^{12n}(s+t)^1 \equiv 17^{12n} m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.127: 设 $g \equiv 1, 5 \pmod 6$，$u \equiv 0 \pmod{12}$。对任意 $m \equiv g \pmod 3$ 且 $0 < m \leq (g(u-1)-3)/2$，除了下述两种情况之外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在:

(i) 当 $u = 12$ 时，$0 < m < g$;

(ii) 当 $u = 24$ 时，$0 < m < g$ 或 $10g < m < (23g-3)/2$。

证明. 根据引理 2.125–2.126，我们可以假设 $g \notin \{11, 17\}$。对于 $u = 12$，见定理 1.4(iv)。对于 $u = 24$ 且 $g \leq m \leq 10g$，由定理 2.101 存在型为 $(3g)^8(m-g)^1$ 的 4-GDD，添加 g 个无穷点并填充组就可得到所要设计。对于 $u = 24$ 且 $m = (23g-3)/2$，见定理 1.5。对于 $u = 36$，见定理 1.4(iv)。对于$u \geq 48$，将 u 写为 $u = 12n$，$n \geq 4$，将 m 写为 $m = s + t$，这里 $0 \leq t \leq 6g(n-1)$，$t \equiv 0 \pmod 3$，并且

(i) 当 $g \equiv 1 \pmod 6$ 时，$s = 1$ 或 $(11g-3)/2$；

(ii) 当 $g \equiv 5 \pmod 6$ 时，$s = 2$ 或 $(11g-3)/2$。

由定理 2.13 存在型为 $(12g)^n t^1$ 的 4-GDD，添加 s 个无穷点并填入型为 $g^{12} s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5），这样就可以得到所要的型为 $g^{12n}(s+t)^1 \equiv g^{12n} m^1$ 的 4-GDD。 $\square$

对于 u 模 12 的其他共轭类，我们有下述结果。

引理 2.128: *设 $g \equiv 1, 5 \pmod 6$，$u \equiv 3, 9 \pmod{12}$ 且 $u \geq 15$。则当 $u \equiv 3 \pmod{12}$ 时，对任意 $m \equiv g \pmod 6$，$g \leq m \leq (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在；当 $u \equiv 9 \pmod{12}$ 时，对任意 $m - g \equiv 3 \pmod 6$，$g < m \leq (gu-g)/2$，除了 $u \in \{21, 33\}$ 且 $g < m < 4g$ 外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 令 $y = m - g$。则

(i) 当 $u \equiv 3 \pmod{12}$ 时，$y \equiv 0 \pmod 6$，$0 \leq y \leq g(u-3)/2$；

(ii) 当 $u \equiv 9 \pmod{12}$ 时，$y \equiv 3 \pmod 6$，$0 < y \leq g(u-3)/2$。

由定理 2.20，存在型为 $(3g)^{u/3} y^1$ 的 4-GDD。添加 g 个无穷点并填入型为 g^4 的 4-GDD，这样就可以得到所要的 4-GDD。 $\square$

引理 2.129: *设 $g \equiv 1, 5 \pmod 6$，$u \equiv 3, 9 \pmod{12}$ 且 $u \geq 111$。则对任意 $u \equiv 3 \pmod{12}$，$m \equiv g \pmod 6$，$0 < m \leq (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 9 \pmod{12}$，$m - g \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \leq (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。*

证明. 对于 $m \geq g$，见引理 2.128。对于 $0 < m < g$，由于 $u \geq 111$，根据引理 2.128 存在型为 $g^{u-36}(36g+m)^1$ 的 4-GDD。在最后一个组中填入型为 $g^{36} m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。 $\square$

现在我们还需考虑 $u \equiv 3, 9 \pmod{12}$，$u \leq 105$ 的情形。我们首先来考虑一些小的 g。

引理 2.130: 设 $g \equiv 1,5 \pmod 6$ 且 $g \le 29$。则对任意 $u \equiv 3 \pmod{12}$，$u \ge 51$，$m \equiv g \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 9 \pmod{12}$，$u \ge 45$，$m - g \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 对于 $g \in \{1,5,7\}$，见定理 1.3 和 2.21。

对于 $g = 11$，$m = 8$，由引理 2.128 存在型为 $11^{u-12}140^1$ 的 4-GDD，在最后一个组中填入型为 $11^{12}8^1$ 的 4-GDD（引理 2.125）就可得到所要设计。对于 $g = 11$，$m = 2,5$，见定理 1.5(vi)。

对于 $g = 17$，$0 < m < 17$，由定理 2.4 存在 PBD$(u,\{4,5,6\})$。将它看作一个型为 1^u 的 $\{4,5,6\}$-GDD，对每个点赋权 17，利用型为 $(2n,2^n)^6(5n,5^n)^1$ 的 4-DGDD 这里 $n \in \{4,5,6\}$，我们可以得到一个型为 $(2u,2^u)^6(5u,5^u)^1$ 的 4-DGDD。添加 m 个无穷点，在每个组中填入型为 $2^u m^1$ 或 $5^u m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $g = 13,19,25$，$0 < m < 25$，由一个型为 g^u 的 4-MGDD 出发，添加 m 个无穷点并填入型为 $1^u m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

对于 $g = 23,29$，$0 < m < 29$，由型为 $2^n 5^1$ 的 4-GDD 出发，$n = 9,12$，对每个点赋权 u，利用型为 u^4 的 4-MGDD 可以得到一个型为 $(2u,2^u)^n(5u,5^u)^1$ 的 4-DGDD。添加 m 个无穷点，在每个组中填入型为 $2^u m^1$ 或 $5^u m^1$ 的 4-GDD 就可得到所要设计。

综合引理 2.128，我们就可得到结论。 □

在接下来几个引理的证明中，我们把 m 写为 $m = s + t$，这里 $s = 1,5$（当 $u \equiv 3 \pmod{12}$ 时），或者 $s = 2,4$（当 $u \equiv 9 \pmod{12}$ 时），$t \equiv 0 \pmod 6$。

引理 2.131: 设 $g \equiv 1,5 \pmod 6$ 且 $u \in \{45,75,81,105\}$。则对 $u \equiv 3 \pmod{12}$，$m \equiv g \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 9 \pmod{12}$，$m - g \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由引理 2.128，我们仅需考虑 $0 < m < g$ 的情况。对于 $u = 45$，由引理 2.69，存在型为 $(9g)^5 t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个无穷点并填入型为 $g^9 s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5），这样就可以得到所要的 4-GDD。对于 $u = 81$，构造过程类似，这里我们是由一个型为 $(9g)^9 t^1$ 的 4-GDD 出发的。对于 $u = 75$，由型为 $(15g)^5 t^1$ 的 4-GDD出发，添加

s 个无穷点并填入型为 $g^{15}s^1$ 的 4-GDD（定理 1.5），这样就可得到所要设计。最后，对于 $u=105$ 且 $g\neq 11$，用型为 $g^{21}s^1$ 的 4-GDD 填充型为 $(21g)^5t^1$ 的 4-GDD；对于 $g=11$，见引理 2.130。 □

引理 2.132：设 $g\equiv 1,5 \pmod 6$。则对任意 $m-g\equiv 3 \pmod 6$，$0<m\leq 28g$，型为 $g^{57}m^1$ 的 4-GDD 均存在；对于任意 $m\equiv g \pmod 6$，$0<m\leq 31g$，型为 $g^{63}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 由引理 2.128，我们仅需考虑 $0<m<g$ 的情况。根据引理 2.130，我们可以假设 $g\geq 31$。对于 $u=57$，我们由一个 TD$(6,2g)$ 出发（定理 2.8），对前四个组中的点赋权 6，对第五个组中的 g 个点赋权 6，剩下的 g 个点赋权 3，对于最后一个组中的点赋权 0 或 6。由于型为 6^5，6^6，6^43^1 以及 6^53^1 的 4-GDD 均存在，我们可以得到一个型为 $(12g)^4(9g)^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个无穷点，在每个组中填入型为 g^9s^1 或 $g^{12}s^1$ 的 4-GDD，这样就可以得到所要的型为 $g^{57}(s+t)^1\equiv g^{57}m^1$ 的 4-GDD。这里对于 $g\equiv 1 \pmod 6$，需要的型为 $g^{12}4^1$ 的 4-GDD 可以通过下述方法得到：由一个型为 g^{12} 的 4-MGDD（定理 2.2）出发，添加 4 个无穷点，在每个洞中填入型为 $1^{12}4^1$ 的 4-GDD 即可。

对于 $u=63$，构造过程类似，只是在第五个组中给 g 个点赋予权重 9，而不是权重 3。我们可以得到一个型为 $(12g)^4(15g)^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^{12}s^1$ 或 $g^{15}s^1$ 的 4-GDD，我们就可以得到所要的 4-GDD。这里对于 $g\equiv 5 \pmod 6$，需要的型为 $g^{12}5^1$ 的 4-GDD 可以通过下述方式得到：由一个型为 $2^{\frac{g-5}{2}}5^1$ 的 4-GDD 出发，对每个点赋权 12，利用型为 12^4 的 4-MGDD 可以得到型为 $(24,2^{12})^{\frac{g-5}{2}}(60,5^{12})^1$ 的 4-DGDD，然后在每个组中填入型为 $2^{12}5^1$ 或 5^{13} 的 4-GDD 即可。 □

引理 2.133：设 $g\equiv 1,5 \pmod 6$。则对任意 $m-g\equiv 3 \pmod 6$ 且 $0<m\leq 34g$，型为 $g^{69}m^1$ 的 4-GDD 均存在。

证明. 根据引理 2.130，我们可以假设 $g\geq 31$。对于 $m\geq g$，见引理 2.128。对于 $0<m<g$，我们由一个 TD$(7,2g)$ 出发（定理 2.8），对前五个组中的点赋权 6，对第六个组中的 g 个点赋权 6，剩下的 g 个点赋权 3，对于最后一个组中的点赋

权 0 或 6，应用 WFC 我们可以得到一个型为 $(12g)^5(9g)^1t^1$ 的 4-GDD。添加 s 个无穷点，在每个组中填入型为 g^9s^1 或 $g^{12}s^1$ 的 4-GDD，就可以得到所要的型为 $g^{69}(s+t)^1 \equiv g^{69}m^1$ 的 4-GDD。 □

引理 2.134: 设 $g \equiv 1,5 \pmod 6$，$u \in \{87,93,99\}$。则对任意 $u \equiv 3 \pmod{12}$，$m \equiv g \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$；或者 $u \equiv 9 \pmod{12}$，$m-g \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le (gu-g)/2$，型为 g^um^1 的 4-GDD 均存在。

证明. 由引理 2.128，我们仅需考虑 $0 < m < g$ 的情况。对于 $g \le 29$，见引理 2.130。对于 $g \in \{31,37\}$，由型为 g^u 的 4-MGDD 出发，添加 m 个无穷点，在每个洞中填入型为 1^um^1 的 4-GDD 即可。对于 $g \ge 35$ 且 $g \ne 37$，我们由一个 TD$(8,2g)$ 出发（定理 2.8），对前六个组中的点赋权 6，对第七个组中的 g 个点赋权 $6,9,12$ 或 15，对最后一个组中的点赋权 0 或 6，应用 WFC 我们可以得到一个型为 $(12g)^6(ng)^1t^1$ 的 4-GDD，$n \in \{15,21,27\}$。添加 s 个无穷点，在每个组中填入型为 $g^{12}s^1$ 或 g^ns^1 的 4-GDD 就可以得到所要的型为 $g^{72+n}(s+t)^1 \equiv g^um^1$ 的 4-GDD。 □

综合引理 2.127, 2.129 和 2.131–2.134，我们有下述结论。

定理 2.22: 设 $g \equiv 1,5 \pmod 6$，$u \ge 12$。则除了下述情况外，对任意 $u \equiv 0 \pmod{12}$，$m \equiv g \pmod 3$，$0 < m \le (g(u-1)-3)/2$；或者 $u \equiv 3 \pmod{12}$，$m \equiv g \pmod 6$，$0 < m \le g(u-1)/2$；或者 $u \equiv 9 \pmod{12}$，$m-g \equiv 3 \pmod 6$，$0 < m \le g(u-1)/2$，型为 g^um^1 的 4-GDD 均存在。

(i) $u \in \{12,15,27,39,51\}$，且 $0 < m < g$；

(ii) $u \in \{21,33\}$，且 $0 < m < 4g$；

(ii) $u = 24$，且 $0 < m < g$ 或 $10g < m < (23g-3)/2$。

综合定理 2.13, 2.15, 2.20 和 2.22，以及定理 1.3, 2.10, 2.14, 2.16–2.19 和 2.21，我们就得到了定理 1.6。我们这里再复述一下。

定理 2.23: 记 $P_2 = \{(33,23),(33,29),(39,35)\}$，$P_6 = \{(13,27),(13,33),(17,39),(19,45),(19,51),(23,63)\}$。记 $[x,y]_{a(b)} = \{n : n \equiv a \pmod b,\ x \le n \le y\}$。设

$g, m > 0$ 且 $u \geq 4$。则除了确定的 $(g,u,m) = (2,6,5)$ 以及列在表格 1.1 中的可能的情况外，型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD 存在的必要条件，即 $m \leq g(u-1)/2, gu \equiv 0 \pmod 3), g(u-1)+m \equiv 0 \pmod 3)$ 且 $\binom{gu+m}{2} - u\binom{g}{2} - \binom{m}{2} \equiv 0 \pmod 6$，也是充分的。

2.6 型不一致的 GDD 在设计中的应用

本节中，我们主要介绍型不一致的 GDD 在设计中的应用，包括用它来构造成对平衡设计，有向成对平衡设计，$K_{1(3)}$-GDD，型不一致的 Kirkman frame，可分组覆盖设计。这里我们对成对平衡设计给出了具体构造过程，而其他的设计我们仅介绍一下我们的结果。

2.6.1 成对平衡设计与有向成对平衡设计

我们现在来构造一些区组大小最小为 4 的成对平衡设计。这些成对平衡设计包括 $(v,K,1)$-PBD，$(v,K) \in \{(75,\{4,6\}),(101,\{4,8\}),(192,\{4,9\}),(89,\{4,6,8\}),(87,\{4,6,9\}),(170,\{4,7,8\})\}$，以及 $(v,\{4,7,9\},1)$-PBD，$v \in \{114, 150, 159, 183, 186, 195, 210\}$。

引理 2.135: 对任意 $(v,K) \in \{(75,\{4,6\}),(101,\{4,8\}),(192,\{4,9\}),(87,\{4,6,9\}),(170,\{4,7,8\})\}$，$(v,K,1)$-PBD 存在。

证明. 对于 $(v,K) = (75,\{4,6\})$，由定理 2.10 存在型为 $6^9 21^1$ 的 4-GDD。将大小为 6 的组作为区组，并在大小为 21 的组上构造一个 $(21,\{4,6\},1)$-PBD，这样我们就得到了所要的 $(75,\{4,6\},1)$-PBD。

对于 $(v,K) \in \{(101,\{4,8\}),(192,\{4,9\}),(87,\{4,6,9\}),(170,\{4,7,8\})\}$，构造过程类似，由定理 2.10 和 2.16 存在型为 $g^u m^1$ 的 4-GDD，这里 $(g,u,m) \in \{(8,9,29),(9,15,57),(6,13,9),(8,15,50)\}$。将大小为 g 的组作为区组，并在大小为 m 的组上构造一个 $(m,K,1)$-PBD，这样我们就得到了所要的 $(v,K,1)$-PBD。 □

下面的 PBD 是由 R. Julian R. Abel 构造的。

引理 2.136: $89 \in B(\{4,6,8\})$。

证明. 我们直接构造一个型为 $1^{81}8^1$ 的 $\{4,6\}$-GDD，这样就得到了所要的 $(89,\{4,6,8\},1)$-PBD。我们在集合 $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{27}\cup M$ 上构造所要的 $\{4,6\}$-GDD，这里 $M=\{\infty_1,\ldots,\infty_8\}$。它有两个自同构 T_1 和 T_2，在非无穷点上的作用如下：

$$T_1(x,y)=(x,y+1) \tag{2.1}$$

以及

$$T_2(x,y)=(x+1,10y). \tag{2.2}$$

基区组如下所示：

$$\begin{array}{lcllllll}
B_1 & = & \{(0,0), & (0,1), & (1,0), & (1,10), & (2,0), & (2,19)\},\\
B_2 & = & \{(0,0), & (0,4), & (0,14), & (0,25), & (1,11), & (2,15)\},\\
B_3 & = & \{(0,0), & (0,7), & (1,3), & (1,15)\}, & & \\
B_4 & = & \{(0,0), & (0,3), & (0,8), & (2,16)\}, & & \\
B_5 & = & \{(0,0), & (1,4), & (2,25)\}, & & & \\
B_6 & = & \{(0,0), & (1,6), & (2,4)\}, & & & \\
B_7 & = & \{(0,2), & (1,20), & (2,11)\}, & & & \\
B_8 & = & \{(0,0), & (0,9), & (0,18)\}. & & &
\end{array}$$

B_1，B_7 和 B_8 各生成 27 个区组（B_1 和 B_7 在 T_2 的作用下保持不变，而 B_8 在 T_1^9 的作用下保持不变）。其他基区组各产生 81 个区组。

B_5 和 B_6 各产生 3 个平行类，而 B_7 和 B_8 各产生一个平行类。添加 8 个无穷点补全这些平行类就得到了所要的 $\{4,6\}$-GDD。 □

引理 2.137: $\{114,150,159,183,186,195,210\}\subseteq B(\{4,7,9\})$。

证明. 对于 $v=114$，我们先在集合 $\mathbb{Z}_{27}$ 上构造一个型为 3^9 的 $\{3,6\}$-RGDD，它的组是 $\{\{0,9,18\}+i: 0\le i\le 8\}$。将下面所给平行类中的元素 $+3 \pmod{27}$ 展开就可得到所有的区组。

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{15,16,17,18,22,2} & 19,9,24\\
21,13,0 & 12,1,5 & 3,20,26\\
7,23,4 & 11,14,6 & 25,8,10
\end{array}$$

添加 9 个无穷点补全这些平行类得到一个型为 $3^9 9^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD。我们利用这个 GDD 构造 $(114,\{4,7,9\},1)$-PBD。由一个 TD$(4,9)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $3^9 9^1$ 的 $\{4,10\}$-GDD。这里要注意的是每个大小为 10 的区组都与大小为 9 的组相

交于无穷点 ∞，而每个大小为 4 的区组虽都与大小为 9 的组相交，但不交于无穷点 ∞。我们给无穷点 ∞ 赋权 9，对其他点赋权 3。用型为 3^4 的 4-GDD 替换大小为 4 的区组，用上面构造的型为 $3^9 9^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD 替换大小为 10 的区组。这样我们就可以得到一个型为 $9^9 33^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD。注意到 $33 \in B(4,7,9)$，我们就得到了所要的 $(114,\{4,7,9\},1)$-PBD。

对于 $v=183$，我们由一个 TD$(4,14)$ 出发，对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $3^{14}14^1$ 的 $\{4,15\}$-GDD。我们给无穷点 ∞ 赋权 18，对其他点赋权 3。用型为 3^4 的 4-GDD 替换大小为 4 的区组，用型为 $3^{14}18^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD 替换大小为 15 的区组（这个 GDD 通过重新定义型为 $6^7 18^1$ 的 $\{4\}$-GDD 的组得到）。这样我们就可以得到一个型为 $9^{14}57^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD。注意到 $57 \in B(4,7,9)$，我们就得到了所要的 $(183,\{4,7,9\},1)$-PBD。

对于 $v=195$，我们先在集合 $\mathbb{Z}_{162}\cup M$ 上构造一个型为 $27^6 24^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD，它的组是 $\{\{0,6,12,\ldots,156\}+i: 0\le i\le 5\}\cup\{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{162}$ 的元素 $+2 \pmod{162}$ 展开，M 中形如 $x_i\in\{x\}\times\mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod{n}$ 展开。这样就得到所要的区组集。

$27^6 24^1$:

$+2 \pmod{162}$; $M=(\{a,b\}\times\mathbb{Z}_9)\cup(\{c,d\}\times\mathbb{Z}_3)$

$0,101,4,a_0$	$13,84,134,a_0$	$6,52,33,a_0$	$5,63,104,a_0$
$3,127,38,a_0$	$10,133,53,a_0$	$2,148,131,b_0$	$8,117,48,b_0$
$0,52,61,b_0$	$6,111,35,b_0$	$10,69,157,b_0$	$14,155,109,b_0$
$2,138,49,c_0$	$17,15,46,c_0$	$0,1,2,5,10,21,d_0$	
$13,130,35,45$	$10,104,27,30$	$0,76,111,62$	$8,157,45,89$
$10,128,81,48$	$14,67,107,42$	$7,82,71,114$	$9,79,72,23$
$5,105,30,128$	$8,39,31,65$	$7,86,156,52$	$7,117,154,14$
$0,51,79,106$			

对这个 GDD 添加 9 个无穷点并填充组就可以得到一个型为 $9^{18}33^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD。这样，我们就得到了所要的 $(195,\{4,7,9\},1)$-PBD。

对于 $v\in\{150,159,186,210\}$，所要的 $(v,\{4,7,9\},1)$-PBD 来源于型为 $9^u m^1$ 的 $\{4,7\}$-GDD，$(u,m)\in\{(13,33),(14,33),(17,33),(17,57)\}$。我们在集合 $\mathbb{Z}_{9u}\cup M$ 上构造这些 $\{4,7\}$-GDD。它们的组是 $\{\{0,u,2u,\ldots,8u\}+i: 0\le i\le u-1\}\cup\{M\}$。

把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{9u}$ 的元素 $+1 \pmod{9u}$ 或 $+2 \pmod{9u}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod{n}$ 展开。这样就得到所要的区组集。

$9^{13}33^1$:

$+1 \pmod{117}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d,e\} \times \mathbb{Z}_3)$

$0,1,3,7,15,32,a_0$		$2,62,85,a_0$	$1,62,34,b_0$
$0,21,95,b_0$	$4,74,15,b_0$	$1,25,63,c_0$	$6,75,56,c_0$
$8,85,50,c_0$	$5,42,58,d_0$	$7,2,75,e_0$	$0,72,18,108$
$0,10,30,76$			

$9^{14}33^1$:

$+2 \pmod{126}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d,e\} \times \mathbb{Z}_3)$

$0,1,2,5,8,17,a_0$		$13,30,52,a_0$	$15,114,40,a_0$
$3,14,61,a_0$	$10,81,47,a_0$	$4,115,89,b_0$	$5,101,99,b_0$
$14,72,62,b_0$	$6,39,19,b_0$	$13,120,56,b_0$	$10,34,87,b_0$
$4,39,125,c_0$	$5,120,67,c_0$	$9,72,42,c_0$	$11,34,38,c_0$
$1,51,86,c_0$	$7,82,44,c_0$	$0,49,59,d_0$	$4,69,44,d_0$
$8,118,47,e_0$	$7,45,0,e_0$	$8,65,44,87$	$7,51,125,28$
$4,73,104,86$	$17,125,65,119$	$16,66,7,97$	$12,46,0,66$
$0,29,75,94$			

$9^{17}33^1$:

$+1 \pmod{153}$; $M = (\{a,b,c\} \times \mathbb{Z}_9) \cup (\{d,e\} \times \mathbb{Z}_3)$

$0,1,3,7,15,26,a_0$		$4,68,47,a_0$	$2,35,77,b_0$
$4,96,39,b_0$	$0,100,124,b_0$	$3,104,16,c_0$	$4,64,54,c_0$
$6,53,101,c_0$	$1,42,122,d_0$	$1,39,98,e_0$	$2,20,64,92$
$2,68,29,84$	$1,105,100,21$	$1,23,68,32$	$0,30,70,107$

$9^{17}57^1$:

$+1 \pmod{153}$; $M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{51}) \cup (\{b,c\} \times \mathbb{Z}_3)$

$20,21,23,27,32,42,a_0$		$7,46,79,a_0$	$140,87,3,a_0$
$35,94,66,a_0$	$10,56,96,a_0$	$77,4,121,a_0$	$13,118,100,a_0$
$150,24,113,a_0$	$41,132,33,a_0$	$50,1,80,a_0$	$37,8,98,a_0$
$2,90,114,a_0$	$25,68,146,a_0$	$18,60,73,a_0$	$108,31,51,a_0$
$116,34,142,a_0$	$1,57,107,b_0$	$2,40,141,c_0$	$0,23,58,83$

$\square$

综合引理 2.135–2.137，Abel 和 Buratti 的结果[6]，以及 Greig 的结果[93]，我们可以将文献[124]中的表格改进为表格 2.9。

2.6.2 有向成对平衡设计

对一个非负整数集合 K，一个有向成对平衡设计（directed pairwise balanced design）DB$(K,1;v)$，就是一个阶数为 v 的集合系统 $(X,\mathcal{B})$，使得 X 中的任意两个不同点构成的有序点对恰好出现在 $\mathcal{B}$ 的一个区组中，并且对任意 $B\in\mathcal{B}$，都有 $|B|\in K$。令 $DB(K)=\{v:\exists\,\text{DB(K, 1; v)}\}$。那么 $DB(K)$ 被称为是 K 的有向 *PBD*-闭包。

有向成对平衡设计一个重要的应用就是插位/删位纠错码的构造。在储存或传输数据的时候，数据经常会在未知的位置发生丢失或插入的错误。插位/删位纠错码可以用来纠正码字传输过程中因码元删除或插入而引起的错误。Levenshteĭn 最先对这类码做了系统的研究[111,112]，并提出了 t-插位/删位纠错码的概念。这里“t-插位/删位纠错”是指我们能够纠正任何一种 i 个插位和 j 个删位的错误，只要满足 $i+j\le t$。由一个 DB$(K,1;v)$ 出发，将它所有的区组作为码字，然后再加上形如 $(x,\dots,x)$ 的码字，我们就可以得到一个 v 元 t-插位/删位纠错码，这里 $t=\min\{k-2:k\in K\}$。

当 $K=\{k\}$ 时，有下述已知结果[4,13,140,146,147,159]：

定理 2.24: 令 $k\in\{3,4,5,6,7\}$。一个 DB$(k,1,v)$ 存在当且仅当 $v\ge k$，$2(v-1)\equiv 0 \pmod{k-1}$ 且 $2v(v-1)\equiv 0 \pmod{k(k-1)}$，除了例外值 $(v,k)\in\{(15,5),(21,6),(22,7)\}$，以及可能的例外值 $(v,k)\in\{(274,7),(358,7),(400,7),(526,7)\}$。

当 $K=\{4,5\}$ 或 $\{4,6\}$ 时，Fuji-Hara等人[70]完全确定了有向 PBD-闭包 DB(K)。而我们利用型不一致的 GDD 和有向 GDD，研究了 $\{4,5,\dots,9\}$ 中所有包含 $\{4\}$ 的子集的有向 PBD-闭包，我们的研究结果见表格 2.10。

2.6.3 $K_{1(3)}$-GDD 与 Kirkman frame

本章我们研究了型不一致的 4-GDD 的存在性问题。运用同样的构造方法，我们进一步考察了型为 $g^u m^1$ 的 $K_{1(3)}$-GDD 的存在性问题，这里 $K_{1(3)}=\{k:k\equiv$

表 2.9　$\{4, 5, \ldots, 9\}$ 中所有包含 $\{4\}$ 的子集的 PBD-闭包

子集合	必要条件	可能的例外值 粗体表示确定的例外值
4	$1, 4 \bmod 12$	无
4,5	$0, 1 \bmod 4$	**8 9 12**
4,6	$0, 1 \bmod 3$	**7 9 10 12 15 18 19 22 24 27** 33 34 39 45 46 51 87
4,7	$1 \bmod 3$	**10 19**
4,8	$0, 1 \bmod 4$	**5 9 12 17 20 21 24 33 41 44 45** 48 53 60 65 69 77 89
4,9	$0, 1, 4, 9 \bmod 12$	**12 21 24 48** 60 69 84 93 96
4,5,6	$\mathbb{N}$	**7 8 9 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,7	$\mathbb{N}$	**6 8 9 10 11 12 14 15 18 19 23 26 27** 30 39 42 51 54
4,5,8	$0, 1 \bmod 4$	**9 12**
4,5,9	$0, 1 \bmod 4$	**8 12**
4,6,7	$0, 1 \bmod 3$	**9 10 12 15 18 19 24 27** 33 45 87
4,6,8	$\mathbb{N}$	**5 7 9 10 11 12 14 15 17 18 19 20 22 23 24 26 27** 33 34 35 39 41 47 50 51 53 59 62 65 71 77 87 95 110 131 170
4,6,9	$0, 1 \bmod 3$	**7 10 12 15 18 19 22 24 27** 34
4,7,8	$\mathbb{N}$	**5 6 9 10 11 12 14 15 17 18 19 20 21 23 24 26 27** **30 33 35 38 39 41 42 44 45 47** 48 51 54 59 62 65 66 69 74 75 77 78 83 87 89 90 102 110 114 126 131 138 143 150 162 167 174 186
4,7,9	$0, 1 \bmod 3$	**6 10 12 15 18 19 21 24 27 30 39 42 48** 51 54 60 66 69 75 78 84 87 93 96 102 111 138 147 174
4,8,9	$0, 1 \bmod 4$	**5 12 17 20 21 24 41 44** 48 53 60 69 77
4,5,6,7	$\mathbb{N}$	**8 9 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,6,8	$\mathbb{N}$	**7 9 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,6,9	$\mathbb{N}$	**7 8 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,7,8	$\mathbb{N}$	**6 9 10 11 12 14 15 18 19 23 26 27** 30 42 51
4,5,7,9	$\mathbb{N}$	**6 8 10 11 12 14 15 18 19 23 26 27** 30 51 54
4,5,8,9	$0, 1 \bmod 4$	**12**
4,6,7,8	$\mathbb{N}$	**5 9 10 11 12 14 15 17 18 19 20 23 24 26 27** 33 35 41 65 77 131
4,6,7,9	$0, 1 \pmod 3$	**10 12 15 18 19 24 27**
4,6,8,9	$\mathbb{N}$	**5 7 10 11 12 14 15 17 18 19 20 22 23 24 26 27** 34 35 41 47 50 53 59 62 71 77 95 131 170
4,7,8,9	$\mathbb{N}$	**5 6 10 11 12 14 15 17 18 19 20 21 23 24 26 27 30** 35 38 39 41 42 44 47 48 51 54 59 62 110 143 167 174
4,5,6,7,8	$\mathbb{N}$	**9 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,6,7,9	$\mathbb{N}$	**8 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,6,8,9	$\mathbb{N}$	**7 10 11 12 14 15 18 19 23**
4,5,7,8,9	$\mathbb{N}$	**6 10 11 12 14 15 18 19 23 26 27** 30 51
4,6,7,8,9	$\mathbb{N}$	**5 10 11 12 14 15 17 18 19 20 23 24 26 27** 35 41
4,5,6,7,8,9	$\mathbb{N}$	**10 11 12 14 15 18 19 23**

表 2.10 $\{4,5,...,9\}$ 中所有包含 $\{4\}$ 的子集的有向 PBD-闭包

子集合	必要条件	可能的例外值 粗体表示确定的例外值
4	$1 \pmod 3$	无
4,5	$\mathbb{N}$	**6, 8, 9, 12, 14**
4,6	$0,1 \pmod 3$	**9, 15**
4,7	$1 \pmod 3$	无
4,8	$\mathbb{N}$	**5, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 21, 23,** 24, 26, 27, 33, 35, 39, 45, 51
4,9	$0,1 \pmod 3$	**6, 12, 15, 24,** 27, 30, 42
4,5,6	$\mathbb{N}$	**8, 9,** 14
4,5,7	$\mathbb{N}$	**6, 8, 9, 12, 14**
4,5,8	$\mathbb{N}$	**6, 9, 12,** 14
4,5,9	$\mathbb{N}$	**6, 8, 12,** 14
4,6,7	$0,1 \pmod 3$	**9,** 15
4,6,8	$\mathbb{N}$	**5, 9, 11,** 14, 15, 17,23, 26, 35
4,6,9	$0,1 \pmod 3$	15
4,7,8	$\mathbb{N}$	**5, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17,** 18, 21, 23, 24, 26, 27, 33, 35, 39, 45, 51
4,7,9	$0,1 \pmod 3$	**6, 12, 15,** 24, 27, 30, 42
4,8,9	$\mathbb{N}$	**5, 6, 11, 12, 14,** 15, 17, 23, 24, 26, 27, 35
4,5,6,7	$\mathbb{N}$	**8, 9,** 14
4,5,6,8	$\mathbb{N}$	**9,** 14
4,5,6,9	$\mathbb{N}$	**8,** 14
4,5,7,8	$\mathbb{N}$	**6, 9,** 12, 14
4,5,7,9	$\mathbb{N}$	**6, 8, 12,** 14
4,5,8,9	$\mathbb{N}$	**6, 12,** 14
4,6,7,8	$\mathbb{N}$	**5, 9, 11,** 14, 15, 17, 23, 26, 35
4,6,7,9	$0,1 \pmod 3$	15
4,6,8,9	$\mathbb{N}$	**5, 11,** 14, 15, 17, 23, 26, 35
4,7,8,9	$\mathbb{N}$	**5, 6, 11, 12,** 14, 15, 17, 23, 24, 26, 27, 35
4,5,6,7,8	$\mathbb{N}$	**9,** 14
4,5,6,7,9	$\mathbb{N}$	**8,** 14
4,5,6,8,9	$\mathbb{N}$	14
4,5,7,8,9	$\mathbb{N}$	**6,** 12, 14
4,6,7,8,9	$\mathbb{N}$	**5, 11,** 14, 15, 17, 23, 26, 35
4,5,6,7,8,9	$\mathbb{N}$	14

$1 \bmod 3\}$。和研究型不一致的 4-GDD 的存在性类似，我们先是对一些小的 g 构造出相应的 $K_{1(3)}$-GDD，然后利用 Wilson 基本构造法，IGDD 递归构造和 DGDD 递归构造得到大的值。由于篇幅所限，我们这里仅叙述下我们的结果。

定理 2.25：设 $g, m > 0$ 且 $u \geq 6$。则除了确定的 $(g, u, m) \in \{(1, 15, 4), (2, 6, 5)\}$ 以及列在表格 2.11 中的可能的情况外，型为 $g^u m^1$ 的 $K_{1(3)}$-GDD 存在的必要条件，即 $gu \equiv 0 \bmod 3$，$m \equiv g \bmod 3$ 且 $m \leq g(u-1)/2$，也是充分的。

利用 $K_{1(3)}$-GDD，通过加权的方法我们可以构造 Kirkman frame。对于型不一致的 Kirkman frame，我们有下述结果。

定理 2.26：设 $h, m > 0$ 且 $u \geq 4$。除了列在表格 2.12 中的可能的情况外，型为 $h^u m^1$ 的 Kirkman frame 存在的必要条件，即 h 为偶数，$hu \equiv 0 \bmod 3$，$m \equiv h \bmod 6$ 且 $m \leq h(u-1)/2$，也是充分的。

2.6.4 可分组覆盖设计

一个可分组覆盖设计（group divisible covering design，GDCD）是一个三元组 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$，其中 X 是一个点集，$\mathcal{G}$ 是 X 的一个划分，称为组，$\mathcal{B}$ 是一族 X 中的子集，称为区组，使得 X 中不在同一个组的点对至少出现在一个区组中，且对任意 $B \in \mathcal{B}$，$G \in \mathcal{G}$，$|B \cap G| \leq 1$。如果对任意 $B \in \mathcal{B}$，$|B| \in K$，那么称 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 为 K-GDCD。如果 $K = \{k\}$，简记为 k-GDCD。一个 GDCD 的型是一个多重集 $\{|G| : G \in \mathcal{G}\}$。我们通常用“指数”符号来表示 GDCD 的型：型为 $g_1^{u_1} g_2^{u_2} \dots g_t^{u_t}$ 表示对任意 $i = 1, 2, \dots, t$，有 u_i 个大小为 g_i 的组。

覆盖数是一个 GDCD 存在需要的最少的区组个数。我们用符号 $C(k, g_1^{u_1} g_2^{u_2} \dots g_s^{u_s})$ 来记型为 $g_1^{u_1} g_2^{u_2} \dots g_s^{u_s}$ 的 k-GDCD 的覆盖数。一个最优的 GDCD 是指区组数目最少的 GDCD。对于覆盖数 $C(k, g^u)$，我们有 Schönheim 型界。

定理 2.27：$C(k, g^u) \geq \lceil \frac{gu}{k} \lceil \frac{g(u-1)}{k-1} \rceil \rceil$.

Heinrich 等人[99]证明了当 $k = 3$ 时，这个界是可以达到的。

定理 2.28：$C(3, g^u) = \lceil \frac{gu}{3} \lceil \frac{g(u-1)}{2} \rceil \rceil$.

表 2.11　型为 $g^u m^1$ 的 $K_{1(3)}$-GDD 存在的必要条件以及未解决的值

g	u	m 的范围	未解决的值
$\equiv 0 \bmod 6$	无条件	$[0, \frac{g(u-1)}{2}]_{0(3)}$	无
$\equiv 3 \bmod 6$	$\equiv 1 \bmod 4$ $\equiv 3 \bmod 4$	$[0, \frac{g(u-1)}{2}]_{0(3)}$	无
$\equiv 2 \bmod 6$ $\equiv 4 \bmod 6$	$\equiv 0 \bmod 3$ $\equiv 0 \bmod 3$	$[2, \frac{g(u-1)}{2}]_{2(3)}$ $[1, \frac{g(u-1)}{2}]_{1(3)}$	$g \geq 10$ 并且： $u \in \{6, 9\}$；或者 $u \in \{12, 15, 18, 21, 27\}$ 且 $0 < m < g$
$\equiv 1 \bmod 6$ $\equiv 5 \bmod 6$	$\equiv 3 \bmod 12$ $\equiv 9 \bmod 12$ $\equiv 3 \bmod 12$ $\equiv 9 \bmod 12$	$[1, \frac{g(u-1)}{2}]_{1(3)}$ $[2, \frac{g(u-1)}{2}]_{2(3)}$	$g \geq 5$ 并且： $u = 9$；或者 $u = 15$，且 $0 < m < g$ 或 $m \equiv g + 3 \bmod 6$；或者 $u \in \{21, 27, 33, 39\}$，$0 < m < g$；或者 $u = 51$，$g \equiv 5 \bmod 6$，$g \geq 47$ 且 $0 < m < g$
$\equiv 3 \bmod 6$	$\equiv 0 \bmod 4$	$[0, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{0(3)}$	$g \geq 39$，g 不被 9，15，21 或 33 整除， $u = 8$，$3g < m < (7g-3)/2$
$\equiv 1 \bmod 6$ $\equiv 5 \bmod 6$	$\equiv 0 \bmod 12$ $\equiv 0 \bmod 12$	$[1, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{1(3)}$ $[2, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{2(3)}$	$g \geq 11$ 并且： $u = 12$，$0 < m < g$；或者 $u = 24$，且 $g \equiv 5 \bmod 6, 0 < m < g$ 或 $10g < m < (23g-3)/2$
$\equiv 3 \bmod 6$	$\equiv 2 \bmod 4$	$[0, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{0(3)}$	$g \geq 9$
$\equiv 1 \bmod 6$ $\equiv 5 \bmod 6$	$\equiv 6 \bmod 12$ $\equiv 6 \bmod 12$	$[1, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{1(3)}$ $[2, \frac{(g(u-1)-3)}{2}]_{2(3)}$	$g \geq 5$

表 2.12　型为 $h^u m^1$ 的 Kirkman frame 存在的必要条件以及未解决的值

<table>
<tr><th>h</th><th>u</th><th>m 的范围</th><th>未解决的值</th></tr>
<tr><td>$\equiv 0 \bmod 12$</td><td>无条件</td><td>$[0, \frac{h(u-1)}{2}]_{0(6)}$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>$\equiv 6 \bmod 12$</td><td>$\equiv 1 \bmod 4$
$\equiv 3 \bmod 4$</td><td>$[0, \frac{h(u-1)}{2}]_{0(6)}$</td><td>无</td></tr>
<tr><td>$\equiv 4 \bmod 12$</td><td>$\equiv 0 \bmod 3$</td><td>$[4, \frac{h(u-1)}{2}]_{4(6)}$</td><td rowspan="2">$h \geq 20$ 并且：
$u \in \{6, 9\}$；或者
$u \in \{12, 15, 18, 21, 27\}$，$0 < m < h$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 8 \bmod 12$</td><td>$\equiv 0 \bmod 3$</td><td>$[2, \frac{h(u-1)}{2}]_{2(6)}$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 2 \bmod 12$</td><td>$\equiv 3 \bmod 12$
$\equiv 9 \bmod 12$</td><td>$[2, \frac{h(u-1)}{2}]_{2(6)}$</td><td rowspan="2">$h \geq 14$ 并且：
$u = 9$；或者
$u \in \{15, 21, 27\}$，$0 < m < h$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 10 \bmod 12$</td><td>$\equiv 3 \bmod 12$
$\equiv 9 \bmod 12$</td><td>$[4, \frac{h(u-1)}{2}]_{4(6)}$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 6 \bmod 12$</td><td>$\equiv 0 \bmod 4$</td><td>$[0, \frac{(h(u-1)-6)}{2}]_{0(6)}$</td><td>$h \geq 78$，$h$ 不被 18，30，42 或 66 整除，
$u = 8$ 且 $3h < m < (7h-6)/2$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 2 \bmod 12$</td><td>$\equiv 0 \bmod 12$</td><td>$[2, \frac{(h(u-1)-6)}{2}]_{2(6)}$</td><td rowspan="2">$h \geq 22$ 并且：
$u = 12$，$0 < m < h$；或者
$u = 24$，$10h < m < (23h-6)/2$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 10 \bmod 12$</td><td>$\equiv 0 \bmod 12$</td><td>$[4, \frac{(h(u-1)-6)}{2}]_{4(6)}$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 6 \bmod 12$</td><td>$\equiv 2 \bmod 4$</td><td>$[0, \frac{(h(u-1)-6)}{2}]_{0(6)}$</td><td>$h \geq 18$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 2 \bmod 12$</td><td>$\equiv 6 \bmod 12$</td><td>$[2, \frac{(h(u-1)-6)}{2}]_{2(6)}$</td><td rowspan="2">$h \geq 14$</td></tr>
<tr><td>$\equiv 10 \bmod 12$</td><td>$\equiv 6 \bmod 12$</td><td>$[4, \frac{(h(u-1)-6)}{2}]_{4(6)}$</td></tr>
</table>

Francetić 等人[67]对 $k=4$ 的情形做了讨论，并取得了一部分的结果。

定理 2.29 (Francetić等[67])：当 $u \geq 4$ 且下述情形之一成立时，$C(4, g^u) = \lceil \frac{gu}{4} \lceil \frac{g(u-1)}{3} \rceil \rceil$：

1. $g \equiv 0 \bmod 6$，除了确定的例外值 $(g, u) = (6, 4)$；
2. $g \equiv 3 \bmod 6$，$u \equiv 0, 1 \bmod 4$；
3. $g \equiv 2, 4 \bmod 6$，$u \equiv 7, 10 \bmod 12$；
4. $g \equiv 1, 2, 4, 5 \bmod 6$，$u \equiv 1, 4 \bmod 12$，除了确定的例外值 $(g, u) = (2, 4)$；
5. $g \equiv 1, 4 \bmod 6$，$u \equiv 0, 6, 8, 11 \bmod 12$；
6. $g \equiv 4 \bmod 12$，$u \equiv 3 \bmod 6$，可能除了 $u \in \{21, 27\}$；
7. $g \equiv 4 \bmod 6$，$u \equiv 2, 5 \bmod 12$；
8. $g \equiv 2 \bmod 6$，$u \equiv 0, 2, 3 \bmod 6$；
9. $g \equiv 8 \bmod 12$，$u \equiv 5 \bmod 24$，可能除了 $g = 44$ 或 $u = 29$；
10. $g \equiv 8 \bmod 24$，$u \equiv 11, 17 \bmod 24$，可能除了 $u \in \{35, 41\}$；
11. $g \equiv 5 \bmod 6$，$u \equiv 2 \bmod 6$，可能除了 $g \in \{11, 17\}$ 且 $u \in \{32, 38, 44, 50\}$，或者 $g = 17$ 且 $u \equiv 2 \bmod 24$，$u \geq 26$；
12. $g \equiv 5 \bmod 6$，$u \equiv 0, 3 \bmod 12$，可能除了 $g = 17$，或者 $u \in \{27, 36, 39, 51\}$，或者 $(g, u) = (11, 24)$。

定理 2.30 (Francetić 等[67])：当 $u \geq 4$ 且下述情形之一成立时，$C(4, g^u) = \lceil \frac{gu}{4} \lceil \frac{g(u-1)}{3} \rceil \rceil$：

1. $g \equiv 1 \bmod 12$，$u \equiv 2, 3, 5, 9 \bmod 12$，除了确定的例外值 $(g, u) = (1, 9)$，可能除了 $g = 13$，或者 $u = 9$ 且 $g \geq 13$；
2. $g \equiv 2 \bmod 24$，$u \equiv 5, 11 \bmod 24$，可能除了 $g = 26$ 或者 $u \in \{29, 35\}$；
3. $g = 2$，$u \equiv 17, 23 \bmod 24$，可能除了 $u \in \{17, 23\}$；
4. $g \equiv 3 \bmod 6$，$u \equiv 2, 3 \bmod 4$，除了确定的例外值 $(g, u) = (3, 6)$，可能除了 $(g, u) \in \{(15, 14), (21, 14), (15, 18), (21, 18)\}$，或者 $u = 6$ 且 $g \geq 9$；
5. $g \equiv 1, 5 \bmod 6$，$u \equiv 7, 10 \bmod 12$，除了确定的例外值 $g = 1$ 且 $u \in \{7, 10, 19\}$，可能除了 $g \in \{5, 7\}$。

我们利用型不一致的 4-GDD 对上述结果做了改进，目前的结果如下。

定理 2.31: 对任意正整数 g,u 且 $u\geq 4$，除了确定的 $(g,u)\in\{(1,7),(1,9),(1,10),(1,19),(2,4),(3,6),(6,4)\}$ 以及下述可能的情形外，$C(4,g^u)=\lceil\frac{gu}{4}\lceil\frac{g(u-1)}{3}\rceil\rceil$。

1. $g\equiv 3 \bmod 6$:

   $u=6$，$g\geq 9$。

2. $g\equiv 2 \bmod 6$:

   $u=11$，$g\equiv 20 \bmod 24$；或者

   $u\equiv 5 \bmod 6$，$g\in\{26,44\}$ 或 $g\equiv 14 \bmod 24$。

3. $g\equiv 4 \bmod 6$:

   $u\in\{15,21,27\}$，$g\equiv 10 \bmod 12$；或者

   $u\equiv 3 \bmod 6$，$g=22$。

4. $g\equiv 1 \bmod 6$:

   $u=9$，$g\geq 7$；或者

   $u=14$，$g\equiv 7 \bmod 12$；或者

   $u\equiv 7,10 \bmod 12$，$g=7$；或者

   $u\equiv 2,5 \bmod 12$，$g\in\{13,19\}$；或者

   $u\equiv 3,9 \bmod 12$，$g=13$ 或 $g\equiv 7 \bmod 12$。

5. $g\equiv 5 \bmod 6$:

   $u\in\{6,9,11,17,18\}$；或者

   $u\equiv 7,10 \bmod 12$，$g=5$；或者

   $u\equiv 6,9 \bmod 12$，$g=11$；或者

   $u\equiv 5,11 \bmod 12$，$g=29$ 或 $g\equiv 11,17,23 \bmod 24$。

3　5-GDD，4-frame 和 4-RGDD 的存在性问题

在本章中，我们将对定理 1.2, 1.8 和 1.9 中关于 5-GDD，4-frame 和 4-RGDD 存在性结果作出改进。我们的结果主要集中于组的大小比较大的情况。同时，我们也构造了一些较小的值，包括型为 2^{184}，9^{44}，18^{18} 和 36^{11} 的 4-RGDD。

3.1　5-GDD

本节中，我们要改进型一致的 5-GDD 的存在性结果。首先我们需要下面的概念和构造。

一个部分可分组设计（PℓGD）是一个三元组 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$，其中 X 是点集，$\mathcal{G}$ 是对 X 的划分，里面的元素称为组，$\mathcal{B}$ 是 X 的一个子集族，称为区组，并且要满足 (1) 每个组和每个区组至多只有一个交点；(2) 任意一对来自不同组的点至多同时出现在一个区组中。

下面的构造方法是由 Rees 提出的[129]，并在文献[130,131]中有重要应用。

构造 3.1: 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个型为 g^u 的 $\mathcal{A}$-可分解 k-PℓGD，这里对任意 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ 存在 r_i 个 α_i-平行类。假设存在一个 TD(u, h) 和它的一个自同构子群 $\mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 在每个组的点上的作用是强传递的。令 H_j 是 $\mathcal{H}$ 的一族子集，并且对每个 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ 有 r_i 个这样的大小为 α_i 的子集。如果集合 $\{H_j * \tau : \tau \in \mathcal{H}, j = 1, 2, \ldots, \sum_i r_i\}$ 在 $\mathcal{H}$ 上是可分解的，则存在型为 $(hg)^u$ 的可分解 k-PℓGD。

作为构造 3.1 的应用，我们有下面的构造。

构造 3.2: 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个型为 g^u 的 $\{k_1, k_2\}$-GDD，其中大小为 k_1 的区组是 $\mathcal{A}$-可分解的并且对任意 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ 存在 r_i 个 α_i-平行类。假设所有大小为 k_1 的区组形成一个有 s 个组的 PℓGD，$s \geq k_2$，同时存在一个 TD(s, h) 和它的一个自同构子群 $\mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 在每个组的点上的作用是强传递的。令 H_j 是 $\mathcal{H}$ 的一族子集，并且对每个 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ 有 r_i 个这样的大小为 α_i 的子集。如果集合 $\{H_j * \tau : \tau \in \mathcal{H}, j = 1, 2, \ldots, \sum_i r_i\}$ 在

$\mathcal{H}$ 上是可分解的，则存在型为 $(hg)^u$ 的 $\{k_1, k_2\}$-GDD，其中大小为 k_1 的区组可以划分成 $h\sum_i(r_i\alpha_i)$ 个平行类。

证明. 我们将构造 3.1 直接应用于大小为 k_1 的区组构成的 PℓGD，同时利用 TD(k_2, h) 将大小为 k_2 的区组“膨胀”起来。这样就可得到所要的 GDD。 □

引理 3.1: *存在一个型为 6^{14} 的 $\{4,5\}$-GDD，它大小为 4 的区组是 $[1,1,2,2]$-可分解的并构成了一个 7 个组的 PℓGD。*

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{84}$ 上构造所要设计，它的组是 $\{\{i, i+14, i+28, \ldots, i+70\} : 0 \le i < 14\}$。将下面的基区组 +2 (mod 84) 展开。

$$
\begin{array}{lll}
\{1,42,69,52\} & \{0,41,16,29\} & \\
\{7,60,57,34\} & & \\
\{0,47,60,11,80\} & \{5,81,22,29,27\} & \{1,16,8,10,48\} \\
\{5,15,80,44,26\} & \{5,11,49,10,31\} & \{0,3,22,34,83\}
\end{array}
$$

第一行中大小为 4 的基区组各生成了一个 2-平行类。第二行中大小为 4 的基区组生成了两个平行类。注意到 $\mathbb{Z}_{84}$ 中的差 $\pm7, \pm21, \pm35$ 仅出现在大小为 5 的区组里。这样所有大小为 4 的区组构成了一个 7 个组的 PℓGD，它的组是 $\{\{i, i+7, i+14, \ldots, i+77\} : 0 \le i < 7\}$。 □

引理 3.2: *存在一个型为 10^{14} 的 $\{4,5\}$-GDD，它大小为 4 的区组是 $[1,1,2,2,4]$-可分解的并构成了一个 7 个组的 PℓGD。*

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{140}$ 上构造所要设计，它的组是 $\{\{i, i+14, i+28, \ldots, i+126\} : 0 \le i < 14\}$。将下面的基区组 +2 (mod 140) 展开。

$$
\begin{array}{llll}
\{5,108,13,130\} & \{6,101,113,82\} & & \\
\{1,123,75,59\} & \{4,40,64,38\} & & \\
\{1,2,27,56\} & & & \\
\{3,108,91,64,97\} & \{3,65,132,63,86\} & \{0,43,65,97,48\} & \{4,54,109,5,70\} \\
\{4,57,125,10,87\} & \{1,35,32,134,14\} & \{1,82,10,42,72\} & \{3,7,138,80,27\} \\
\{9,12,16,24,105\} & \{0,13,52,103,113\} & &
\end{array}
$$

第一行中大小为 4 的基区组各生成了一个 2-平行类。第二行中两个大小为 4 的基区组生成了一个 4-平行类。第三行中大小为 4 的基区组生成了两个平行类。注意到 $\mathbb{Z}_{140}$ 中的差 $\pm7, \pm21, \pm35, \pm49, \pm63$ 仅出现在大小为 5 的区组里。这样所有大小为

4 的区组构成了一个 7 个组的 PℓGD，它的组是 $\{\{i, i+7, i+14, \ldots, i+133\} : 0 \leq i < 7\}$。 □

引理 3.3: *存在型为 10^{18} 的 $\{4,5\}$-GDD，它大小为 4 的区组可以划分成十二个平行类，七个 2-平行类和六个 4-平行类。*

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{90} \times \{0,1\}$ 上构造所要设计，它的组是 $\{\{(i,j),(9+i,j),(18+i,j),\ldots,(81+i,j)\} : 0 \leq i < 9, j = 0,1\}$。将下面的基区组 $(+1 \pmod{90}, -)$ 展开。

第一部分：下面的基区组各生成两个平行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(0,0),(13,0),(82,1),(75,1)\} & \{(1,1),(88,1),(43,0),(86,0))\} \\
\{(1,0),(53,1),(32,0),(20,1)\} & \{(0,1),(19,1),(36,0),(75,0)\} \\
\{(0,0),(76,1),(71,1),(65,0)\} & \{(0,1),(17,1),(13,0),(24,0)\}
\end{array}$$

第二部分：下面的基区组各生一个 2-平行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(1,0),(68,1),(47,1),(33,0)\} & \{(0,1),(58,1),(11,0),(32,0)\} \\
\{(0,0),(37,1),(12,1),(37,0)\} & \{(1,1),(7,0),(6,0),(47,1)\} \\
\{(0,1),(47,1),(73,0),(29,0)\} & \{(0,0),(3,1),(7,1),(84,0)\} \\
\{(0,0),(70,1),(60,1),(62,0)\} &
\end{array}$$

第三部分：每一行中的两个基区组生一个 4-平行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(0,1),(53,1),(67,1),(4,0)\} & \{(0,1),(16,0),(18,0),(40,0)\} \\
\{(0,1),(48,0),(13,1),(79,1)\} & \{(1,0),(11,1),(71,0),(68,0)\} \\
\{(0,0),(28,1),(59,1),(44,1)\} & \{(1,0),(62,0),(28,1),(27,0)\} \\
\{(0,1),(22,0),(38,1),(12,1)\} & \{(0,1),(65,0),(58,0),(9,0)\} \\
\{(1,0),(17,0),(37,1),(74,0)\} & \{(1,1),(2,0),(89,1),(40,1)\} \\
\{(1,0),(31,0),(39,0),(79,0)\} & \{(0,1),(68,1),(20,1),(60,1)\}
\end{array}$$

第三部分：大小为 5 的基区组。

$$\{(0,0),(23,1),(57,1),(51,1),(22,1)\} \quad \{(1,0),(6,0),(77,0),(81,0),(30,1)\}$$

□

为了将构造 3.2 应用到引理 3.1–3.3 中构造的 $\{4,5\}$-GDD，我们需要下面的概念和结论。

设 G 是一个 g 阶 Abelian 群。一个 G 上的*差矩阵*，记为 $(g,k;1)$-DM，是一个 $k \times g$ 的矩阵 $M = [m_{i,j}]$，$m_{i,j} \in G$，使得对任意 $1 \leq r < s \leq k$，差 $m_{r,j} - m_{s,j}, 1 \leq j \leq g$ 构成了 G 中的所有元素。将 q 阶初等 Abelian 群记为 EA(q)。我们有下述结果。

定理 3.1 ([63]): 有限域 $\mathbb{F}_q$ 的乘法表是 EA(q) 上的一个 $(q,q;1)$-DM。

定理 3.2 ([29]): 若存在 G 上的 $(g,k;1)$-DM 和 G' 上的 $(g',k;1)$-DM，则存在 $G\times G'$ 上的 $(gg',k;1)$-DM。

一般的，我们可以用 G 上的 $(g,k;1)$-DM 的列作为基区组构造出一个横截设计 TD(k,g)，并且 G 作为这个 TD 的一个自同构子群在每个组的点上的作用是强传递的。这样综合定理 3.1–3.2，我们有下面的结果。

引理 3.4: 设 m 是一个正整数，并且 m 有素因子分解 $m=p_1^{e_1}\dots p_l^{e_l}$，这里 p_i 是不同的素数并且对任意 $1\le i\le l$，$e_i\ge 1$。令 $k=\min\{p_i^{e_i}:1\le i\le l\}$。则存在横截设计 TD$(k,m)$，它的一个自同构子群在每个组的点上的作用是强传递的。

引理 3.5: 设 $\mathcal{H}=\mathbb{Z}_v$，$v\equiv 1,5 \pmod 6), v\ge 7$。令 $H_1=\{0\}$，$H_2=\{0,1\}$，$H_3=\{0,1,2,3\}$。那么集合 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathcal{H},j=1,2\}$ 和 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathcal{H},j=1,2,3\}$ 均是可分解的。

证明. 令 K 是 $\mathcal{H}$ 的一个子集。定义 $S(K)=\mathcal{H}\backslash K$。

对于集合 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathcal{H},j=1,2\}$，将 v 写为 $v=2t+1$。那么我们可以把它做如下分解：

1. $\{\{0,1\}+2i:i=0,1,\dots,t-1\}\cup\{\{2t\}\}$;
2. $\{\{1,2\}+2i:i=0,1,\dots,t-1\}\cup\{\{0\}\}$;
3. $S(\{0,2t\})\cup\{2t,0\}$.

对于集合 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathcal{H},j=1,2,3\}$，我们考虑下面几种情况。

当 $v=6t+1$ 时：

1. $\{\{0,1,2,3\}+6i+j,\{4,5\}+6i+j:i=0,1,2,\dots,t-1\}\cup\{\{6t+j\}\}, j=0,1,2,3,4,5$;
2. $S(\{6t,0,1,2,3,4\})\cup\{\{6t,0,1,2\},\{3,4\}\}$.

当 $v=12t+5$ 时：

1. $\{\{0,1,2,3\}+4i+j : i=0,1,2,\dots,3t\} \cup \{\{12t+4+j\}\}, j=0,1,2,3;$

2. $\{\{4,5\}+2i : i=0,1,2,\dots,6t+1\} \cup \{\{3\}\};$

3. $\{\{5,6\}+2i : i=0,1,2,\dots,6t+1\} \cup \{\{4\}\};$

4. $S(\{12t+4,0,1,2,3,4\}) \cup \{\{12t+4,0,1,2\},\{3,4\}\}.$

当 $v=12t+11$ 时：

1. $\{\{0,1,2,3\}+4i+j : i=0,1,2,\dots,3t+1\} \cup \{\{12t+8,12t+9\}+j, \{12t+10\}+j\},$ $j=0,1,2,3;$

2. $\{\{2,3\}+2i : i=0,1,2,\dots,6t+2\} \cup \{\{12t+8\},\{12t+9,12t+10,0,1\}\};$

3. $\{\{3,4\}+2i : i=0,1,2,\dots,6t+2\} \cup \{\{12t+9\},\{12t+10,0,1,2\}\};$

4. $S(\{12t+8,12t+9,12t+10,0,1,2\}) \cup \{\{12t+8,12t+9,12t+10,0\},\{1,2\}\}.$

□

推论 3.1: 设 $\mathcal{H}=\mathbb{Z}_v\times\mathbb{Z}_v$，$v\equiv 1,5 \pmod 6$ 且 $v\geq 7$。令 $H_1=\{(0,0)\}$，$H_2=\{(0,0),(1,0)\}$，$H_3=\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$。则集合 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathcal{H}, j=1,2\}$ 和 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathcal{H}, j=1,2,3\}$ 均是可分解的。

引理 3.6: 存在型为 42^{15} 和 54^{15} 的 5-GDD。

证明. 由引理 3.1，存在一个型为 6^{14} 的 $\{4,5\}$-GDD，它大小为 4 的区组是 $[1,1,2,2]$-可分解的并构成了一个 7 个组的 PℓGD。我们将构造 3.2 应用到这个 $\{4,5\}$-GDD 和引理 3.4 中的一个 TD$(7,p)$，$p=7,9$。对于型为 42^{15} 的，取 $\mathcal{H}=\mathbb{Z}_7$。令 $H_1=H_2=\{0\}$，$H_3=H_4=\{0,1\}$。根据引理 3.5 易知集合 $\{H_j+\tau:\tau\in\mathbb{Z}_7, j=1,2,3,4\}$ 是可分解的。这样我们就得到了一个型为 42^{14} 的 $\{4,5\}$-GDD，它的大小为 4 的区组可以划分为 42 个平行类。添加 42 个无穷点补全这些平行类就可得到所要的 5-GDD。对于型为 54^{15} 的，取 $\mathcal{H}=\mathrm{EA}(9)$。令 $H_1=H_2=\{(0,0)\}$，$H_3=H_4=\{(0,0),(0,1)\}$。由于集合 $\{\{(0,0)\}+\tau, \{(0,0),(0,1)\}+\tau : \tau\in\mathrm{EA}(9)\}$ 可以做如下分解：

$\{\{(0,j)\},\{(0,1+j),(0,2+j)\},\{(1,j)\},\{(1,1+j),(1,2+j)\},\{(2,j)\},\{(2,1+j),(2,2+j)\}\},$

$i = 0, 1, 2$. 这样我们就得到了一个型为 54^{14} 的 $\{4, 5\}$-GDD，将大小为 4 的区组补全就可得到所要的 5-GDD。 □

引理 3.7: *对任意大于等于 7 的素数 p，型为 $(10p)^{15}$ 的 5-GDD 均存在。*

证明. 由引理 3.2，存在一个型为 10^{14} 的 $\{4, 5\}$-GDD，它大小为 4 的区组是 $[1, 1, 2, 2, 4]$-可分解的并构成了一个 7 个组的 PℓGD。我们将构造 3.2 应用到这个 $\{4, 5\}$-GDD 和引理 3.4 中的一个 TD$(7, p)$。由于 p 是一个素数并且 $p \geq 7$，我们可以取 $\mathcal{H} = \mathbb{Z}_p$。令 $H_1 = H_2 = \{0\}$，$H_3 = H_4 = \{0, 1\}$，$H_5 = \{0, 1, 2, 3\}$。根据引理 3.5 易知集合 $\{H_j + \tau : \tau \in \mathbb{Z}_p, j = 1, 2, 3, 4, 5\}$ 是可分解的。这样我们就得到了一个型为 $(10p)^{14}$ 的 $\{4, 5\}$-GDD，它的大小为 4 的区组可以划分为 $10p$ 个平行类。添加 $10p$ 个无穷点补全这些平行类就可得到所要的 5-GDD。 □

引理 3.8: *存在型为 250^{15} 的 5-GDD。*

证明. 我们将构造 3.2 应用到引理 3.2 中的型为 10^{14} 的 $\{4, 5\}$-GDD 和引理 3.4 中的一个 TD$(7, 25)$。我们取 $\mathcal{H} = \mathrm{EA}(25)$。令 $H_1 = H_2 = \{(0, 0)\}$，$H_3 = H_4 = \{(0, 0), (1, 0)\}$，$H_5 = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$。我们可以对集合 $\{H_j + \tau : \tau \in \mathrm{EA}(25), j = 1, 2, 3, 4, 5\}$ 作如下分解：

1. $\{\{(i, j), (1 + i, j), (2 + i, j), (3 + i, j)\}, \{(4 + i, j)\} : 0 \leq j < 5\}, 0 \leq i < 5$;

2. $\{\{(i, j), (1 + i, j)\}, \{(2 + i, j), (3 + i, j)\}, \{(4 + i, j)\} : 0 \leq j < 5\}, 0 \leq i < 5$.

这样，我们就得到了一个型为 250^{14} 的 $\{4, 5\}$-GDD，它的大小为 4 的区组可以划分为 250 个平行类。添加 250 个无穷点补全这些平行类就可得到所要的 5-GDD。 □

引理 3.9: *对任意 $\alpha \equiv 1, 5 \pmod 6$ 且 $\alpha \notin \{1, 5\}$，型为 $(10\alpha)^{15}$ 的 5-GDD 均存在。*

证明. 设 α 最大的素因子是 p。若 $p \geq 7$，则由引理 3.7，存在型为 $(10p)^{15}$ 的 5-GDD。对每个点赋权 α/p，由于型为 $(\alpha/p)^5$ 的 5-GDD 均存在（定理 1.2），应用 WFC 我们就得到了所要的型为 $(10\alpha)^{15}$ 的 5-GDD。若 $p = 5$，则 $\alpha = 5^t$，$t \geq 1$。对于 $t = 2$ 的情形，见引理 3.8；对于 $t > 2$，我们由型为 250^{15} 的 5-GDD 出发，对每个点赋权 $\alpha/25$，应用 WFC 就可得到所要的 GDD。 □

引理 3.10: 对任意大于等于 19 的素数 p，型为 $(10p)^{23}$ 的 5-GDD 均存在。

证明. 由引理 3.3，存在一个型为 10^{18} 的 $\{4,5\}$-GDD，它大小为 4 的区组可以划分成十二个平行类，七个 2-平行类和六个 4-平行类。我们将构造 3.2 应用到这个 $\{4,5\}$-GDD 和引理 3.4 中的一个 TD$(18,p)$。由于 p 是一个素数并且 $p \geq 19$，我们可以取 $\mathcal{H}=\mathbb{Z}_p$。令 $H_i=\{0\}$，$1 \leq i \leq 12$；$H_i=\{0,1\}$，$13 \leq i \leq 19$；$H_i=\{0,1,2,3\}$，$20 \leq i \leq 25$。根据引理 3.5 易知集合 $\{H_j+\tau : \tau \in \mathbb{Z}_p, 1 \leq j \leq 25\} = (\cup_{i=1}^{6}\{H_i+\tau, H_{12+i}+\tau, H_{19+i}+\tau : \tau \in \mathbb{Z}_p\}) \cup \{H_7+\tau, H_{19}+\tau : \tau \in \mathbb{Z}_p\} \cup (\cup_{i=8}^{12}\{H_i+\tau : \tau \in \mathbb{Z}_p\})$ 是可分解的。这样我们就得到了一个型为 $(10p)^{18}$ 的 $\{4,5\}$-GDD，它的大小为 4 的区组可以划分为 $50p$ 个平行类。添加 $50p$ 个无穷点补全这些平行类得到一个型为 $(10p)^{18}(50p)^1$ 的 5-GDD。最后填入型为 $(10p)^5$ 的 5-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 3.11: 对任意 $\alpha \in \{25,49,121,169,289\}$，型为 $(10\alpha)^{23}$ 的 5-GDD 均存在。

证明. 对于 $\alpha=25$，将构造 3.2 应用到引理 3.3 中的型为 10^{18} 的 $\{4,5\}$-GDD 和引理 3.4 中的 TD$(18,25)$。这里我们取 $\mathcal{H}=\mathrm{EA}(25)$。令 $H_i=\{(0,0)\}$，$1 \leq i \leq 12$；$H_i=\{(0,0),(1,0)\}$，$13 \leq i \leq 19$；$H_i=\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$，$20 \leq i \leq 25$。注意到集合 $\{\{(0,0)\}+\tau, \{(0,0)\}+\tau, \{(0,0)\}+\tau, \{(0,0),(1,0)\}+\tau : \tau \in \mathcal{H}\}$ 可以分解为

$$\{\{(i,j)\},\{(1+i,j)\},\{(2+i,j)\},\{(3+i,j),(4+i,j)\} : 0 \leq j < 5\}, 0 \leq i < 5;$$

集合 $\{\{(0,0)\}+\tau, \{(0,0),(1,0)\}+\tau, \{(0,0),(1,0)\}+\tau : \tau \in \mathcal{H}\}$ 可以分解为

$$\{\{(i,j),(1+i,j)\},\{(2+i,j),(3+i,j)\},\{(4+i,j)\} : 0 \leq j < 5\}, 0 \leq i < 5;$$

集合 $\{\{(0,0)\}+\tau, \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}+\tau : \tau \in \mathcal{H}\}$ 可以分解为

$$\{\{(i,j),(1+i,j),(2+i,j),(3+i,j)\},\{(4+i,j)\} : 0 \leq j < 5\}, 0 \leq i < 5.$$

所以集合 $\{H_j+\tau : \tau \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq 25\}$ 也是可分解的。这样我们就得到了一个型为 250^{18} 的 $\{4,5\}$-GDD，它的大小为 4 的区组可以划分为 1250 个平行类。添加 1250 个无穷点补全这些平行类得到一个型为 $250^{18}1250^1$ 的 5-GDD。填充最后一个组就可得到所要的型为 250^{23} 的 5-GDD。

对于 $\alpha = \{49, 121, 169, 289\}$，过程类似。将构造 3.2 应用到引理 3.3 中的型为 10^{18} 的 $\{4, 5\}$-GDD 和引理 3.4 中的 TD$(18, \alpha)$。这里我们取 $\mathcal{H} = \mathrm{EA}(\alpha)$。令 $H_i = \{(0, 0)\}$，$1 \le i \le 12$；$H_i = \{(0, 0), (1, 0)\}$，$13 \le i \le 19$；$H_i = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$，$20 \le i \le 25$。根据推论 3.1 易知集合 $\{H_j + \tau : \tau \in \mathcal{H}, 1 \le j \le 25\}$ 是可分解的。这样我们就得到了一个型为 $(10\alpha)^{18}$ 的 $\{4, 5\}$-GDD，它的大小为 4 的区组可以划分为 50α 个平行类。补全这些平行类得到一个型为 $(10\alpha)^{18}(50\alpha)^1$ 的 5-GDD。填充最后一个组就可得到所要的 GDD。 □

引理 3.12: *对任意* $\alpha \equiv 1, 5 \pmod 6$ *且* $\alpha \notin \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 35, 55, 65, 77, 85, 91, 119, 143, 187, 221\}$，*型为* $(10\alpha)^{23}$ *的 5-GDD 均存在。*

证明. 对于 $\alpha \equiv 1 \pmod 6$，$\alpha \ge 325$，或 $\alpha \equiv 5 \pmod 6$，$\alpha \ge 449$ 的情形，见定理 1.2。现在我们假设当 $\alpha \equiv 1 \pmod 6$ 时 $\alpha \le 319$，当 $\alpha \equiv 5 \pmod 6$ 时 $\alpha \le 443$。

设 α 最大的素因子是 p。若 $p \ge 19$，则由引理 3.10，存在型为 $(10p)^{23}$ 的 5-GDD。对每个点赋权 α/p，应用 WFC 我们就得到了所要的型为 $(10\alpha)^{23}$ 的 5-GDD。若 $p \le 17$，对于 $\alpha \in \{25, 49, 121, 169, 289\}$ 的情形，见引理 3.11；对于 $\alpha \in \{125, 175, 245, 275, 425\}$，我们由型为 250^{23} 或 490^{23} 的 5-GDD 出发，对每个点赋权 $\alpha/25$ 或 $\alpha/49$，应用 WFC 就可得到所要的 GDD。 □

引理 3.13: *型为* 650^{23} *的 5-GDD 存在。*

证明. 由定理 2.8 存在 TD$(21, 31)$，删去一个点并重新定义组，我们可以得到一个型为 $20^{31}30^1$ 的 $\{21, 31\}$-GDD。对每个点赋权 23，利用型为 23^{21} 和 23^{31} 的 5-MGDD（见文献[2,116]）可以得到一个型为 $(460, 20^{23})^{31}(690, 30^{23})^1$ 的 5-DGDD。在组中填入型为 20^{23} 和 30^{23} 的 5-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 3.14: *设* $g \in \{34, 46, 62\}$。*则对任意* $u \in \{71, 111, 115\}$，*型为* g^u *的 5-GDD 均存在。*

证明. 对任意 $g \in \{34, 46, 62\}$，由定理 2.7 存在一个 $(g + 1, \{5, 7, 9\}, 1)$-PBD。删去一个点可以得到一个型为 $4^i6^j8^k$ 的 $\{5, 7, 9\}$-GDD，这里 $4i + 6j + 8k = g$。对每个点赋权 u，利用型为 u^5, u^7 和 u^9 的 5-MGDD（见文献[2]）我们可以得到型为

$(4u,4^u)^i(6u,6^u)^j(8u,8^u)^k$ 的 5-DGDD。在组中填入型为 4^u, 6^u 和 8^u 的 5-GDD 我们就可以得到所要的型为 $(4i+6j+8k)^u \equiv g^u$ 的 5-GDD。 □

引理 3.15: 对任意 $g \in \{14,22,26,34,38,46,58,62\}$，型为 g^{75} 的 5-GDD 均存在。

证明. 由引理 3.9 存在型为 $(5g)^{15}$ 的 5-GDD。在每个组中填入型为 g^5 的 5-GDD 就可得到所要设计。 □

引理 3.16: 对于 $g \in \{38,58\}$，型为 g^{115} 的 5-GDD 存在。

证明. 由引理 3.12 存在型为 $(5g)^{23}$ 的 5-GDD。在每个组中填入型为 g^5 的 5-GDD 就可得到所要设计。 □

综合定理 1.2，以及引理 3.6, 3.9, 3.12 和 3.13–3.16，我们有下述结论。

定理 3.3: 型为 g^u 的 5-GDD 存在的必要条件，即 $u \geq 5$，$g(u-1) \equiv 0 \pmod 4$，$g^2u(u-1) \equiv 0 \pmod{20}$，也是充分的，除了 $(g,u) \in \{(2,5),(2,11),(3,5),(6,5)\}$ 以及下述可能的情况之外:

1. $g=3$，$u \in \{45,65\}$;
2. $g \equiv 2,6,14,18 \pmod{20}$:
   (a) $g=2$，$u \in \{15,35,71,75,95,111,115,195,215\}$;
   (b) $g=6$，$u \in \{15,35,75,95\}$;
   (c) $g \in \{14,18,22,26\}$，$u \in \{11,15,71,111,115\}$;
   (d) $g \in \{34,46,62\}$，$u \in \{11,15\}$;
   (e) $g \in \{38,58\}$，$u \in \{11,15,71,111\}$;
   (f) $g=2\alpha$，这里 $\gcd(30,\alpha)=1$，$33 \leq \alpha \leq 2443$，$u=15$;
3. $g \equiv 10 \pmod{20}$:
   (a) $g=10$，$u \in \{5,7,15,23,27,33,35,39,47\}$;
   (b) $g=30$，$u=15$;

(c) $g=50$，$u\in\{15,23,27\}$；

(d) $g=90$，$u=23$；

(e) $g=10\alpha$，这里 $\alpha\in\{7,11,13,17,35,55,77,85,91,119,143,187,221\}$，$u=23$。

在本节结束前，我们还要构造一个型为 $16^5 4^1$ 的 5-GDD，这个设计虽然被引用过但并未被发表[3,8]。

引理 3.17: 型为 $16^5 4^1$ 的 5-GDD 存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{80}\cup(\{a\}\times\mathbb{Z}_4)$ 上构造所要的设计。它的组是 $\{\{i,i+5,i+10,\ldots,i+75\}$，$0\le i\le 5$，以及 $\{(\{a\}\times\mathbb{Z}_4)\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{80}$ 的元素 $+2 \pmod{80}$ 展开，形如 $a_i\in\{x\}\times\mathbb{Z}_4$ 的元素的下标 $+1 \pmod 4$ 展开。注意最后一个基区组展开后得到一个长为 8 的短轨道。

0	77	28	19	61	0	73	26	72	14	2	20	19	58	31
3	20	59	7	56	0	37	43	51	69	3	5	39	62	a_0
0	76	9	2	a_0	0	16	32	48	64					

□

这样我们有下述结论。

定理 3.4 (文献[8,12,84,130]): 对任意 $g\equiv 0 \pmod 4$，$m\equiv 0 \pmod 4$，$m\le 4g/3$，除了可能的例外值 $(g,m)\in\{(12,4),(12,8)\}$，型为 g^5m^1 的 5-GDD 均存在。

3.2 4-frame

本节中，我们将对 4-frame 的存在性结果作出改进。我们需要下面的由 Chang 和 Miao 提出的概念和构造方法[34]。

一个 k-DGDD $(X,\mathcal{H},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 被称为是一个 *k-double frame*，若它的区组集 $\mathcal{B}$ 可以划分为带洞平行类，每个带洞平行类是一族划分集合 $X\backslash(G_i\cup H_j)$ 的区组，这里 G_i，H_j 分别是某个组和某个洞。一般的，在一个 k-double frame 中，和给定的组 G 以及给定的洞 H 关联的带洞平行类的个数恰为 $|G\cap H|/(k-1)$。

对于 double frame，我们有下面的递归构造[34]。

构造 3.3：设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个型为 $g_1^{u_1} g_2^{u_2} \dots g_s^{u_s}$ 的 K-GDD，并且对任意 $k \in K$，型为 $(hv, h^v)^k$ 的 k'-double frame 均存在。则存在型为 $(hvg_1, (hg_1)^v)^{u_1} (hvg_2, (hg_2)^v)^{u_2} \dots (hvg_s, (hg_s)^v)^{u_s}$ 的 k'-double frame。

Double frame 一般被用来构造 frame。下面的构造是文献[34]中定理 6.1 的特殊情况。

构造 3.4：若存在型为 $(g_1, h_1^v)^{u_1} (g_2, h_2^v)^{u_2} \dots (g_s, h_s^v)^{u_s}$ 的 k-double frame，并且对任意 $i = 1, 2, \dots, s$，型为 h_i^v 的 k-frame 存在。则型为 h^v 的 k-frame 存在，这里 $h = \sum_{i=1}^{s} u_i h_i$。

引理 3.18：型为 $(21, 3^7)^5$ 的 4-double frame 存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{105}$ 上构造所要的设计。它的组由 $\{0, 7, 14, \dots, 98\}$ 生成，洞由 $\{0, 5, 10, \dots, 100\}$ 生成。把下边所列基区组 +1 (mod 105) 展开就可得到所要的设计。注意下述基区组 +35 (mod 105) 展开后形成一个带洞平行类。

71	72	48	89	82	6	79	43	16	68	94	102
61	17	23	74	62	31	53	64	3	46	92	104

□

引理 3.19：型为 $(21, 3^7)^7$ 的 4-double frame 存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_7$ 上构造所要的设计。它的组是 $\{(i, j), (7+i, j), (14+i, j) : 0 \le j < 7\}$，$0 \le i < 7$，洞是 $\{(0, j), (1, j) \dots, (20, j)\}$，$0 \le i < 7$。把下边所列基区组展开就可得到所要的设计。注意下述基区组 $(+7 \pmod{21}, -)$ 展开后形成一个带洞平行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(4,1),(3,3),(16,4),(8,6)\} & \{(17,2),(9,6),(19,4),(18,5)\} \\
\{(4,6),(17,4),(6,3),(1,5)\} & \{(16,2),(15,1),(3,6),(20,5)\} \\
\{(4,4),(19,1),(6,2),(8,3)\} & \{(1,4),(16,3),(18,2),(19,6)\} \\
\{(1,2),(19,3),(3,5),(13,1)\} & \{(2,5),(17,1),(12,2),(13,4)\} \\
\{(18,3),(12,5),(9,1),(6,6)\} &
\end{array}$$

□

引理 3.20：型为 $(21, 3^7)^9$ 的 4-double frame 存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{63}\times\mathbb{Z}_3$ 上构造所要的设计。它的组是 $\{(i,j),(9+i,j),\ldots,(54+i,j):0\le j<3\}$，$0\le i<9$，洞是 $\{(i,j),(7+i,j),\ldots,(56+i,j):0\le j<3\}$，$0\le i<7$。我们把基区组列在下面。

$$\begin{array}{ll}
\{(52,0),(51,0),(22,0),(32,2)\} & \{(33,0),(4,2),(10,2),(29,2)\}\\
\{(19,0),(43,2),(48,2),(17,0)\} & \{(20,0),(39,2),(26,1),(15,2)\}\\
\{(37,0),(25,1),(62,1),(24,0)\} & \{(1,0),(47,2),(6,2),(16,2)\}\\
\{(8,0),(30,1),(38,1),(40,2)\} & \{(55,0),(59,2),(58,0),(12,0)\}\\
\{(61,0),(57,0),(11,2),(41,1)\} & \{(31,0),(46,0),(34,2),(23,1)\}\\
\{(5,0),(3,1),(60,2),(44,2)\} & \{(2,0),(13,0),(50,2),(53,0)\}
\end{array}$$

将上述基区组 $(-,+1\pmod 3)$ 展开可以得到一个带洞平行类。然后将这个带洞平行类 $(+1\pmod{63},-)$ 展开就可得到所要的 double frame。 □

引理 3.21: 对任意 $h\equiv 6\pmod{12}$ 且 $h\notin\{6,30,66,78,90,114,126,150,174,210,222,246,258,282,294,318,330,342,354,414,534\}$，型为 h^7 的 4-frame 均存在。

证明. 对于 $h\in\{18,42,54\}$，见定理 1.9。对于 $h\ge 102$，由定理 2.7 存在一个 $(h/3+1,\{5,7,9\},1)$-PBD。删去一个点得到一个型为 $4^i6^j8^k$ 的 $\{5,7,9\}$-GDD，$4i+6j+8k=h/3$。现在对每个点赋权 21，利用型为 $(21,3^7)^5$, $(21,3^7)^7$ 和 $(21,3^7)^9$ 的 4-double frame 我们可以得到一个型为 $(84,12^7)^i(126,18^7)^j(168,24^7)^k$ 的 4-double frame。然后在组中填入型为 12^7, 18^7 和 24^7 的 4-frame（定理 1.9）。这样我们就得到了所要的型为 $(12i+18j+24k)^7\equiv h^7$ 的 4-frame。 □

构造 3.5 (利用 RTD 膨胀[34]): 若存在型为 h^u 的 k-frame 以及可分解横截设计 RTD(k,m)，则型为 $(hm)^u$ 的 k-frame 存在。

引理 3.22: 对任意 $h\in\{90,126,210,294,342,414\}$，型为 h^7 的 4-frame 均存在。

证明. 对于 $h\in\{90,126,342,414\}$，由定理 1.9 存在型为 18^7 的 4-frame。对每个点赋权 $h/18$，由于 RTD$(4,h/18)$ 存在（定理 1.8），应用构造 3.5 我们就可得到所要的 frame。对于 $h\in\{210,294\}$，我们由型为 42^7 的 4-frame（定理 1.9）出发，对每个点赋权 $h/42$，应用构造 3.5 就可得到所要的 frame。 □

综合引理 3.21 和 3.22，我们有下述结果。

引理 3.23: 对任意 $h \equiv 6 \pmod{12}$ 且 $h \notin \{6, 30, 66, 78, 114, 150, 174, 222, 246, 258, 282, 318, 330, 354, 534\}$，型为 h^7 的 4-frame 均存在。

为了从引理 3.23 中的得到更多的 frame，我们需要下面的构造。

构造 3.6 (**加权**[71]): 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个 GDD，$w : X \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 是 X 上的权重函数。若对任意区组 $B \in \mathcal{B}$，存在型为 $\{w(x) : x \in B\}$ 的 k-frame，则型为 $\{\sum_{x \in G} w(x) : G \in \mathcal{G}\}$ 的 k-frame 存在。

构造 3.7 (**填充洞**[71]): 假设存在组的大小属于 $T = \{t_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 的 k-frame，并设 $a \geq 0$。若对任意 $i = 1, 2, \dots, n$，组的大小属于 $T_i \cup \{a\}$ 的 k-frame 均存在，这里 $\sum_{t \in T_i} t = t_i$。那么存在一个 k-frame 它的组的大小属于 $(\cup_{i=1}^n T_i) \cup \{a\}$。

引理 3.24: 对任意 $h \equiv 6 \pmod{12}$ 且 $h \notin \{6, 30, 66, 78, 114, 150, 174, 222, 246, 258, 282, 318, 330, 354, 534\}$，型为 h^{39} 和 h^{47} 的 4-frame 均存在。

证明. 对于 $u = 39$，由定理 3.4 存在型为 $(2h)^5(8h/3)^1$ 的 5-GDD。对每个点赋权 3，利用型为 3^5 的 4-frame 可以得到型为 $(6h)^5(8h)^1$ 的 4-frame。添加 h 个无穷点并填入型为 h^7 和 h^9 的 4-frame 就可得到所要设计。对于 $u = 47$，过程类似，这里我们是从型为 $(8h/3)^5(2h)^1$ 的 5-GDD（定理 3.4）出发的。 □

综合定理 1.9 以及引理 3.23 和 3.24，我们有下述结论。

定理 3.5: 型为 h^u 的 4-frame 存在的必要条件，即 $u \geq 5$，$h \equiv 0 \pmod{3}$ 并且 $h(u-1) \equiv 0 \pmod{4}$，除了下述可能的情况外也是充分的:

1. $h = 36$，$u = 12$;
2. $h \equiv 6 \pmod{12}$:
   (a) $h = 6$，$u \in \{7, 23, 27, 35, 39, 47\}$;
   (b) $h = 18$，$u \in \{15, 23, 27\}$;
   (c) $h \in \{30, 66, 78, 114, 150, 174, 222, 246, 258, 282, 318, 330, 354, 534\}$，$u \in \{7, 23, 27, 39, 47\}$;

(d) $h \in \{n : 42 \le n \le 11238\} \backslash \{66, 78, 114, 150, 174, 222, 246, 258, 282, 318, 330, 354, 534\}$，$u \in \{23, 27\}$。

3.3 4-RGDD

本节中我们将构造型为 h^u 的 4-RGDD，这里 $u \in \{10, 70, 82\}$。我们所用到的构造之一类似于用 double frame 构造 frame（构造 3.4）。为了叙述我们的构造，需要引入下面的概念。

一个 k-DGDD$(X, \mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 被称为是 *frame* 型可分解的若它的区组集 $\mathcal{B}$ 可以划分成带洞平行类，每个带洞平行类划分了集合 $X \backslash G$，这里 G 是 $\mathcal{G}$ 中的某个组。一个组的度，$\deg(G)$，被定义为以这个组为洞的带洞平行类的数目。

引理 3.25: 在一个 frame 型可分解的 k-DGDD $(X, \mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 中，对任意组 $G \in \mathcal{G}$，任意洞 $H \in \mathcal{H}$，我们有 $\deg(G) = (|G| - |G \cap H|)/(k-1)$。

证明. 令 v 是点的数目。固定组 $G \in \mathcal{G}$ 和洞 $H \in \mathcal{H}$。考察 $G \cap H$ 中的任意一点 x。包含 x 的区组数为

$$r_x = (v - |G| - |H| + |G \cap H|)/(k-1). \tag{3.1}$$

令 $d = \sum_{G \in \mathcal{G}} \deg(G)$。则对每个 $x \in G \cap H$，除了以 G 为洞的平行类外，x 在每个带洞平行类中恰出现一次。这样我们有

$$r_x = d - \deg(G). \tag{3.2}$$

由等式 (1) 和 (2) 我们可推出

$$(v - |G| - |H| + |G \cap H|)/(k-1) = d - \deg(G). \tag{3.3}$$

将 (3) 对所有组 $G \in \mathcal{G}$ 求和得到

$$d = (v - |H|)/(k-1). \tag{3.4}$$

带入 (3) 我们有

$$\deg(G) = (|G| - |G \cap H|)/(k-1). \tag{3.5}$$

这样我们就完成了证明。 □

构造 3.8: 设 $(X,\mathcal{H},\mathcal{G},\mathcal{B})$ 是一个型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\dots g_s^{u_s}$ 的 K-GDD 并且对任意 $k\in K$ 存在型为 $(hv,h^v)^k$ 的 frame 型可分解的 k'-DGDD。则存在型为 $(hvg_1,(hg_1)^v)^{u_1}$ $(hvg_2,(hg_2)^v)^{u_2}\dots(hvg_s,(hg_s)^v)^{u_s}$ 的 frame 型可分解的 k'-DGDD。

证明. 令 $x\in G\in\mathcal{G}$ 是所给 K-GDD 中任意的一点。对于 X 中不和 x 同属一组的点 y，有且仅有一个区组 $B\in\mathcal{B}$ 同时包含了 x 和 y。容易看出 $\cup_{x\in B\in\mathcal{B}}(B\backslash\{x\})$ 划分了 $X\backslash G$。利用这个事实，剩下的验证就是很直接的了。 □

构造 3.9: 假设存在型为 $(g_1,h_1^v)^{u_1}$ $(g_2,h_2^v)^{u_2}\dots(g_s,h_s^v)^{u_s}$ 的 frame 型可分解的 k-DGDD，并且对任意 $i=1,2,\dots,s$ 型为 h_i^v 的 k-RGDD 均存在。则存在型为 h^v 的 k-RGDD，这里 $h=\sum_{i=1}^{s}u_ih_i$。

证明. 注意在 frame 型可分解的 k-DGDD 中，对每个大小为 $g_i=vh_i$ 的组恰有 $h_i(v-1)/(k-1)$ 个以它为洞的平行类，同时在型为 h_i^v 的 k-RGDD 中也正好有 $h_i(v-1)/(k-1)$ 个平行类。这样我们在填充 DGDD 的洞时就可以把 RGDD 的平行类补到带洞平行类的洞中。 □

引理 3.26: 对任意 $u\in\{5,7,9,17\}$，型为 10^u 的 frame 型可分解的 4-MGDD 均存在。

证明. 对于 $u=5$，文献[10]中作者构造了一个型为 10^5 的 4-MGDD，它的一个自同构子群在每个组的点上的作用是强传递的。这样它的区组在这个自同构子群的作用下的轨道形成了带洞平行类。

对于 $u=7$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{70}$ 上构造所要的设计。它的组由 $\{0,7,14,\dots,63\}$ 生成，洞由 $\{0,10,20,\dots,60\}$ 生成。将下面的基区组 +2 (mod 70) 展开得到所要设计。这里同一列的三个基区组在 +14 (mod 70) 展开后形成带洞平行类。

1	5	62	60	4	45	68	22	6	33	60	2
13	66	22	30	5	51	43	6	11	24	13	29
12	9	67	31	11	55	30	52	3	8	9	40

对于 $u=9$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{90}$ 上构造所要的设计。它的组由 $\{0,9,18,\dots,81\}$ 生成，洞由 $\{0,10,20,\dots,80\}$ 生成。将下面的基区组 +1 (mod 90) 展开得到所要设

计。这里同一列的两个基区组在 $+9 \pmod{90}$ 展开后形成带洞平行类。

88	4	73	80	1	42	38	80	89	23	46	24
2	75	87	41	88	31	57	59	83	12	67	70

对于 $u = 17$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{170}$ 上构造所要的设计。它的组由 $\{0, 17, 34, \ldots, 153\}$ 生成，洞由 $\{0, 10, 20, \ldots, 160\}$ 生成。将下面的基区组 $+1 \pmod{170}$ 展开得到所要设计。这里同一列的四个基区组在 $+17 \pmod{170}$ 展开后形成带洞平行类。

6	135	22	31	6	149	73	11	4	116	88	1
8	80	81	32	7	1	72	135	16	9	90	165
1	163	62	19	8	163	134	46	7	98	59	61
3	7	26	38	2	94	139	150	11	134	57	70

□

引理 3.27: 存在型为 14^{10} 的 4-RGDD。

证明. 我们在集合 $(\mathbb{Z}_{42} \times \mathbb{Z}_3) \cup M$ 上构造所要的设计，这里 $M = (\{a, b, c\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_4\}$。它的组是 $\{\{(i, j), (i + 3, j), (i + 6, j), \ldots, (i + 39, j)\} : i, j = 0, 1, 2\} \cup \{M\}$。将下面的基区组 $(-, +1 \pmod 3)$ 展开。

$$\begin{array}{ll}
\{(17,0),(6,1),(21,0),(38,1)\} & \{(12,1),(20,2),(31,0),(11,1)\} \\
\{(0,1),(29,1),(24,0),(40,1)\} & \{(27,2),(32,2),(15,0),(23,0)\} \\
\{(22,0),(14,1),(34,1),(8,0)\} & \{(39,1),(26,2),(10,2),(33,2)\} \\
\{(9,0),(16,1),(19,2),(36,2)\} & \{(13,0),(37,1),(41,2),(a,0)\} \\
\{(28,1),(25,2),(18,0),(b,0)\} & \{(7,2),(30,1),(35,0),(c,0)\}
\end{array}$$

上述区组在展开后和下面的五个区组共同形成了一个平行类。

$$\begin{array}{c}
\{(1,0),(1,1),(2,2),\infty_0\} \\
\{(2,0),(3,1),(1,2),\infty_1\} \\
\{(3,0),(5,1),(5,2),\infty_2\} \\
\{(4,0),(2,1),(4,2),\infty_3\} \\
\{(5,0),(4,1),(3,2),\infty_4\}
\end{array}$$

其他平行类是由上面的平行类 $(+1 \pmod{42}, -)$ 展开得到的，这里 M 中的点在展开过程中保持不变。 □

引理 3.28: 存在型为 22^{10} 的 4-RGDD。

证明. 我们在集合 $(\mathbb{Z}_{66} \times \mathbb{Z}_3) \cup M$ 上构造所要的设计，这里 $M = (\{a, b, c, d, e, f, g\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty\}$。它的组是 $\{\{(i, j), (i+3, j), (i+6, j), \ldots, (i+63, j)\} : i, j = 0, 1, 2\} \cup \{M\}$。

将下面的基区组 $(-,+1 \pmod 3)$ 展开。

$$\begin{array}{ll}
\{(60,1),(29,2),(49,1),(16,0)\} & \{(7,1),(44,1),(21,2),(25,2)\} \\
\{(23,2),(18,0),(64,0),(59,0)\} & \{(55,1),(50,0),(3,0),(10,0)\} \\
\{(57,0),(65,2),(40,1),(41,1)\} & \{(6,2),(8,2),(34,0),(58,2)\} \\
\{(11,0),(46,0),(43,2),(56,2)\} & \{(61,1),(38,1),(1,0),(2,2)\} \\
\{(17,1),(13,2),(0,1),(35,0)\} & \{(9,0),(5,2),(37,0),(63,2)\} \\
\{(4,0),(14,0),(33,1),(48,0)\} & \{(12,1),(22,2),(39,0),(a,0)\} \\
\{(15,0),(54,2),(31,1),(b,0)\} & \{(32,0),(52,1),(24,2),(c,0)\} \\
\{(62,2),(51,0),(53,1),(d,0)\} & \{(27,2),(42,0),(30,1),(e,0)\} \\
\{(20,0),(26,1),(19,2),(f,0)\} & \{(36,1),(45,0),(47,2),(g,0)\}
\end{array}$$

上述区组在展开后和区组 $\{(28,0),(28,1),(28,2),\infty\}$ 共同形成了一个平行类。其他平行类是由这个平行类 $(+1 \pmod{66},-)$ 展开得到的，这里 M 中的点在展开过程中保持不变。 □

引理 3.29: 对任意 $h \equiv 2,10 \pmod{12}$，$h \geq 34$ 且 $h \notin \{38,50,58,70,74,82,86,94,98,106,110,118,178\}$，型为 h^{10} 的 4-RGDD 均存在。

证明. 对于每个 h，由定理 2.7 存在一个 $(h+1,\{5,7,9\},1)$-PBD。删去一个点得到一个型为 $4^i6^j8^k$ 的 $\{5,7,9\}$-GDD，$4i+6j+8k=h$。现在对每个点赋权 10，利用型为 10^5, 10^7 和 10^9 的 frame 型可分解的 4-MGDD 可以得到一个型为 $(40,4^{10})^i(60,6^{10})^j(80,8^{10})^k$ 的 frame 型可分解的 4-DGDD。然后在组中填入型为 4^{10}, 6^{10} 和 8^{10} 的 4-RGDD（定理 1.8）。这样我们就得到了所要的型为 h^{10} 的 4-RGDD。

□

为了解决 $h \in \{50,70,98,110,118\}$ 的情形，我们需要下面的构造。

构造 3.10 (利用 RTD 膨胀[71]): 若存在型为 h^u 的 k-RGDD 和可分解横截设计 RTD(k,m)，则存在型为 $(mh)^u$ 的 k-RGDD。

引理 3.30: 对任意 $h \in \{50,70,98,110,118\}$，型为 h^{10} 的 4-RGDD 均存在。

证明. 对于 $h \in \{50,70,110\}$，由定理 1.8 存在型为 10^{10} 的 4-RGDD。对每个点赋权 $h/10$，由于 RTD$(4,h/10)$ 存在（定理 1.8），应用构造 3.10 我们可以得到所要的 4-RGDD。对于 $h=98$，由引理 3.27 存在型为 14^{10} 的 4-RGDD。对每个点赋权 7 并应用构造 3.10 即可。

对于 $h=118$，由定理 2.8 存在 TD$(7,17)$。删去一个点重新定义组可以得到一个型为 $6^{17}16^1$ 的 $\{7,17\}$-GDD。对每个点赋权 10，利用型为 10^7 和 10^{17} 的 frame 型可分解的 4-MGDD 我们可以得到型为 $(60,6^{10})^{17}(160,16^{10})^1$ 的 frame 型可分解的 4-DGDD。填入型为 6^{10} 和 16^{10} 的 4-RGDD（定理 1.8）就可得到所要设计。 □

一个 K-IGDD $(X,Y,\mathcal{G},\mathcal{B})$ 被称为是可分解的，记为 K-IRGDD，若它的区组集可以划分成平行类和带洞平行类，后者划分了 $X\backslash Y$。

引理 3.31：*型为* 178^{10} *的 4-RGDD 存在。*

证明. 我们首先在集合 $\mathbb{Z}_{168}$ 上构造一个型为 $(24,4^6)^7$ 的 5-DGDD。它的组由 $\{0,7,14,\ldots,161\}$ 生成，洞由 $\{0,6,12,\ldots,162\}$ 生成。将下述基区组 $+1 \pmod{168}$ 展开即可得到所需设计。

0	4	59	145	104	0	124	81	139	8	0	99	19	94	2
0	13	143	165	134	0	39	157	106	167	0	20	46	103	135

现在我们由上面构造的 5-DGDD 出发，添加 6 个无穷点，在每个洞和这些无穷点上构造型为 4^76^1 的 $\{5,7\}$-GDD（删去 TD$(5,7)$ 的一个点并重新定义组得到），这样我们得到了一个型为 24^76^1 的 $\{5,7\}$-GDD。对每个点赋权 10，利用型为 10^5 和 10^7 的 frame 型可分解的 4-MGDD 我们可以得到一个型为 $(240,24^{10})^7(60,6^{10})^1$ 的 frame 型可分解的 4-DGDD。再额外添加 40 个无穷点，在每个大小为 240 的组和这 40 个无穷点上构造型为 $(28,4)^{10}$ 的 4-IRGDD（见文献[83]），这样我们就得到了一个型为 $(178,10)^{10}$ 的 4-IRGDD。最后在洞中填入型为 10^{10} 的 4-RGDD 就可得到所要设计。

□

综合定理 1.8 以及引理 3.27–3.31，我们有下述结论。

引理 3.32：*对任意* $h\equiv 2,10 \pmod{12}$，$h\geq 10$ *且* $h\notin\{26,38,58,74,82,86,94,106\}$，*型为* h^{10} *的 4-RGDD 均存在。*

为了从引理 3.32 中得到更多的 4-RGDD，我们需要下面的构造。

构造 3.11 (**分解组**[71])：*若存在型为* $(hm)^u$ *的* k-RGDD *以及型为* h^m *的* k-RGDD，*则存在型为* h^{mu} *的* k-RGDD。

构造 3.12 (Frame 构造[71]): 假设存在型为 $T = \{t_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 的 k-frame。设 $t \mid t_i$。若对任意 $i = 1, 2, \ldots, n$，型为 $t^{1+t_i/t}$ 的 k-RGDD 均存在。则型为 t^u 的 k-RGDD 存在，这里 $u = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t}$。

引理 3.33: 对任意 $h \equiv 2, 10 \pmod{12}$，$h \geq 10$ 且 $h \notin \{26, 38, 58, 74, 82, 86, 94, 106\}$，型为 h^{70} 和 h^{82} 的 4-RGDD 均存在。

证明. 对于型为 h^{70} 的，由定理 1.8 存在型为 $(10h)^7$ 的 4-RGDD，在每个组中填入型为 h^{10} 的 4-RGDD（引理 3.32）就可得到所要设计。对于型为 h^{82} 的，由定理 1.9 存在型为 $(9h)^9$ 的 4-frame。添加 h 个无穷点并填入型为 h^{10} 的 4-RGDD 就可得到所要的型为 h^{82} 的 4-RGDD。 □

为了去掉引理 3.33 中剩下的值，我们需要如下的 Rees 型乘积构造。

构造 3.13: 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个型为 g^u 的 $\mathcal{A}$-可分解的 k-GDD，这里对任意 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ 存在 r_i 个 α_i-平行类。假设存在一个 $\mathrm{TD}(s, h)$ 和它的一个自同构子群 $\mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 在每个组的点上的作用是强传递的。令 H_j 是 $\mathcal{H}$ 的一族子集，并且对每个 $\alpha_i \in \mathcal{A}$ 有 r_i 个这样的大小为 α_i 的子集。假设对集合 $\{H_j * \tau : \tau \in \mathcal{H}, j = 1, 2, \ldots, \sum_i r_i\}$ 有划分 $\mathcal{T}$，使得对任意 $T \in \mathcal{T}$ 集合 $\{H_l * \tau : \tau \in \mathcal{H}, H_l \in T\}$ 在 $\mathcal{H}$ 上是可分解的。若 $s \geq \max_{T \in \mathcal{T}}\{(\sum_{H_l \in T} |H_l|)(k-1) + 1\}$，则存在型为 $(hg)^u$ 的 k-RGDD。

证明. 我们在集合 $X \times \mathcal{H}$ 上构造所要的 RGDD，它的组是 $G_i \times \mathcal{H}, G_i \in \mathcal{G}$。

对于划分 $\mathcal{T}$，我们在所有 α-平行类构成的集合上考察如下的划分 $\mathcal{R}$：α-平行类同属于 $\mathcal{R}$ 中的某成员当且仅当与它们相应的 $\mathcal{H}$ 子集在划分 $\mathcal{T}$ 中同属于某一成员。

令 R 是 $\mathcal{R}$ 中的一个成员。我们称区组包含在 R 中是指这个区组属于 R 中的某一个 α-平行类。考察 X 上的一张图，两点之间有边相连若它们同时被 R 中的区组包含。这张图的最大度为 d，$d = \sum_{H_l \in T} |H_l|(k-1)$。这样我可以用 $d+1$ 种颜色对 X 着色，比如 $\psi_R : X \to \{1, 2, \cdots, d+1\}$，使得 R 中任意一个区组内的点的颜色各不相同。实际上，通过这种着色，R 中的区组形成了 X 上的一个 k-PℓGD，它有 $d+1$ 个组，不妨记为 $G_1^{(R)}, G_2^{(R)}, \cdots, G_{d+1}^{(R)}$。

现在令 P 是 R 中的一个 α-平行类，令 H 是与其相应的 $\mathcal{H}$ 子集，$|H|=\alpha$。对任意一点 $x\in X$，令 ϕ_x 是从 P 中包含点 x 的区组集到 H 上的一个双射；现在我们在集合 $X\times H$ 上构造如下的区组：

$$P'=\{\{(x_1,\phi_{x_1}(b)),(x_2,\phi_{x_2}(b)),\cdots,(x_k,\phi_{x_k}(b))\}:b=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\in P\}.$$

注意 P' 是一族不交的并覆盖了 $X\times H$ 的区组构成的集合。

对任意区组 $b'\in P'$。将横截设计 TD(s,h) 的点标为 (i,h)，$1\le i\le s$，$h\in\mathcal{H}$。注意 $s\ge d+1$。这样对 TD 的任意区组 $\{(1,h_1),(2,h_2),\cdots,(s,h_s)\}$，我们可以由 b' 构作区组：

$$\{(x_1,\phi_{x_1}(b)*h_{\psi_R(x_1)}),(x_2,\phi_{x_2}(b)*h_{\psi_R(x_2)}),\cdots,(x_k,\phi_{x_k}(b)*h_{\psi_R(x_k)})\}.$$

通过这种方式，R 中的每一个区组均被横截设计 TD(k,h) 的 h^2 个区组替换，这里的 TD(k,h) 可以看作是将所给 TD 的区组限制在指标为 $\psi_R(x_1),\psi_R(x_2),\cdots,\psi_R(x_k)$ 的组上得到的。这样对所给 GDD 的所有区组作上述操作我们可以得到一个型为 $(hg)^u$ 的 k-GDD。我们还需证明这个 GDD 是可分解的。

现在令 π 是 TD(s,h) 的一个被 $\mathcal{H}$ 固定的平行类。由于 $\mathcal{H}$ 在每个组中的点上的作用是强传递的（我们可以假设这里的群作用是左乘运算），所以 π 中的 h 个区组必有形式 $b_\tau=\{(1,\tau),(2,\tau*f_\pi(2)),\cdots,(s,\tau*f_\pi(s))\}$，$\tau\in\mathcal{H}$。这样若 P_l 是 R 中的一个 α_l-平行类，H_l 是与它相应的 $\mathcal{H}$ 子集，那么将上述构造限制在区组 $b_\tau\in\pi$ 作用在 P_l 中的区组上就会得到一族划分了 $(G_1^{(R)}\times(H_l*\tau))\cup(G_2^{(R)}\times(H_l*\tau*f_\pi(2)))\cup\cdots\cup(G_{d+1}^{(R)}\times(H_l*\tau*f_\pi(d+1)))$ 的区组。又由于集合 $\{H_l*\tau:\tau\in\mathcal{H},H_l\in T\}$ 在 $\mathcal{H}$ 上是可分解的，那么将上述构造限制在 π 中的 h 个区组作用在 P_l 中的区组上就会得到一族划分了集合 $(G_1^{(R)}\times\mathcal{H})\cup(G_2^{(R)}\times\mathcal{H})\cup\cdots\cup(G_{d+1}^{(R)}\times\mathcal{H})=X\times\mathcal{H}$ 的区组。又由于 R 是对所有 α-平行类的划分，TD(s,h) 可以划分成 h 个被 $\mathcal{H}$ 固定的平行类，所以最后得到的 GDD 是可分解的。 □

引理 3.34：*对任意 $h\in\{38,58,74,82,86,94,106\}$，型为 h^{70} 的 4-RGDD 均存在。*

证明. 我们由引理 3.27 中构造的型为 14^{10} 的 4-RGDD 出发，在每个组中填入型为 2^7 的 4-GDD。这样我们可以得到一个型为 2^{70} 的 4-GDD，它的组可以划分为 42 个平行类和一个 4-平行类。

对于 $h \in \{58, 74, 82, 86, 94, 106\}$，我们将上述 4-GDD 的两个平行类看成是一个 2-平行类。然后将构造 3.13 应用到这个 4-GDD 和引理 3.4 中的一个 TD$(22, p)$，$p = h/2$；我们取 $\mathcal{H} = \mathbb{Z}_p$，$H_i = \{0\}$，$1 \le i \le 40$，$H_{41} = \{0, 1\}$，$H_{42} = \{0, 1, 2, 3\}$。注意到集合 $\{H_1 + \tau, H_{40} + \tau, H_{41} + \tau : \tau \in \mathbb{Z}_p\}$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 上是可分解的（引理 3.5），并且对任意 $2 \le i \le 39$，$\{H_i + \tau : \tau \in \mathbb{Z}_p\}$ 正是集合 $\mathbb{Z}_p$。这样我们就得到了所要的型为 $(2p)^{70} \equiv h^{70}$ 的 4-RGDD。

对于 $h = 38$，我们将构造 3.13 应用到上面构造的型为 2^{70} 的 4-GDD 和引理 3.4 中的一个 TD$(16, 19)$；取 $\mathcal{H} = \mathbb{Z}_{19}$，$H_i = \{0\}$，$1 \le i \le 42$，$H_{43} = \{0, 1, 2, 3\}$。注意到集合 $\{H_1 + \tau, H_{43} + \tau : \tau \in \mathbb{Z}_p\}$ 可以作如下划分：

1. $\{\{0, 1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{9\}, \{10, 11, 12, 13\}, \{14\}, \{15, 16, 17, 18\}\}$;

2. $\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{6, 7, 8, 9\}, \{10\}, \{11, 12, 13, 14\}, \{15\}, \{16, 17, 18, 0\}\}$;

3. $\{\{2, 3, 4, 5\}, \{6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11\}, \{12, 13, 14, 15\}, \{16\}, \{17, 18, 0, 1\}\}$;

4. $\{\{3, 4, 5, 6\}, \{7\}, \{8, 9, 10, 11\}, \{12\}, \{13, 14, 15, 16\}, \{17\}, \{18, 0, 1, 2\}\}$;

5. $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{8\}, \{9, 10, 11, 12\}, \{13\}, \{14, 15, 16, 17\}, \{18\}\}$.

这样我们就得到了所要的型为 38^{70} 的 4-RGDD。 □

引理 3.35: 对任意 $h \in \{38, 58, 74, 82, 86, 94, 106\}$，型为 h^{82} 的 4-RGDD 均存在。

证明. 我们首先在集合 $(\mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_3) \cup M$ 上构造一个型为 $2^{75}14^1$ 的 4-GDD，这里 $M = (\{a, b, c\} \times \mathbb{Z}_3) \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_4\}$。它的组是 $\{\{(i, j), (i + 25, j)\} : 0 \le i < 25, j = 0, 1, 2\} \cup \{M\}$。将下述基区组 $(-, +1 \pmod 3)$ 展开。

$$
\begin{array}{ll}
\{(22,2),(36,2),(31,0),(11,1)\} & \{(19,1),(37,1),(9,2),(17,1)\} \\
\{(7,1),(40,0),(24,1),(0,1)\} & \{(26,1),(39,0),(47,1),(20,0)\} \\
\{(21,2),(27,2),(16,2),(30,1)\} & \{(18,2),(38,0),(10,2),(42,1)\} \\
\{(28,2),(6,2),(13,1),(23,1)\} & \{(44,2),(25,0),(29,2),(41,1)\} \\
\{(33,0),(45,0),(46,0),(49,0)\} & \{(32,0),(43,2),(14,1),(a,0)\} \\
\{(15,1),(8,0),(34,2),(b,0)\} & \{(35,1),(48,2),(12,0),(c,0)\}
\end{array}
$$

上述基区组展开后和下面的五个区组共同构成了一个平行类。

$$\begin{array}{l}\{(1,0),(1,1),(2,2),\infty_0\}\\\{(2,0),(3,1),(1,2),\infty_1\}\\\{(3,0),(5,1),(5,2),\infty_2\}\\\{(4,0),(2,1),(4,2),\infty_3\}\\\{(5,0),(4,1),(3,2),\infty_4\}\end{array}$$

将上述平行类 $(+1 \pmod{50}, -)$ 展开得到 50 个平行类。然后将区组 $\{(0,0),(6,2),(15,2),(27,0)\}$ 展开以得到一个型为 $2^{75}14^1$ 的 4-GDD。现在我们在它大小为 14 的组中填入型为 2^7 的 4-GDD 就可以得到一个型为 2^{82} 的 4-GDD，它的区组可以划分成 50 个平行类和一个 4-平行类。之后和引理 3.34 中的过程类似，将构造 3.13 应用到这个 4-GDD 就可完成证明。 $\square$

最后，我们来构造型为 $2^{184}, 9^{44}, 18^{18}$ 和 36^{11} 的 4-RGDD。

引理 3.36: *存在型为 2^{184} 的 4-RGDD。*

证明. 我们先在集合 $(\mathbb{Z}_{56} \cup \{a,b,c,d\}) \times \mathbb{Z}_6$ 上构造一个型为 $48^7 24^1$ 的 4-frame。它的组是 $\{\{i, i+7, i+14, \ldots, i+49\} \times \mathbb{Z}_6\}$，$0 \le i < 7$，和 $\{\{a,b,c,d\} \times \mathbb{Z}_6\}$。将下述区组 $(-, +1 \pmod 6)$ 展开可以得到两个以 $\{\{0,7,14,\ldots,49\} \times \mathbb{Z}_6\}$ 为洞的带洞平行类。

$$\begin{array}{ll}\{(25,1),(8,4),(34,4),(31,0)\} & \{(15,1),(9,1),(53,1),(54,0)\}\\\{(45,3),(2,5),(29,3),(18,0)\} & \{(39,5),(37,4),(1,2),(26,0)\}\\\{(12,4),(20,0),(4,3),(3,0)\} & \{(51,5),(36,0),(32,2),(13,0)\}\\\{(24,3),(40,2),(44,2),(50,0)\} & \{(46,3),(43,4),(55,5),(38,0)\}\\\{(27,0),(47,0),(11,2),(52,0)\} & \{(10,1),(23,5),(33,0),(a,0)\}\\\{(22,1),(41,2),(17,5),(b,0)\} & \{(5,2),(30,3),(6,4),(c,0)\}\\\{(48,1),(19,0),(16,5),(d,0)\} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\{(48,2),(22,3),(47,2),(44,0)\} & \{(18,3),(41,0),(31,4),(33,0)\}\\\{(10,1),(29,0),(51,1),(5,0)\} & \{(27,2),(45,0),(2,0),(11,0)\}\\\{(43,0),(54,2),(23,5),(24,0)\} & \{(26,1),(37,1),(32,4),(3,0)\}\\\{(34,4),(17,0),(16,2),(46,0)\} & \{(9,0),(38,5),(50,2),(6,0)\}\\\{(13,5),(30,1),(36,3),(39,0)\} & \{(19,2),(1,3),(53,4),(a,0)\}\\\{(25,3),(20,4),(12,0),(b,0)\} & \{(4,0),(52,1),(15,5),(c,0)\}\\\{(8,4),(55,3),(40,2),(d,0)\} & \end{array}$$

将上述带洞平行类 $(+1 \pmod{56}, -)$ 展开就可得到 112 个带洞平行类。然后将区组 $\{(48,4),(50,1),(52,1),(46,0)\}$ 和 $\{(27,3),(39,2),(37,3),(17,0)\}$ 展开得到 8 个以 $\{\{a,b,c,d\} \times \mathbb{Z}_6\}$ 为洞的平行类。这样我们就得到了所要的型为 $48^7 24^1$ 的 4-frame。

现在添加 8 个无穷点，在大小为 48 的组中填入文献[80]中构造的型为 $2^{24}8^1$ 的 4-GDD，它有 16 个平行类和 2 个以最后一个组为洞的带洞平行类；在大小为 24 的组和这些无穷点上填入型为 2^{16} 的 4-RGDD。这样就得到了所要的型为 2^{184} 的 4-RGDD。 □

引理 3.37: 型为 18^{18} 的 4-RGDD 存在。

证明. 我们在集合 $(\mathbb{Z}_{34} \cup \{a, b\}) \times \mathbb{Z}_9$ 上构造所要的设计。它的组是 $\{(i, 0), (i + 17, 0), (i, 1), (i{+}17, 1), \ldots, (i, 8), (i{+}17, 8)\}$，$0 \le i < 17$，和 $\{(a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1), \ldots, (a, 8), (b, 8)\}$。把下边所列基区组 $(-, +1 \pmod 9)$ 展开得到三个平行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(2,0),(26,6),(16,7),(10,1)\} & \{(12,0),(14,1),(22,0),(3,2)\} \\
\{(6,0),(18,5),(30,7),(8,4)\} & \{(28,0),(5,2),(17,3),(20,3)\} \\
\{(4,0),(15,1),(19,6),(25,6)\} & \{(23,0),(27,0),(7,8),(11,6)\} \\
\{(1,0),(24,0),(29,2),(9,5)\} & \{(21,0),(31,4),(13,2),(a,8)\} \\
\{(0,0),(33,6),(32,2),(b,4)\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\{(14,0),(19,8),(26,7),(11,8)\} & \{(33,0),(4,0),(2,3),(1,3)\} \\
\{(8,0),(15,2),(24,4),(13,6)\} & \{(12,0),(21,1),(5,8),(6,5)\} \\
\{(0,0),(20,3),(28,6),(25,4)\} & \{(9,0),(3,1),(27,3),(16,7)\} \\
\{(31,0),(17,7),(29,7),(22,1)\} & \{(23,0),(18,5),(30,4),(a,5)\} \\
\{(7,0),(10,7),(32,3),(b,3)\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\{(31,0),(25,4),(0,8),(21,3)\} & \{(2,0),(29,0),(16,1),(15,0)\} \\
\{(22,0),(23,5),(3,0),(7,6)\} & \{(6,0),(8,8),(19,2),(10,8)\} \\
\{(4,0),(1,5),(5,7),(30,7)\} & \{(12,0),(26,5),(33,8),(20,4)\} \\
\{(9,0),(32,5),(27,0),(28,2)\} & \{(17,0),(13,5),(14,4),(a,7)\} \\
\{(24,0),(11,2),(18,7),(b,8)\} &
\end{array}$$

将上面得到的平行类 $(+1 \pmod{34}, -)$ 展开就可得到所要的设计。 □

引理 3.38: 型为 36^{11} 和 9^{44} 的 4-RGDD 存在。

证明. 对于型为 36^{11} 的，我们在集合 $\mathbb{Z}_{132} \times \mathbb{Z}_3$ 上构造所要的设计。它的组是 $\{\{(i, j), (i + 11, j), (i + 22, j), \ldots, (i + 121, j)\} : j = 0, 1, 2\}$，$0 \le i < 11$。把下边所列基区组先做 $(+44 \pmod{132}, -)$ 展开再做 $(-, +1 \pmod 3)$ 展开可以得到两个平

行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(28,0),(21,1),(40,2),(91,0)\} & \{(9,0),(129,2),(37,0),(95,2)\} \\
\{(10,0),(58,1),(50,0),(126,2)\} & \{(34,0),(114,0),(17,0),(30,2)\} \\
\{(110,0),(2,1),(87,2),(115,1)\} & \{(59,0),(69,0),(13,1),(106,0)\} \\
\{(19,0),(44,2),(83,1),(80,1)\} & \{(20,0),(24,0),(4,0),(1,1)\} \\
\{(76,0),(86,1),(77,2),(16,0)\} & \{(111,0),(93,2),(119,2),(99,0)\} \\
\{(8,0),(79,0),(117,0),(12,2)\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\{(104,0),(21,0),(129,1),(46,0)\} & \{(13,0),(116,0),(63,2),(49,0)\} \\
\{(7,0),(99,1),(94,1),(42,2)\} & \{(38,0),(53,0),(73,1),(81,1)\} \\
\{(75,0),(118,2),(89,0),(17,2)\} & \{(68,0),(70,1),(36,2),(127,2)\} \\
\{(18,0),(98,2),(66,0),(48,1)\} & \{(69,0),(87,0),(123,1),(15,1)\} \\
\{(120,0),(88,0),(67,1),(3,1)\} & \{(12,0),(128,1),(27,2),(102,2)\} \\
\{(121,0),(108,2),(78,0),(52,2)\} &
\end{array}$$

将上面的得到的平行类 $(+1 \pmod{132}, -)$ 展开得到 88 个平行类。最后，将下述基区组展开，每个基区组展开后得到 4 个平行类。

$$\begin{array}{ll}
\{(9,0),(47,1),(38,1),(68,1)\} & \{(37,0),(34,2),(35,0),(44,1)\} \\
\{(7,0),(88,1),(94,0),(125,2)\} & \{(7,0),(8,0),(45,2),(86,0)\} \\
\{(8,0),(3,1),(90,0),(73,1)\} & \{(6,0),(89,2),(48,0),(87,0)\} \\
\{(23,0),(109,0),(50,0),(92,2)\} & \{(9,0),(2,0),(128,0),(107,2)\}
\end{array}$$

对于型为 9^{44} 的，我们由上面构造的型为 36^{11} 的 4-RGDD 出发，在每个组中填入型为 9^4 的 4-RGDD 就可得到所要设计。 □

综合引理 3.32–3.38，以及定理 1.8，我们有下述结论。

定理 3.6: 型为 h^u 的 4-RGDD 存在的必要条件，即 $u \geq 4, hu \equiv 0 \pmod 4$ 并且 $h(u-1) \equiv 0 \pmod 3$，除了确定的 $(h,u) \in \{(2,4),(2,10),(3,4),(6,4)\}$ 以及下述可能的情况外，也是充分的：

1. $h \equiv 2, 10 \pmod{12}$: $h = 2$，$u \in \{34, 46, 52, 70, 82, 94, 100, 118, 130, 178, 202, 214, 238, 250, 334\}$；$h = 10$，$u \in \{4, 34, 52, 94\}$；$h = 26$，$u \in \{10, 70, 82\}$；$h \in \{38, 58, 74, 82, 86, 94, 106\}$，$u = 10$。

2. $h \equiv 6 \pmod{12}$：$h = 6$，$u \in \{6, 68\}$；$h = 18$，$u \in \{38, 62\}$。

3. $h \equiv 0 \pmod{12}$：$h = 36$，$u \in \{14, 15, 18, 23\}$。

4 五点图的谱问题

本章我们来解决五点图的谱问题。对于定理 1.13 未解决的 G-设计，我们首先分析一下它们可能的自同构，然后指定一个合适的自同构子群来产生区组集。为了使这个群的阶数尽可能的大，我们会遇到不同长度的轨道，即那些稳定化子非平凡的区组产生的轨道。

在下面的构造中，我们用符号 $[a,b,c,d,e]$ 来表示集合 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的一个 $K_5\backslash e$，这里边 $\{d,e\}$ 是去掉的。类似的，我们用符号 $[a,b,c,d]$ 来表示集合 $\{a,b,c,d\}$ 上的 $K_4\backslash e$，边 $\{c,d\}$ 是去掉的。用 $[a,b,c,d:e]$ 来记 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的 G_{20}，边 $\{c,e\}$ 和 $\{d,e\}$ 是去掉的。用 $\langle a:b,c:d,e\rangle$ 来记 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的 G_{21}，边 $\{b,c\}$ 和 $\{d,e\}$ 是去掉的。为了简单起见，我们用 x_y 记顶点 (x,y)。

引理 4.1: *存在 32 阶 G_{20}-设计。*

证明. 令 $V=(\mathbb{Z}_4\times\{0,1,2,\ldots,6\})\cup\{\infty_0,\infty_1,\infty_2,\infty_3\}$。定义 $\alpha:V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 4 的若 $x\neq\infty$。无穷点 $\infty_0,\infty_1,\infty_2$ 和 ∞_3 在 α 作用下保持不变。将下述基区组用 α 展开：

$$
\begin{array}{llll}
[0_2,\infty_0,3_3,0_6:1_5], & [2_5,\infty_1,0_4,2_6:3_3], & [0_1,\infty_2,2_4,2_3:1_6], & [3_4,2_6,2_4,0_0:\infty_3],\\
[2_3,0_0,\infty_3,3_5:1_0], & [1_2,3_4,0_5,0_2:3_0], & [1_4,1_5,0_5,1_1:0_1], & [1_3,3_2,3_4,2_0:0_1],\\
[3_3,2_3,2_2,1_6:3_1], & [0_0,0_3,0_6,2_5:0_5], & [1_1,2_0,3_5,1_2:2_2], & [1_1,0_6,2_1,1_0:3_0],\\
[0_6,2_2,0_1,3_4:3_6]. & & &
\end{array}
$$

进一步，将区组 $[1_4,3_4,0_3,2_3:\infty_0]$ 和 $[0_5,2_5,1_6,3_6:\infty_2]$ 展开，得到两个长为 2 的短轨道。

最后，添加下面六个区组：

$$
\begin{array}{lll}
[0_0,2_0,\infty_0,\infty_1:\infty_2], & [0_1,2_1,\infty_0,\infty_3:\infty_1], & [0_2,2_2,\infty_1,\infty_2:\infty_3],\\
[1_0,3_0,\infty_0,\infty_2:\infty_1], & [1_1,3_1,\infty_1,\infty_3:\infty_0], & [1_2,3_2,\infty_2,\infty_3:\infty_1].
\end{array}
$$

□

引理 4.2: *存在 48 阶 G_{20}-设计。*

证明. 令 $V=(\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2,\ldots,5\})\cup(\mathbb{Z}_3\times\{6,7,8,9\})$。定义 $\alpha:V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 6 的若 $y\in\{0,1,2,\ldots,5\}$，模 3 的若 $y\in\{6,7,8,9\}$。将

下述基区组用 α 展开：

$$
\begin{array}{llll}
[1_2,2_5,0_2,4_0:0_6], & [1_5,1_1,4_2,5_1:0_6], & [5_3,1_3,0_6,2_2:5_5], & [0_0,5_0,0_6,2_4:5_4], \\
[3_1,0_6,4_4,3_2:3_3], & [0_0,2_0,0_7,5_1:5_5], & [5_2,0_7,4_0,5_3:4_5], & [0_5,0_7,5_4,3_1:0_2], \\
[0_4,0_7,4_2,0_3:4_4], & [3_1,2_4,1_5,1_0:0_8], & [2_1,3_2,0_8,4_0:1_1], & [4_5,0_4,0_8,0_5:1_3], \\
[3_3,0_8,2_2,4_1:1_4], & [4_2,0_8,0_0,2_3:2_5], & [0_3,2_1,0_9,1_0:1_5], & [4_3,0_9,1_4,1_1:3_5], \\
[4_2,0_9,3_4,2_4:0_2], & [5_0,0_9,1_5,5_3:5_2], & [3_3,4_3,5_4,2_1:0_0], & [1_5,4_4,0_0,0_1:0_5].
\end{array}
$$

进一步将下述基区组展开，得到七个长为 3 的短轨道：

$$
\begin{array}{llll}
[0_0,3_0,1_8,2_6:0_9], & [0_1,3_1,2_7,1_6:0_9], & [0_5,3_5,1_9,1_7:0_6], & [0_4,3_4,0_2,3_2:0_6], \\
[2_8,2_7,0_3,3_3:0_8], & [0_8,2_9,0_6,2_6:1_9], & [1_9,2_7,0_6,0_7:1_8]. &
\end{array}
$$

□

引理 4.3: *存在 48 阶 G_{21}-设计。*

证明. 令 $V=(\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2,\ldots,5\})\cup(\mathbb{Z}_3\times\{6,7,8,9\})$。定义 $\alpha:V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 6 的若 $y\in\{0,1,2,\ldots,5\}$，模 3 的若 $y\in\{6,7,8,9\}$。将下述基区组用 α 展开：

$$
\begin{array}{llll}
\langle 4_2:4_5,2_1:0_6,0_0\rangle, & \langle 0_6:1_4,2_4:4_3,2_0\rangle, & \langle 0_6:0_3,2_5:5_3,0_4\rangle, & \langle 0_6:4_0,0_1:3_5,5_2\rangle, \\
\langle 0_0:0_3,4_0:0_7,0_2\rangle, & \langle 4_4:4_5,2_4:0_7,3_1\rangle, & \langle 0_7:2_2,5_1:3_4,5_0\rangle, & \langle 0_7:5_3,0_5:1_2,5_5\rangle, \\
\langle 3_0:4_0,0_5:0_8,1_1\rangle, & \langle 4_3:5_0,0_1:0_8,0_4\rangle, & \langle 4_2:2_4,1_4:0_8,5_0\rangle, & \langle 0_8:0_3,2_1:2_3,2_5\rangle, \\
\langle 2_4:4_0,2_2:0_9,0_5\rangle, & \langle 1_5:4_2,0_3:0_9,5_5\rangle, & \langle 3_5:0_4,4_4:0_9,5_3\rangle, & \langle 0_9:3_2,5_0:5_5,2_3\rangle, \\
\langle 2_1:5_4,5_2:4_4,3_2\rangle, & \langle 3_3:1_1,0_2:1_2,2_1\rangle, & \langle 5_1:0_0,3_1:1_5,2_3\rangle. &
\end{array}
$$

进一步将下述基区组展开，得到九个长为 3 的短轨道：

$$
\begin{array}{lll}
\langle 0_6:0_0,4_1:1_1,3_0\rangle, & \langle 0_7:0_2,4_3:1_3,3_2\rangle, & \langle 0_8:0_4,4_5:1_5,3_4\rangle, \\
\langle 0_9:0_0,3_0:4_3,1_3\rangle, & \langle 1_8:0_6,0_8:3_2,0_2\rangle, & \langle 1_9:0_7,0_9:4_1,1_1\rangle, \\
\langle 2_8:0_7,1_9:3_1,0_1\rangle, & \langle 1_6:0_6,0_8:0_7,0_9\rangle, & \langle 1_9:0_6,2_7:0_8,1_7\rangle.
\end{array}
$$

□

引理 4.4: *存在 36 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。*

证明. 我们在集合 $(\mathbb{Z}_5\times\{0,1,\ldots,6\})\cup\{\infty\}$ 上构造所要设计。将下述基区组展开，其中无穷点保持不变：

$$
\begin{array}{llll}
[0_1,2_4,1_6,0_4,\infty], & [\infty,0_5,0_2,4_3,2_0], & [0_6,4_5,3_0,4_3,2_2], & [0_1,4_4,2_0,2_5,3_0], \\
[0_4,4_2,1_4,0_5,2_0], & [0_1,1_0,1_3,4_0,4_3], & [0_3,3_1,0_2,2_2,4_5], & [0_5,0_1,3_6,1_1,3_5], \\
[0_2,3_4,4_2,1_3,0_6], & [0_5,3_4,2_3,3_0,4_5], & [0_4,2_1,4_1,0_2,2_3], & [0_3,4_4,4_3,2_6,4_6], \\
[0_0,3_6,4_5,1_2,1_6], & [0_0,0_1,4_6,0_2,0_6]. & &
\end{array}
$$

□

引理 4.5：存在 54 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。

证明. 令 $V=(\mathbb{Z}_{12}\times\{1,2,3\})\cup(\mathbb{Z}_6\times\{4,5\})\cup(\mathbb{Z}_3\times\{6,7\})$。定义 $\alpha:V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 12 的若 $y\in\{1,2,3\}$，模 6 的若 $y\in\{4,5\}$，模 3 的若 $y\in\{6,7\}$。将下述基区组用 α 展开：

$$[0_1,1_1,0_7,3_2,5_2],\quad [0_3,1_3,5_3,4_4,0_7],\quad [0_2,5_2,2_6,4_1,1_3],\quad [0_2,0_3,10_3,1_5,4_5],$$
$$[0_1,4_1,11_2,1_4,2_4],\quad [0_2,1_2,4_2,3_3,5_4],\quad [0_1,9_2,6_3,3_1,2_5],\quad [0_1,2_1,10_3,1_3,3_5],$$
$$[0_1,0_2,10_2,4_3,5_3],\quad [0_1,5_1,2_6,0_3,2_3].$$

进一步将下述基区组展开，得到五个长为 6 的短轨道：

$$[0_4,0_1,6_1,4_5,1_7],\quad [0_5,0_2,6_2,2_5,1_6],\quad [0_4,0_3,6_3,1_4,2_4],\quad [0_4,0_5,1_5,1_1,7_1],$$
$$[0_4,3_5,2_7,0_2,6_2].$$

最后将下述基区组展开，得到三个长为 3 的短轨道：

$$[0_6,0_4,3_4,1_6,0_7],\quad [0_6,0_5,3_5,1_4,4_4],\quad [0_6,1_7,2_7,1_5,4_5].$$

□

引理 4.6：存在 64 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。

证明. 令 $V=(\mathbb{Z}_{14}\times\{1,2,3,4\})\cup(\mathbb{Z}_7\times\{5\})\cup\{\infty\}$。定义 $\alpha:V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 14 的若 $y\in\{1,2,3,4\}$，模 7 的若 $y=5$。无穷点 ∞ 在 α 作用下保持不变。将下述基区组用 α 展开：

$$[0_2,3_3,2_4,12_2,\infty],\quad [0_1,1_1,3_5,2_2,5_2],\quad [0_1,6_1,0_2,3_2,4_5],\quad [0_3,2_3,10_3,0_2,4_5],$$
$$[0_3,1_4,11_4,8_2,5_5],\quad [0_3,7_4,8_4,3_5,6_5],\quad [0_1,2_1,5_1,0_3,0_4],\quad [0_1,4_1,1_3,1_4,3_4],$$
$$[0_1,7_2,8_3,13_2,4_4],\quad [0_2,1_2,1_4,10_2,9_4],\quad [0_1,4_3,7_3,10_2,2_4],\quad [0_1,2_3,3_3,6_4,8_4],$$
$$[0_1,5_4,7_4,9_2,10_4],\quad [0_1,5_3,10_3,6_2,12_2].$$

进一步将下述基区组展开，得到四个长为 7 的短轨道：

$$[0_5,0_1,7_1,1_5,\infty],\quad [0_5,0_2,7_2,2_5,3_5],\quad [0_5,0_3,7_3,1_1,8_1],\quad [0_5,0_4,7_4,1_2,8_2].$$

□

引理 4.7：存在 81 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。

证明. 令 $V=(\mathbb{Z}_{18}\times\{1,2,3,4\})\cup(\mathbb{Z}_9\times\{5\})$。定义 $\alpha: V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 18 的若 $y\in\{1,2,3,4\}$，模 9 的若 $y=5$。将下述基区组用 α 展开：

$$\begin{array}{cccc}
[0_1,1_1,4_5,6_1,8_1], & [0_1,0_2,6_5,1_2,4_2], & [0_2,3_2,0_3,4_1,1_5], & [0_3,5_3,12_3,8_1,2_5],\\
[0_3,1_3,16_3,13_2,5_5], & [0_3,4_4,16_4,2_1,3_5], & [0_4,1_4,14_4,10_1,7_5], & [0_4,3_4,10_4,14_2,4_5],\\
[0_1,4_1,5_4,11_2,3_4], & [0_1,2_1,0_4,8_2,12_2], & [0_1,3_1,15_4,6_3,12_3], & [0_1,5_2,10_4,0_3,13_3],\\
[0_2,8_2,9_4,2_3,4_3], & [0_2,2_2,7_2,5_1,0_4], & [0_1,7_3,11_3,6_4,7_4], & [0_1,3_2,9_2,1_3,2_3],\\
[0_2,1_3,9_3,2_4,3_4], & [0_1,16_2,5_3,11_4,13_4]. & &
\end{array}$$

进一步将下述基区组展开，得到四个长为 9 的短轨道：

$$[0_5,0_1,9_1,1_5,2_5],\quad [0_5,0_2,9_2,3_5,4_5],\quad [0_5,0_3,9_3,1_1,10_1],\quad [0_5,0_4,9_4,1_2,10_2].$$

□

引理 4.8: *存在 72 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。*

证明. 我们首先来构造一个型为 $1^{44}28^1$ 的 $(K_5\backslash e)$-GDD，然后在洞中填入一个阶为 72 的 $(K_5\backslash e)$-设计（定理 1.13）就可得到所要设计。

令 $V=(\mathbb{Z}_{44}\times\{1\})\cup(\mathbb{Z}_{22}\times\{2\})\cup(\mathbb{Z}_4\times\{3\})\cup(\mathbb{Z}_2\times\{4\})$。定义 $\alpha: V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 44 的若 $y=1$，模 22 的若 $y=2$，模 4 的若 $y=3$，模 2 的若 $y=4$。将下述基区组用 α 展开，注意最后一个区组产生一个长为 22 的短轨道：

$$\begin{array}{cccc}
[0_1,7_1,0_2,13_1,17_1], & [0_1,4_1,29_1,8_2,14_2], & [0_1,8_1,24_1,19_2,20_2], & [0_1,12_1,26_1,3_2,6_2],\\
[0_1,2_1,0_3,5_1,11_1], & [0_4,0_1,22_1,1_1,23_1]. & &
\end{array}$$

□

引理 4.9: *存在 90 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。*

证明. 我们首先来构造一个型为 $1^{63}27^1$ 的 $(K_5\backslash e)$-GDD，然后在洞中填入一个阶为 27 的 $(K_5\backslash e)$-设计（定理 1.13）就可得到所要设计。

令 $V=(\mathbb{Z}_{21}\times\{1,2,3\})\cup(\mathbb{Z}_7\times\{4,5,6\})\cup(\mathbb{Z}_3\times\{7,8\})$。定义 $\alpha: V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 21 的若 $y\in\{1,2,3\}$，模 7 的若 $y\in\{4,5,6\}$，模 3 的若 $y\in\{7,8\}$。将下述基区组用 α 展开，注意最后一个区组产生一个长为 7 的短

轨道：

$$\begin{array}{cccc}
[0_1,1_1,2_4,4_1,6_1], & [0_1,9_1,6_4,0_2,1_2], & [0_1,2_1,1_5,10_1,0_3], & [0_1,2_2,3_5,7_2,1_3],\\
[0_1,3_2,9_2,16_2,0_6], & [0_1,6_2,17_2,11_3,6_6], & [0_1,5_2,16_3,14_2,4_6], & [0_1,15_2,2_3,7_3,3_6],\\
[0_1,18_2,6_3,5_6,0_7], & [0_1,9_3,18_3,11_2,2_6], & [0_1,4_3,12_3,4_5,1_6], & [0_1,5_3,20_3,4_2,2_5],\\
[0_2,4_2,4_3,1_4,2_5], & [0_2,1_2,3_2,3_4,0_5], & [0_1,19_2,8_3,10_3,15_3], & [0_1,10_2,13_3,3_3,2_7],\\
[0_1,8_2,14_3,1_7,0_8], & [0_1,20_2,17_3,1_8,2_8], & [0_3,1_3,4_3,0_4,2_4], & [0_1,7_1,14_1,0_4,0_5].
\end{array}$$

□

为了解决剩下的值，我们需要下面构造方法[20]。

构造 4.1: *若 $m \notin \{2,6\}$ 并且型为 $g_1^{u_1}\cdots g_s^{u_s}$ 的 $(K_5\backslash e)$-GDD 存在，则型为 $(m\cdot g_1)^{u_1}\cdots(m\cdot g_s)^{u_s}$ 的 $(K_5\backslash e)$-GDD 存在。*

引理 4.10: *存在阶为 144 $(K_5\backslash e)$-设计。*

证明. 我们首先在集合 $\mathbb{Z}_{48}$ 上将基区组 $[0,1,7,10,22]$ 和 $[0,11,29,34,46]$ 循环展开得到一个型为 12^4 的 $(K_5\backslash e)$-GDD，它的组是 $\{i,4+i,\ldots,44+i\}$，$i=0,1,2,3$。然后应用构造 4.1 得到一个型为 36^4 的 $(K_5\backslash e)$-GDD。在它的组中填入 36 阶 $(K_5\backslash e)$-设计（引理 4.4）就可得到所要设计。□

引理 4.11: *存在 234 阶 $(K_5\backslash e)$-设计。*

证明. 我们首先来构造一个型为 $27^7 45^1$ 的 $(K_5\backslash e)$-GDD，然后在组中填入阶为 27 或 45 的 $(K_5\backslash e)$-设计（定理 1.13）就可得到所要设计。

令 $V=(\mathbb{Z}_{189}\times\{0\})\cup(\mathbb{Z}_{27}\times\{1\})\cup(\mathbb{Z}_9\times\{2,3\})$。它的组是 $\{i_0,(i+7)_0,\ldots,(i+182)_0\}, i=0,1,\ldots,6$ 和 $\{(\mathbb{Z}_{27}\times\{1\})\cup(\mathbb{Z}_9\times\{2,3\})\}$。定义 $\alpha:V\to V$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 189 的若 $y=0$，模 27 的若 $y=1$，模 9 的若 $y\in\{2,3\}$。将下述基区组用 α 展开：

$$\begin{array}{ccc}
[87_0,8_0,159_0,0_1,26_1], & [92_0,177_0,126_0,0_1,26_1], & [44_0,158_0,22_0,188_0,0_1],\\
[0_1,94_0,118_0,29_0,161_0], & [0_1,129_0,14_0,139_0,27_0], & [0_1,182_0,113_0,55_0,138_0],\\
[153_0,65_0,105_0,0_2,8_2], & [49_0,32_0,188_0,30_0,0_2], & [16_0,113_0,119_0,0_3,8_3],\\
[85_0,46_0,153_0,145_0,8_3], & [37_0,10_0,26_0,11_0,83_0], & [37_0,98_0,174_0,5_0,145_0],\\
[38_0,121_0,50_0,41_0,116_0], & [0_0,18_0,59_0,55_0,153_0]. &
\end{array}$$

□

综合引理 4.1–4.11 以及定理 1.13，我们有下面的结论：

定理 4.1: 设 G 是一个没有孤立点的五边图。则除了 $(n,G)\in\{(5,G_7),(5,G_8),(5,G_9),(6,G_9),(9,G_{14}),(12,G_{14}),(7,G_{16}),(8,G_{16}),(8,G_{18}),(14,G_{18}),(8,G_{19}),(16,G_{21}),(9,G_{22}),(10,G_{22}),(18,G_{22})\}$ 外，n 阶 G-设计存在的必要条件也是充分的。

研究图分解问题的一个重要的动机是它在网络通信中有很重要的应用。业务疏导（Traffic grooming）是光网络研究中的一个前沿和热点问题。它是指将低速信号复用到高速流上，以降低设备成本。在 WDM 光网络中，网络的节点通过分插复用设备（ADM）将数据流复用到不同波长通道。利用业务疏导，可以减少 ADM 的数量，降低网络成本。

我们考虑在无向环网上实现均匀 ALL-to-ALL 的通信业务，任意两个节点间均有通信请求。如果对任意两个节点 i 和 j，它们之间的通信请求仅需要 $\frac{1}{C}$ 带宽的波长。那么在同一个波长上我们至多可以指派 C 个请求。C 被称为疏导率。将节点看成是一个 n 阶完全图 K_n 的顶点，那么最小化 ADM 的个数的问题可以建立成如下的图分解模型[16]：给定节点数 n 和疏通率 C，将 K_n 的边分解为子图 $G_1,G_2,\ldots,G_t$，称为区组，使得每个区组至多有 C 条边，并且所有子图中度数非零的顶点数目尽可能小。这样的一个对 K_n 的分解称为 n 阶 C-疏导。我们用 $\mathrm{A}(C,n)$ 表示 n 阶 C-疏导顶点个数的最小值。

已有许多研究讨论如何确定 $\mathrm{A}(C,n)$ 具体的值，目前的文献已考察过 $C=3$ 的情形[16]，$C=4$ 的情形[17,100]，$C=5$ 的情形[15]，$C=6$ 的情形[14]，$C=7$ 的情形[48]，$C=8$ 的情形[49] 和 $C=9$ 的情形[50,87]，并且当 $3\le C\le 5$ 时，$\mathrm{A}(C,n)$ 的值已完全被确定。当 $6\le C\le 9$ 时，目前的文献已给出了 $\mathrm{A}(C,n)$ 的下界，$\mathcal{L}(C,n)$。对于 $C\in\{6,8,9\}$ 的情形，除了有限个 n 外，$\mathcal{L}(C,n)$ 已被证明是可以达到的，即 $\mathrm{A}(C,n)=\mathcal{L}(C,n)$；而对于 $C=7$ 情形，还有许多无穷类函待解决。

我们考察了 $6\le C\le 9$ 剩下的情形。我们先用计算机搜索出了许多小的例子，之后利用 G-GDD 递归地构造较大的值以及一些无穷类。特别是在解决 $C=7$ 的无穷类时，我们用型为 $21^u m^1$ 的 4-GDD 给出了很多递归构造。但是由于篇幅所限，我们这里仅叙述下我们的结果。记 $X(C,n)=A(C,n)-\mathcal{L}(C,n)$。

定理 4.2: 对任意正整数 n，$n\notin\{\mathbf{7},\mathbf{9},\mathbf{10},\mathbf{12},\mathbf{19},84,102,120\}$，$X(6,n)=0$。进一步地，

1. 对于 $n \in \{7, 9, 12\}$，$X(6, n) = 1$；

2. $X(6, 10) = 2$；

3. $X(6, 19) = 3$；

4. 对于 $n \in \{84, 120\}$，$X(6, n) \le 1$；

5. $X(6, 102) \le 2$。

定理 4.3: 对任意正整数 n，$n \notin \{\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{17}, \mathbf{19}, \mathbf{21}, 71, 83, 90, 93, 101, 117, 134, 140, 141, 146, 155, 161, 164, 167, 185, 248\}$，$X(7, n) = 0$。进一步地，

1. 对于 $n \in \{2, 6, 9, 10, 17\}$，$X(7, n) = 1$；

2. $1 \le X(7, 19) \le 2$；

3. $1 \le X(7, 21) \le 3$；

4. 对于 $n \in \{101, 134, 146, 155, 164, 167, 185, 248\}$，$X(7, n) \le 1$；

5. 对于 $n \in \{90, 140, 161\}$，$X(7, n) \le 2$；

6. 对于 $n \in \{93, 117, 141\}$，$X(7, n) \le 3$；

7. $X(7, 71) \le 5$；

8. $X(7, 83) \le 6$。

定理 4.4: 对任意正整数 n，$n \notin \{\mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, 18, 19, 20, 27, 54, 56, 57, 60\}$，$X(8, n) = 0$。进一步地，对于 $n \in \{5, 6, 8, 9, 10, 12\}$，$X(8, n) \ge 1$。

定理 4.5: 对任意正整数 n，$n \notin \{\mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{14}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, \mathbf{17}, \mathbf{18}, \mathbf{22}, 20, 21, 24, 33, 42, 51, 61, 69, 78, 88, 105, 114\}$，$X(9, n) = 0$。进一步地，对于 $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22\}$，$X(9, n) \ge 1$。

5 删位插位纠错码

5.1 引言

在删位插位信道中，数据在传输时经常会在未知的位置发生丢失或插入的错误。为了解决删位插位信道中的通信问题，Levenshteĭn 提出了删位插位纠错码的概念[113]。删位插位信道是很常见的，这类信道包括了数据存储系统中的磁光记录[104]，半导体器件和集成电路[106]，以及同步数字通信网络[144]。在基因表达过程中，“链滑”和同源重组也会对 DNA 分子造成插入或删除的错误[122,128]。

在文献[111]中，Levenshteĭn 介绍了一种测度用来衡量不同长度的序列间的距离。令 X 是 q 个元素的集合，称为*字母表*，n 是一个正整数。一个*长度为 n 的 q 元码*就是一个子集合 $\mathcal{C} \subseteq X^n$。$\mathcal{C}$ 中的元素称为*码字*，$\mathcal{C}$ 的大小就是 $|\mathcal{C}|$，即它所含的码字个数。

对于 $x, y \in X^n$，x 与 y 的 *Levenshteĭn 距离* $d_L(x, y)$，定义为将 x 变到 y 需要的删除和插入操作的最少次数。令 $0 \leq t \leq n$，一个 q 元码 $\mathcal{C} \subseteq X^n$ 称为是 *t-删位纠错的*，记为 $(n, t)_q$-DCC，若对所有不同的 $x, y \in \mathcal{C}$，$d_L(x, y) \geq 2t + 1$。Levenshteĭn[111] 证明了任何一个能纠正 t 个删位错误的码也能纠正任意 i 个插位和 j 个删位的错误，只要满足 $i + j \leq t$。

对于 $x \in X^n$，以及 $0 \leq t \leq n$，用 $D_t(x)$ 表示 $y \in X^{n-t}$ 构成的集合。利用这个记号我们可以给出删位纠错码的另一种刻画。一个 q 元码 $\mathcal{C} \subseteq X^n$ 称为是 t-删位纠错的当且仅当对所有不同的 $x, y \in \mathcal{C}$，$D_t(x) \cap D_t(y) = \varnothing$。进一步地，如果所有的球 $D_t(x), x \in \mathcal{C}$ 划分了 X^{n-t}，这个 q 元码称为是一个*完备的 t-删位纠错码*。然而，和普通的完备纠错码不同，完备的 t-删除纠错码的大小不是固定的。两个完备的 $(n, t)_q$-DCC 可以有不同的码字个数。这是由于对不同的码字 x，球 $D_t(x)$ 的大小不同。我们定义*完备的 $(n, t)_q$-DCC 的大小的谱*为

$$\mathrm{Spec}(q, n, t) = \{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ 是一个完备的 } (n, t)_q\text{-DCC}\}.$$

容易看出

$$\mathrm{Spec}(q,n,t)=\begin{cases}\{1\}, & \text{若 } t=n\\ \{\lceil q/n\rceil,\ldots,q\}, & \text{若 } t=n-1.\end{cases}$$

对于非平凡的情形 $t=n-2$，定义

$$\begin{aligned}DL(q,n)&=\left\lceil\frac{q}{n}\left\lceil\frac{2q}{n-1}\right\rceil\right\rceil,\\ DU(q,n)&=\left\lfloor\frac{q}{n}\left\lfloor\frac{2(q-1)}{n-1}\right\rfloor\right\rfloor+q,\\ I(q,n)&=[DL(q,n),DU(q,n)]\,.\end{aligned}$$

命题 5.1 (Bours[26]; Chee, Ge, and Ling[38])：对任意正整数 q，我们有 $\mathrm{Spec}(q,n,n-2)\subseteq[DL(q,n),DU(q,n)]=\mathrm{I}(q,n)$。

长期以来，人们多关注于码字个数达到最大值的 $(n,n-2)_q$-DCC 的存在性问题。当 $n=3$ 时，Levenshteĭn[113] 对所有正整数 q 构造了完备的大小能达到上界 $DU(q,n)$ 的 $(n,n-2)_q$-DCC。之后，Bours[26] 和 Wang[156] 解决了 $n=4$ 以及 $n=5$ 的情形。

定理 5.1 (Levenshteĭn[113]; Bours[26]; Wang[156]):

1. 对所有正整数 q，大小为 $DU(q,3)$ 的完备的 $(3,1)_q$-DCC 均存在；
2. 对所有正整数 q，大小为 $DU(q,4)-\Delta(q,4)$ 的完备的 $(4,2)_q$-DCC 均存在，这里
$$\Delta(q,4)=\begin{cases}1, & \text{若 } q=9\\ 0, & \text{对于其他情形；}\end{cases}$$
3. 对所有正整数 q，除了可能的例外值 $q\in\{13,15,19,27,34\}$，大小为 $DU(q,5)-\Delta(q,5)$ 的完备的 $(5,3)_q$-DCC 均存在，这里
$$\Delta(q,5)=\begin{cases}1, & \text{若 } q\equiv 7,9 \pmod{10}\\ 0, & \text{对于其他情形。}\end{cases}$$

当 $n = 6$ 时，Yin[167] 和 Shalaby 等人[141]对所有正整数 q，$q \notin \{173, 178, 203, 208\}$，确定了完备的 $(n, n-2)_q$-DCC 的存在性。当 $n = 7$ 时，Wang 和 Yin[159]解决了 $q \geq 2350$ 的情形。Abel 和 Bennett[4]改进了这个结果，他们对任意 $q \equiv 1, 7 \pmod{21}$ 且 $q \notin \{22, 274, 358, 400, 526\}$，构造了完备的删位纠错码。然而，在这两类情形中，构造出的大多数码的码字个数都没有达到上界。

近来，Chee, Ge 和 Ling[38]开始对更一般的问题展开研究，即确定完备的 $(n, n-2)_q$-DCC 大小的谱。他们确定了长为 3、完备的 1-删位纠错码的谱，以及长为 4、完备的 2-删位纠错码的谱。

定理 5.2 (Chee, Ge, and Ling[38]):

1. 对所有正整数 q，$\text{Spec}(q, 3, 1) = I(q, 3)$；
2. 对所有正整数 q，除了确定的例外值 $q \in \{4, 6\}$ 以及可能的例外值 $q \in \{9, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 52\}$，$\text{Spec}(q, 4, 2) = I(q, 4)$。进一步地，我们有 $\text{Spec}(4, 4, 2) = [4, 6]$，$\text{Spec}(6, 4, 2) = \{6\} \cup [8, 10]$。

本章的目标就是对定理 5.2 中剩下的值确定相应的谱。我们要证明下面的结果。

定理 5.3: 对任意正整数 q，除了确定的例外值 $q \in \{4, 6, 9\}$ 以及可能的例外值 $q \in \{19, 34\}$，$\text{Spec}(q, 4, 2) = I(q, 4)$。进一步地，我们有：

1. $\text{Spec}(4, 4, 2) = [4, 6]$；
2. $\text{Spec}(6, 4, 2) = \{6\} \cup [8, 10]$；
3. $\text{Spec}(9, 4, 2) = [15, 19]$；
4. $I(19, 4) \backslash DL(19, 4) \subseteq \text{Spec}(19, 4, 2) \subseteq I(19, 4)$；
5. $I(34, 4) \backslash DL(34, 4) \subseteq \text{Spec}(34, 4, 2) \subseteq I(34, 4)$。

5.2 背景知识

我们将整数集合 $\{i, i+1, \ldots, j\}$ 记为 $[i, j]$。进一步地，我们将 $[1, n]$ 简写为 $[n]$。

对于给定的有限集合 X 以及整数 $k \in [|X|]$，我们定义

$$\binom{X}{k} = \{A \subseteq X : |A| = k\},$$

$$X^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X, i \in [n]\}.$$

一个区组大小为 n 指数为 λ 的 q 阶有向填充 $DP(q,n,\lambda)$ 是一个二元组 $(X, \mathcal{A})$，这里 X 是 q 个点的集合，$\mathcal{A}$ 是 X^n 的子集合，称为区组，使得 X^2 中的任意元素至多被 λ 个区组包含。如果 X^2 中的每个元素均恰好被 λ 个区组包含，$DP(q,n,\lambda)$ 也被称为是 完备的。当 $\lambda = 1$ 时记号中的 λ 可以省去不写。

下面的命题揭示了有向填充和 $(n, n-2)_q$-DCC 的联系。

命题 5.2 (Folklore): $\mathcal{C} \subseteq X^n$ 是一个 $(n, n-2)_q$-DCC 当且仅当 $(X, \mathcal{C})$ 是一个 DP(q,n)。

命题 5.3: $\mathcal{C} \subseteq X^n$ 是一个完备的 $(n, n-2)_q$-DCC 当且仅当 $(X, \mathcal{C})$ 是一个完备的 DP(q,n)。

这样，为了构造指定大小的完备的 $(n, n-2)_q$-DCC，我们只要构造相应的完备的 DP(q,n) 即可。

一个区组大小为 n 阶为 q，带有一个大小为 h 的洞的完备的不完全有向填充，记为完备的 IDP$(q:h,n)$，是一个三元组 $(X, Y, \mathcal{A})$，这里 $(X, \mathcal{A})$ 是一个 DP(q,n)，Y 是 X 的一个 h-子集并且满足

1. Y^2 中的任何元素均不被 $\mathcal{A}$ 中的区组包含；
2. $X^2 \setminus Y^2$ 中的任何元素均要被 $\mathcal{A}$ 中的一个区组包含。

下面的引理虽然简单但在我们的构造中经常要用到。

引理 5.1: 若存在大小为 m_1 的完备的 IDP$(q:h,n)$ 以及大小为 m_2 的完备的 DP(h,n)，则存在大小为 $m_1 + m_2$ 的完备的 DP(q,n)。

为了给出我们的递归构造，我们还需要下面的概念。

令 X 是点集，$\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_s\}$ 是 X 的划分，称为组，$\mathcal{B}$ 是 $\cup_{k \in K} X^k$ 中的元素构成的集合，称为区组。三元组 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 称为是有向可分组设计，如果来

自于不同组的有向点对恰被 $\mathcal{B}$ 中的一个区组包含，并且对任意 $B \in \mathcal{B}$，$G \in \mathcal{G}$，$|B \cap G| \leq 1$。

对于有向 GDD，我们有下面的结论。

引理 5.2: 如果存在型为 $g_1^{t_1} \cdots g_s^{t_s}$ 的 K-GDD，则存在相同组型的有向 K-GDD。

定理 5.4 (Sarvate[137]): 型为 $g^{v/g}$ 的有向 4-GDD 存在当且仅当 $v \geq 4g$，$v \equiv 0 \pmod g$，$v \equiv g \pmod 3$ 并且 $v(v-g) \equiv 0 \pmod 6$。

我们有下面"填充组"的构造方法。

命题 5.4 (Chee, Ge 和 Ling[38]): 如果型为 $\{g_1, \ldots, g_s\}$ 的有向 n-GDD 存在，那么

$$\left\{\frac{2}{\binom{n}{2}}\left(\binom{\sum_{i=1}^s g_i}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{g_i}{2}\right)\right\} + \sum_{i=1}^s \mathrm{Spec}(g_i, n, n-2) \subseteq \mathrm{Spec}(\sum_{i=1}^s g_i, n, n-2).$$

命题 5.5 (Chee, Ge 和 Ling[38]): 设 h 是一个正整数，如果我们有

1. 型为 $\{g_1, \ldots, g_s\}$ 的 n-GDD;
2. 有 t_i 个区组的完备的 IDP$(g_i + h : h, n)$，$1 \leq i \leq s-1$；以及
3. 有 t 个区组的完备的 DP$(g_s + h, n)$，

那么

$$\left\{\frac{2}{\binom{n}{2}}\left(\binom{\sum_{i=1}^s g_i}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{g_i}{2}\right)\right\} + t + \sum_{i=1}^{s-1} t_i \in \mathrm{Spec}(h + \sum_{i=1}^s g_i, n, n-2).$$

命题 5.6 (Chee, Ge 和 Ling[38]): 设 $x \equiv y \pmod 2$，$x \geq y$。如果存在型为 $g^n x^1$ 和 $g^n y^1$ 的 K-GDD，则存在型为 $g^n(\frac{x+y}{2})^1$ 的有向 K-GDD。

命题 5.7 (Chee, Ge 和 Ling[38]): 设 $q = 12t + u$。如果 $u = 0, 3$ 或 6，则对任意 $t \geq 1$ 大小属于 $[DU(q,4) - 6t, DU(q,4)]$ 的完备的 DP$(q,4)$ 均存在。如果 $u = 9$，则对任意 $t \geq 1$ 大小属于 $[DU(q,4) - (6t+2), DU(q,4)]$ 的完备的 DP$(q,4)$ 均存在。

5.3 构造

对于给定的正整数 q，为了构造所有可能大小的完备的 $(4,2)_q$-DCC，我们先构造一些不完全的有向填充，利用引理 5.1 得到大小接近下界的码。然后我们利

用命题 5.4 或 5.5 去填充有向 GDD 的组得到较大的码。在直接构造中，我们将尽可能地利用有限 Abelian 群去生成区组。下面我们先列出一些 q 比较小的完备的 $(4,2)_q$-DCC，它们均是由计算机直接搜索得到的。

引理 5.3: 对于 $q \in \{9,10,11\}$，我们有

1. $\mathrm{Spec}(9,4,2) = I(9,4) \setminus \{14,20\}$，
2. $\mathrm{Spec}(10,4,2) = I(10,4)$，
3. $\mathrm{Spec}(11,4,2) = I(11,4)$。

证明. 我们首先来完成不存在性的证明。大小为 20 的完备的 $(4,2)_9$-DCC 的不存在性见文献[97]。现在，假设 $\mathcal{C} \subset X^n$ 是一个大小为 14 完备的 $(4,2)_9$-DCC。用 $B_{x,y}$ 表示包含 x 对相异点构成的点对以及 y 对相同点构成的点对的码字的集合。容易看出 $(x,y) \in P = \{(6,0),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(1,1),(0,1),(2,2),(1,2)\}$。记 $a_{x,y} = |B_{x,y}|$。那么总的码字个数为 $\sum_{(x,y)\in P} a_{x,y} = 14$。用两种方式计算这些码字中点对的个数，我们有 $\sum_{(x,y)\in P} x a_{x,y} = 72$ 以及 $\sum_{(x,y)\in P} y a_{x,y} = 9$。这个线性方程组所有整数解如下：

1. $a_{6,0} = 5, a_{5,1} = 8, a_{2,1} = 1$；
2. $a_{6,0} = 5, a_{5,1} = 7, a_{3,1} = 1, a_{4,1} = 1$；
3. $a_{6,0} = 5, a_{5,1} = 6, a_{4,1} = 3$；
4. $a_{6,0} = 6, a_{5,1} = 6, a_{4,1} = 1, a_{2,2} = 1$；
5. $a_{6,0} = 6, a_{5,1} = 7, a_{1,2} = 1$。

对于解 1，由于 $a_{2,1} = 1$，必然有一个形如 (a,b,a,a) 或 (a,a,b,a) 的码字。这个码字提供了两对相异点构成的点对，并且均包含点 a。对于其他码字，它们或者形如 (x,y,z,w)，或者形如 (x,u,v,x)。每一个这样的码字仅能提供 0 对或 3 对包含 a 且由相异点构成的点对。这样，包含 a 且由相异点构成的点对的个数应当模 3 余 2。然而，这样的点对的数目为 $2 \times 8 = 16$，这样就导出了矛盾。

通过类似的讨论，对于解 2–4 我们也可以得到矛盾。这里，我们由 $a_{3,1}=1$，$a_{4,1}=3$ 或 $a_{2,2}=1$ 出发，分别考察形如 (a,a,b,c) 或 (b,c,a,a)，(a,b,a,c) 或 (b,a,c,a)，(a,b,a,b) 的码字。

对于解 5，不存在性是由计算机穷举搜索得到的。

其他所要的完备的 $(4,2)_q$-DCC 见表格5.1。 □

引理 5.4：$\{30,37,38,39\} \subseteq \mathrm{Spec}(13,4,2)$。

证明. 我们由一个完备的 IDP$(13:1,4)$ 出发（文献[38]），在大小为 1 的洞中填入一个完备的 $(4,2)_1$-DCC 就可以得到大小为 30 的 $(4,2)_{13}$-DCC。

由定理 1.3 存在型为 $1^9 4^1$ 的 4-GDD。应用引理 5.2 得到相同组型的有向 4-GDD。再应用命题 5.4 就有 $\{37,38,39\} \subseteq \mathrm{Spec}(13,4,2)$。 □

引理 5.5：$31 \in \mathrm{Spec}(13,4,2)$。

证明. 首先我们构造一个大小为 30 的 IDP$(13:1,4)$。它的字母表为 $(\mathbb{Z}_3 \times \{0,1,2,3\}) \cup \{\infty\}$。将下列基区组展开就得到了所要的区组集，这里无穷点 ∞ 在展开过程中保持不变。

$$\begin{array}{cc}
((0,1),(0,2),(0,3),\infty) & ((1,0),\infty,(2,2),(2,1)) \\
(\infty,(0,0),(1,3),(0,0)) & ((1,1),(0,1),(1,1),(2,3)) \\
((0,2),(1,2),(0,2),(2,3)) & ((1,3),(1,0),(1,3),(0,3)) \\
((1,3),(2,3),(0,2),(1,1)) & ((2,3),(0,1),(2,2),(0,0)) \\
((0,1),(2,0),(1,0),(1,2)) & ((0,2),(2,0),(0,0),(2,1))
\end{array}$$

我们在大小为 1 的洞中填入一个完备的 $(4,2)_1$-DCC 就可以得到大小为 31 的完备的 $(4,2)_{13}$-DCC。 □

引理 5.6：$[32,33] \subseteq \mathrm{Spec}(13,4,2)$。

证明. 我们先来构造一个大小为 31 的 IDP$(13:1,4)$。它的字母表为 $(\mathbb{Z}_3 \times \{0,1,2,3\}) \cup \{\infty\}$。构造下面四个码字。

$$\begin{array}{cc}
b_1:(\infty,(0,0),(1,0),(2,0)) & b_2:((2,1),(1,1),(0,1),\infty) \\
b_3:((0,2),(1,2),(2,2),(0,2)) & b_4:((2,2),(2,2),(1,2),(1,2))
\end{array}$$

然后将下列基区组展开。注意标有$*$的两个点 $(2,0),(1,0)$ 的第一坐标加 1 时要交换位置，因为有序点对 $((0,0),(2,0))$ 已经在区组 b_1 中出现了。同样地，标有$**$的两

表 5.1　一些完备的 $(4,2)_q$-DCC

q	码字个数	完备的 $(4,2)_q$-DCC 的码字
9	15	$(4,2,8,7)$ $(7,2,4,1)$ $(3,5,7,3)$ $(6,7,0,6)$ $(5,4,6,5)$ $(1,1,5,1)$ $(8,8,5,0)$ $(0,0,1,7)$ $(7,7,5,8)$ $(3,1,2,6)$ $(8,6,1,4)$ $(1,0,3,8)$ $(2,0,5,2)$ $(4,3,0,4)$ $(6,8,2,3)$
	16	$(7,0,2,7)$ $(2,2,2,8)$ $(8,1,6,7)$ $(0,3,1,4)$ $(6,6,6,8)$ $(8,8,5,8)$ $(8,2,4,0)$ $(5,3,7,5)$ $(3,2,6,3)$ $(7,4,8,3)$ $(6,5,4,2)$ $(0,5,6,0)$ $(1,3,0,8)$ $(1,2,5,1)$ $(4,4,4,5)$ $(4,7,6,1)$
	17	$(8,8,2,6)$ $(1,1,8,3)$ $(6,0,2,3)$ $(0,0,6,1)$ $(7,1,7,6)$ $(2,2,2,2)$ $(3,7,8,0)$ $(1,2,5,0)$ $(5,3,4,1)$ $(3,3,5,6)$ $(5,5,2,7)$ $(4,4,0,4)$ $(6,6,4,7)$ $(7,4,3,2)$ $(0,8,7,5)$ $(2,8,1,4)$ $(4,6,5,8)$
	18	$(4,6,2,1)$ $(8,1,5,2)$ $(3,7,2,8)$ $(5,6,7,4)$ $(2,4,0,5)$ $(1,1,1,1)$ $(3,3,5,3)$ $(8,4,7,3)$ $(8,8,0,8)$ $(2,2,6,3)$ $(0,0,2,7)$ $(6,6,8,6)$ $(3,1,0,4)$ $(0,1,3,6)$ $(4,4,4,8)$ $(7,7,1,7)$ $(5,5,1,8)$ $(7,6,5,0)$
	19	见定理 5.1
10	18	$(4,8,4,3)$ $(1,5,3,6)$ $(3,7,8,1)$ $(1,7,9,4)$ $(1,2,1,8)$ $(2,6,5,4)$ $(4,2,9,7)$ $(5,7,5,2)$ $(9,5,0,1)$ $(3,0,4,5)$ $(4,6,1,0)$ $(8,5,9,8)$ $(0,8,7,0)$ $(0,9,6,9)$ $(3,9,3,2)$ $(7,6,7,3)$ $(2,0,2,3)$ $(6,8,6,2)$
	19	$(7,6,3,7)$ $(4,1,9,7)$ $(9,8,9,0)$ $(2,7,2,9)$ $(5,1,2,0)$ $(8,8,8,8)$ $(5,8,7,5)$ $(0,4,2,5)$ $(4,6,4,0)$ $(9,5,3,4)$ $(0,8,1,6)$ $(0,0,7,0)$ $(1,3,1,5)$ $(6,5,6,9)$ $(3,6,8,2)$ $(2,8,4,3)$ $(7,1,4,8)$ $(3,0,3,9)$ $(9,2,6,1)$
	20	$(3,8,3,1)$ $(9,3,7,4)$ $(7,6,1,5)$ $(2,5,6,3)$ $(2,2,4,8)$ $(8,8,8,8)$ $(4,1,3,6)$ $(0,1,0,8)$ $(5,1,4,7)$ $(8,0,6,4)$ $(3,0,5,2)$ $(9,9,9,2)$ $(7,8,7,2)$ $(4,4,4,2)$ $(5,8,5,9)$ $(7,0,3,9)$ $(6,2,0,7)$ $(4,9,5,0)$ $(6,9,6,8)$ $(1,2,9,1)$
	21	$(9,8,3,7)$ $(8,9,5,1)$ $(8,8,0,6)$ $(7,7,7,8)$ $(1,1,1,0)$ $(2,2,2,2)$ $(5,7,5,2)$ $(4,8,4,2)$ $(1,6,7,3)$ $(7,4,1,9)$ $(3,9,4,0)$ $(0,0,7,0)$ $(2,5,0,9)$ $(6,1,5,4)$ $(9,6,9,2)$ $(0,1,2,8)$ $(2,4,7,6)$ $(6,6,6,0)$ $(0,4,3,5)$ $(3,2,3,1)$ $(5,3,6,8)$
	22	$(3,3,3,1)$ $(9,9,9,2)$ $(2,0,5,8)$ $(0,4,2,3)$ $(4,1,6,0)$ $(6,6,6,6)$ $(9,3,5,0)$ $(3,7,6,9)$ $(5,1,9,4)$ $(6,8,1,5)$ $(0,7,0,1)$ $(5,5,7,5)$ $(4,4,4,5)$ $(7,7,7,3)$ $(8,3,8,4)$ $(5,6,3,2)$ $(8,0,9,6)$ $(1,1,1,3)$ $(2,2,9,1)$ $(2,6,7,4)$ $(4,9,8,7)$ $(1,7,8,2)$
	23	$(1,0,4,7)$ $(7,3,6,8)$ $(7,0,5,9)$ $(0,1,2,3)$ $(1,8,5,6)$ $(5,5,5,5)$ $(2,4,8,1)$ $(2,6,5,0)$ $(3,5,7,1)$ $(4,5,3,2)$ $(6,3,4,9)$ $(3,3,3,3)$ $(8,9,3,0)$ $(9,5,8,4)$ $(9,6,2,7)$ $(4,4,0,6)$ $(8,8,7,2)$ $(9,9,9,1)$ $(0,0,0,8)$ $(1,1,1,9)$ $(2,2,2,9)$ $(6,6,6,1)$ $(7,7,7,4)$
	24	$(2,7,4,6)$ $(4,5,2,8)$ $(1,2,3,0)$ $(3,7,8,9)$ $(1,5,6,7)$ $(9,9,9,9)$ $(0,9,7,2)$ $(9,0,6,8)$ $(9,5,3,4)$ $(2,5,9,1)$ $(4,7,3,1)$ $(7,7,7,7)$ $(6,0,3,5)$ $(6,1,4,9)$ $(8,3,6,2)$ $(8,7,5,0)$ $(0,0,0,1)$ $(6,6,6,6)$ $(8,8,8,4)$ $(1,1,8,1)$ $(4,4,0,4)$ $(2,2,2,2)$ $(3,3,3,3)$ $(5,5,5,5)$
	25	见定理 5.1
11	22	$(5,1,5,2)$ $(9,5,9,6)$ $(0,6,0,1)$ $(8,5,8,7)$ $(3,5,3,0)$ $(4,10,9,7)$ $(4,0,4,8)$ $(2,0,2,9)$ $(4,2,6,5)$ $(9,4,3,1)$ $(1,9,10,0)$ $(3,2,7,4)$ $(2,10,1,8)$ $(8,0,3,10)$ $(7,0,7,5)$ $(6,7,6,10)$ $(1,7,1,3)$ $(7,9,8,2)$ $(8,1,6,4)$ $(10,6,2,3)$ $(3,6,8,9)$ $(10,5,10,4)$
	23	$(6,3,6,1)$ $(4,10,3,8)$ $(1,8,9,3)$ $(0,7,2,8)$ $(2,2,3,2)$ $(8,8,6,8)$ $(0,6,4,9)$ $(4,4,7,4)$ $(9,8,7,10)$ $(7,6,7,5)$ $(5,8,1,2)$ $(9,2,9,4)$ $(9,0,1,5)$ $(2,5,10,7)$ $(0,3,0,10)$ $(3,7,3,9)$ $(4,2,1,6)$ $(10,5,9,6)$ $(1,7,1,0)$ $(8,4,5,0)$ $(5,3,5,4)$ $(6,10,2,0)$ $(10,1,10,4)$
	24	$(4,10,7,0)$ $(5,10,8,6)$ $(3,3,5,0)$ $(0,0,0,5)$ $(10,3,4,9)$ $(1,1,1,1)$ $(5,7,5,1)$ $(9,6,5,4)$ $(4,4,6,3)$ $(3,2,6,7)$ $(8,7,8,3)$ $(7,7,9,7)$ $(2,0,2,3)$ $(3,1,8,10)$ $(2,9,10,1)$ $(0,7,6,10)$ $(9,0,9,8)$ $(10,10,5,2)$ $(6,1,6,0)$ $(1,5,9,3)$ $(6,8,9,2)$ $(8,0,4,1)$ $(1,7,2,4)$ $(4,2,8,5)$
	25	$(3,3,6,3)$ $(8,2,1,9)$ $(7,7,10,7)$ $(6,6,10,6)$ $(2,2,6,2)$ $(4,4,4,4)$ $(9,9,10,9)$ $(4,7,9,1)$ $(2,4,5,10)$ $(10,10,8,10)$ $(3,5,0,9)$ $(5,5,1,5)$ $(9,6,0,7)$ $(10,4,0,3)$ $(8,0,8,4)$ $(0,10,5,2)$ $(1,2,7,0)$ $(1,4,6,8)$ $(6,9,5,4)$ $(1,3,10,1)$ $(9,2,8,3)$ $(5,3,7,8)$ $(8,7,5,6)$ $(0,0,6,1)$ $(7,3,4,2)$
	26	$(10,8,3,2)$ $(8,9,10,0)$ $(10,7,4,1)$ $(4,0,3,7)$ $(2,6,0,9)$ $(8,6,8,1)$ $(5,2,3,1)$ $(1,9,3,5)$ $(9,1,6,7)$ $(5,8,5,7)$ $(7,10,5,9)$ $(9,9,9,9)$ $(4,5,10,6)$ $(6,2,5,4)$ $(6,6,3,10)$ $(0,1,2,10)$ $(3,9,8,4)$ $(7,7,7,7)$ $(2,7,2,8)$ $(7,3,0,6)$ $(4,4,9,2)$ $(1,0,4,8)$ $(3,3,3,3)$ $(0,0,5,0)$ $(1,1,1,1)$ $(10,10,10,10)$
	27	见定理 5.1

个点 $(1,1),(2,1)$ 在展开时也要做类似处理，因为有序点对 $((2,1),(0,1))$ 已经在区组 b_2 中出现了。

$$\begin{array}{cc}
(\infty,(0,1),(0,2),(0,3)) & ((0,2),(2,3),(2,0),\infty) \\
((2,1),(2,0)^*,(1,0)^*,(0,2)) & ((1,2),(2,0),(1,1)^{**},(2,1)^{**}) \\
((2,3),(2,3),(2,1),(1,3)) & ((1,1),(1,1),(2,3),(0,2)) \\
((2,0),(1,3),(2,0),(0,1)) & ((0,0),(0,3),(0,2),(1,3)) \\
((0,3),(2,2),(1,1),(2,0)) &
\end{array}$$

这样我们就得到了一个大小为 31 的 IDP$(13:1,4)$。用区组 $((2,2),(2,2),(2,2),(1,2))$ 和 $((1,2),(1,2),(1,2),(1,2))$ 替换区组 b_4，我们又可以得到一个大小为 32 的 IDP$(13:1,4)$。

分别填充上述构造的 IDP$(13:1,4)$ 的洞就可以得到所要的大小为 32 和 33 的完备的 $(4,2)_{13}$-**DCC**。 □

引理 5.7: $34\in \mathrm{Spec}(13,4,2)$。

证明. 我们先来构造一个大小为 33 的 IDP$(13:1,4)$。它的字母表为 $(\mathbb{Z}_3\times\{0,1,2,3\})\cup\{\infty\}$。将下列基区组展开就得到了所要的区组集，这里无穷点 ∞ 在展开过程中保持不变。

$$\begin{array}{cc}
((0,1),(0,2),(0,3),\infty) & ((2,0),\infty,(1,0),(2,1)) \\
(\infty,(0,2),(2,3),(0,2)) & ((0,0),(0,0),(0,0),(0,0)) \\
((0,1),(0,1),(1,3),(1,1)) & ((2,3),(2,3),(1,3),(0,1)) \\
((0,0),(0,2),(1,3),(1,2)) & ((0,3),(1,0),(2,0),(1,3)) \\
((0,2),(2,2),(2,0),(1,1)) & ((0,1),(2,2),(2,1),(0,0)) \\
((0,1),(2,3),(2,0),(1,2)) &
\end{array}$$

我们在大小为 1 的洞中填入一个完备的 $(4,2)_1$-**DCC** 就可以得到大小为 34 的完备的 $(4,2)_{13}$-**DCC**。 □

引理 5.8: $[35,36]\subseteq \mathrm{Spec}(13,4,2)$。

证明. 我们先来构造一个大小为 34 的 IDP$(13:1,4)$。它的字母表为 $(\mathbb{Z}_3\times\{0,1,2,3\})\cup\{\infty\}$。构造下面四个码字。

$$\begin{array}{cc}
b_1:(\infty,(0,0),(1,0),(2,0)) & b_2:((2,1),(1,1),(0,1),\infty) \\
b_3:((0,2),(1,2),(2,2),(0,2)) & b_4:((2,2),(2,2),(1,2),(1,2))
\end{array}$$

然后将下列基区组展开。注意到有序点对 $((0,0),(2,0))$ 和 $((2,1),(0,1))$ 已经分

别在区组 b_1 和 b_2 中出现了，标有$*$的点的第一坐标加 1 时要交换位置。

$$\begin{array}{cc}
(\infty,(0,1),(0,2),(0,3)) & ((0,2),(2,3),(1,0),\infty) \\
((2,2),(2,1),(2,0)^*,(1,0)^*) & ((1,0),(0,2),(1,1)^*,(2,1)^*) \\
((2,0),(2,0),(1,3),(2,2)) & ((0,1),(0,1),(0,1),(0,1)) \\
((2,3),(2,3),(2,3),(2,0)) & ((1,3),(1,1),(2,0),(0,2)) \\
((1,0),(2,3),(1,3),(0,1)) & ((2,1),(0,3),(0,2),(1,3))
\end{array}$$

这样我们就得到了一个大小为 34 的 IDP$(13:1,4)$。用区组 $((2,2),(2,2),(2,2),(1,2))$ 和 $((1,2),(1,2),(1,2),(1,2))$ 替换区组 b_4，我们又可以得到一个大小为 35 的 IDP$(13:1,4)$。

分别填充上述构造的 IDP$(13:1,4)$ 的洞就可以得到所要的大小为 35 和 36 的完备的 $(4,2)_{13}$-DCC。 □

定理 5.5: $\mathrm{Spec}(13,4,2)=I(13,4)$，并且对任意 $s\in[29,38]$，大小为 s 的完备的 IDP$(13:1,4)$ 均存在。

证明. 综合上面的引理，我们有 $\mathrm{Spec}(13,4,2)=I(13,4)$。在上面引理的证明中，我们构造了大小为 s 的完备的 IDP$(13:1,4)$，$s\in[29,35]$。而对于 $s\in\{37,38,39\}$，我们从型为 $1^9 4^1$ 的有向 4-GDD 出发，任选一个大小为 1 的组作为洞，填充除这个组外的其他组就可得到所要的完备的 IDP$(13:1,4)$。 □

引理 5.9: $[DL(15,4),DL(15,4)+1]=[38,39]\subseteq\mathrm{Spec}(15,4,2)$。

证明. 首先我们在点集 $(\mathbb{Z}_3\times\{0,1,2,3\})\cup\{\infty_0,\infty_1,\infty_2\}$ 上构造一个大小为 36 的 IDP$(15:3,4)$。将下述基区组

$$\begin{array}{ccc}
((2,2),(0,3),(1,3),(2,2)) & ((2,1),(0,2),(1,2),(2,1)) & ((2,0),(1,1),(0,1),(2,0)) \\
((0,3),(0,0),(2,0),(0,3)) & ((2,2),(2,0),(2,1),\infty_0) & ((0,3),(1,1),(1,0),\infty_0) \\
((0,0),(1,2),(0,2),\infty_0) & ((0,1),(2,3),(1,3),\infty_0) & (\infty_0,(0,3),(2,1),(0,1)) \\
(\infty_0,(1,1),(1,3),(1,2)) & (\infty_0,(2,2),(0,0),(2,3)) & (\infty_0,(1,0),(0,2),(2,0))
\end{array}$$

用群 $\langle\alpha\rangle$ 作用展开就可得到所要 IDP$(15:3,4)$ 的区组集，这里

$$\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & 若 x=(y,i)\in\mathbb{Z}_3\times\{0,1,2,3\};\\ \infty_{i+1 \pmod 3}, & 若 x=\infty_i, i\in\{0,1,2\},\end{cases}$$

注意到 $\mathrm{Spec}(3,4,2)=[2,3]$，填充上面构造的 $(4,2)_3$-DCC 的洞就可以得到所要的完备的 $(4,2)_{15}$-DCC。 □

引理 5.10：$[40,45] \subseteq \mathrm{Spec}(15,4,2)$。

证明. 由定理 5.4 存在型为 3^5 的有向 4-GDD，应用命题 5.4 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(15,4,2) &\supseteq \{30\} + \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Spec}(3,4,2)\\ &= [40,45]\,.\end{aligned}$$

□

由命题 5.7 我们有 $[42,48] \subseteq \mathrm{Spec}(15,4,2)$。综合引理 5.9 和 5.10，我们有下述结论。

定理 5.6：$\mathrm{Spec}(15,4,2) = I(15,4)$。

引理 5.11：$DL(16,4) = 44 \in \mathrm{Spec}(16,4,2)$。

证明. 我们在字母表 $\mathbb{Z}_8 \times \{0,1\}$ 上构造所要的完备码。将下述码字展开。

$$\begin{array}{lll} ((0,1),(4,1),(7,0),(4,0)) & ((1,0),(6,1),(4,1),(1,1)) & ((1,1),(2,1),(1,1),(3,0)) \\ ((3,0),(5,1),(2,0),(3,0)) & ((0,0),(3,0),(7,1),(1,1)) & \end{array}$$

再添加下面四个码字。

$$\begin{array}{ll} ((0,0),(2,0),(4,0),(6,0)) & ((6,0),(4,0),(2,0),(0,0)) \\ ((1,0),(3,0),(5,0),(7,0)) & ((7,0),(5,0),(3,0),(1,0)) \end{array}$$

□

引理 5.12：$45 \in \mathrm{Spec}(16,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $\mathbb{Z}_{15} \cup \{\infty\}$ 上构造一个大小为 44 的 $\mathrm{IDP}(16:1,4)$。将下述基区组

$$\begin{array}{cccc} (11,\infty,6,3) & (14,\infty,11,13) & (8,4,8,\infty) & (1,5,3,1) \\ (4,6,4,9) & (9,10,1,9) & (14,4,14,1) & (8,7,0,9) \\ (9,3,12,6) & (12,4,3,10) & (6,12,0,13) & (0,7,12,8) \\ (12,1,11,7) & (9,2,5,13) & & \end{array}$$

用群 $\langle\alpha\rangle$ 展开，这里

$$\alpha = (0\ 1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11)(12\ 13\ 14)(\infty),$$

再加两个区组 $(\infty,0,1,2)$ 和 $(2,1,0,\infty)$ 就可以得到一个以无穷点为洞的 $\mathrm{IDP}(16:1,4)$。填充洞就可以得到所要的大小为 45 的 $(4,2)_{16}$-DCC。 □

引理 5.13: $46 \in \mathrm{Spec}(16,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $\mathbb{Z}_{15} \cup \{\infty\}$ 上构造一个大小为 45 的 IDP(16 : 1, 4)。将下述基区组 +3 (mod 15) 展开。

$$\begin{array}{cccc} (4,13,4,1) & (7,8,9,0) & (14,8,1,12) & (12,9,12,13) \\ (10,9,2,8) & (8,5,8,4) & (0,9,7,11) & \end{array}$$

再添加下述区组

$$(\infty, i, 5+i, 10+i) \quad (10+i, 5+i, i, \infty)$$

这里 $0 \le i < 5$。这样就得到了一个 IDP(16 : 1, 4)。填充洞就可以得到所要的大小为 46 的 $(4,2)_{16}$-DCC。 □

引理 5.14: $47 \in \mathrm{Spec}(16,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_{15} \cup \{\infty\}$。将下述码字 +5 (mod 15) 展开。

$$\begin{array}{cccc} (0,9,0,12) & (1,9,1,3) & (2,1,2,4) & (8,8,12,9) \\ (9,9,7,13) & (9,6,2,10) & (1,8,0,7) & (0,8,2,11) \\ (2,3,5,9) & (12,10,8,1) & (0,3,14,1) & (1,14,13,10) \end{array}$$

再添加十个码字

$$(\infty, i, 5+i, 10+i) \quad (10+i, 5+i, i, \infty)$$

这里 $0 \le i < 5$，以及额外的一个码字 $(\infty,\infty,\infty,\infty)$，这样就得到了所要的大小为 47 的 $(4,2)_{16}$-DCC。 □

引理 5.15: $[48,56] \subseteq \mathrm{Spec}(16,4,2)$。

证明. 由定理 5.4 存在型为 4^4 的有向 4-GDD。应用命题 5.4 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(16,4,2) &\supseteq \{32\} + \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Spec}(4,4,2) \\ &= [48,56]\,. \end{aligned}$$

□

综合上述引理，我们有下面的结论。

定理 5.7: $\mathrm{Spec}(16,4,2) = I(16,4)$。

引理 5.16：$DL(18,4)=54\in \mathrm{Spec}(18,4,2)$.

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_{18}$。将下述码字在群 $\mathbb{Z}_{18}$ 作用下展开即可得到所要的完备码。

$$(1,7,5,6)\quad (3,0,11,3)\quad (0,2,14,9)$$

□

引理 5.17：$[55,56]\subseteq \mathrm{Spec}(18,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2\}$。将下述码字的第一个坐标 $+1 \pmod 6$ 展开。

$$\begin{array}{lll}
((5,2),(3,0),(0,1),(5,2)) & ((3,0),(2,0),(2,1),(0,2)) & ((4,2),(3,1),(2,1),(3,2))\\
((1,1),(5,0),(4,2),(1,1)) & ((0,2),(1,0),(2,2),(2,1)) & ((3,2),(1,2),(4,2),(3,0))\\
((4,1),(0,1),(0,0),(1,0)) & ((0,0),(4,1),(0,2),(3,0)) &
\end{array}$$

再添加下面的七个码字就可以得到一个大小为 55 的完备的 $(4,2)_{18}$-DCC。

$$\begin{array}{lll}
((0,0),(2,0),(4,0),(0,0)) & ((4,0),(4,0),(2,0),(2,0)) & ((1,0),(3,0),(5,0),(1,0))\\
((5,0),(5,0),(3,0),(3,0)) & ((0,1),(3,1),(1,1),(4,1)) & ((2,1),(5,1),(3,1),(0,1))\\
((4,1),(1,1),(5,1),(2,1)) & &
\end{array}$$

将上面构造的完备码中的码字 $((5,0),(5,0),(3,0),(3,0))$ 替换为 $((5,0),(5,0),(5,0),(3,0))$ 和 $((3,0),(3,0),(3,0),(3,0))$，我们就可以得到一个大小为 56 的完备的 $(4,2)_{18}$-DCC。 □

引理 5.18：$[57,63]\subseteq \mathrm{Spec}(18,4,2)$。

证明. 由定理 5.4 存在型为 3^6 的有向 4-GDD。应用命题 5.4 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(18,4,2) &\supseteq \{45\}+\sum_{i=1}^{6}\mathrm{Spec}(3,4,2)\\
&=[57,63]\,.
\end{aligned}$$

□

应用命题 5.7 我们得到 $[61,67]\subseteq \mathrm{Spec}(18,4,2)$。综合上述引理我们有下面的结论。

定理 5.8：$\mathrm{Spec}(18,4,2)=I(18,4)$。

引理 5.19：$63 \in \mathrm{Spec}(19, 4, 2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_{18} \cup \{\infty\}$。定义

$$\alpha = (0\ 1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11)(12\ 13\ 14)(15\ 16\ 17)(\infty).$$

将下述码字在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

$$\begin{array}{cccc}
(\infty,3,9,3) & (\infty,16,13,7) & (12,8,12,\infty) & (10,17,5,\infty) \\
(1,8,3,1) & (7,11,7,9) & (11,12,16,11) & (16,17,16,2) \\
(4,1,14,16) & (10,9,12,2) & (16,0,10,8) & (6,7,16,3) \\
(1,17,7,10) & (5,1,9,15) & (16,12,5,14) & (4,12,7,15) \\
(3,11,4,8) & (2,14,3,5) & (12,13,10,1) & (6,8,0,14)
\end{array}$$

再添加三个码字 $(\infty,0,1,2)$，$(2,1,0,\infty)$ 和 $(\infty,\infty,\infty,\infty)$。这样就得到了所要的完备的 $(4,2)_{19}$-DCC。 □

引理 5.20：$64 \in \mathrm{Spec}(19, 4, 2)$。

证明. 我们首先在集合 $(\mathbb{Z}_4 \times \{0,1,2,3\}) \cup \{\infty_0, \infty_1, a\}$ 上构造一个大小为 62 的 IDP$(19:3,4)$。定义

$$\alpha(x) = \begin{cases} (y+1, i), & \text{若} x = (y,i) \in \mathbb{Z}_4 \times \{0,1,2,3\}; \\ \infty_{i+1 \pmod 2}, & \text{若} x = \infty_i, i \in \{0,1\}; \\ a, & \text{若} x = a. \end{cases}$$

将下述区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。注意对于任意 $w \in \mathbb{Z}_4 \times \{0,1,2,3\}$，有序点对 (∞_0, w) 恰好被下面的一个区组包含，这样当 α^2 作用上去并且无穷点 ∞_0 保持不变时，我们应当将包含 ∞_0 的区组 (∞_0, x, y, z) 调为 (x, y, z, ∞_0)；当 α^3 作用上去时，我们将区组 (∞_1, x, y, z) 调为 (x, y, z, ∞_1)。对于包含无穷点 a 的区组，当 α 或 α^3 作用上去时也要做相应的调整。

$$\begin{array}{cc}
(\infty_0,(1,2),(3,0),(1,2)) & (a,(2,1),(2,0),(2,1)) \\
(\infty_0,(2,0),(3,3),(2,0)) & (a,(2,2),(2,3),(1,1)) \\
(\infty_0,(0,3),(0,1),(1,0)) & (a,(1,3),(3,0),(3,2)) \\
(\infty_0,(0,2),(0,0),(2,3)) & ((0,3),(1,2),(0,2),(1,1)) \\
(\infty_0,(2,1),(2,2),(3,2)) & ((3,2),(1,1),(0,3),(0,0)) \\
(\infty_0,(1,1),(3,1),(1,3)) & ((0,2),(3,0),(3,3),(2,2)) \\
((3,3),(3,3),(0,3),(2,3)) & ((0,0),(2,1),(3,3),(1,1)) \\
((0,1),(2,0),(1,1),(3,2)) &
\end{array}$$

最后再添加下面的两个区组。

$$((0,0),(1,0),(2,0),(3,0)) \quad ((3,0),(2,0),(1,0),(0,0))$$

现在我们在上述构造的 IDP$(19:3,4)$ 的洞中填入一个大小为 2 的完备的 $(4,2)_3$-DCC 就可以得到所要的完备的 $(4,2)_{19}$-DCC。 □

引理 5.21: $[65,73] \subseteq \mathrm{Spec}(19,4,2)$。

证明. 我们首先在集合 $(\mathbb{Z}_3 \times \{0,1,2,3,4\}) \cup \{\infty_0, \infty_1, \infty_2, a\}$ 上构造大小为 61，64 和 67 的 IDP$(19:4;4)$。定义

$$\alpha(x) = \begin{cases} (y+1,i), & \text{若} x = (y,i) \in \mathbb{Z}_3 \times \{0,1,2,3,4\}; \\ \infty_{i+1 \pmod 3}, & \text{若} x = \infty_i, i \in \{0,1,2\}; \\ a, & \text{若} x = a. \end{cases}$$

将下述区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

61	64	67
$((2,0),(2,2),(2,3),\infty_0)$	$((2,2),(0,3),(1,4),\infty_0)$	$((1,2),(1,3),(1,1),\infty_0)$
$((1,0),(2,4),(0,3),\infty_0)$	$((0,0),(2,1),(0,4),\infty_0)$	$((2,2),(2,4),(0,0),\infty_0)$
$((1,1),(1,4),(0,2),\infty_0)$	$((0,2),(2,3),(1,1),\infty_0)$	$((2,3),(1,4),(1,0),\infty_0)$
$((2,1),(1,3),(0,0),\infty_0)$	$((1,0),(2,4),(1,3),\infty_0)$	$((0,1),(2,0),(0,3),\infty_0)$
$((1,2),(0,4),(0,1),\infty_0)$	$((0,1),(1,2),(2,0),\infty_0)$	$((0,4),(2,1),(0,2),\infty_0)$
$(\infty_0,(1,2),(2,4),(2,3))$	$(\infty_0,(2,1),(2,0),(1,4))$	$(\infty_0,(2,1),(2,4),(0,3))$
$(\infty_0,(2,1),(0,3),(0,4))$	$(\infty_0,(0,1),(1,3),(0,4))$	$(\infty_0,(1,0),(1,1),(0,2))$
$(\infty_0,(0,1),(0,2),(2,0))$	$(\infty_0,(2,2),(2,4),(1,0))$	$(\infty_0,(0,0),(1,2),(2,3))$
$(\infty_0,(0,0),(1,1),(1,3))$	$(\infty_0,(2,3),(0,0),(1,2))$	$(\infty_0,(1,3),(1,4),(2,2))$
$(\infty_0,(1,0),(1,4),(2,2))$	$(\infty_0,(1,1),(0,3),(0,2))$	$(\infty_0,(0,4),(2,0),(0,1))$
$((1,4),(1,4),(0,0),(2,1))$	$((2,1),(2,1),(0,0),(2,3))$	$((0,4),(0,4),(0,4),(2,3))$
$((0,0),(2,2),(0,0),(2,4))$	$((1,0),(1,0),(1,0),(2,3))$	$((2,4),(2,3),(1,2),(0,1))$
$((2,3),(0,4),(2,3),(0,0))$	$((0,4),(1,2),(1,3),(1,0))$	$((2,2),(0,1),(1,0),(1,4))$
$((1,2),(0,3),(1,2),(2,1))$	$((1,3),(1,4),(1,3),(2,1))$	$((0,3),(0,3),(0,0),(0,2))$
$((0,1),(0,1),(2,4),(0,0))$	$((1,4),(1,0),(1,2),(1,1))$	$((2,1),(2,2),(1,3),(2,0))$
$((0,3),(0,2),(0,0),(0,1))$	$((0,4),(0,4),(2,1),(2,2))$	$((0,0),(0,0),(0,0),(2,4))$
$((0,3),(2,4),(1,1),(2,2))$	$((0,2),(0,2),(0,2),(1,4))$	$((0,1),(0,1),(0,1),(0,1))$
	$((0,3),(2,0),(1,2),(0,1))$	$((1,2),(1,2),(1,2),(2,4))$
		$((0,0),(0,3),(2,1),(1,4))$

再添加下面的十个区组。

$$(a,(0,i),(1,i),(2,i)) \quad ((2,i),(1,i),(0,i),a)$$

这里 $0 \le i < 5$。这样就得到了以 $\{\infty_0,\infty_1,\infty_2,a\}$ 为洞的 IDP$(19:4,4)$。注意到 $\mathrm{Spec}(4,4,2)=[4,6]$，填充洞就可得到结论。 □

引理 5.22：$[74,76]\subseteq \mathrm{Spec}(19,4,2)$。

证明. 由定理 1.3 存在型为 1^{16} 和 $1^{15}7^1$ 的 4-GDD，利用命题 5.6 得到型为 $1^{15}4^1$ 的

有向 4-GDD。再应用命题 5.4 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(19,4,2) &\supseteq \{55\} + 15 \times \{1\} + \mathrm{Spec}(4,4,2) \\
&= [74,76]\,.
\end{aligned}
$$

□

综合上述引理，我们有下面的结论。

定理 5.9：$I(19,4)\backslash DL(19,4) \subseteq \mathrm{Spec}(19,4,2) \subseteq I(19,4)$。

引理 5.23：$[74,75] \subseteq \mathrm{Spec}(21,4,2)$。

证明. 我们首先在集合 $\mathbb{Z}_9 \times \{0,1\} \cup \{\infty_0, \infty_1, \infty_2\}$ 上构造一个大小为 72 的 IDP$(21:3,4)$。定义

$$
\alpha(x) = \begin{cases} (y+1, i), & \text{若} x = (y,i) \in \mathbb{Z}_9 \times \{0,1\}; \\ \infty_{i+1 \pmod 3}, & \text{若} x = \infty_i,\, i \in \{0,1,2\}, \end{cases}
$$

将下述区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

$$
\begin{array}{cc}
(\infty_0,(1,1),(6,0),(5,1)) & ((2,0),(3,0),(5,1),\infty_0) \\
(\infty_0,(0,1),(2,0),(4,0)) & ((0,1),(1,0),(1,1),\infty_0) \\
((0,1),(2,1),(8,0),(0,1)) & ((1,0),(5,0),(4,0),(1,0)) \\
((0,1),(5,1),(3,0),(8,1)) & ((0,0),(7,1),(7,0),(4,1))
\end{array}
$$

这样就得到了一个以 $\{\infty_0, \infty_1, \infty_2\}$ 为洞的 IDP$(21:3,4)$。注意到 $\mathrm{Spec}(3,4,2) = [2,3]$，填充洞就可得到结论。 □

引理 5.24：$[76,85] \subseteq \mathrm{Spec}(21,4,2)$。

证明. 由定理 1.3 存在型为 $3^5 6^1$ 的 4-GDD，利用命题 5.2 得到相同组型的有向 4-GDD。再应用命题 5.4 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(21,4,2) &\supseteq \{60\} + \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Spec}(3,4,2) + \mathrm{Spec}(6,4,2) \\
&= [76,85]\,.
\end{aligned}
$$

□

由命题 5.7 我们有 $[81,89]\subseteq \mathrm{Spec}(21,4,2)$。这样我们就得到了下面的结论。

定理 5.10: $\mathrm{Spec}(21,4,2)=I(21,4)$。

引理 5.25: $[83,84]\subseteq \mathrm{Spec}(22,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_4\times\{0,1,2,3,4\}\cup\{\infty_0,\infty_1\}$。定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & \text{若} x=(y,i)\in\mathbb{Z}_4\times\{0,1,2,3,4\};\\ \infty_{i+1 \pmod 2}, & \text{若} x=\infty_i,\ i\in\{0,1\}.\end{cases}$$

将下述码字在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。注意，将 α^2 或 α^3 作用在包含无穷点的码字时，我们应对码字作类似于引理 5.20 中的调整。

$$\begin{array}{ccc}
(\infty_0,(0,1),(0,2),(0,1)) & (\infty_0,(1,1),(3,4),(2,4)) & (\infty_0,(0,4),(1,2),(2,3))\\
(\infty_0,(3,0),(1,3),(3,3)) & (\infty_0,(0,3),(2,2),(0,0)) & (\infty_0,(1,0),(1,4),(3,2))\\
(\infty_0,(2,1),(2,0),(3,1)) & ((3,3),(2,3),(3,3),(2,2)) & ((3,4),(0,3),(3,4),(1,0))\\
((3,1),(0,2),(0,3),(1,1)) & ((1,0),(0,3),(2,4),(0,4)) & ((1,4),(1,3),(0,1),(3,1))\\
((0,2),(1,2),(3,2),(3,4)) & ((2,2),(3,4),(2,0),(2,2)) & ((1,0),(0,1),(2,2),(1,0))\\
((1,3),(3,0),(2,2),(1,1)) & ((0,4),(1,4),(1,0),(1,1)) & ((0,1),(2,0),(3,3),(0,4))\\
((1,2),(3,1),(3,3),(2,0)) & ((0,1),(3,4),(3,2),(2,3)) &
\end{array}$$

再添加下面两个码字。

$$((0,0),(1,0),(2,0),(3,0))\quad ((3,0),(2,0),(1,0),(0,0))$$

这样我们就得到了一个大小为 82 的完备的 $\mathrm{IDP}(22:2,4)$。由于 $\mathrm{Spec}(2,4,2)=[1,2]$，填充洞我们就得到了结论。 $\square$

引理 5.26: $[85,87]\cup[91,93]\subseteq \mathrm{Spec}(22,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $(\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2\})\cup\{\infty_0,\infty_1,\infty_2,a\}$ 上构造大小为 81 和 87 的完备的 $\mathrm{IDP}(22:4;4)$。定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & \text{若} x=(y,i)\in\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2\};\\ \infty_{i+1 \pmod 3}, & \text{若} x=\infty_i,\ i\in\{0,1,2\};\\ a, & \text{若} x=a.\end{cases}$$

将下面的区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

81	87
$((2,2),(1,1),(4,0),\infty_0)$	$((1,0),(1,2),(5,1),\infty_0)$
$((0,0),(5,0),(1,2),\infty_0)$	$((0,2),(3,1),(2,0),\infty_0)$
$((2,1),(3,2),(3,1),\infty_0)$	$((1,1),(3,0),(2,2),\infty_0)$
$(\infty_0,(2,2),(5,0),(4,1))$	$(\infty_0,(5,2),(1,1),(2,0))$
$(\infty_0,(0,0),(4,2),(3,2))$	$(\infty_0,(0,0),(1,0),(3,2))$
$(\infty_0,(0,1),(1,0),(5,1))$	$(\infty_0,(2,1),(4,2),(3,1))$
$((0,1),(2,2),(0,1),(2,0))$	$((2,0),(2,0),(2,0),(3,2))$
$((0,0),(1,1),(0,0),(1,0))$	$((2,2),(2,2),(2,2),(1,2))$
$((0,2),(1,1),(0,2),(5,0))$	$((3,1),(1,0),(3,1),(0,0))$
$((0,0),(5,2),(2,1),(0,2))$	$((0,2),(1,2),(0,0),(1,1))$
	$((0,1),(0,0),(5,1),(4,2))$

再添加 21 个区组。

$$
\begin{array}{ccc}
(a,(0,i),(2,i),(4,i)) & (a,(1,i),(3,i),(5,i)) & ((4,i),(2,i),(0,i),a) \\
((5,i),(3,i),(1,i),a) & ((0,0),(3,0),(0,1),(3,1)) & ((0,2),(3,2),(1,0),(4,0)) \\
((1,1),(4,1),(1,2),(4,2)) & ((2,0),(5,0),(2,1),(5,1)) & ((2,2),(5,2),(3,0),(0,0)) \\
((3,1),(0,1),(3,2),(0,2)) & ((4,0),(1,0),(4,1),(1,1)) & ((4,2),(1,2),(5,0),(2,0)) \\
((5,1),(2,1),(5,2),(2,2)) & &
\end{array}
$$

这里 $i=0,1,2$。这样我们就得到了完备的 IDP$(22:4,4)$。由于 Spec$(4,4,2)=[4,6]$，填充洞我们就得到了结论。 □

引理 5.27: $[88,90]\subseteq \mathrm{Spec}(22,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $(\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2\})\cup\{\infty_0,\infty_1,\infty_2,a\}$ 上构造一个大小为 84 的完备的 IDP$(22:4;4)$。定义

$$
\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & \text{若} x=(y,i)\in\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2\};\\ \infty_{i+1 \pmod 3}, & \text{若} x=\infty_i, i\in\{0,1,2\};\\ a, & \text{若} x=a.\end{cases}
$$

将下面的区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

$$\begin{array}{ccc}
((4,0),(4,2),(3,2),\infty_0) & ((0,1),(0,0),(1,1),\infty_0) & ((2,2),(5,0),(2,1),\infty_0) \\
(\infty_0,(2,2),(0,0),(4,1)) & (\infty_0,(1,0),(2,0),(4,2)) & (\infty_0,(0,1),(0,2),(5,1)) \\
((2,2),(2,2),(5,1),(3,2)) & ((4,1),(4,1),(0,0),(3,0)) & ((0,0),(0,0),(0,1),(1,2)) \\
((5,0),(3,2),(1,1),(4,1)) & ((2,1),(1,2),(4,2),(3,0)) & ((0,1),(3,2),(4,0),(3,0))
\end{array}$$

再添加 12 个区组。

$$\begin{array}{cc}
(a,(0,i),(2,i),(4,i)) & (a,(1,i),(3,i),(5,i)) \\
((4,i),(2,i),(0,i),a) & ((5,i),(3,i),(1,i),a)
\end{array}$$

这里 $i=0,1,2$。这样我们就得到了完备的 IDP$(22:4,4)$。由于 Spec$(4,4,2)=[4,6]$，填充洞我们就得到了结论。 □

引理 5.28：$[94,99]\subseteq \mathrm{Spec}(22,4,2)$。

证明. 由定理 1.3 存在型为 $3^5 6^1$ 的 4-GDD，应用引理 5.2 我们得到相同组型的有向 4-GDD。添加一个无穷点，应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(22,4,2) &\supseteq \{60\}+5\times\{5\}+\mathrm{Spec}(7,4,2) \\
&=[94,99]\,.
\end{aligned}$$

□

综合上面的引理我们得到了下面的结论。

定理 5.11：$\mathrm{Spec}(22,4,2)=I(22,4)$。

引理 5.29：$[96,112]\setminus\{97\}\subseteq \mathrm{Spec}(24,4,2)$。

证明. 由定理 5.4 存在型为 6^4 的有向 4-GDD。应用命题 5.5 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(24,4,2) &\supseteq \{72\}+\sum_{i=1}^{4}\mathrm{Spec}(6,4,2) \\
&=[96,112]\setminus\{97\}.
\end{aligned}$$

□

引理 5.30：$97\in \mathrm{Spec}(24,4,2)$。

证明. 设字母表为 $\mathbb{Z}_6 \times \{0,1,2,3\}$。将下面码字中的元素的第一坐标 $+1 \pmod 6$ 展开。

$$
\begin{array}{lll}
((0,1),(2,0),(5,3),(0,1)) & ((2,2),(3,0),(4,3),(2,2)) & ((4,3),(5,3),(4,2),(4,3)) \\
((5,2),(3,1),(3,3),(5,1)) & ((2,3),(4,3),(4,0),(3,0)) & ((4,0),(4,3),(1,0),(1,1)) \\
((4,1),(1,2),(3,1),(1,0)) & ((2,3),(1,1),(0,0),(5,3)) & ((3,2),(4,3),(2,3),(2,1)) \\
((5,0),(1,2),(4,1),(5,2)) & ((1,1),(1,0),(5,2),(2,0)) & ((5,0),(0,1),(1,3),(2,2)) \\
((0,2),(5,2),(2,2),(4,0)) & ((0,1),(3,3),(5,2),(0,2)) & ((0,0),(1,2),(2,1),(4,3))
\end{array}
$$

再添加下面七个码字。

((0,0), (2,0), (4,0), (0,0)) ((4,0), (4,0), (2,0), (2,0)) ((1,0), (3,0), (5,0), (1,0))
((5,0), (5,0), (3,0), (3,0)) ((0,1), (3,1), (1,1), (4,1)) ((2,1), (5,1), (3,1), (0,1))
((4,1), (1,1), (5,1), (2,1))

这样就得到了大小为 97 的完备的 $(4,2)_{24}$-DCC。 □

由命题 5.7 我们有 $[102,114] \subseteq \mathrm{Spec}(24,4,2)$。这样再综合上述引理我们就可得到下面的结论。

定理 5.12: $\mathrm{Spec}(24,4,2) = I(24,4)$。

引理 5.31: $107 \in \mathrm{Spec}(25,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_6 \times \{0,1,2,3\} \cup \{\infty\}$。将下面码字中的元素的第一坐标 $+1 \pmod 6$ 展开。

$$
\begin{array}{lll}
((0,0),(5,1),(0,2),(1,0)) & ((0,3),(2,2),(5,0),(5,1)) & ((0,3),(4,0),(5,2),(5,3)) \\
((0,0),(5,0),(3,3),(3,2)) & ((0,2),(2,3),(4,0),(3,3)) & ((0,1),(4,2),(3,1),(3,0)) \\
((0,0),(3,0),(2,2),(4,1)) & ((0,0),(0,3),(0,0),(3,1)) & ((0,3),(2,1),(1,1),(0,3)) \\
((0,1),(0,2),(1,3),(1,1)) & ((0,2),(1,2),(0,2),(5,3)) & ((0,1),(2,2),(4,0),(0,1)) \\
((0,1),(0,3),(1,0),(3,3)) & ((0,1),(2,3),(5,2),(5,0)) & ((0,3),(4,2),(4,1),(1,2))
\end{array}
$$

再添加十六个码字

$$
\begin{array}{ll}
(\infty,(0,i),(2,i),(4,i)) & (\infty,(1,i),(3,i),(5,i)) \\
((4,i),(2,i),(0,i),\infty) & ((5,i),(3,i),(1,i),\infty)
\end{array}
$$

这里 $0 \le i < 4$，以及码字 $(\infty,\infty,\infty,\infty)$。这样就得到了大小为 107 的完备的 $(4,2)_{25}$-DCC。 □

引理 5.32: $[108,125] \subseteq \mathrm{Spec}(25,4,2)$。

证明. 对任意 $c \in [10,14]$，文献[38]中构造的大小为 c 的完备的 $(4,2)_7$-DCC 中均至少有一个形如 (x,x,x,x) 的码字。删去这个码字我们可以得到阶为 7 带一个大小为 1 的洞的不完全有向填充。将命题 5.5 应用于型为 6^4 的有向 4-GDD，我们就有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(25,4,2) &\supseteq \{72\} + 3\times[9,13] + \mathrm{Spec}(7,4,2)\\ &= [108,125]\,.\end{aligned}$$

□

定理 5.13: $\mathrm{Spec}(25,4,2) = I(25,4)$。

引理 5.33: $[163,164] \subseteq \mathrm{Spec}(31,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $(\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2,3\})\cup\{a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c\}$ 上构造一个大小为 154 的完备的 IDP(31 : 7; 4)。定义

$$\alpha(x) = \begin{cases} (y+1,i), & \text{若}x=(y,i)\in\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2,3\};\\ a_{i+1 \pmod 3}, & \text{若}x=a_i,\, i\in\{0,1,2\};\\ b_{i+1 \pmod 3}, & \text{若}x=b_i,\, i\in\{0,1,2\};\\ c, & \text{若}x=c.\end{cases}$$

将下面的区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

$$\begin{array}{lll}
(a_0,(1,2),(4,3),(3,3)) & ((3,2),(1,3),(0,0),a_0) & ((0,3),(2,1),(0,3),(2,0))\\
(a_0,(0,0),(2,1),(1,0)) & ((2,0),(1,0),(2,1),a_0) & ((0,1),(1,0),(0,1),(3,2))\\
(a_0,(2,0),(0,1),(2,2)) & ((2,3),(1,2),(2,2),a_0) & ((0,2),(2,1),(5,1),(0,2))\\
(a_0,(4,1),(5,3),(3,2)) & ((3,1),(3,3),(4,1),a_0) & ((1,2),(4,2),(2,0),(5,1))\\
(b_0,(4,2),(5,3),(3,0)) & ((5,3),(3,1),(2,1),b_0) & ((3,0),(3,3),(0,3),(3,0))\\
(b_0,(4,1),(0,3),(1,0)) & ((3,2),(3,0),(2,2),b_0) & ((1,3),(2,3),(4,2),(1,1))\\
(b_0,(5,1),(5,2),(4,3)) & ((1,0),(3,3),(4,2),b_0) & ((0,0),(3,0),(1,2),(1,3))\\
(b_0,(0,2),(0,1),(2,0)) & ((1,1),(5,0),(4,3),b_0) &
\end{array}$$

再添加十六个码字

$$\begin{array}{ll}
(c,(0,i),(2,i),(4,i)) & (c,(1,i),(3,i),(5,i))\\
((4,i),(2,i),(0,i),c) & ((5,i),(3,i),(1,i),c)
\end{array}$$

这里 $0 \le i < 4$。这样我们得到了一个完备的 IDP$(31:7,4)$。由于 $[9,10] \subseteq \mathrm{Spec}(7,4,2)$，填充洞我们就得到了结论。 □

引理 5.34：$[165,186]\subseteq \mathrm{Spec}(31,4,2)$。

证明. 由命题 5.4 存在型为 6^5 的有向 4-GDD。添加一个点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(31,4,2) &\supseteq \{120\}+4\times[9,13]+\mathrm{Spec}(7,4,2)\\ &=[165,186]\,.\end{aligned}$$

□

定理 5.14：$\mathrm{Spec}(31,4,2)=I(31,4)$。

引理 5.35：$197\in \mathrm{Spec}(34,4,2)$。

证明. 设 $X=\mathbb{Z}_8\times\{0,1,2,3\}\cup\{\infty_0,\infty_1\}$。定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & 若 x=(y,i)\in\mathbb{Z}_8\times\{0,1,2,3\};\\ a_{i+1 \pmod 2}, & 若 x=\infty_i,\, i\in\{0,1\}.\end{cases}$$

将下述码字在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。注意，将 α^2 或 α^3 作用在包含无穷点的码字时，我们应对码字作类似于引理 5.20 中的调整。

$$\begin{array}{ccc}
(\infty_0,(3,1),(7,2),(3,1)) & (\infty_0,(0,2),(3,0),(0,2)) & (\infty_0,(2,0),(1,1),(6,2))\\
(\infty_0,(1,2),(0,0),(6,1)) & (\infty_0,(7,3),(1,3),(0,3)) & (\infty_0,(5,0),(0,1),(6,3))\\
((2,0),(6,1),(1,0),(2,0)) & ((1,3),(2,2),(1,3),(7,0)) & ((4,2),(7,1),(4,0),(2,2))\\
((4,3),(6,0),(1,3),(1,0)) & ((5,1),(3,0),(4,1),(7,3)) & ((2,3),(7,2),(5,1),(7,1))\\
((4,1),(3,0),(3,2),(1,3)) & ((7,1),(0,1),(1,0),(3,1)) & ((0,3),(4,3),(6,1),(4,1))\\
((0,2),(4,2),(5,2),(1,3)) & ((7,3),(2,0),(3,2),(5,2)) & ((1,3),(4,2),(5,0),(2,0))\\
((4,2),(0,0),(5,1),(7,2)) & ((7,2),(1,1),(1,0),(1,3)) & ((4,1),(0,3),(1,1),(2,2))\\
((5,3),(4,0),(4,1),(3,3)) & ((3,0),(5,3),(5,2),(0,3)) & ((0,2),(7,1),(0,3),(7,2))
\end{array}$$

再添加下面四个区组。

((0,0), (2,0), (4,0), (6,0))　((6,0), (4,0), (2,0), (0,0))
((1,0), (3,0), (5,0), (7,0))　((7,0), (5,0), (3,0), (1,0))

这样我们就得到了一个大小为 196 的完备的 IDP$(34:2,4)$。填充洞我们就得到了结论。 □

引理 5.36：$[198,221]\subseteq \mathrm{Spec}(34,4,2)$。

证明. 由定理 1.3 存在型为 $6^4 9^1$ 的 4-GDD，应用引理 5.2 可以得到一个相同组型的有向 4-GDD。添加一个无穷点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(34,4,2) &\supseteq \{144\} + 4 \times [9,13] + \mathrm{Spec}(10,4,2) \\ &= [198,221]\,.\end{aligned}$$

□

定理 5.15: $I(34,4)\backslash DL(34,4) \subseteq \mathrm{Spec}(34,4,2) \subseteq I(34,4)$。

引理 5.37: $232 \in \mathrm{Spec}(37,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_9 \times \{0,1,2,3\} \cup \{\infty\}$。将下面码字中的元素的第一坐标 $+1 \pmod 9$ 展开。

$$\begin{array}{lll}
((1,3),(5,2),(3,1),(3,3)) & ((1,0),(7,3),(2,3),(5,1)) & ((5,3),(2,1),(1,0),(1,2)) \\
((2,2),(0,0),(8,1),(3,2)) & ((1,0),(4,1),(6,0),(5,2)) & ((6,2),(5,1),(6,3),(5,1)) \\
((7,2),(7,1),(0,2),(3,1)) & ((0,2),(6,0),(4,0),(4,3)) & ((6,3),(6,2),(5,3),(5,0)) \\
((5,1),(1,2),(3,0),(8,2)) & ((7,0),(5,2),(1,3),(6,3)) & ((1,1),(1,0),(5,0),(2,1)) \\
((2,2),(5,0),(7,2),(2,2)) & ((2,1),(1,3),(1,1),(7,0)) & ((8,0),(0,0),(4,3),(8,0)) \\
((8,0),(0,2),(1,0),(1,1)) & ((7,3),(8,2),(5,3),(8,0)) & ((5,3),(4,2),(6,1),(3,2)) \\
((0,0),(5,1),(2,3),(7,1)) & ((1,1),(1,2),(5,1),(3,3)) & ((8,1),(2,3),(6,1),(0,0)) \\
((0,3),(6,2),(0,3),(2,0)) & ((0,1),(4,3),(5,3),(7,2)) &
\end{array}$$

再添加 24 个码字

$$\begin{array}{lll}
(\infty,(0,i),(3,i),(6,i)) & (\infty,(1,i),(4,i),(7,i)) & (\infty,(2,i),(5,i),(8,i)) \\
((6,i),(3,i),(0,i),\infty) & ((7,i),(4,i),(1,i),\infty) & ((8,i),(5,i),(2,i),\infty)
\end{array}$$

这里 $0 \le i < 4$，以及码字 $(\infty,\infty,\infty,\infty)$。这样我们就得到了所要的大小为 232 的完备码。 □

引理 5.38: $233 \in \mathrm{Spec}(37,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_{12} \times \{0,1,2\} \cup \{\infty\}$。首先在 X 上构造下面 16 个码字：

$$\begin{array}{ll}
(\infty,(i,0),(4+i,0),(8+i,0)) & (\infty,(i,1),(4+i,1),(8+i,1)) \\
(\infty,(i,2),(4+i,2),(8+i,2)) & ((8+i,1),(4+i,1),(i,1),\infty)
\end{array}$$

这里 $0 \le i < 4$。将下面码字中的元素的第一坐标 $+1 \pmod 9$ 展开。注意有序点对 $((i,0),(8+i,0))$ 和 $((i,2),(8+i,2))$，$0 \le i < 4$，已经在上面 16 个码字中出现过，

所以标有∗的点对的第一坐标加 8，9，10 或 11 时我们要交换两个点的位置。

$$\begin{array}{cc}
((8,2),(6,0),(8,2),\infty) & ((4,0)^*,(0,0)^*,(7,1),(3,0)) \\
((4,2)^*,(0,2)^*,(3,2),(7,0)) & ((10,0),(3,0),(10,0),(3,1)) \\
((0,1),(1,2),(2,0),(0,1)) & ((10,1),(5,2),(10,2),(1,1)) \\
((5,1),(5,0),(7,1),(6,0)) & ((9,0),(10,2),(3,1),(6,0)) \\
((11,1),(1,2),(10,1),(8,1)) & ((10,0),(9,2),(3,2),(8,0)) \\
((2,1),(9,1),(5,2),(6,2)) & ((9,1),(4,0),(6,0),(3,1)) \\
((2,0),(8,0),(11,2),(6,2)) & ((8,2),(0,1),(10,0),(10,2)) \\
((8,2),(5,2),(2,0),(6,1)) & ((10,1),(11,1),(4,2),(4,0)) \\
((0,1),(4,0),(11,2),(5,1)) & ((3,0),(11,2),(9,2),(11,1))
\end{array}$$

最后再添加码字 $(\infty,\infty,\infty,\infty)$ 我们就得到了大小为 233 的完备码。 □

引理 5.39: $[234,259]\subseteq \mathrm{Spec}(37,4,2)$。

证明. 由定理 5.4 存在型为 6^6 的有向 4-GDD。添加一个无穷点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(37,4,2) &\supseteq \{180\}+5\times[9,13]+\mathrm{Spec}(7,4,2) \\
&=[234,259]\,.
\end{aligned}$$

□

定理 5.16: $\mathrm{Spec}(37,4,2)=I(37,4)$。

引理 5.40: $[270,271]\subseteq \mathrm{Spec}(40,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_{20}\times\{0,1\}$。将下面码字中的元素的第一坐标 $+1 \pmod{20}$ 展开。

$$\begin{array}{cc}
((6,0),(9,0),(6,0),(11,1)) & ((14,0),(11,1),(8,0),(18,1)) \\
((0,1),(1,1),(6,0),(12,0)) & ((11,0),(3,1),(9,1),(5,1)) \\
((15,0),(4,1),(16,1),(14,0)) & ((10,1),(9,1),(19,1),(7,1)) \\
((6,1),(1,1),(15,0),(6,1)) & ((4,0),(11,1),(11,0),(12,0)) \\
((12,0),(5,0),(3,0),(18,1)) & ((7,1),(1,1),(14,0),(9,0)) \\
((17,1),(10,1),(13,0),(1,1)) & ((4,1),(3,0),(19,0),(8,0)) \\
((14,0),(18,0),(14,1),(17,1)) &
\end{array}$$

再添加下面十个码字就得到了大小为 270 的完备的 $(4,2)_{40}$-DCC。

$$\begin{array}{cc}
((0,0),(10,0),(2,0),(12,0)) & ((1,0),(11,0),(3,0),(13,0)) \\
((4,0),(14,0),(6,0),(16,0)) & ((5,0),(15,0),(7,0),(17,0)) \\
((8,0),(18,0),(10,0),(0,0)) & ((9,0),(19,0),(11,0),(1,0)) \\
((12,0),(2,0),(14,0),(4,0)) & ((13,0),(3,0),(15,0),(5,0)) \\
((16,0),(6,0),(18,0),(8,0)) & ((17,0),(7,0),(19,0),(9,0))
\end{array}$$

对于大小为 271 的，由文献[38] 存在大小为 267 的完备的 IDP$(40:4,4)$，填充洞即可。 □

引理 5.41：$[272,300]\subseteq \mathrm{Spec}(40,4,2)$。

证明. 由定理 5.4 存在型为 10^4 的有向 4-GDD。应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(40,4,2) &\supseteq \{200\}+\sum_{i=1}^{4}\mathrm{Spec}(10,4,2)\\ &=[272,300]\,.\end{aligned}$$

□

定理 5.17：$\mathrm{Spec}(40,4,2)=I(40,4)$。

引理 5.42：$[312,313]\subseteq \mathrm{Spec}(43,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $(\mathbb{Z}_9\times\{0,1,2,3\})\cup\{a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c\}$ 上构造一个大小为 303 的完备的 IDP$(43:7;4)$。定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & 若x=(y,i)\in\mathbb{Z}_9\times\{0,1,2,3\};\\ a_{i+1 \pmod 3}, & 若x=a_i,\, i\in\{0,1,2\};\\ b_{i+1 \pmod 3}, & 若x=b_i,\, i\in\{0,1,2\};\\ c, & 若x=c.\end{cases}$$

将下面的区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

$$\begin{array}{ll}
(a_0,(0,0),(6,3),(4,1)) & ((1,2),(5,0),(1,3),a_0) \\
(a_0,(7,3),(0,2),(5,3)) & ((7,0),(0,2),(2,3),a_0) \\
(a_0,(1,0),(7,2),(2,2)) & ((5,2),(4,1),(6,1),a_0) \\
(a_0,(5,1),(0,1),(8,0)) & ((8,1),(6,3),(3,0),a_0) \\
(b_0,(8,2),(7,0),(7,2)) & ((0,1),(8,2),(6,3),b_0) \\
(b_0,(2,1),(6,2),(3,3)) & ((7,2),(4,0),(0,2),b_0) \\
(b_0,(7,3),(0,0),(2,3)) & ((8,0),(0,0),(2,1),b_0) \\
(b_0,(1,1),(6,1),(8,0)) & ((1,1),(5,3),(4,3),b_0) \\
((7,3),(2,0),(1,1),(0,3)) & ((2,1),(0,2),(2,1),(7,2)) \\
((2,0),(6,2),(0,0),(2,0)) & ((2,3),(3,3),(4,1),(2,1)) \\
((3,0),(1,1),(2,0),(3,3)) & ((0,3),(6,1),(7,2),(3,2)) \\
((5,0),(8,2),(6,1),(5,1)) & ((0,0),(3,3),(7,2),(8,3)) \\
((6,3),(3,2),(6,3),(4,0)) & ((1,3),(0,2),(1,2),(5,1)) \\
((5,2),(0,3),(5,1),(5,2)) & ((5,3),(6,2),(4,0),(8,0)) \\
((5,0),(1,1),(2,1),(4,2)) & ((0,1),(0,3),(0,0),(5,0)) \\
((3,2),(6,1),(2,3),(3,0)) &
\end{array}$$

再添加 24 个区组

$$\begin{array}{lll}
(c,(0,i),(3,i),(6,i)) & (c,(1,i),(4,i),(7,i)) & (c,(2,i),(5,i),(8,i)) \\
((6,i),(3,i),(0,i),c) & ((7,i),(4,i),(1,i),c) & ((8,i),(5,i),(2,i),c)
\end{array}$$

这里 $0 \leq i < 4$。这样就得到了一个完备的 IDP$(43:7,4)$。由于 $[9,10] \subseteq$ Spec$(7,4,2)$，填充洞就可得到结论。 □

引理 5.43：$[314,344] \subseteq \text{Spec}(43,4,2)$。

证明. 由定理 1.3 存在型为 $6^5 12^1$ 的 4-GDD，应用引理 5.2 可以得到一个相同组型的有向 4-GDD。添加一个无穷点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}
\text{Spec}(43,4,2) &\supseteq \{240\} + 4\times[9,13] + [29,38] + \text{Spec}(7,4,2) \\
&= [314,344].
\end{aligned}$$

□

定理 5.18：$\text{Spec}(43,4,2) = I(43,4)$。

引理 5.44：$[357,358] \subseteq \text{Spec}(46,4,2)$。

证明. 我们先在集合 $(\mathbb{Z}_9\times\{0,1,2,3\})\cup(\{a,b,c\}\times\mathbb{Z}_3)\cup\{d\}$ 上构造一个大小为 339 的完备的 IDP(46 : 10; 4)。定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}(y+1,i), & 若 x=(y,i)\in\mathbb{Z}_9\times\{0,1,2,3\};\\ a_{i+1} \pmod 3, & 若 x=a_i,\ i\in\{0,1,2\};\\ b_{i+1} \pmod 3, & 若 x=b_i,\ i\in\{0,1,2\};\\ c_{i+1} \pmod 3, & 若 x=c_i,\ i\in\{0,1,2\};\\ d, & 若 x=d.\end{cases}$$

将下面的区组在群 $\langle\alpha\rangle$ 的作用下展开。

$$\begin{array}{ccc}
(a_0,(8,2),(6,1),(4,2)) & (b_0,(3,2),(7,0),(5,1)) & (c_0,(5,2),(7,2),(6,1))\\
(a_0,(5,3),(6,3),(7,0)) & (b_0,(3,0),(3,1),(4,1)) & (c_0,(4,1),(4,3),(8,1))\\
(a_0,(4,3),(8,0),(4,1)) & (b_0,(8,0),(7,3),(4,2)) & (c_0,(4,0),(6,0),(2,0))\\
(a_0,(8,1),(3,2),(0,0)) & (b_0,(3,3),(8,2),(2,3)) & (c_0,(0,3),(3,2),(5,3))\\
((2,0),(4,1),(3,0),a_0) & ((1,0),(4,3),(0,0),b_0) & ((6,0),(4,3),(3,1),c_0)\\
((7,3),(0,1),(7,0),a_0) & ((1,2),(1,1),(5,3),b_0) & ((7,2),(7,0),(3,3),c_0)\\
((8,3),(0,2),(6,3),a_0) & ((8,0),(8,2),(3,2),b_0) & ((5,3),(5,2),(3,2),c_0)\\
((2,2),(5,1),(1,2),a_0) & ((3,1),(6,3),(2,1),b_0) & ((2,1),(7,1),(2,0),c_0)\\
((8,1),(4,0),(1,2),(4,0)) & ((0,2),(1,2),(5,1),(2,0)) & ((4,3),(7,1),(5,1),(4,3))\\
((3,3),(0,1),(5,3),(2,0)) & ((5,2),(3,0),(5,2),(3,3)) & ((0,1),(3,0),(2,1),(1,2))\\
((0,1),(3,2),(2,3),(0,1)) & ((5,0),(8,1),(8,2),(0,3)) & ((4,0),(8,1),(6,3),(5,2))\\
((4,3),(8,2),(7,0),(8,3)) & ((0,0),(6,3),(8,2),(4,0)) &
\end{array}$$

再添加 24 个区组

$$\begin{array}{ccc}
(d,(0,i),(3,i),(6,i)) & (d,(1,i),(4,i),(7,i)) & (d,(2,i),(5,i),(8,i))\\
((6,i),(3,i),(0,i),d) & ((7,i),(4,i),(1,i),d) & ((8,i),(5,i),(2,i),d)
\end{array}$$

这里 $0\le i<4$。这样我们得到了一个完备的 IDP(46 : 10, 4)。由于 $[18,19]\subseteq \mathrm{Spec}(10,4,2)$，填充洞我们就得到了结论。 □

引理 5.45: $[359,391]\subseteq\mathrm{Spec}(46,4,2)$。

证明. 由文献[157]存在型为 $6^4 9^1 12^1$ 的 4-GDD，应用引理 5.2 可以得到一个相同组型的有向 4-GDD。添加一个无穷点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(46,4,2) &\supseteq \{276\}+4\times[9,13]+[29,38]+\mathrm{Spec}(10,4,2)\\ &=[359,391]\,.\end{aligned}$$

□

定理 5.19：$\mathrm{Spec}(46,4,2) = I(46,4)$。

引理 5.46：$455 \in \mathrm{Spec}(52,4,2)$。

证明. 设字母表 X 为 $\mathbb{Z}_{26} \times \{0,1\}$。将下面码字中的元素的第一坐标 $+1 \pmod{26}$ 展开。

((6,0), (17,0), (4,0), (17,1))	((23,1), (22,0), (0,0), (23,1))
((22,1), (4,0), (3,1), (21,1))	((16,0), (10,0), (14,1), (9,0))
((0,1), (24,0), (4,1), (16,1))	((15,0), (1,0), (11,1), (11,0))
((0,0), (15,1), (6,0), (20,1))	((22,0), (25,1), (5,0), (13,0))
((5,0), (10,0), (0,1), (12,0))	((11,1), (15,0), (22,1), (7,0))
((13,1), (18,0), (4,1), (6,0))	((12,0), (13,0), (2,0), (21,1))
((24,1), (22,1), (18,1), (5,0))	((10,1), (18,1), (20,1), (13,1))
((24,1), (21,1), (18,0), (13,0))	((18,1), (24,1), (7,1), (8,0))
((5,0), (2,0), (5,0), (7,1))	

再添加 13 个码字 $((2i,1),(13+2i,1),(1+2i,1),(14+2i,1))$，$0 \le i < 13$，我们就得到了大小为 455 的完备的 $(4,2)_{52}$-DCC。 □

引理 5.47：$[456,494] \subseteq \mathrm{Spec}(52,4,2)$。

证明. 由定理 1.3 存在型为 $12^4 3^1$ 的 4-GDD，应用引理 5.2 可以得到一个相同组型的有向 4-GDD。添加一个无穷点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(52,4,2) &\supseteq \{336\} + 4 \times \{29\} + \mathrm{Spec}(4,4,2)\\ &= [456,458]\,.\end{aligned}$$

由定理 1.3 存在型为 $6^7 9^1$ 的 4-GDD，应用引理 5.2 可以得到一个相同组型的有向 4-GDD。添加一个无穷点并应用命题 5.5，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(52,4,2) &\supseteq \{378\} + 7 \times [9,13] + \mathrm{Spec}(10,4,2)\\ &= [459,494]\,.\end{aligned}$$

□

定理 5.20：$\mathrm{Spec}(52,4,2)=I(52,4)$。

综合上述定理，以及定理 5.2，我们就得到了下面的结论。

定理 5.21：对任意正整数 q，除了确定的例外值 $q\in\{4,6,9\}$ 以及可能的例外值 $q\in\{19,34\}$，$\mathrm{Spec}(q,4,2)=I(q,4)$。进一步地，我们有：

1. $\mathrm{Spec}(4,4,2)=[4,6]$；
2. $\mathrm{Spec}(6,4,2)=\{6\}\cup[8,10]$；
3. $\mathrm{Spec}(9,4,2)=[15,19]$；
4. $I(19,4)\backslash DL(19,4)\subseteq \mathrm{Spec}(19,4,2)\subseteq I(19,4)$；
5. $I(34,4)\backslash DL(34,4)\subseteq \mathrm{Spec}(34,4,2)\subseteq I(34,4)$。

6 用可分组码构造最优常重复合码

6.1 引言

常重复合码（constant-composition code，CCC）是一类特殊的常重码（constant-weight code，CWC），它在编码理论中发挥重要作用。常重复合码中的置换码在无记忆信道中零误差的判定反馈能力的确定[154]，多重访问通信[64]，球形码调制[65]，DNA 码[41,107,123]，电力线通信[45,52]，跳频[46]，频率排列阵列[103]和有限带宽的信道编码[55] 等方面都有重要应用。

上世纪九十年代末，对常重复合码就有了系统的研究[22,25,151]。现在，人们为了确定常重复合码的最大可能的码字个数引入了各种各样的方法，如计算机搜索方法[24]，填充设计[46,59,60,102,160,165,166,170]，竞赛设计[171]，多项式和非线性函数[46,57,58,61,62]，PBD 闭包方法[37,42]和一些其他的方法[118,119,152,164]等。

Svanström 在文献[153]中对长为 n，极小距离为 d，型为 $\overline{w}$ 的三元常重复合码的码字个数，$A_3(n,d,\overline{w})$，给出了一些上界和下界，同时给出了 $n \le 10$ 时 $A_3(n,d,\overline{w})$ 的具体值。这里我们仅列出 $A_3(n,6,[3,1])$，见表格 6.1。

重量为 3 的常重复合码的码字个数由 Chee，Ge 和 Ling 在文献[37]中完全确定。Gao 和 Ge 在文献[72]中完全确定了重量为 4，距离为 5 的最优三元常重复合码的码字个数。Zhu 和 Ge 在文献[176]中确定了重量为 4，距离为 5 或 6 的最优四元常重复合码的码字个数。重量为 4，距离为 6，型为 $[2,2]$ 的最优三元常重复合码的码字个数除了 $n \equiv 5 \pmod 6$ 外也由 Zhang 基本确定了[172]。此外，文献[36,37] 中还确定了一些特殊参数的最优常重复合码的码字个数。

本章中将确定重量为 4，距离为 6 的最优三元常重复合码的码字个数。我们用到的工具是由 Chee，Ge 和 Ling 提出的可分组码[37]，类似于 GDD，它在递归构造 CCC 和 CWC 中发挥了重要的作用。

表 6.1　$n \le 10$ 时 $A_3(n, 6, [3, 1])$ 的值

n	4	5	6	7	8	9	10
$A_3(n, 6, [3, 1])$	1	1	2	2	4	6	10

6.2　预备知识

6.2.1　定义和记号

我们将整数集合 $\{i, i+1, \ldots, j\}$ 记为 $[i, j]$。当 $i = 0$ 且 $j = q-1$ 时，也记为 I_q。环 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 记为 $\mathbb{Z}_q$。我们用符号 $\wr\cdot\int$ 表示多重集。

令 X 和 R 是有限集，R^X 表示一个长度为 $|X|$ 的向量的集合，其中每个向量 $\mathsf{u} \in R^X$ 在 R 中取值，并用 X 中的元素标记，即：$\mathsf{u} = (\mathsf{u}_x)_{x \in X}$，且对任意 $x \in X$，$\mathsf{u}_x \in R$。

一个长度为 n 的 q 元码就是一个集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_q^X$，其中 $|X| = n$。$\mathcal{C}$ 中的元素称为码字。一个向量 $\mathsf{u} \in \mathbb{Z}_q^X$ 的汉明重量定义为 $\|\mathsf{u}\| = |\{x \in X : \mathsf{u}_x \neq 0\}|$。对任意向量 $\mathsf{u} \in \mathbb{Z}_q^X$，定义 u 的支撑集为 $\mathrm{supp}(\mathsf{u}) = \{x \in X : \mathsf{u}_x \neq 0\}$。一个向量 $\mathsf{u} \in \mathbb{Z}_q^X$ 的汉明范数或者说汉明重量定义为 $\|\mathsf{u}\| = |\mathrm{supp}(\mathsf{u})|$。由这个范数导出的距离称为汉明距离，记为 d_H。所以，对任意 $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbb{Z}_q^X$，$d_H(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = \|\mathsf{u} - \mathsf{v}\|$。我们说一个码 $\mathcal{C}$ 具有最小汉明距离 d，如果任意两个相异码字 $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathcal{C}$，$d_H(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \ge d$。因为在本章中我们研究的都是最小汉明距离，为了简便起见，当我们说一个码的距离，就是指的是它的最小汉明距离。如果对任意码字 $\mathsf{u} \in \mathcal{C}$，$\|\mathsf{u}\| = w$，那么我们称 $\mathcal{C}$ 具有常重量 w。若对任意码字 $\mathsf{u} \in \mathcal{C}$，复合构型都为 $\overline{w}$，那么我们称 $\mathcal{C}$ 具有常复合构型 $\overline{w}$。因此每个常重复合码都是常重码。我们把一个长度为 n，距离为 d，重量为 w 的 q 元常重码，记为 $(n, d, w)_q$-码。进一步的，若这个码具有复合构型 $\overline{w}$，我们记为 $(n, d, \overline{w})_q$-码。$(n, d, w)_q$-码的最大码字个数被记为 $A_q(n, d, w)$，$(n, d, \overline{w})_q$-码的被记为 $A_q(n, d, \overline{w})$。码字个数达到最大的码被称为是最优的。

注意到下面的变换操作不会影响一个 $(n, d, \overline{w})_q$-码的距离和重量：

(i) 重新排列 $\overline{w}$ 中的元素,

(ii) 删除 $\overline{w}$ 中值为 0 的元素.

因此，后文中只考虑那些常复合构型为 $\overline{w} = [w_1, \ldots, w_{q-1}]$ 的编码，其中 $w_1 \geq \cdots \geq w_{q-1} \geq 1$。

假设 $\mathsf{u} \in \mathbb{Z}_q^X$ 是一个 $(n, d, \overline{w})_q$-码中的码字，其中 $\overline{w} = [w_1, \ldots, w_{q-1}]$。令 $w = \sum_{i=1}^{q-1} w_i$。则 u 可以等价地表示为一个 w 元组 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_w \rangle \in X^w$，其中，

$$
\begin{aligned}
\mathsf{u}_{a_1} = \cdots = \mathsf{u}_{a_{w_1}} &= 1, \\
\mathsf{u}_{a_{w_1+1}} = \cdots = \mathsf{u}_{a_{w_1+w_2}} &= 2, \\
&\vdots \\
\mathsf{u}_{a_{\sum_{i=1}^{q-2} w_i+1}} = \cdots = \mathsf{u}_{a_w} &= q-1.
\end{aligned}
$$

本章将使用这种形式来表示常重复合码中的码字。这样的表示具有更简洁、更灵活的特点。

6.2.2 一些上界

对于常重复合码，我们有：

引理 6.1 (Chee 等[36,37]):

$$
A_q(n, d, [w_1, \ldots, w_{q-1}]) =
\begin{cases}
\binom{n}{\sum_{i=1}^{q-1} w_i} \binom{\sum_{i=1}^{q-1} w_i}{w_1, \ldots, w_{q-1}}, & \text{若 } d \leq 2 \\
\lfloor n/w_1 \rfloor, & \text{若 } d = 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i - 1 \text{ 并且 } n \text{ 充分大} \\
\left\lfloor \frac{n}{\sum_{i=1}^{q-1} w_i} \right\rfloor, & \text{若 } d = 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i \\
1, & \text{若 } d \geq 2\sum_{i=1}^{q-1} w_i + 1.
\end{cases}
$$

定理 6.1 (Svanström 等[153]):

$$
A_q(n, d, [w_1, \ldots, w_{q-1}]) \leq \frac{n}{w_1} A_q(n-1, d, [w_1 - 1, \ldots, w_{q-1}]).
$$

综合引理 6.1 和定理 6.1，我们有下面的结论。

推论 6.1:

$$
A_3(n, 6, [2, 2]) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor,
$$

$$A_3(n,6,[3,1]) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor.$$

对于大多数情况，我们将证明上述 Johnson 型的界是紧的。然而，对于 $n \equiv 4,5,7 \pmod 9), \overline{w} = [3,1]$ 的情形，我们可以有更好的界。

引理 6.2:

$$A_3(9t+4,6,[3,1]) \leq 9t^2+6t+1+\lfloor\frac{t}{4}\rfloor,$$
$$A_3(9t+5,6,[3,1]) \leq 9t^2+7t+1+\lfloor\frac{t+1}{4}\rfloor,$$
$$A_3(9t+7,6,[3,1]) \leq 9t^2+11t+3+\lfloor\frac{t+1}{2}\rfloor.$$

证明. 设 $\mathcal{C}$ 是一个长为 n，复合构型为 $[3,1]$，极小距离为 6 的码，它有 M 个码字。用 $\mathcal{C}_i^1$ 表示位置 i 上符号为 1 的码字构成的集合，$\mathcal{C}_i^2$ 表示位置 i 上符号为 2 的码字构成的集合。分别记它们的大小为 x_i, y_i。通过两种方式计算码 $\mathcal{C}$ 中非零符号的个数，我们有 $4M=\sum_i(x_i+y_i)$。下面我们来给出 x_i+y_i 的上界。考察 $\mathcal{C}$ 中任意一个固定的位置 i。由于 $\mathcal{C}$ 的极小距离为 6，除了位置 i 外，$\mathcal{C}_i^1$ 中所有码字的非零符号应当处于不同的位置。所以我们有 $3x_i \leq n-1$。现在我们考虑 $\mathcal{C}_i^2$ 中的码字，由于 $\mathcal{C}_i^1$ 中的码字的符号 1 已占去了 $2x_i$ 个位置，$\mathcal{C}_i^2$ 中的码字在这些位置上符号不可能再是 1，否则距离会小于 6。同时，$\mathcal{C}_i^2$ 中任意两个码字的符号不能在同一位置均为 1，这样我们有 $2x_i+3y_i \leq n-1$。

当 $n=9t+4$ 时，由 $2x_i+3y_i \leq 9t+3$，我们有 $x_i+y_i \leq 3t+1+\lfloor\frac{x_i}{3}\rfloor$。注意到 $3x_i \leq 9t+3$，则 $x_i+y_i \leq 4t+1$。所以 $M \leq \lfloor\frac{(9t+4)(4t+1)}{4}\rfloor$。这样我们就得到了第一个不等式。其他两个不等式可以通过类似的讨论得到。 □

在本章剩下的部分中，我们记 $U(n,6,[2,2]) = \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$ 并将它作为 $(n,6,[2,2])_3$-码码字个数的上界。对于复合构型 $[3,1]$ 的，当 $n \equiv 0,1,2,3,6,8 \pmod 9$ 时，我们记 $U(n,6,[3,1]) = \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$；当 $n \equiv 4,5,7 \pmod 9$ 时，将 n 写为 $n=9t+i$，$i=4,5$ 或 7，并记

$$U(9t+4,6,[3,1]) = 9t^2+6t+1+\lfloor\frac{t}{4}\rfloor,$$

$$U(9t+5,6,[3,1]) = 9t^2+7t+1+\lfloor\frac{t+1}{4}\rfloor,$$

$$U(9t+7,6,[3,1]) = 9t^2+11t+3+\lfloor\frac{t+1}{2}\rfloor.$$

6.2.3 可分组码

给定 $\mathsf{u}\in\mathbb{Z}_q^X$ 和 $Y\subseteq X$，u 在 Y 上的限制（记为 $\mathsf{u}\mid_Y$）是指一个向量 $\mathsf{v}\in\mathbb{Z}_q^X$ 满足

$$\mathsf{v}_x = \begin{cases} \mathsf{u}_x, & \text{如果} x\in Y \\ 0, & \text{如果} x\in X\setminus Y. \end{cases}$$

一个距离为 d 的可分组码（GDC）是一个三元组 $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{G}=\{G_1,\ldots,G_t\}$ 是大小为 n 的集合 X 的一个划分，且 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_q^X$ 是一个长度为 n 的 q 元码，使得对于任何两个不同的码字 $u,v\in\mathcal{C}$，都有 $d_H(u,v)\geq d$，且对于所有的 $u\in\mathcal{C}, 1\leq i\leq t$，都有 $\|u|_{G_i}\|\leq 1$。$\mathcal{G}$ 中的元素被称为组。如果 $\mathcal{C}$ 是常重的，且重量为 w，则将距离为 d 的 GDC$(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 记为 w-GDC(d)。如果 $\mathcal{C}$ 是常复合构型的，则将此 GDC 记为 $\overline{w}$-GDC(d)，其中每个码字 $u\in\mathcal{C}$ 的复合构型均为 $\overline{w}$。一个 GDC$(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 的型是指多重集 $\wr|G|:G\in\mathcal{G}\wr$。和记 GDD 的型一样，我们也用指数记法来表示 GDC 的型。一个GDC $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 的大小（码字个数）记为 $|\mathcal{C}|$。注意到一个大小为 s 的 $(n,d,\overline{w})_q$-码等同于一个大小为 s、型为 1^n 的 $\overline{w}$-GDC(d)。

利用可分组编码，通过下面两个构造可以得到大阶数的常重复合码。

构造 6.1 (组填充构造[37])：令 $d\leq 2(w-1)$。假设 $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 是一个大小为 a、组型为 $g_1^{t_1}\cdots g_s^{t_s}$ 的 w-GDC(d)。若对于每个 $1\leq i\leq s$，都存在一个大小为 b_i 的 $(g_i,d,w)_q$-码 $\mathcal{C}_i$，则存在一个大小为 $a+\sum_{i=1}^s t_ib_i$ 的 $(\sum_{i=1}^s t_ig_i,d,w)_q$-码 $\mathcal{C}'$。特别的，如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}_i, 1\leq i\leq s$，均为常复合构型 $\overline{w}$ 的，则 $\mathcal{C}'$ 也是常复合构型 $\overline{w}$ 的。

构造 6.2 (添加点构造[37])：令 $y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。假设存在一个（主）码 w-GDC(d)，其组型为 $g_1^{t_1}\cdots g_s^{t_s}$，大小为 a，且下面的（部件）码也都存在：

(i) 一个大小为 b 的 $(g_1+y,d,w)_q$-码，

(ii) 对于任意的 $2\leq i\leq s$，都存在一个 w-GDC(d)，且组型为 $1^{g_i}y^1$，大小为 c_i，

(iii) 当 $t_1\geq 2$ 时，存在一个 w-GDC(d)，其组型为 $1^{g_1}y^1$，大小为 c_1。

则存在一个 $(y+\sum_{i=1}^{s} t_i g_i, d, w)_q$-码，大小为

$$a+b+(t_1-1)c_1+\sum_{i=2}^{s} t_i c_i.$$

如果主码和部件码都是常复合构型的，则得到的编码也是常复合构型的。

下面两个构造主要用于通过阶数较小的 GDC 得到阶数较大的 GDC。

构造 6.3 (基本构造[37])：设 $d \le 2(w-1)$，$\mathcal{D}=(X,\mathcal{G},\mathcal{A})$ 是（主）GDD，且 $\omega: X \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 是一个赋权函数。假设对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都存在一个（部件）w-GDC(d)，其组型为 $\wr \omega(a): a \in A \wr$，则存在一个组型为 $\wr \sum_{x\in G}\omega(x): G \in \mathcal{G}\wr$ 的 w-GDC(d)，记为$\mathcal{D}^*$。如果所有的部件 GDC 都有常复合构型 $\overline{w}$，则 $\mathcal{D}^*$ 也有常复合构型 $\overline{w}$。

构造 6.4 (膨胀构造)：假设存在一个组型为 $g_1^{t_1}\dots g_s^{t_s}$，大小为 a 的 w-GDC(d)，和一个 TD(w,m)。则存在一个组型为 $(mg_1)^{t_1}\dots(mg_s)^{t_s}$，大小为 am^2 的 w-GDC(d)。如果初始的 GDC 有常复合构型 $\overline{w}$，则得到的 GDC 也有同样的复合构型。

6.3 确定 $A_3(n,6,[3,1])$ 的值

在本节中，我们将确定 $A_3(n,6,[3,1])$ 具体的值。

6.3.1 $n \equiv 0,1,2,3 \pmod 9$ 的情形

引理 6.3：对于 $t\in\{1,3\}$，$A_3(9t+1,6,[3,1])=U(9t+1,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=1$，见表格 6.1。对于 $t=3$，令 $X=\mathbb{Z}_{28}$。则 $(X,\mathcal{C})$ 就是所要的最优码，这里 $\mathcal{C}$ 是由下列码字 $+4 \pmod{28}$ 展开得到。

$\langle 1,3,26,8\rangle$	$\langle 2,8,18,26\rangle$	$\langle 2,16,17,22\rangle$	$\langle 3,16,18,7\rangle$	$\langle 0,8,25,21\rangle$	$\langle 1,21,22,16\rangle$
$\langle 2,3,23,6\rangle$	$\langle 0,3,24,12\rangle$	$\langle 1,17,27,23\rangle$	$\langle 0,9,26,23\rangle$	$\langle 3,19,20,25\rangle$	$\langle 3,13,22,17\rangle$

□

引理 6.4：对于 $t\in\{1,2,3\}$，$A_3(9t,6,[3,1])=U(9t,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t\in\{1,3\}$，把最优 $(9t+1,6,[3,1])_3$-码删去一个符号就可得到所要的最优码。

对于 $t=2$，令 $X=\mathbb{Z}_{18}$。把下面码字 $+3 \pmod{18}$ 展开就可得到一个最优 $(18,6,[3,1])_3$-码。

$$\langle 0,1,2,3\rangle \quad \langle 8,11,13,2\rangle \quad \langle 0,7,10,16\rangle \quad \langle 0,5,12,9\rangle \quad \langle 2,12,16,8\rangle$$

□

引理 6.5: 存在型为 $1^9 2^1$ 大小为 11 的 $[3,1]$-GDC(6) 和型为 $1^9 3^1$ 大小为 12 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 我们分别在集合 I_{11} 和 I_{12} 上构造所要码。它们的码字如下所示：

$1^9 2^1$:

$$\begin{array}{llllll} \langle 1,3,9,0\rangle & \langle 1,4,7,8\rangle & \langle 2,8,9,4\rangle & \langle 5,8,10,1\rangle & \langle 0,4,5,9\rangle & \langle 1,2,6,10\rangle \\ \langle 0,7,10,2\rangle & \langle 2,3,5,7\rangle & \langle 0,6,8,3\rangle & \langle 3,4,10,6\rangle & \langle 6,7,9,5\rangle & \end{array}$$

$1^9 3^1$:

$$\begin{array}{llllll} \langle 3,7,11,0\rangle & \langle 2,4,7,10\rangle & \langle 7,8,9,1\rangle & \langle 0,2,9,3\rangle & \langle 0,1,10,7\rangle & \langle 6,8,10,4\rangle \\ \langle 0,5,8,11\rangle & \langle 1,4,11,8\rangle & \langle 1,3,6,9\rangle & \langle 4,5,9,6\rangle & \langle 2,6,11,5\rangle & \langle 3,5,10,2\rangle \end{array}$$

□

引理 6.6: 对于 $t\in\{1,2,3\}$，$A_3(9t+2,6,[3,1])=U(9t+2,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=1$，引理 6.5 中构造的型为 $1^9 2^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 就是所要的最优码。对于 $t\in\{2,3\}$，令 $X_t=\mathbb{Z}_{9t+2}$。则 $(X_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的最优码，这里 $\mathcal{C}_t$ 是由下列码字 $+1 \pmod{9t+2}$ 展开得到。

$t=2$: $\langle 0,1,9,15\rangle$ $\langle 0,3,7,5\rangle$

$t=3$: $\langle 0,1,26,15\rangle$ $\langle 0,6,13,11\rangle$ $\langle 0,8,20,10\rangle$ □

引理 6.7: 对于 $t\in\{2,6\}$，存在型为 3^{3t+1} 大小为 $3t(3t+1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 令 $X_t=\mathbb{Z}_{9t+3}$，$\mathcal{G}_t=\{\{0,3t+1,6t+2\}+i:0\le i\le 3t\}$。则 $(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的码，这里 $\mathcal{C}_2$ 是由下面的码字 $+3 \pmod{21}$ 展开得到而 $\mathcal{C}_6$ 是 $+1 \pmod{57}$ 展开得到。

$t=2$: $\langle 0,1,13,18\rangle$ $\langle 1,4,14,5\rangle$ $\langle 0,10,12,16\rangle$ $\langle 2,5,7,1\rangle$ $\langle 0,2,8,3\rangle$ $\langle 0,6,17,5\rangle$

$t=6$: $\langle 0,9,7,36\rangle$ $\langle 0,1,6,21\rangle$ $\langle 0,26,8,30\rangle$ $\langle 0,3,44,40\rangle$ $\langle 0,11,43,28\rangle$ $\langle 0,10,33,45\rangle$ □

引理 6.8：对于 $t \in \{1,2,3\}$，$A_3(9t+3,6,[3,1]) = U(9t+3,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=1$，引理 6.5 中构造的型为 $1^9 3^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 就是所要的最优码。对于 $t=2$，引理 6.7 中构造的型为 3^7 的 $[3,1]$-GDC(6) 就是所要的最优码。对于 $t=3$，将构造 6.4 应用到型为 1^{10} 的 $[3,1]$-GDC(6)，取 $m=3$，得到一个型为 3^{10} 的 $[3,1]$-GDC(6)，即为所要码。 □

引理 6.9：对于任意 $t \in \{4,5,6,8,9,11,12,14,15,18,23\}$，型为 9^t 大小为 $9t(t-1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 令 $X_t = \mathbb{Z}_{9t}$，$\mathcal{G}_t = \{\{0,t,2t,\ldots,8t\}+i : 0 \le i \le t-1\}$。则 $(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的码，这里 $\mathcal{C}_4$ 是由表格 6.2 中的码字 $+6 \pmod{36}$ 展开得到，$\mathcal{C}_5$ 是由表格 6.2 中的码字 $+3 \pmod{45}$ 展开得到，而其他 $\mathcal{C}_t, t \ge 6$ 是由表格 6.2 中的码字 $+1 \pmod{9t}$ 展开得到。 □

定理 6.2：对于任意 $t \ge 4$，型为 9^t 大小为 $9t(t-1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 对于 $t \in \{4,5,6,8,9,11,12,14,15,18,23\}$，见引理 6.9。

对于 $t \in \{7,19\}$，将引理 6.7 中的型为 3^t 的 $[3,1]$-GDC(6) 膨胀三倍，应用构造 6.4 就可得到所要 GDC。

对于 $t=10$，将型为 1^{10} 的 $[3,1]$-GDC(6) 膨胀九倍，应用构造 6.4 就可得到所要 GDC。

对于任意 $t \ge 10$ 且 $t \notin \{10,11,12,14,15,18,19,23\}$，由定理 2.5，$(t,\{4,5,6,7,8,9\},1)$-PBD 存在，对每个点赋权 9，由于对任意 $4 \le s \le 9$，型为 9^s 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在，应用构造 6.3 就可得到所要 GDC。 □

定理 6.3：对任意 $t \ge 1$，$i \in \{0,1,2,3\}$ 且 $(t,i) \ne (2,1)$，$A_3(9t+i,6,[3,1]) = U(9t+i,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t \le 3$ 的情形，见引理 6.3–6.4, 6.6 和 6.8。对于 $t \ge 4$，由定理 6.2 存在型为 9^t 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加 i 个无穷点并填入型为 $1^9 i^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.3, 6.4 和 6.5）就可得到所要的最优码。 □

表 6.2　引理 6.9 中型为 9^t 的 $[3,1]$-GDC(6) 的基码字

t	码字
4	$\langle 4,2,35,29\rangle$ $\langle 5,19,34,16\rangle$ $\langle 3,26,0,21\rangle$ $\langle 0,15,5,18\rangle$ $\langle 0,25,35,34\rangle$ $\langle 4,15,17,6\rangle$ $\langle 5,2,24,11\rangle$ $\langle 3,22,16,25\rangle$ $\langle 2,23,25,32\rangle$ $\langle 5,27,26,32\rangle$ $\langle 4,23,30,5\rangle$ $\langle 1,24,18,15\rangle$ $\langle 2,13,16,31\rangle$ $\langle 4,3,9,18\rangle$ $\langle 2,28,21,19\rangle$ $\langle 2,7,0,9\rangle$ $\langle 0,1,31,22\rangle$ $\langle 1,2,27,20\rangle$
5	$\langle 1,17,35,9\rangle$ $\langle 0,16,29,37\rangle$ $\langle 2,8,44,1\rangle$ $\langle 1,34,37,38\rangle$ $\langle 0,23,36,19\rangle$ $\langle 1,32,39,8\rangle$ $\langle 0,4,31,3\rangle$ $\langle 0,11,44,42\rangle$ $\langle 1,7,29,33\rangle$ $\langle 1,3,20,44\rangle$ $\langle 0,6,27,8\rangle$ $\langle 0,12,34,13\rangle$
6	$\langle 0,1,35,38\rangle$ $\langle 0,14,29,46\rangle$ $\langle 0,11,52,8\rangle$ $\langle 0,26,47,16\rangle$ $\langle 0,4,9,31\rangle$
8	$\langle 0,58,71,19\rangle$ $\langle 0,55,66,36\rangle$ $\langle 0,26,28,67\rangle$ $\langle 0,43,65,31\rangle$ $\langle 0,37,47,52\rangle$ $\langle 0,3,21,12\rangle$ $\langle 0,4,49,34\rangle$
9	$\langle 0,14,55,61\rangle$ $\langle 0,22,71,20\rangle$ $\langle 0,8,58,60\rangle$ $\langle 0,11,48,77\rangle$ $\langle 0,53,56,68\rangle$ $\langle 0,35,74,69\rangle$ $\langle 0,64,80,4\rangle$ $\langle 0,19,43,13\rangle$
11	$\langle 0,40,56,93\rangle$ $\langle 0,41,51,98\rangle$ $\langle 0,25,90,8\rangle$ $\langle 0,2,29,71\rangle$ $\langle 0,45,84,91\rangle$ $\langle 0,63,95,26\rangle$ $\langle 0,13,31,92\rangle$ $\langle 0,23,35,73\rangle$ $\langle 0,14,19,20\rangle$ $\langle 0,3,24,52\rangle$
12	$\langle 0,80,83,46\rangle$ $\langle 0,73,93,107\rangle$ $\langle 0,44,89,22\rangle$ $\langle 0,91,95,52\rangle$ $\langle 0,10,100,59\rangle$ $\langle 0,9,79,85\rangle$ $\langle 0,75,77,23\rangle$ $\langle 0,82,103,32\rangle$ $\langle 0,42,53,92\rangle$ $\langle 0,27,57,43\rangle$ $\langle 0,40,101,102\rangle$
14	$\langle 0,8,47,77\rangle$ $\langle 0,45,46,23\rangle$ $\langle 0,10,29,63\rangle$ $\langle 0,91,111,73\rangle$ $\langle 0,89,110,41\rangle$ $\langle 0,3,62,71\rangle$ $\langle 0,52,83,22\rangle$ $\langle 0,27,93,76\rangle$ $\langle 0,75,101,92\rangle$ $\langle 0,119,124,48\rangle$ $\langle 0,86,90,18\rangle$ $\langle 0,12,94,6\rangle$ $\langle 0,13,24,85\rangle$
15	$\langle 0,77,85,51\rangle$ $\langle 0,66,76,104\rangle$ $\langle 0,23,123,44\rangle$ $\langle 0,130,134,82\rangle$ $\langle 0,7,36,70\rangle$ $\langle 0,16,78,84\rangle$ $\langle 0,37,118,31\rangle$ $\langle 0,22,42,114\rangle$ $\langle 0,124,133,41\rangle$ $\langle 0,49,89,102\rangle$ $\langle 0,14,32,79\rangle$ $\langle 0,55,116,88\rangle$ $\langle 0,25,96,122\rangle$ $\langle 0,108,111,67\rangle$
18	$\langle 0,80,140,115\rangle$ $\langle 0,45,49,52\rangle$ $\langle 0,70,79,123\rangle$ $\langle 0,17,74,150\rangle$ $\langle 0,156,157,20\rangle$ $\langle 0,37,112,159\rangle$ $\langle 0,46,65,39\rangle$ $\langle 0,73,132,38\rangle$ $\langle 0,14,149,81\rangle$ $\langle 0,42,111,142\rangle$ $\langle 0,104,138,40\rangle$ $\langle 0,11,66,95\rangle$ $\langle 0,32,48,110\rangle$ $\langle 0,56,141,12\rangle$ $\langle 62,19,60,29\rangle$ $\langle 0,139,147,86\rangle$ $\langle 0,28,91,152\rangle$
23	$\langle 0,43,123,83\rangle$ $\langle 0,14,116,17\rangle$ $\langle 0,76,144,175\rangle$ $\langle 0,10,36,81\rangle$ $\langle 0,24,59,121\rangle$ $\langle 0,48,101,98\rangle$ $\langle 0,120,153,32\rangle$ $\langle 0,4,55,162\rangle$ $\langle 0,85,96,185\rangle$ $\langle 0,52,177,58\rangle$ $\langle 0,64,198,206\rangle$ $\langle 0,103,147,168\rangle$ $\langle 0,15,56,201\rangle$ $\langle 0,28,141,70\rangle$ $\langle 0,72,189,190\rangle$ $\langle 0,182,194,124\rangle$ $\langle 0,5,133,170\rangle$ $\langle 0,95,75,173\rangle$ $\langle 0,19,169,176\rangle$ $\langle 0,178,180,200\rangle$ $\langle 0,47,114,39\rangle$ $\langle 0,61,191,110\rangle$

6.3.2 一些 $[3,1]$-GDC(6)

引理 6.10: 对于 $m \in \{18,27\}$，存在型为 $9^{10}m^1$ 大小为 $10(81+2m)$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 对于型为 $9^{10}18^1$ 的，令 $X = I_{108}$，$\mathcal{G} = \{\{i, i+10, i+20, \ldots, i+80\} : 0 \le i < 10\} \cup \{\{90, 91, 92, \ldots, 107\}\}$。则 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下面的码字在群 G 的作用下展开得到，$G = \langle(0\ \ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 89)(90\ \ 91\ \ \cdots\ \ 98)$ $(99\ \ 100\ \ \cdots\ \ 107)\rangle$。

$$
\begin{array}{lllll}
\langle 90,31,33,0\rangle & \langle 90,48,26,37\rangle & \langle 90,43,86,74\rangle & \langle 9,47,82,90\rangle & \langle 99,10,16,74\rangle \\
\langle 99,6,40,68\rangle & \langle 39,23,20,99\rangle & \langle 86,14,21,47\rangle & \langle 13,12,54,66\rangle & \langle 58,37,45,82\rangle \\
\langle 16,2,31,7\rangle & \langle 99,54,8,3\rangle & \langle 0,4,27,36\rangle & &
\end{array}
$$

对于型为 $9^{10}27^1$ 的，令 $X = I_{117}$，$\mathcal{G} = \{\{i, i+10, i+20, \ldots, i+80\} : 0 \le i < 10\} \cup \{\{90, 91, 92, \ldots, 116\}\}$。则 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下面的码字在群 G 的作用下展开得到，$G = \langle(0\ \ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 89)(90\ \ 91\ \ \cdots\ \ 98)$ $(99\ \ 100\ \ \cdots\ \ 107)\rangle\ (108\ \ 109\ \ \cdots\ \ 116)\rangle$。

$$
\begin{array}{lllll}
\langle 90,5,54,26\rangle & \langle 90,13,12,20\rangle & \langle 90,33,46,25\rangle & \langle 99,11,62,66\rangle & \langle 2,26,7,90\rangle \\
\langle 1,39,37,65\rangle & \langle 99,87,58,54\rangle & \langle 21,36,79,99\rangle & \langle 108,66,83,9\rangle & \langle 108,34,78,23\rangle \\
\langle 0,23,65,68\rangle & \langle 89,5,36,108\rangle & \langle 14,77,86,70\rangle & \langle 99,32,46,43\rangle & \langle 108,28,40,62\rangle
\end{array}
$$

□

引理 6.11: 对任意 $t \in \{4,5,6\}$，型为 $27^t 9^1$ 大小为 $27t(3t-1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 对每个 t，令 $X_t = I_{27t+9}$，$\mathcal{G}_t = \{\{i, i+t, i+2t, \ldots, i+26t\} : 0 \le i < t\} \cup \{\{27t, 27t+1, \ldots, 27t+8\}\}$。则 $(X_t, \mathcal{G}_t, \mathcal{C}_t)$ 就是所要 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}_t$ 是由下面的码字在群 G 的作用下展开得到，$G = \langle(0\ \ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 27t-1)(27t\ \ 27t+1\ \ \cdots\ \ 27t+8)\rangle$。

$t = 4$:

$$
\begin{array}{lllll}
\langle 108,6,35,57\rangle & \langle 108,16,90,77\rangle & \langle 83,81,0,6\rangle & \langle 12,67,5,108\rangle & \langle 27,64,105,10\rangle \\
\langle 29,78,52,99\rangle & \langle 108,65,64,22\rangle & \langle 0,5,94,43\rangle & \langle 12,102,9,3\rangle & \langle 70,20,59,37\rangle \\
\langle 92,19,82,61\rangle & & & &
\end{array}
$$

$t=5$:

$\langle 43,0,79,42\rangle$ $\langle 0,8,91,84\rangle$ $\langle 135,49,81,98\rangle$ $\langle 135,92,30,14\rangle$ $\langle 126,58,72,109\rangle$
$\langle 135,52,73,24\rangle$ $\langle 26,48,72,79\rangle$ $\langle 80,77,118,11\rangle$ $\langle 29,40,31,133\rangle$ $\langle 33,59,107,135\rangle$
$\langle 3,21,109,37\rangle$ $\langle 22,35,93,94\rangle$ $\langle 97,124,1,130\rangle$ $\langle 25,48,44,126\rangle$

$t=6$:

$\langle 162,26,96,119\rangle$ $\langle 16,23,123,104\rangle$ $\langle 162,59,34,144\rangle$ $\langle 0,26,89,13\rangle$
$\langle 75,146,119,16\rangle$ $\langle 78,75,118,157\rangle$ $\langle 162,111,139,82\rangle$ $\langle 147,60,2,37\rangle$
$\langle 33,161,157,52\rangle$ $\langle 94,108,103,15\rangle$ $\langle 89,134,156,145\rangle$ $\langle 37,70,135,86\rangle$
$\langle 0,50,101,130\rangle$ $\langle 83,73,81,162\rangle$ $\langle 59,39,80,24\rangle$ $\langle 53,54,7,130\rangle$
$\langle 86,18,49,33\rangle$

□

引理 6.12: 对任意 $t\in\{4,6\}$，型为 27^t18^1 大小为 $27t(3t+1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 对每个 t，令 $X_t=I_{27t+18}$，$\mathcal{G}_t=\{\{i,i+t,i+2t,\ldots,i+26t\}:0\le i<t\}\cup\{\{27t,27t+1,\ldots,27t+17\}\}$。则 $(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}_t$ 是由下面的码字在群 G 的作用下展开得到，$G=\langle(0\ 1\ 2\ \cdots\ 27t-1)(27t\ \ 27t+1\ \cdots\ 27t+8)(27t+9\ \ 27t+10\ \cdots\ 27t+17)\rangle$。

$t=4$:

$\langle 108,31,86,96\rangle$ $\langle 108,46,21,7\rangle$ $\langle 108,26,9,20\rangle$ $\langle 97,47,96,108\rangle$ $\langle 37,15,28,18\rangle$
$\langle 117,88,55,94\rangle$ $\langle 117,35,5,20\rangle$ $\langle 54,9,27,16\rangle$ $\langle 117,12,54,33\rangle$ $\langle 84,43,38,81\rangle$
$\langle 31,29,60,117\rangle$ $\langle 53,6,88,107\rangle$ $\langle 0,23,74,37\rangle$

$t=6$:

$\langle 162,22,110,0\rangle$ $\langle 162,24,158,46\rangle$ $\langle 171,110,161,69\rangle$ $\langle 18,35,82,162\rangle$
$\langle 171,139,30,46\rangle$ $\langle 136,135,13,120\rangle$ $\langle 171,160,149,81\rangle$ $\langle 99,42,91,171\rangle$
$\langle 162,79,3,134\rangle$ $\langle 39,119,114,128\rangle$ $\langle 128,95,154,141\rangle$ $\langle 118,12,83,74\rangle$
$\langle 143,106,39,54\rangle$ $\langle 156,136,113,86\rangle$ $\langle 131,135,160,66\rangle$ $\langle 48,50,29,129\rangle$
$\langle 91,84,81,125\rangle$ $\langle 60,105,137,91\rangle$ $\langle 0,38,99,65\rangle$

□

引理 6.13: 型为 36^627^1 大小为 5616 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 令 $X=I_{243}$，$\mathcal{G}=\{\{i,i+6,i+12,\ldots,i+210\}:0\le i<6\}\cup\{\{216,217,\ldots,242\}\}$。则 $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 就是所要的型为 36^627^1 的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下面的码字在群

G 的作用下生成的，$G = \langle (0\ 1\ 2\ \cdots\ 215)(216\ 217\ \cdots\ 224)\ (225\ 226\ \cdots\ 233)$ $(234\ 235\ \cdots\ 242)\rangle$。

$$\begin{array}{llll}
\langle 33,34,92,41\rangle & \langle 14,148,61,107\rangle & \langle 159,204,154,61\rangle & \langle 184,211,162,165\rangle \\
\langle 199,99,0,89\rangle & \langle 175,80,11,190\rangle & \langle 134,42,173,216\rangle & \langle 225,183,107,145\rangle \\
\langle 0,25,105,119\rangle & \langle 159,96,73,116\rangle & \langle 225,160,23,186\rangle & \langle 175,105,208,225\rangle \\
\langle 152,27,214,7\rangle & \langle 34,135,146,131\rangle & \langle 225,153,92,157\rangle & \langle 234,118,149,159\rangle \\
\langle 216,34,91,26\rangle & \langle 170,103,29,156\rangle & \langle 234,124,207,89\rangle & \langle 166,134,132,234\rangle \\
\langle 216,14,54,51\rangle & \langle 142,198,121,33\rangle & \langle 234,200,48,193\rangle & \langle 181,209,165,200\rangle \\
\langle 7,20,155,129\rangle & \langle 216,129,184,56\rangle & &
\end{array}$$

□

引理 6.14: 对任意 $u \geq 4$，$u \notin \{6,10\}$ 且 $0 \leq x \leq u$，型为 $36^u(9x)^1$ 大小为 $72u(2u+x-2)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 由于 $u \geq 4$ 且 $u \notin \{6,10\}$，由定理 2.8 存在一个 TD$(5,u)$。对所有组添加一个无穷点 ∞ 并删去原来的一个点，利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $4^u u^1$ 的 $\{5,u+1\}$-GDD。在大小为 u 的组中，对 x 个点赋权 9，对另外 $u-x$ 个点赋权 0。对其他的点赋权 9。由于对任意 $s \geq 4$，型为 9^s 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在（定理 6.2），应用构造 6.3 就可得到所要 GDC。 □

引理 6.15: 下面的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在:

i) 型为 $45^5(9x)^1$ 大小为 $450(10+x)$ 的，这里 $x \in \{0,1,2\}$;

ii) 型为 $36^6(9x)^1$ 大小为 $432(10+x)$ 的，这里 $x \in \{0,1,3\}$;

iii) 型为 $36^{10}(9x)^1$ 大小为 $720(18+x)$ 的，这里 $x \in \{0,1,2,3\}$;

iv) 型为 27^t 大小为 $81t(t-1)$ 的，这里 $t \in \{4,5,7\}$;

v) 型为 18^7 大小为 1512 的。

证明. 对于 i)，由定理 2.8 存在 TD$(6,5)$。对前五个组中的点赋权 9，对最后一个组中的点赋权 0 或 9。应用构造 6.3 就可得到所要 GDC。对于 ii)，由定理 6.2 存在型为 9^6 的 $[3,1]$-GDC(6)。对每个点赋权 4，利用型为 4^4 的 4-MGDD 可以得到一个型为 $(36,9^4)^6$ 的 4-DGDD，它具有 CCC 的性质。添加 $9x$ 个无穷点，$x \in \{0,1\}$，在洞

表 6.3　引理 6.16 中型为 6^{3t+1} 的 $[3,1]$-GDC(6) 的基码字

t	码字					
2	$\langle 0,38,32,1\rangle$	$\langle 0,12,34,29\rangle$	$\langle 0,23,26,25\rangle$	$\langle 0,9,27,40\rangle$		
3	$\langle 0,47,43,15\rangle$	$\langle 0,21,23,35\rangle$	$\langle 0,22,55,41\rangle$	$\langle 0,34,31,25\rangle$	$\langle 0,36,44,45\rangle$	$\langle 0,7,18,6\rangle$
4	$\langle 0,19,47,33\rangle$	$\langle 0,49,69,7\rangle$	$\langle 0,34,40,10\rangle$	$\langle 0,46,11,23\rangle$	$\langle 0,1,74,62\rangle$	$\langle 0,2,53,70\rangle$
	$\langle 0,37,22,30\rangle$	$\langle 0,3,21,45\rangle$				
5	$\langle 0,54,1,87\rangle$	$\langle 0,71,12,63\rangle$	$\langle 0,7,34,65\rangle$	$\langle 0,76,24,29\rangle$	$\langle 0,92,19,41\rangle$	$\langle 0,11,14,81\rangle$
	$\langle 0,57,36,83\rangle$	$\langle 0,66,94,8\rangle$	$\langle 0,35,18,13\rangle$	$\langle 0,6,56,15\rangle$		

中填入型为 $9^6(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 就可得到所要的型为 $36^6(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)；对于 $x=3$ 的情形，见引理 6.13。对于 iii)，构造过程类似，我们由一个型为 9^{10} 的 $[3,1]$-GDC(6) 出发，得到一个型为 $(36,9^4)^{10}$ 具有 CCC 性质的 4-DGDD。然后添加 $9x$ 个无穷点，在洞中填入型为 $9^{10}(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)（定理 6.2 和引理 6.10）就可得到所要的 GDC。对于 iv)，将定理 6.2 中的型为 9^t 的 $[3,1]$-GDC(6) 膨胀三倍，应用构造 6.4。对于 v)，由一个型为 2^7 的 4-GDD 出发，对每个点赋权 9，应用构造 6.3 就可得到所要 GDC。 □

6.3.3　$n \equiv 6 \pmod 9$ 的情形

引理 6.16: 对任意 $2 \le t \le 5$，型为 6^{3t+1} 大小为 $12t(3t+1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 令 $X_t = \mathbb{Z}_{18t+6}$，$\mathcal{G}_t = \{\{0,3t+1,6t+2,\dots,15t+5\}+i : 0 \le i \le 3t\}$。则 $(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}_t$ 是由表格 6.3 中的码字 $+1 \pmod{18t+6}$ 展开得到。 □

引理 6.17: 对任意 $t \in \{2,3,5,7,9\}$，型为 $1^{9t}6^1$ 大小为 $9t(t+1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 令 $X_t = I_{9t+6}$，$\mathcal{G}_t = \{\{i\} : 0 \le i \le 9t-1\} \cup \{\{9t,9t+1,\dots,9t+5\}\}$。则 $(X_t,\mathcal{G}_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}_t$ 是由表格 6.4 中的码字在群 G 的作用下展开得到。

对于 $t \in \{2,3\}$，$G_t = \langle (0\ 3\ 6\ \cdots\ 9t-3)(1\ 4\ 7\ \cdots\ 9t-2)(2\ 5\ 8\ \cdots\ 9t-1)(9t\ \ 9t+1\ \ 9t+2)(9t+3\ \ 9t+4\ \ 9t+5)\rangle$。

表 6.4　引理 6.17 中型为 $1^{9t}6^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 的基码字

t	码字
2	$\langle 0,1,19,2\rangle$ $\langle 1,3,22,16\rangle$ $\langle 0,7,23,14\rangle$ $\langle 2,21,5,6\rangle$ $\langle 1,9,20,6\rangle$ $\langle 2,18,14,1\rangle$ $\langle 0,8,4,17\rangle$ $\langle 0,6,11,9\rangle$ $\langle 2,10,4,13\rangle$
3	$\langle 1,6,17,30\rangle$ $\langle 1,31,14,9\rangle$ $\langle 0,20,32,16\rangle$ $\langle 0,29,25,5\rangle$ $\langle 1,29,22,15\rangle$ $\langle 2,11,1,12\rangle$ $\langle 2,23,4,26\rangle$ $\langle 0,21,18,17\rangle$ $\langle 2,17,29,21\rangle$ $\langle 2,15,0,7\rangle$ $\langle 0,4,30,8\rangle$ $\langle 0,1,10,13\rangle$
5	$\langle 0,39,15,20\rangle$ $\langle 0,35,36,33\rangle$ $\langle 0,13,41,8\rangle$ $\langle 0,31,49,38\rangle$ $\langle 0,47,23,25\rangle$ $\langle 0,11,29,3\rangle$
7	$\langle 0,5,21,53\rangle$ $\langle 0,20,65,7\rangle$ $\langle 0,25,54,31\rangle$ $\langle 0,2,3,15\rangle$ $\langle 0,55,68,44\rangle$ $\langle 0,33,37,56\rangle$ $\langle 0,27,41,51\rangle$ $\langle 0,17,35,11\rangle$
9	$\langle 0,19,58,28\rangle$ $\langle 0,6,32,44\rangle$ $\langle 0,33,50,30\rangle$ $\langle 0,41,85,52\rangle$ $\langle 0,4,67,20\rangle$ $\langle 0,8,82,7\rangle$ $\langle 0,2,15,3\rangle$ $\langle 0,25,35,72\rangle$ $\langle 0,5,27,70\rangle$ $\langle 0,21,45,74\rangle$

对于 $t\in\{5,7,9\}$，$G_t=\langle(0\ 1\ 2\ \cdots\ 9t-1)(9t\ 9t+1\ 9t+2)(9t+3\ 9t+4\ 9t+5)\rangle$。

□

引理 6.18：对任意 $0\le t\le 10$，$A_3(9t+6,6,[3,1])=U(9t+6,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=0$，见表格 6.1。对于 $t=1$，令 $X=\mathbb{Z}_{15}$。则 $(X,\mathcal{C})$ 就是所要的最优 $(15,6,[3,1])_3$-码，这里 $\mathcal{C}$ 是由下列码字 $+3\pmod{15}$ 展开得到。

$$\langle 2,5,0,7\rangle\quad\langle 1,8,2,9\rangle\quad\langle 0,4,9,8\rangle\quad\langle 1,13,0,11\rangle$$

对于 $t\in\{4,6,8,10\}$，由引理 6.16 存在型为 $6^{3t/2+1}$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，在每个组中填入最优的 $(6,6,[3,1])_3$-码就可得到所要的最优码。

对于 $t\in\{2,3,5,7,9\}$，由引理 6.17 存在型为 $1^{9t}6^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，在大小为 6 的组中填入最优的 $(6,6,[3,1])_3$-码就可得到所要的最优码。 □

引理 6.19：对任意 $t\ge 11$，$A_3(9t+6,6,[3,1])=U(9t+6,6,[3,1])$。

证明. 对任意 $t\ge 16$ 且 $t\ne 26$，我们可以将 t 写为 $t=4u+x$，这里 $u\ge 4$，$x\in\{0,1,2,3\}$。由引理 6.14–6.15 存在型为 $36^u(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加六个无穷点，填入型为 6^7 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.16）得到一个型为 $6^{6u}(9x+6)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。再在每个组中填入最优的 $(6,6,[3,1])_3$-码或 $(9x+6,6,[3,1])_3$-码（引理 6.18）就可以得到所要的最优码。

对于 $t=26$，由引理 6.15 存在型为 45^59^1 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加六个无穷点并填入型为 $1^{45}6^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.17）或最优的 $(15,6,[3,1])_3$-码就可得到

所要的最优码。对于 $t \in \{12,13,14,15\}$，由引理 6.15 和 6.11 存在型为 $27^4, 27^4 9^1$，18^7 和 27^5 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加六个无穷点并填充组即可。

对于 $t=11$，将构造 6.4 应用于一个型为 3^7 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.7），取 $m=5$ 我们可以得到一个型为 15^7 的 $[3,1]$-GDC(6)。在每个组中填入最优的 $(15,6,[3,1])_3$-码即可。 □

综合引理 6.18 和 6.19，我们有下述结论。

定理 6.4: 对任意 $t \geq 0$，$A_3(9t+6,6,[3,1]) = U(9t+6,6,[3,1])$。

6.3.4 $n \equiv 4 \pmod 9$ 的情形

引理 6.20: 对任意 $t \in \{1,2,3\}$，型为 4^{9t+1} 大小为 $16t(9t+1)$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 对于 $t=2$，令 $X=\mathbb{Z}_{76}$，$\mathcal{G}=\{\{0,19,38,57\}+i : 0 \leq i \leq 18\}$。则 $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下面的码字 $+1 \pmod{76}$ 展开得到。

$$\begin{array}{llll} \langle 0,26,22,9\rangle & \langle 0,62,74,13\rangle & \langle 0,37,6,67\rangle & \langle 0,44,65,41\rangle \\ \langle 0,5,56,29\rangle & \langle 0,43,53,46\rangle & \langle 0,42,60,1\rangle & \langle 0,8,36,7\rangle \end{array}$$

对于 $t \in \{1,3\}$，将构造 6.4 应用于型为 1^{9t+1} 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.3），取 $m=4$ 即可。 □

引理 6.21: 对任意 $t \in \{0,2,3,4,8,12\}$，$A_3(9t+4,6,[3,1]) = U(9t+4,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=0$ 的情形，见表格 6.1。

对于 $t \in \{2,3\}$，令 $X_t = \mathbb{Z}_{9t+3} \cup \{\infty\}$。则 $(X_t,\mathcal{C}_t)$ 就是所要的最优 $(9t+4,6,[3,1])_3$-码，这里 $\mathcal{C}_t$ 由下面的码字 $+3 \pmod{9t+3}$ 展开得到。

$t=2$: $\langle 1,6,12,5\rangle$ $\langle 0,12,8,19\rangle$ $\langle 1,8,18,15\rangle$ $\langle 0,1,2,3\rangle$ $\langle 2,5,11,7\rangle$ $\langle 1,10,7,20\rangle$ $\langle 0,5,\infty,13\rangle$

$t=3$: $\langle 0,2,16,6\rangle$ $\langle 0,1,25,23\rangle$ $\langle 0,7,28,15\rangle$ $\langle 2,5,22,4\rangle$ $\langle 2,7,18,26\rangle$ $\langle 2,21,11,17\rangle$ $\langle 0,9,12,22\rangle$ $\langle 2,28,25,13\rangle$ $\langle 0,17,29,24\rangle$ $\langle 0,\infty,4,5\rangle$

对于 $t \in \{4,8,12\}$，由引理 7.8 存在型为 $4^{9t/4+1}$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，在每个组中填入最优的 $(4,6,[3,1])_3$-码即可。 □

引理 6.22：对任意 $t \not\equiv 1 \pmod 4$，$t \geq 16$ 且 $t \neq 26$，$A_3(9t+4,6,[3,1]) = U(9t+4,6,[3,1])$。

证明. 对任意 $t \not\equiv 1 \pmod 4$，$t \geq 16$ 且 $t \neq 26$，我们可以将 t 写为 $t = 4u + x$，这里 $x \in \{0,2,3\}$。由引理 6.14–6.15 存在型为 $36^u(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加四个无穷点，填入型为 4^{10} 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 7.8）得到一个型为 $4^{9u}(9x+4)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。再在每个组中填入最优的 $(4,6,[3,1])_3$-码或 $(9x+4,6,[3,1])_3$-码（引理 6.21）就可以得到所要的最优码。 □

引理 6.23：存在型为 15^4 大小为 300 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 令 $X = \mathbb{Z}_{60}$，$\mathcal{G} = \{\{i, i+4, i+8, \ldots, i+56\} : 0 \leq i \leq 3\}$。则 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下面的码字 $+2 \pmod{60}$ 展开得到。

$\langle 1,15,40,42\rangle$ $\langle 0,39,13,58\rangle$ $\langle 0,3,34,25\rangle$ $\langle 0,54,37,27\rangle$ $\langle 1,0,7,10\rangle$ $\langle 1,12,50,31\rangle$
$\langle 0,14,45,23\rangle$ $\langle 1,56,14,11\rangle$ $\langle 1,2,19,52\rangle$ $\langle 0,55,53,30\rangle$

□

引理 6.24：存在型为 39^4 大小为 2028 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 令 $X = \mathbb{Z}_{156}$，$\mathcal{G} = \{\{i, i+4, i+8, \ldots, i+152\} : 0 \leq i \leq 3\}$。则 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{C})$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下面的码字 $+1 \pmod{156}$ 展开得到。

$\langle 95,37,0,30\rangle$ $\langle 112,97,151,22\rangle$ $\langle 71,33,122,44\rangle$ $\langle 8,131,81,82\rangle$ $\langle 56,13,98,103\rangle$
$\langle 44,57,66,43\rangle$ $\langle 58,99,64,113\rangle$ $\langle 128,49,18,47\rangle$ $\langle 46,28,25,35\rangle$ $\langle 17,76,110,19\rangle$
$\langle 23,4,49,150\rangle$ $\langle 79,17,148,74\rangle$ $\langle 0,17,103,126\rangle$

□

引理 6.25：对任意 $t \in \{17,33\}$ 或 $t \equiv 1 \pmod 4, t \geq 85$，$A_3(9t+4,6,[3,1]) = U(9t+4,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t = 17$，由引理 6.24 存在型为 39^4 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加一个无穷点并填入长为 40 的最优码（引理 6.21）就可得到所要的码。

对于 $t = 33$，我们由一个 TD(4,5) 出发，对所有点赋权 15，由于存在型为 15^4 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.23），应用构造 6.3 就可以得到一个型为 75^4 的 $[3,1]$-GDC(6)。添加一个无穷点并填入长为 76 的最优码（引理 6.21）即可。

对于 $t \geq 85$，将 t 写为 $t = 4u + 17$。由引理 6.14 存在型为 36^u153^1 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加四个无穷点并填充组就可得到所要的最优码。 □

综合上述结果，我们有：

定理 6.5：对任意 $t \geq 0$ 且 $t \notin \{1,5,6,7,9,10,11,13,14,15,21,25,26,29,37,41,45,49,53,57,61,65,69,73,77,81\}$，$A_3(9t+4,6,[3,1]) = U(9t+4,6,[3,1])$。

6.3.5 $n \equiv 5 \pmod 9$ 的情形

引理 6.26：*存在型为 $1^{36}5^1$ 大小为 173 的 $[3,1]$-GDC(6)。*

证明. 令 $X = (\mathbb{Z}_{12} \times \{0,1,2\}) \cup (\mathbb{Z}_3 \times \{3\}) \cup \{\infty_0, \infty_1\}$。集合 $(\mathbb{Z}_3 \times \{3\}) \cup \{\infty_0, \infty_1\}$ 形成了大小为 5 的组。定义 $\alpha : X \to X$，$x_y \to (x+1)_y$，这里的加法是模 12 的若 $y \in \{0,1,2\}$，模 3 的若 $y = 3$。无穷点 ∞_0 和 ∞_1 在 α 作用下保持不变。将下述基码字用 α 展开：

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0_3, 6_0, 2_2, 0_2 \rangle & \langle 3_2, 11_1, 7_2, 0_3 \rangle & \langle 10_2, 10_1, 3_2, 1_0 \rangle & \langle 4_2, 0_0, 9_0, 7_1 \rangle & \langle 8_0, 10_0, 8_2, 7_2 \rangle \\
\langle 1_0, 0_1, 2_2, 3_2 \rangle & \langle 0_3, 4_0, 11_0, 8_1 \rangle & \langle 1_1, 11_1, 10_0, 9_0 \rangle & \langle 0_1, 1_2, 7_1, 2_0 \rangle & \langle \infty_0, 2_1, 1_2, 7_0 \rangle \\
\langle 0_3, 3_1, 4_1, 1_2 \rangle & \langle \infty_1, 9_2, 4_0, 6_1 \rangle & \langle 1_1, 5_0, 8_2, 10_1 \rangle & &
\end{array}$$

进一步，将码字 $\langle 0_0, 6_0, 0_1, 6_1 \rangle$ 展开，得到一个长为 6 的短轨道。
最后将下述码字展开，得到两个长为 4 的短轨道和一个长为 3 的短轨道：

$$\langle 0_0, 4_0, 8_0, \infty_0 \rangle \quad \langle 0_1, 4_1, 8_1, \infty_1 \rangle \quad \langle 0_2, 3_2, 6_2, 9_2 \rangle$$

□

引理 6.27：对任意 $t \in \{0,1,2,3,4\}$，$A_3(9t+5,6,[3,1]) = U(9t+5,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t = 0$ 的情形，见表格 6.1。

对于 $t = 1$，我们在集合 I_{14} 上构造一个最优 $(14,6,[3,1])_3$-码，它的所有码字如下：

$$\begin{array}{llllll}
\langle 0,4,9,5 \rangle & \langle 7,4,10,6 \rangle & \langle 2,10,9,3 \rangle & \langle 13,10,0,8 \rangle & \langle 2,12,8,4 \rangle & \langle 0,1,7,12 \rangle \\
\langle 3,5,8,0 \rangle & \langle 2,5,7,13 \rangle & \langle 6,9,8,11 \rangle & \langle 3,6,12,10 \rangle & \langle 3,13,4,2 \rangle & \langle 12,13,9,7 \rangle \\
\langle 2,11,0,6 \rangle & \langle 11,4,1,8 \rangle & \langle 11,3,7,9 \rangle & \langle 11,10,5,12 \rangle & \langle 13,1,6,5 \rangle &
\end{array}$$

对于 $t=2$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{21}\cup\{\infty_1,\infty_2\}$ 上构造所要的最优码。它的码字由下述码字 $+7 \pmod{21}$ 展开得到，其中的无穷点在展开过程中保持不变。

$$\begin{array}{llllll}
\langle 0,1,2,3\rangle & \langle 9,20,16,3\rangle & \langle 7,16,11,19\rangle & \langle 5,8,19,2\rangle & \langle 2,12,7,20\rangle & \langle 0,11,18,10\rangle \\
\langle 10,5,4,6\rangle & \langle 15,3,10,2\rangle & \langle 1,14,20,\infty_2\rangle & \langle 6,7,3,14\rangle & \langle 2,\infty_2,4,15\rangle & \langle 9,\infty_1,18,15\rangle \\
\langle 1,7,5,\infty_1\rangle & \langle \infty_2,12,3,0\rangle & \langle 10,\infty_1,20,12\rangle & \langle 8,1,13,11\rangle & \langle 13,18,6,12\rangle &
\end{array}$$

对于 $t=3$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{32}$ 上构造所要的最优码，它的码字由下述码字 $+4 \pmod{32}$ 展开得到。

$$\begin{array}{llllll}
\langle 2,8,31,1\rangle & \langle 2,9,24,23\rangle & \langle 2,14,17,30\rangle & \langle 1,12,23,2\rangle & \langle 3,20,22,26\rangle & \langle 0,18,29,13\rangle \\
\langle 0,28,8,3\rangle & \langle 2,26,27,28\rangle & \langle 2,20,25,21\rangle & \langle 3,1,27,31\rangle & \langle 3,23,18,28\rangle & \langle 3,17,29,21\rangle \\
\langle 0,9,19,16\rangle & & & & &
\end{array}$$

最后对于 $t=4$，由引理 6.26 存在型为 $1^{36}5^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，在最后一个组中填入最优 $(5,6,[3,1])_3$-码即可。 □

引理 6.28: 对任意 $t\geq 16$ 且 $t\neq 26$，$A_3(9t+5,6,[3,1])=U(9t+5,6,[3,1])$。

证明. 对任意 $t\geq 16$ 且 $t\neq 26$，我们可以将 t 写为 $t=4u+x$，这里 $x\in\{0,1,2,3\}$。由引理 6.14–6.15 存在型为 $36^u(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加五个无穷点，填入型为 $1^{36}5^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.26）得到一个型为 $1^{36u}(9x+5)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。再在最后一个组中填入长为 $9x+5$ 的最优码（引理 6.27）即可。 □

定理 6.6: 对任意 $t\geq 0$ 且 $t\notin[5,15]\cup\{26\}$，$A_3(9t+5,6,[3,1])=U(9t+5,6,[3,1])$。

6.3.6 $n\equiv 7 \pmod 9$ 的情形

引理 6.29: 存在型为 $1^{36}7^1$ 大小为 190 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 令 $X=(\mathbb{Z}_{12}\times\{0,1,2\})\cup(\mathbb{Z}_3\times\{3,4\})\cup\{\infty\}$。集合 $(\mathbb{Z}_3\times\{3,4\})\cup\{\infty\}$ 形成了大小为 7 的组。定义 $\alpha: X\to X$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 12 的若 $y\in\{0,1,2\}$，或是模 3 的若 $y\in\{3,4\}$。无穷点在 α 作用下保持不变。将下述基码字用 α 展开：

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0_3,4_2,6_1,8_0\rangle & \langle 0_3,9_2,4_1,8_1\rangle & \langle 0_3,5_2,7_0,0_0\rangle & \langle 8_0,6_0,11_1,0_3\rangle & \langle 0_4,6_1,11_1,6_2\rangle \\
\langle 0_4,0_0,1_1,7_2\rangle & \langle 0_4,8_2,7_0,8_0\rangle & \langle 0_2,8_0,7_2,0_4\rangle & \langle 0_0,3_0,11_1,3_2\rangle & \langle 3_0,0_2,10_1,1_1\rangle \\
\langle 8_1,4_0,6_1,9_2\rangle & \langle 6_0,2_0,8_2,1_0\rangle & \langle \infty,4_0,1_1,0_2\rangle & \langle 8_2,10_2,7_2,4_1\rangle & \langle 10_1,7_2,11_1,7_1\rangle
\end{array}$$

进一步将下述码字展开，得到一个长为 6 的短轨道和一个长为 4 的短轨道：

$$\langle 0_0,6_0,0_1,6_1\rangle \quad \langle 0_2,4_2,8_2,\infty\rangle$$

□

引理 6.30: 存在型为 $1^{54}7^1$ 大小为 393 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 令 $X=(\mathbb{Z}_{18}\times\{0,1,2\})\cup(\mathbb{Z}_3\times\{3,4\})\cup\{\infty\}$。集合 $(\mathbb{Z}_3\times\{3,4\})\cup\{\infty\}$ 形成了大小为 7 的组。定义 $\alpha: X\to X$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 18 的若 $y\in\{0,1,2\}$，或是模 3 的若 $y\in\{3,4\}$。无穷点在 α 作用下保持不变。将下述基码字用 α 展开：

$$\begin{array}{lllll}
\langle 3_1,5_2,8_2,4_0\rangle & \langle 0_4,1_2,8_0,15_2\rangle & \langle 0_3,17_2,8_1,10_0\rangle & \langle 0_0,2_1,13_2,12_1\rangle & \langle 0_4,3_0,13_0,11_2\rangle\\
\langle 3_0,5_0,9_1,7_2\rangle & \langle 14_2,1_2,2_0,5_2\rangle & \langle 1_2,2_2,13_1,17_0\rangle & \langle 0_3,4_1,11_0,12_2\rangle & \langle 11_0,12_0,5_0,10_1\rangle\\
\langle 0_0,5_0,8_1,1_1\rangle & \langle 0_5,7_0,4_1,17_2\rangle & \langle 6_0,3_2,11_2,13_1\rangle & \langle 0_3,13_2,9_1,15_0\rangle & \langle 1_1,13_2,14_1,15_2\rangle\\
\langle 6_1,3_1,3_2,11_0\rangle & \langle 0_4,10_1,9_1,17_1\rangle & \langle 3_0,12_2,6_0,16_1\rangle & \langle 15_2,15_0,1_0,0_3\rangle & \langle 0_1,12_1,16_1,11_0\rangle\\
\langle 8_1,0_2,11_2,0_4\rangle & & & &
\end{array}$$

进一步将下述码字展开，得到一个长为 9 的短轨道和一个长为 6 的短轨道：

$$\langle 0_0,9_0,0_1,9_1\rangle \quad \langle 0_2,6_2,12_2,0_5\rangle$$

□

引理 6.31: 存在型为 18^4 大小为 432 的 $[3,1]$-GDC(6)。

证明. 令 $X=\mathbb{Z}_{72}$，$\mathcal{G}=\{\{i,i+4,i+8,\ldots,i+68\}:0\le i\le 3\}$。则 $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 就是所要的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 是由下述码字 $+1 \pmod{72}$ 展开得到：

$$\langle 43,69,22,20\rangle \quad \langle 62,0,53,59\rangle \quad \langle 18,1,55,68\rangle \quad \langle 31,65,4,70\rangle \quad \langle 66,24,25,27\rangle \quad \langle 0,14,57,7\rangle$$

□

引理 6.32: $A_3(7,6,[3,1])=2$；对任意 $t\in\{1,2,3,6,24\}$，$A_3(9t+7,6,[3,1])=U(9t+7,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=0$ 的情形，见表格 6.1。

对于 $t=1$，我们在集合 I_{16} 上构造所要码，它的所有码字罗列如下：

$$\begin{array}{llll}
\langle 4,6,9,5\rangle & \langle 9,0,3,13\rangle & \langle 5,2,10,11\rangle & \langle 9,15,2,14\rangle\\
\langle 1,0,6,8\rangle & \langle 4,8,14,2\rangle & \langle 15,6,12,7\rangle & \langle 11,0,14,5\rangle\\
\langle 8,5,7,6\rangle & \langle 0,12,2,4\rangle & \langle 10,7,0,15\rangle & \langle 8,13,15,0\rangle\\
\langle 3,2,1,7\rangle & \langle 3,5,15,4\rangle & \langle 10,6,3,14\rangle & \langle 11,4,1,15\rangle\\
\langle 1,5,13,9\rangle & \langle 11,7,9,12\rangle & \langle 14,7,13,3\rangle & \langle 13,10,4,12\rangle\\
\langle 9,10,8,1\rangle & \langle 3,8,12,11\rangle & \langle 13,11,6,2\rangle & \langle 1,12,14,10\rangle
\end{array}$$

对于 $t=2$，我们在集合 $\mathbb{Z}_{24}\cup\{\infty\}$ 上构造所要的最优码。将下述码字 $+4 \pmod{24}$ 展开：

$$\begin{array}{lllll}\langle 0,9,10,5\rangle & \langle 21,5,18,9\rangle & \langle 10,17,4,22\rangle & \langle 7,16,18,11\rangle & \langle 11,17,0,12\rangle \\ \langle 6,7,2,12\rangle & \langle 9,8,12,11\rangle & \langle 1,23,15,11\rangle & \langle 0,7,22,14\rangle & \langle \infty,23,17,2\rangle\end{array}$$

然后再添加两个码字 $\langle 0,8,16,\infty\rangle$ 和 $\langle 4,12,20,\infty\rangle$。

对于 $t=3$，我们在集合 $X=(\mathbb{Z}_6\times\{0,1,2,3,4\})\cup(\mathbb{Z}_2\times\{5,6\})$ 上构造所要的最优码。定义 $\alpha: X\to X$，$x_y\to(x+1)_y$，这里的加法是模 6 的若 $y\in\{0,1,2,3,4\}$，或是模 2 的若 $y\in\{5,6\}$。将下述码字用 α 展开：

$$\begin{array}{lllll}\langle 0_5,1_4,1_1,0_2\rangle & \langle 0_5,3_0,2_4,5_2\rangle & \langle 0_5,5_3,2_1,4_3\rangle & \langle 0_2,5_2,2_3,0_5\rangle & \langle 0_6,3_1,2_0,1_3\rangle \\ \langle 0_6,0_4,5_0,2_1\rangle & \langle 3_2,5_4,3_3,0_6\rangle & \langle 1_2,0_1,4_0,3_0\rangle & \langle 3_1,3_3,3_0,4_0\rangle & \langle 5_4,4_1,3_1,2_4\rangle \\ \langle 0_1,2_0,3_2,0_2\rangle & \langle 5_0,1_3,2_4,2_3\rangle & \langle 4_2,4_0,4_4,5_3\rangle & \langle 2_2,0_1,4_2,3_4\rangle & \langle 3_3,1_4,0_4,2_2\rangle \\ \langle 0_0,2_4,4_4,5_1\rangle & \langle 0_6,0_3,2_2,5_4\rangle & \langle 1_0,5_3,0_2,4_0\rangle & \langle 4_3,0_3,5_1,2_1\rangle & \end{array}$$

然后再添加下面 5 个码字：

$$\langle 0_0,2_0,4_0,0_5\rangle \quad \langle 1_0,3_0,5_0,1_5\rangle \quad \langle 0_5,1_5,0_6,1_6\rangle \quad \langle 0_1,2_1,4_1,0_6\rangle \quad \langle 1_1,3_1,5_1,1_6\rangle$$

对于 $t=6$，由引理 6.23 存在型为 15^4 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加一个无穷点并填入长为 16 的最优码就可得到所要的码。

最后对于 $t=24$，由引理 6.31 存在型为 18^4 的 $[3,1]$-GDC(6)，应用构造 6.4 取 $m=3$ 可以得到一个型为 54^4 的 $[3,1]$-GDC(6)。添加七个无穷点并填入型为 $1^{54}7^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.30）或最优 $(61,6,[3,1])_3$-码就可得到所要的最优码。 □

引理 6.33：对任意 $t\geq 17$ 且 $t\notin\{20,26,28\}$，$A_3(9t+7,6,[3,1])=U(9t+7,6,[3,1])$。

证明. 对任意 $t\equiv 1,2,3 \pmod 4$，$t\geq 17$ 且 $t\neq 26$，我们可以将 t 写为 $t=4u+x$，这里 $x\in\{1,2,3\}$。由引理 6.14–6.15 存在型为 $36^u(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加七个无穷点，填入型为 $1^{36}7^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)（引理 6.29）得到一个型为 $1^{36u}(9x+7)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。再在最后一个组中填入长为 $9x+7$ 的最优码（引理 6.32）即可。

现在我们来考察 $t\equiv 0 \pmod 4$ 的情形。对于 $t=24$，见引理 6.32。对于 $t\geq 120$，将 t 写为 $t=4u+24$。由引理 6.14 存在型为 36^u216^1 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加七个无穷点并填充组。对于 $32\leq t<120$，将 t 写为 $t=6u-12+x+y+z$，这里 $u\in\{7,9,11,13,16,19\}$，$x,y,z\in\{0,2,4,6\}$ 并且 x, y, z 中至多有一个取值

2。我们由一个 TD$(7,u)$（定理 2.8）出发，删去一个点并利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $6^u(u-1)^1$ 的 $\{7,u\}$-GDD。对于前 $u-2$ 个大小为 6 的组中的点赋权 9，对于其他点赋权 0 或 9，应用构造 6.3 可以得到一个型为 $54^{u-2}(9x)^1(9y)^1(9z)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。添加七个无穷点并填充组，由于型为 $1^{36}7^1$ 和 $1^{54}7^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 以及长为 25 和 61 的最优码均存在，我们就可以得到所要的长为 $9(6u-12+x+y+z)+7$ 的最优码。 □

综合上述结果，我们有：

定理 6.7: $A_3(7,6,[3,1]) = 2$；对任意 $t \geq 1$ 且 $t \notin \{4,5\} \cup [7,16] \cup \{20,26,28\}$，$A_3(9t+7,6,[3,1]) = U(9t+7,6,[3,1])$。

6.3.7 $n \equiv 8 \pmod 9$ 的情形

引理 6.34: $A_3(8,6,[3,1]) = 4$；对于 $t \in \{1,2\}$，$A_3(9t+8,6,[3,1]) = U(9t+8,6,[3,1])$。

证明. 对于 $t=0$ 的情形，见表格 6.1。

对于 $t=1$，我们在集合 I_{17} 上构造所要码，它的所有码字罗列如下：

$$\begin{array}{llllll}
\langle 5,0,4,2\rangle & \langle 0,3,16,9\rangle & \langle 2,15,10,5\rangle & \langle 0,10,6,8\rangle & \langle 12,5,6,15\rangle & \langle 7,13,11,5\rangle \\
\langle 7,6,9,3\rangle & \langle 1,12,9,0\rangle & \langle 10,7,1,14\rangle & \langle 11,8,4,3\rangle & \langle 16,5,14,7\rangle & \langle 8,12,13,14\rangle \\
\langle 7,2,8,0\rangle & \langle 1,3,5,13\rangle & \langle 7,4,15,12\rangle & \langle 3,15,14,8\rangle & \langle 9,14,2,13\rangle & \langle 15,11,9,16\rangle \\
\langle 6,4,14,1\rangle & \langle 1,2,11,6\rangle & \langle 13,15,0,1\rangle & \langle 4,13,10,9\rangle & \langle 1,16,8,15\rangle & \langle 14,11,0,12\rangle \\
\langle 5,8,9,10\rangle & \langle 3,12,2,4\rangle & \langle 6,16,13,2\rangle & \langle 16,10,12,11\rangle & &
\end{array}$$

对于 $t=2$，我们在集合 $X=(\mathbb{Z}_4\times\{0,1,2,3,4,5\})\cup(\mathbb{Z}_2\times\{6\})$ 上构造所要的码。定义 $\alpha: X\to X$，$x_y \to (x+1)_y$，这里的加法是模 4 的若 $y\in\{0,1,2,3,4,5\}$，或是模 2 的若 $y\in\{6\}$。将下面的码字用 α 展开：

$$\begin{array}{lllll}
\langle 1_3,2_1,0_6,2_5\rangle & \langle 3_5,3_4,0_6,2_3\rangle & \langle 0_4,1_0,0_6,3_1\rangle & \langle 0_0,2_2,0_6,1_2\rangle & \langle 0_3,3_1,3_2,0_6\rangle \\
\langle 1_5,3_2,3_3,0_4\rangle & \langle 2_4,2_3,1_5,0_1\rangle & \langle 3_5,0_5,0_2,3_0\rangle & \langle 3_4,3_1,0_1,1_4\rangle & \langle 2_0,2_1,2_3,0_3\rangle \\
\langle 0_4,1_4,1_2,3_2\rangle & \langle 3_2,2_1,0_5,0_1\rangle & \langle 2_1,3_0,1_5,3_5\rangle & \langle 0_0,1_1,3_2,0_2\rangle & \langle 0_5,1_0,2_4,0_3\rangle \\
\langle 0_3,3_3,1_2,1_0\rangle & \langle 1_0,2_3,1_4,2_5\rangle & & &
\end{array}$$

最后再添加一个码字 $\langle 0_0,1_0,2_0,3_0\rangle$。 □

引理 6.35: 对任意 $t\in\{3,4,5,6\}$，型为 $1^{9t}8^1$ 大小为 $9t^2+14t$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 均存在。

证明. 对任意 $t \in \{3,4,5,6\}$，我们在集合 $X = (\mathbb{Z}_{3t} \times \{0,1,2\}) \cup (\mathbb{Z}_3 \times \{3,4\}) \cup \{\infty_0, \infty_1\}$ 上构造所要的 GDC，大小为 8 的组是 $(\mathbb{Z}_3 \times \{3,4\}) \cup \{\infty_0, \infty_1\}$。定义 $\alpha : X \to X$，$x_y \to (x+1)_y$，这里的加法是模 $3t$ 的若 $y \in \{0,1,2\}$，或是模 3 的若 $y \in \{3,4\}$。无穷点在 α 作用下保持不变。首先将下列码字用 α 展开，得到两个长为 t 的短轨道：

$$\langle 0_0, t_0, (2t)_0, \infty_0 \rangle \quad \langle 0_1, t_1, (2t)_1, \infty_1 \rangle$$

然后将下列码字用 α 展开：

$t = 3$:

$\langle 0_3, 0_1, 8_1, 7_0 \rangle$ $\langle 0_3, 0_0, 8_0, 1_2 \rangle$ $\langle 0_3, 0_2, 4_1, 5_2 \rangle$ $\langle 8_2, 4_0, 7_2, 0_3 \rangle$ $\langle 0_4, 2_2, 0_1, 1_0 \rangle$
$\langle 0_4, 0_0, 2_0, 1_1 \rangle$ $\langle 1_0, 7_1, 5_1, 0_4 \rangle$ $\langle 0_0, 0_2, 4_0, 0_1 \rangle$ $\langle \infty_0, 6_1, 4_2, 6_0 \rangle$ $\langle 6_1, 8_0, 2_1, 6_2 \rangle$
$\langle 0_4, 6_2, 4_2, 5_1 \rangle$ $\langle 3_1, 0_2, 6_2, 7_0 \rangle$ $\langle \infty_1, 6_2, 0_0, 2_1 \rangle$

$t = 4$:

$\langle \infty_0, 4_1, 11_2, 7_0 \rangle$ $\langle 5_1, 1_2, 6_2, 7_2 \rangle$ $\langle 0_3, 3_1, 10_1, 8_2 \rangle$ $\langle 3_2, 5_2, 8_0, 0_3 \rangle$ $\langle 0_0, 0_1, 1_0, 7_0 \rangle$
$\langle 2_1, 11_1, 0_1, 11_2 \rangle$ $\langle 0_4, 0_2, 8_2, 6_1 \rangle$ $\langle 5_0, 3_2, 0_1, 10_0 \rangle$ $\langle 0_4, 0_0, 10_1, 4_2 \rangle$ $\langle 1_2, 9_1, 5_0, 0_4 \rangle$
$\langle 0_4, 10_0, 11_1, 8_0 \rangle$ $\langle 0_3, 2_1, 6_0, 8_0 \rangle$ $\langle 7_2, 5_0, 8_0, 2_1 \rangle$ $\langle 0_3, 4_2, 10_0, 3_2 \rangle$ $\langle 3_0, 3_2, 6_2, 6_1 \rangle$
$\langle \infty_1, 9_2, 8_0, 10_1 \rangle$

$t = 5$:

$\langle 9_1, 5_2, 1_0, 3_2 \rangle$ $\langle 0_1, 3_1, 7_1, 4_2 \rangle$ $\langle 0_4, 2_2, 12_1, 13_1 \rangle$ $\langle 11_0, 6_1, 5_0, 8_0 \rangle$ $\langle 0_3, 11_0, 2_2, 0_0 \rangle$
$\langle 7_1, 0_0, 9_1, 0_3 \rangle$ $\langle 0_3, 2_1, 9_2, 1_1 \rangle$ $\langle 5_1, 14_0, 11_1, 6_0 \rangle$ $\langle 0_4, 12_2, 5_0, 1_0 \rangle$ $\langle 5_2, 8_2, 10_1, 10_2 \rangle$
$\langle 0_4, 2_1, 0_0, 1_2 \rangle$ $\langle 4_1, 4_0, 7_2, 0_4 \rangle$ $\langle 2_1, 13_0, 14_0, 10_2 \rangle$ $\langle 11_0, 1_2, 5_2, 4_0 \rangle$ $\langle \infty_0, 2_1, 4_2, 6_0 \rangle$
$\langle 0_2, 1_2, 7_2, 1_1 \rangle$ $\langle 0_3, 7_2, 7_0, 6_1 \rangle$ $\langle \infty_1, 11_0, 10_2, 1_1 \rangle$ $\langle 12_2, 2_0, 4_0, 0_1 \rangle$

$t = 6$:

$\langle 17_0, 14_1, 17_1, 13_2 \rangle$ $\langle 0_0, 2_2, 12_1, 9_2 \rangle$ $\langle 14_1, 1_0, 7_1, 12_2 \rangle$ $\langle 3_0, 16_0, 14_0, 0_3 \rangle$ $\langle 0_4, 4_1, 0_1, 13_0 \rangle$
$\langle 16_2, 10_0, 2_2, 13_2 \rangle$ $\langle 0_4, 0_0, 15_2, 8_1 \rangle$ $\langle 12_1, 4_2, 12_2, 1_0 \rangle$ $\langle 12_1, 13_0, 2_1, 4_0 \rangle$ $\langle 14_1, 2_2, 4_0, 0_4 \rangle$
$\langle 5_2, 11_2, 10_0, 14_2 \rangle$ $\langle 17_2, 6_1, 0_2, 1_1 \rangle$ $\langle 0_4, 13_2, 14_0, 8_2 \rangle$ $\langle 0_3, 0_1, 17_1, 15_0 \rangle$ $\langle 0_0, 0_2, 10_0, 3_1 \rangle$
$\langle 15_0, 16_0, 12_0, 17_1 \rangle$ $\langle 0_3, 6_2, 4_2, 10_0 \rangle$ $\langle \infty_1, 12_2, 5_0, 3_1 \rangle$ $\langle 0_1, 2_2, 16_1, 7_2 \rangle$ $\langle 0_3, 17_2, 4_1, 8_0 \rangle$
$\langle \infty_0, 15_1, 0_2, 14_0 \rangle$ $\langle 1_1, 2_2, 15_0, 6_1 \rangle$

□

引理 6.36: 对任意 $t \geq 13$ 且 $t \notin \{15, 23, 28\}$，$A_3(9t+8, 6, [3,1]) = U(9t+8, 6, [3,1])$。

证明. 对于 $t \in \{13, 16, 19\}$，由引理 6.11 存在型为 $27^s 9^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，$s \in \{4,5,6\}$。添加八个无穷点并填入型为 $1^{27} 8^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 或最优的 $(17, 6, [3,1])_3$-码（引理 6.34）就可得到所要的码。对于 $t \in \{14, 20\}$, 由引理 6.12 存在型为 $27^s 18^1$

的 $[3,1]$-GDC(6)，$s \in \{4,6\}$。添加八个无穷点并填入型为 $1^{27}8^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6) 或最优的 $(26,6,[3,1])_3$-码即可。对于 $t \in \{17,18\}$，由引理 6.14 存在型为 $36^4 9^1$ 和 $36^4 18^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加八个无穷点并填充组。

对于 $t \in \{21,22,24,25,26,27\}$，由 TD$(6,5)$ 出发，对前四个组中的点赋权 9，对其他点赋权 0 或 9。应用构造 6.3 就可以得到一个型为 $45^4(9x)^1(9y)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $x \in \{0,3,4,5\}$，$y \in \{1,2\}$。添加八个无穷点并填充组就可得到所要的最优码。对于 $t \in \{29,30\}$，由引理 6.14 存在型为 $36^7 9^1$ 和 $36^7 18^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加八个无穷点并填充组。

对于 $31 \leq t \leq 80$ 且 $t \notin \{33,57\}$，我们由一个 TD$(7,u)$（定理 2.8）出发，这里 $u \in \{7,8,9,11,12,13\}$，删去一个点并利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $6^u(u-1)^1$ 的 $\{7,u\}$-GDD。对于前 $u-2$ 个大小为 6 的组中的点赋权 9，对于其他点赋权 0 或 9，应用构造 6.3 可以得到一个型为 $54^{u-2}(9x)^1(9y)^1(9z)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $x,y \in \{0,3,4,5,6\}$，$z \in \{1,2\}$。然后添加八个无穷点并填充组即可。对于 $t \in \{33,57\}$，由引理 6.14 存在型为 $36^8 9^1$ 和 $36^{14} 9^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，添加八个无穷点并填充组。

最后对于 $t \geq 80$ 且 $t \notin \{83,87,91\}$，由引理 6.14 存在型为 $36^u(9x)^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)，这里 $x \in \{1,2,16\}$，$u \geq 16$ 或者 $x = 19$，$u \geq 19$。添加八个无穷点并填充组。对于 $t \in \{83,87,91\}$，我们由一个 TD$(6,u)$（定理 2.8）出发，这里 $u \in \{15,17,19\}$，删去一个点并利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $5^u(u-1)^1$ 的 $\{6,u\}$-GDD。对于前 $u-1$ 个大小为 5 的组中的点赋权 9，对于其他点赋权 0 或 9，应用构造 6.3 可以得到型为 $45^{14}117^1$，$45^{17}18^1$ 和 $45^{18}9^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。添加八个无穷点并填充组就可得到所要的最优码。 □

综合上述的引理，我们有：

定理 6.8: $A_3(8,6,[3,1]) = 4$；对任意 $t \geq 1$ 且 $t \notin [3,12] \cup \{15,23,28\}$，$A_3(9t+8,6,[3,1]) = U(9t+8,6,[3,1])$。

6.4 确定 $A_3(n,6,[2,2])$ 的值

在本节中，我们主要来讨论当 $n\equiv 5 \pmod 6$ 时，$A_3(n,6,[3,1])$ 的具体取值。对于其他类，Zhang 在她的博士论文[172]中已经基本解决了。

定理 6.9：对任意整数 $n\geq 4$，

$$A_3(n,6,[2,2])=\begin{cases}1, & \text{当 } n\leq 5 \text{ 时;}\\ 3, & \text{当 } n=7 \text{ 时;}\\ 5, & \text{当 } n=8 \text{ 时;}\\ 15, & \text{当 } n=11 \text{ 时;}\\ \left\lfloor \frac{n}{2}\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor\right\rfloor, & \text{当 } n\geq 6\text{，} n\not\equiv 5 \pmod 6\text{，} n\notin\{7,8,16,22,\\ & 76,88,94,124,142,166,184\} \text{ 时,}\end{cases}$$

$A_3(13,6,4)\in[21,26]$，$A_3(14,6,4)\in[27,28]$。

当 $n\equiv 5 \pmod 6$ 时，对任意 $t\geq 3$，$t\notin\{9,10,11,14\}$，

$$A_3(6t+5,6,[2,2])\in[2(3t+1)(t+1)-1,2(3t+1)(t+1)],$$

对 $t\in\{2,14\}$，

$$A_3(6t+5,6,[2,2])\in[2(3t+1)(t+1)-2,2(3t+1)(t+1)]。$$

为了解决 $n\equiv 5 \pmod 6$ 的类，我们需要下面的结果。

定理 6.10 (Ge[76])：$(g,4;1)$-DM 存在当且仅当 $g\geq 4$ 且 $g\not\equiv 2 \pmod 4$。

定理 6.11：若存在 $\mathbb{Z}_g$ 上的 $(g,4;1)$-DM，则存在型为 g^4 大小为 $2g^2$ 的 $[2,2]$-GDC(6)。

证明. 令 $M=[m_{i,j}]$ 是所给的 $(g,4;1)$-DM。我们在集合 $\{\{(i,j):j\in\mathbb{Z}_g\}:0\leq i\leq 3\}$ 上构造所要的 GDC。它是由所有如下的码字构成，$\langle(0,m_{1,j}+k),(1,m_{2,j}+k),(2,m_{3,j}+k),(3,m_{4,j}+k)\rangle$，$\langle(2,m_{3,j}+k),(3,m_{4,j}+k),(0,m_{1,j}+1+k),(1,m_{2,j}+1+k)\rangle$，$j,k\in\mathbb{Z}_g$。容易验证构造出来的码距离为 6 复合构型为 $[2,2]$。 □

综合定理 6.10 和 6.11，我们有下述结果。

引理 6.37: 对任意 $g \geq 4$ 且 $g \not\equiv 2 \pmod 4$，型为 g^4 大小为 $2g^2$ 的 $[2,2]$-GDC(6) 均存在。

引理 6.38: 对任意 $t \geq 3$，$A_3(24t+5,6,[2,2]) = U(24t+5,6,[2,2])$。

证明. 由引理 6.37 存在型为 g^4 大小为 $2g^2$ 的 $[2,2]$-GDC(6)。添加一个无穷点并填入长为 $6t+2$ 的最优码（文献[172]）即可。 □

引理 6.39: 对任意 $t \geq 130$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) = U(6t+5,6,[2,2])$。

证明. 由定理 2.8 存在 TD$(7,m)$，这里 $m \geq 23$ 且 $m \notin \{26,30,34,38,46,60\}$。对前五个组中的点赋权 6，对其他点赋权 0 或 6，注意到对任意 $s \in \{5,6,7\}$，型为 6^s 的 $[2,2]$-GDC(6) 均存在（文献[172]），应用构造 6.3 我们可以得到一个型为 $(6m)^5(6x)^1 72^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)，这里 $x \in [3,8] \cup [18,23]$。现在添加五个无穷点，填入型为 $2^{3m}5^1$ 或 $2^{3x}5^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6) （文献[172]）或最优 $(77,6,[2,2])_3$-码（引理 6.38），这样就得到了所要的最优码。 □

引理 6.40: 对任意 $t \in \{54,55\}$ 或 $63 \leq t \leq 129$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) = U(6t+5,6,[2,2])$。

证明. 对于 $t \in \{54,55\}$，由定理 2.8 存在 TD$(5,12)$，对前四个组中的点赋权 6，对最后一个组中的点赋权 3 或 6，应用构造 6.3 我们可以得到型为 $72^4 36^1$ 和 $72^4 42^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)，添加五个无穷点并填充组即可。

对于 $63 \leq t \leq 76$，我们由一个 TD$(9,8)$ 出发，对前六个组中的点赋权 6，对最后一个组中的点赋权 9，对其他点赋权 0 或 6，注意到对任意 $s \in \{6,7,8\}$，型为 $6^s 9^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6) 均存在（文献[172]），应用构造 6.3 我们可以得到一个型为 $48^6(6x)^1(6y)^1 72^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)，这里 $x,y \in \{0,3,4,5,6,7,8\}$。添加五个无穷点并填充组就可得到所要码。

对任意 $77 \leq t \leq 100$ 且 $t \notin \{85,86\}$，我们由一个 TD$(9,u)$ 出发，这里 $u \in \{9,11\}$，删去一个点并利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $8^u(u-1)^1$ 的 $\{9,u\}$-GDD。对于前 $u-2$ 个大小为 8 的组中的点赋权 6，对大小为

$u-1$ 的组中的点赋权 0 或 9，对于其他点赋权 0 或 6。注意到型为 $6^{s_1}9^1$ 和 6^{s_2} 的 $[2,2]$-GDC(6) 存在，$s_1 \in \{6,7,8\}$，$5 \le s_2 \le 11$（文献[172]），应用构造 6.3 我们可以得到一个型为 $48^{u-2}(6x)^1(6y)^1 72^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)，这里 $x, y \in \{0,3,4,5,6,7,8\}$。添加五个无穷点并填充组。

对于 $t \in \{85, 86\}$，我们由一个 TD(8, 11) 出发，删去一个点并利用这个删去的点重新定义组，我们可以得到一个型为 $7^{11}10^1$ 的 $\{8,11\}$-GDD。对于前 10 个大小为 7 的组中的点赋权 6，对大小为 10 的组中的点赋权 0 或 9，对于其他点赋权 0 或 6，应用构造 6.3 可以得到一个型为 $42^{10}(6x)^1 72^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)，这里 $x \in \{3,4\}$。添加五个无穷点并填充组。

最后，对于 $101 \le t \le 129$，我们由一个 TD(11, 16) 出发，对前五个组中的点赋权 6，对其他点赋权 0 或 6，应用构造 6.3 我们可以得到一个型为 $96^5(6x_1)^1(6x_2)^1 \dots (6x_5)^1 72^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)，这里 $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \{0,3,4,5,6,7,8\}$。添加五个无穷点并填充组就可得到所要的最优码。 □

综合上述结果以及文献[172]，我们有：

定理 6.12: 令 $Q^{(5)} = \{9,10,11\}$，$Q_1^{(5)} = \{3,4,5,6,7,8,13,57,58,59,61,62\} \cup \{t : 15 \le t \le 53, t \not\equiv 0 \pmod 4\}$，$Q_2^{(5)} = \{2,14\}$。则 $A_3(5,6,[2,2]) = 1$，$A_3(11,6,[2,2]) = 15$；对任意 $t \ge 2$ 且 $t \notin Q^{(5)} \cup Q_1^{(5)} \cup Q_2^{(5)}$，$A_3(6t+5,6,[2,2]) = U(6t+5,6,[2,2])$。进一步的我们有：

1. 对任意 $t \in Q_1^{(5)}$，$U(6t+5,6,[2,2]) - 1 \le A_3(6t+5,6,[2,2]) \le A_3(6t+5,6,[2,2])$;
2. 对任意 $t \in Q_2^{(5)}$，$U(6t+5,6,[2,2]) - 2 \le A_3(6t+5,6,[2,2]) \le A_3(6t+5,6,[2,2])$.

最后我们再来改进下 $n \equiv 4 \pmod 6$ 的结果。

引理 6.41: 对任意 $(g,u,m) \in \{(9,5,9),(9,5,15),(18,6,33)\}$，型为 $g^u m^1$ 大小为 $(g^2u(u-1)+2gum)/6$ 的 $[2,2]$-GDC(6) 均存在。

证明. 令 $X = I_{gu+m}$，$\mathcal{G} = \{\{0,u,2u,\dots,(g-1)u\}+i : 0 \le i \le u-1\} \cup \{\{gu, gu+1, gu+2, \dots, gu+m-1\}\}$。则 $(X,\mathcal{G},\mathcal{C})$ 就是所要的 $[2,2]$-GDC(6)，这里 $\mathcal{C}$ 由下述码字在群 G 的作用下展开得到的。

$9^5 9^1$: $G = \langle(0\ 1\ 2\ \cdots\ 44)(45\ 46\ \cdots\ 53)\rangle$

$\langle 2,45,43,1\rangle$ $\langle 0,9,17,28\rangle$ $\langle 24,21,42,3\rangle$ $\langle 4,45,30,8\rangle$ $\langle 17,40,24,33\rangle$
$\langle 1,7,45,38\rangle$ $\langle 0,12,45,14\rangle$ $\langle 8,42,45,40\rangle$ $\langle 14,45,27,15\rangle$

$9^5 15^1$: $G = \langle(0\ 1\ 2\ \cdots\ 44)(45\ 46\ \cdots\ 59)\rangle$

$\langle 45,35,18,27\rangle$ $\langle 45,13,9,16\rangle$ $\langle 45,41,4,17\rangle$ $\langle 24,15,41,45\rangle$ $\langle 45,22,40,6\rangle$
$\langle 18,16,22,45\rangle$ $\langle 8,21,35,45\rangle$ $\langle 4,27,43,45\rangle$ $\langle 10,17,29,45\rangle$ $\langle 0,11,42,44\rangle$
$\langle 45,14,15,38\rangle$

$18^6 33^1$: $G = \langle(0\ 1\ 2\ \cdots\ 107)(108\ 109\ \cdots\ 113)(114\ 115\ \cdots\ 119)(120\ 121\ \cdots\ 125)$
$(126\ 127\ \cdots\ 131)(132\ 133\ \cdots\ 140)\rangle$

$\langle 0,138,53,97\rangle$ $\langle 0,20,17,131\rangle$ $\langle 0,82,7,128\rangle$ $\langle 0,70,92,139\rangle$ $\langle 0,52,27,108\rangle$
$\langle 0,121,68,81\rangle$ $\langle 0,95,58,140\rangle$ $\langle 0,47,43,63\rangle$ $\langle 0,74,67,118\rangle$ $\langle 0,73,51,124\rangle$
$\langle 0,115,37,99\rangle$ $\langle 0,136,28,29\rangle$ $\langle 0,39,25,98\rangle$ $\langle 0,117,10,31\rangle$ $\langle 0,127,11,80\rangle$
$\langle 0,87,89,125\rangle$ $\langle 0,137,23,49\rangle$ $\langle 0,44,15,85\rangle$ $\langle 0,62,45,109\rangle$ $\langle 0,126,14,75\rangle$
$\langle 0,107,76,119\rangle$ $\langle 0,103,50,106\rangle$ $\langle 0,120,4,9\rangle$ $\langle 0,8,40,133\rangle$ $\langle 0,111,19,93\rangle$
$\langle 0,112,57,65\rangle$

□

引理 6.42: 存在型为 $1^{27}4^1$ 大小为 153 的 $[2,2]$-GDC(6)。

证明. 令 $X = (\mathbb{Z}_9 \times \{0,1,2\}) \cup (\mathbb{Z}_3 \times \{3\}) \cup \{\infty\}$。集合 $(\mathbb{Z}_3 \times \{3\}) \cup \{\infty\}$ 构成了大小为 4 的组。定义 $\alpha: X \to X$，$x_y \to (x+1)_y$，这里的加法是模 9 的若 $y \in \{0,1,2\}$，或是模 3 的若 $y \in \{3\}$。无穷点在 α 作用下保持不变。将下面的码字用 α 作用展开即可：

$\langle 7_2,0_3,3_2,5_0\rangle$ $\langle 5_1,0_3,1_0,3_0\rangle$ $\langle 8_2,0_3,6_1,4_1\rangle$ $\langle 5_0,0_2,0_3,8_2\rangle$ $\langle 1_1,0_1,0_3,5_1\rangle$
$\langle 5_1,\infty,0_0,4_2\rangle$ $\langle 0_0,7_2,\infty,0_1\rangle$ $\langle 5_1,7_1,7_0,6_0\rangle$ $\langle 8_1,0_2,1_2,4_2\rangle$ $\langle 7_1,4_1,2_2,4_2\rangle$
$\langle 0_2,6_1,3_0,0_0\rangle$ $\langle 1_2,8_2,5_0,0_0\rangle$ $\langle 5_2,8_2,0_1,8_1\rangle$ $\langle 4_0,3_0,1_1,7_1\rangle$ $\langle 0_0,2_0,1_1,2_2\rangle$
$\langle 3_0,7_0,0_3,4_2\rangle$ $\langle 1_0,7_0,6_2,3_1\rangle$

□

引理 6.43: 对于 $t \in \{23,27,30\}$，$A(6t+4,6,[2,2]) = U(6t+4,6,[2,2])$。

证明. 对于 $t = 23$，由引理 6.41 存在型为 $18^6 33^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)。添加一个无穷点并填入长为 19 或 34 的最优码就可得到所要码。

对于 $t \in \{27,30\}$，由引理 6.41 存在型为 9^6 和 $9^5 15^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6)。应用构造 6.4 取 $m = 3$ 我们可以得到型为 27^6 和 $27^5 45^1$ 的 $[3,1]$-GDC(6)。添加四个无穷点并填入型为 $1^{27}4^1$ 的 $[2,2]$-GDC(6) 和长为 31 或 49 的最优码即可。 □

6.5 小结

在本章中，我们基本上确定了重量为4、距离为6的最优三元常重复合码的码字个数。我们将本章结果以及文献[172]中的结果总结如下：

定理 6.13: 对任意整数 $n \geq 4$，令 $Q = \{13, 16, 22, 59, 65, 71, 76, 88, 94, 124\}$，$Q_1 = \{14, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 83\} \cup \{n : 95 \leq n \leq 323, n \equiv 11, 17, 23 \pmod{24}\} \cup \{347, 353, 359, 371, 377\}$，$Q_2 = \{17, 89\}$，我们有

$$A_3(n, 6, [2, 2]) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \in \{4, 5\}; \\ 3, & \text{若 } n = 7; \\ 5, & \text{若 } n = 8; \\ 15, & \text{若 } n = 11; \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor, & \text{若 } n \geq 6 \text{ 且 } n \notin \{7, 8, 11\} \cup Q \cup Q_1 \cup Q_2. \end{cases}$$

进一步，我们有：

1. 当 $n \in Q_1$ 时，$\left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor - 1 \leq A_3(n, 6, [2, 2]) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$；

2. 当 $n \in Q_2$ 时，$\left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor - 2 \leq A_3(n, 6, [2, 2]) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor$。

定理 6.14: 对任意整数 $n \geq 4$，将 n 写为 $n = 9t + i$，$0 \leq i < 9$。我们有：

1. $i = 0$: 对任意 $t \geq 1$，$A_3(9t, 6, [3, 1]) = 9t^2 - 3t$；

2. $i = 1$: 对任意 $t \geq 1$ 且 $t \neq 2$，$A_3(9t + 1, 6, [3, 1]) = 9t^2 + t$；

3. $i = 2$: 对任意 $t \geq 1$，$A_3(9t + 2, 6, [3, 1]) = 9t^2 + 2t$；

4. $i = 3$: 对任意 $t \geq 1$，$A_3(9t + 3, 6, [3, 1]) = 9t^2 + 3t$；

5. $i = 4$: 对任意 $t \geq 0$ 且 $t \notin \{1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 21, 25, 26, 29, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81\}$，$A_3(9t + 4, 6, [3, 1]) = 9t^2 + 6t + 1 + \lfloor \frac{t}{4} \rfloor$；

6. $i = 5$: 对任意 $t \geq 0$ 且 $t \notin [5, 15] \cup \{26\}$，$A_3(9t+5, 6, [3, 1]) = 9t^2+7t+1+\lfloor \frac{t+1}{4} \rfloor$；

7. $i=6$: 对任意 $t \geq 0$，$A_3(9t+6,6,[3,1]) = 9t^2+9t+2$；

8. $i=7$: 对任意 $t \geq 1$ 且 $t \notin \{4,5\} \cup [7,16] \cup \{20,26,28\}$，$A_3(9t+7,6,[3,1]) = 9t^2+11t+3+\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$；

9. $i=8$: 对任意 $t \geq 1$ 且 $t \notin [3,12] \cup \{15,23,28\}$，$A_3(9t+8,6,[3,1]) = 9t^2+14t+5$。

7 用完全可约超单设计构造最优多元常重码

7.1 引言

一个设计如果没有重复的区组，就称为是单的（simple）。一个设计被称为是超单的（super-simple，SS），如果任意两个区组最多交于两个点。对于一个点集为 X，区组集为 $\mathcal{B}$，指数为 λ 的设计 $\mathcal{D}$，如果它的区组集 $\mathcal{B}$ 可以写成 $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{\lambda}\mathcal{B}_i$，使得对任意的 $1\le i\le\lambda$，$\mathcal{B}_i$ 构成与 $\mathcal{D}$ 参数相同但是指数为 1 的设计，则 $\mathcal{D}$ 称为完全可约超单（completely reducible super-simple，CRSS）设计。这里，CRSS 的定义可以用于各种设计，并用来简化符号。我们把一个点集大小为 v，区组大小为 k，指数为 λ 的完全可约超单 BIBD 写成 (v,k,λ)-CRSS 设计，把一个区组大小为 k，指数为 λ 的完全可约超单 GDD 简记为 (k,λ)-CRSSGDD。容易看出，一个 (v,k,λ)-CRSS 设计存在的必要条件是：

(i) $v\ge(k-2)\lambda+2$;

(ii) $v-1\equiv 0 \pmod{k-1}$;

(iii) $v(v-1)\equiv 0 \pmod{k(k-1)}$.

CRSS 设计和多元常重码密切相关。事实上，一个 (v,k,λ)-CRSS 设计就是一个最优的 $(v,2(k-1),k)_{\lambda+1}$-码。另一方面，CRSS 可分组设计（CRSSGDD）可以用来构造多元的可分组码。在文献[173]中，作者利用 CRSS 设计和 CWC 之间的联系基本决定了最优 $(n,6,4)_3$-码的码字个数。

本章中我们将来研究区组大小为 5，指数为 2 的 CRSS 设计的存在性问题。我们将证明，除了可能的例外值 $v=25$，$(v,5,2)$-CRSS 设计存在的必要条件也是充分的。利用这个结果，我们基本确定了 $A_3(n,8,5)$ 在 $n\equiv 0,1,4,5 \pmod{20}$ 时的取值。

7.2 预备知识

在之前构造 GDD 的过程中，我们经常用到加权的技巧和 Wilson 基本构造。而对于 CRSSGDD，我们同样有类似的构造方法。

构造 7.1 (**膨胀**[47]): 假设存在型为 $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ 的 (K, λ)-CRSSGDD，并且对任意 $k \in K$，存在横截设计 TD(k, m)。那么存在型为 $\{mh_1, mh_2, \ldots, mh_n\}$ 的 (K, λ)-CRSSGDD。

构造 7.2 (**基本构造**[47]): 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个 GDD。令 $w : X \to Z^+ \cup \{0\}$ 是 X 上的权重函数。若对任意区组 $B \in \mathcal{B}$，型为 $\{w(x) : x \in B\}$ 的 (K, λ)-CRSSGDD 均存在，则型为 $\{\sum_{x \in G} w(x) : G \in \mathcal{G}\}$ 的 (K, λ)-CRSSGDD 存在。

一个正交阵列 OA$_\lambda(t, k, n)$ 是 n 元集 G 上的一个 $k \times \lambda n^t$ 阵列，它满足 G 上的任意 t 元组在每个 $t \times \lambda n^t$ 的子阵列上作为列向量恰出现 λ 次。参数 λ 和 t 分别被称做是正交阵列的指数和强度。当 $\lambda = 1$ 时，我们常把 λ 省去；当 $t = 2$ 时，我们把 t 省去。一个 OA$_\lambda(t, k, n)$ 被称作是r-单的若任意两列至多在 r 个位置有相同的元素。显然的，一个 3-单的 OA$_\lambda(k, n)$ 可以推出一个超单的 TD$_\lambda(k, n)$。一个 OA$_\lambda(t, k, n)$ 被称为是完全可约的若它是 λ 个 OA(t, k, n) 的并。

定理 7.1 ([30]): 若 q 是素数幂并且 $t < q$，则 OA$(t, q+1, q)$ 存在。进一步的，若 $q \geq 4$ 是 2 的方幂，则 OA$(3, q+2, q)$ 存在。

定理 7.2 ([98]): 若 OA(t, k, n) 存在，则对任意非负整数 s，$s < t$，存在完全可约的 t-单 OA$_{n^s}(t-s, k-s, n)$。

推论 7.1: 对任意 $n \in \{4, 5, 9\}$，CRSSTD$_2(5, n)$ 存在。

证明. 由定理 7.1 存在 OA$(3, 6, n)$。应用引理 7.2，我们得到了一个完全可约的 3-单的 OA$_n(5, n)$。这样我们就得到了一个 CRSSTD$_2(5, n)$。 □

最后，我们还要用到下面的结果：

引理 7.1 ([8]): 一个$(v, \{5, w^\star\}, 1)$-PBD 存在，若

(i) $w=5$，$v\equiv 1,5 \pmod{20}$ 且 $v\geq 21$；

(ii) $w=9$，$v\equiv 9,17 \pmod{20}$，$v\geq 37$ 且 $v\neq 49$；

(iii) $w=13$，$v\equiv 13 \pmod{20}$ 且 $v\geq 53$。

7.3 $(v,5,2)$-CRSS 设计

我们先来考察 $v\equiv 1 \pmod{20}$ 时 $(v,5,2)$-CRSS 的存在性。我们直接构造一些小的 $(v,5,2)$-CRSS 设计和一些 $(5,2)$-CRSSGDD，然后利用它们递归地构造大阶的设计。在直接构造中，我们仅搜索一个指数为 1 的设计。然后我们将一个乘子作用到它的区组上得到同样参数的设计，超单的性质是在我们搜索第一个设计的基区组时由计算机来检查的。进一步地，若第一个设计是由循环群展开得到的并且没有短轨道，超单的性质可以由下述命题保证[95]：

命题 7.1：设 G 是一个 Abelian 群，$\mathcal{D}$ 是一个区组集，它里面的区组在 G 的作用下生成了一个型为 g^u 的 $(k,1)$-GDD，并且没有短轨道。那么，$\mathcal{D}\cup -\mathcal{D}$ 生成了一个型为 g^u 的 $(k,2)$-CRSSGDD。

引理 7.2：对任意 $t\in\{9,13\}$，存在型为 5^t 的 $(5,2)$-CRSSGDD。

证明. 令点集为 $\mathbb{Z}_{5t}$，组为 $\{\{0,t,2t,3t,4t\}+i:0\leq i\leq t-1\}$。将下面的基区组展开。

$t=9$: $+3 \pmod{45}$

第一个 GDD 的基区组：

$$\begin{array}{lll}\{0,5,7,29,35\} & \{1,6,30,32,36\} & \{2,10,24,27,35\}\\ \{0,4,19,38,43\} & \{0,12,34,37,44\} & \{2,30,31,43,44\}\end{array}$$

将上述构造的 GDD 的区组乘以 -1 得到第二个 GDD 的区组。

$t=13$: $+1 \pmod{65}$

第一个 GDD 的基区组：

$$\{0,1,21,35,63\} \quad \{0,4,10,19,57\} \quad \{0,7,24,29,40\}$$

将上述构造的 GDD 的区组乘以 -1 得到第二个 GDD 的区组。 □

引理 7.3：对任意 $t \in \{7, 8, 12\}$，存在型为 20^t 的 $(5, 2)$-CRSSGDD。

证明. 对每个 t，令点集为 $\mathbb{Z}_{20t}$，组为 $\{\{0, t, 2t, \ldots, 19t\} + i : 0 \le i \le t-1\}$。第一个 GDD 由下述基区组 $+1 \pmod{20t}$ 展开得到。第二个 GDD 的区组由第一个 GDD 的区组乘以 -1 得到。

$t = 7$:

$$\begin{array}{lll} \{0,4,33,44,85\} & \{0,46,64,72,117\} & \{0,39,93,113,118\} \\ \{0,17,36,51,67\} & \{0,9,57,137,139\} & \{0,65,78,102,108\} \end{array}$$

$t = 8$:

$$\begin{array}{llll} \{0,11,47,66,89\} & \{0,7,17,116,146\} & \{0,35,69,114,142\} & \{0,93,145,147,151\} \\ \{0,3,60,101,134\} & \{0,70,75,95,138\} & \{0,27,110,111,148\} & \end{array}$$

$t = 12$:

$$\begin{array}{llll} \{0,3,62,128,225\} & \{0,21,78,123,151\} & \{0,61,75,107,170\} & \{0,80,193,232,233\} \\ \{0,41,51,94,223\} & \{0,4,141,161,217\} & \{0,26,126,142,148\} & \{0,134,139,169,203\} \\ \{0,52,65,90,119\} & \{0,50,81,136,155\} & \{0,49,196,198,207\} & \end{array}$$

□

引理 7.4：对任意 $t \ge 5$，型为 20^t 的 $(5, 2)$-CRSSGDD 均存在。

证明. 当 $t \equiv 0, 1 \pmod 5$ 且 $t \ge 5$ 时，由引理 7.1 存在 $(4t+1, \{5\}, 1)$-PBD。删去一个点可以得到一个型为 4^t 的 5-GDD。当 $t \equiv 2, 4 \pmod 5$，$t \ge 9$ 且 $t \ne 12$ 时，由引理 7.1 存在 $(4t+1, \{5, 9^\star\}, 1)$-PBD。删去一个不在大小为 9 的区组中的点可以得到一个型为 4^t 的 $\{5, 9\}$-GDD。当 $t \equiv 3 \pmod 5$ 且 $t \ge 13$ 时，由引理 7.1 存在 $(4t+1, \{5, 13^\star\}, 1)$-PBD。删去一个不在大小为 13 的区组中的点可以得到一个型为 4^t 的 $\{5, 13\}$-GDD。这样，对任意 $t \ge 5$ 且 $t \notin \{7, 8, 12\}$，我们总有一个型为 4^t 的 $\{5, 9, 13\}$-GDD。现在对这个 GDD 中的点赋权 5，注意到型为 $5^5, 5^9$ 和 5^{13} 的 $(5, 2)$-CRSSGDD 均存在（引理 7.1 和 7.2），应用基本构造我们就可以得到所要的型为 20^t 的 $(5, 2)$-CRSSGDD，这里 $t \ge 5$ 并且 $t \notin \{7, 8, 12\}$。最后，对于 $t \in \{7, 8, 12\}$，见引理 7.3。□

引理 7.5：对任意 $v \in \{21, 41, 61, 81\}$，$(v, 5, 2)$-CRSS 设计均存在。

证明. 对任意 $v \in \{21, 41, 61, 81\}$，令点集为 $\mathbb{Z}_v$。第一个 BIBD 由下述基区组 $+1 \pmod v$ 展开得到。第二个 GDD 的区组由第一个 GDD 的区组乘以 -1 得到。

$v = 21$: $\{0, 1, 4, 14, 16\}$

$v = 41$: $\{0, 1, 4, 11, 29\}$ $\{0, 2, 8, 17, 22\}$

$v = 61$: $\{0, 1, 3, 13, 34\}$ $\{0, 4, 9, 23, 45\}$ $\{0, 6, 17, 24, 32\}$

$v = 81$: $\{0, 1, 8, 24, 55\}$ $\{0, 2, 48, 63, 77\}$ $\{0, 11, 21, 30, 43\}$ $\{0, 36, 39, 64, 76\}$ □

定理 7.3: 对任意 $v \equiv 1 \pmod{20}$ 且 $v \geq 21$，$(v, 5, 2)$-CRSS 设计均存在。

证明. 对于 $21 \leq v \leq 81$，见引理 7.5。对于 $v \geq 101$，由引理 7.4 存在型为 20^t 的 $(5, 2)$-CRSSGDD。添加一个无穷点并填入 $(21, 5, 2)$-CRSS 设计就可以得到所要的 $(20t + 1, 5, 2)$-CRSS 设计。 □

下面我们来考察 $v \equiv 5 \pmod{20}$ 的情形。我们先来构造一些小的 $(v, 5, 2)$-CRSS 设计。值得注意的是，这里我们用的不再是“乘子”的方法。我们将使用两个不同的群分别生成我们需要的设计，这样，我们就可以构造一些超单的短轨道以减少基区组的个数。

引理 7.6: $(45, 5, 2)$-CRSS 设计存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{45}$ 上构造所要设计。定义 $\alpha : V \to V$ 如下：当 $x \not\equiv 12, 13, 14 \pmod{15}$ 时 $x \to x+3$，当 $x \equiv 12, 13, 14 \pmod{15}$ 时$x \to x - 12$。定义 $\beta : V \to V$，$x \to x + 15$，这里的加法是模 45 的。第一个 BIBD 是由下面的基区组在群 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 的作用下展开得到。

$$\begin{array}{lll} \{3, 26, 8, 43, 36\} & \{2, 25, 40, 4, 42\} & \{3, 17, 24, 28, 39\} \\ \{0, 2, 32, 26, 16\} & \{4, 9, 31, 5, 38\} & \{0, 1, 28, 41, 42\} \\ \{0, 3, 6, 9, 12\} & \{1, 4, 7, 10, 13\} & \{2, 5, 8, 11, 14\} \end{array}$$

第二个 BIBD 是由下面的基区组 $+3 \pmod{45}$ 展开得到的。

$$\begin{array}{lll} \{4, 8, 3, 25, 9\} & \{1, 32, 8, 18, 7\} & \{2, 6, 21, 18, 31\} \\ \{0, 8, 23, 20, 31\} & \{1, 16, 13, 9, 11\} & \{0, 11, 17, 24, 43\} \\ \{0, 9, 18, 27, 36\} & \{1, 10, 19, 28, 37\} & \{2, 11, 20, 29, 38\} \end{array}$$

□

引理 7.7: 对任意 $v \in \{65, 85, 105, 125, 145, 165, 185, 205\}$，$(v, 5, 2)$-CRSS 设计均存在。

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_v$ 上构造所要的设计。定义 $\alpha: V \to V$ 如下：当 $x \not\equiv 4 \pmod 5$ 时 $x \to x+1$，当 $x \equiv 4 \pmod 5$ 时 $x \to x-4$。定义 $\beta: V \to V$，$x \to x+5$，这里的加法是模 v 的。第一个 BIBD 是由下面的基区组在群 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 的作用下展开得到。第二个 BIBD 是由下面的基区组 $+1 \pmod v$ 展开得到的。

$v = 65$:

第一个 BIBD 的基区组：

$$\{1,37,45,20,32\} \quad \{1,46,57,8,43\} \quad \{0,6,10,32,47\} \quad \{0,1,2,3,4\}$$

第二个 BIBD 的基区组：

$$\{2,36,57,35,50\} \quad \{2,29,47,18,59\} \quad \{0,2,62,6,25\} \quad \{0,13,26,39,52\}$$

$v = 85$:

第一个 BIBD 的基区组：

$$\begin{array}{lll} \{0,29,47,21,78\} & \{0,35,44,55,10\} & \{0,28,76,13,71\} \\ \{0,6,17,24,58\} & \{0,1,2,3,4\} & \end{array}$$

第二个 BIBD 的基区组：

$$\begin{array}{lll} \{4,10,15,63,82\} & \{3,27,52,79,49\} & \{3,24,80,23,65\} \\ \{0,2,12,16,47\} & \{0,17,34,51,68\} & \end{array}$$

$v = 105$:

第一个 BIBD 的基区组：

$$\begin{array}{lll} \{1,52,36,73,96\} & \{0,104,50,93,63\} & \{2,82,34,5,73\} \\ \{4,100,47,87,18\} & \{0,5,12,31,90\} & \{0,1,2,3,4\} \end{array}$$

第二个 BIBD 的基区组：

$$\begin{array}{lll} \{1,3,46,68,60\} & \{0,50,80,11,1\} & \{0,87,70,64,33\} \\ \{0,5,34,58,78\} & \{3,16,0,7,93\} & \{0,21,42,63,84\} \end{array}$$

$v = 125$:

第一个 BIBD 的基区组：

$\{1, 56, 15, 33, 12\}$ $\{1, 68, 120, 49, 118\}$ $\{2, 117, 32, 80, 14\}$ $\{3, 66, 104, 38, 124\}$
$\{3, 28, 101, 40, 19\}$ $\{0, 5, 36, 51, 96\}$ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

第二个 BIBD 的基区组：

$\{2, 37, 41, 25, 89\}$ $\{4, 34, 44, 37, 15\}$ $\{4, 5, 103, 58, 22\}$ $\{4, 86, 95, 71, 2\}$
$\{4, 41, 10, 69, 115\}$ $\{0, 5, 13, 62, 83\}$ $\{0, 25, 50, 75, 100\}$

$v = 145$:

第一个 BIBD 的基区组：

$\{4, 91, 8, 36, 113\}$ $\{4, 58, 41, 82, 26\}$ $\{4, 128, 97, 84, 144\}$ $\{1, 67, 100, 139, 126\}$
$\{1, 9, 54, 72, 11\}$ $\{3, 14, 78, 53, 129\}$ $\{0, 6, 35, 54, 63\}$ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

第二个 BIBD 的基区组：

$\{2, 126, 84, 83, 4\}$ $\{3, 104, 56, 124, 52\}$ $\{4, 31, 36, 64, 71\}$ $\{0, 36, 17, 11, 62\}$
$\{3, 40, 53, 50, 62\}$ $\{3, 110, 118, 64, 79\}$ $\{0, 14, 55, 71, 89\}$ $\{0, 29, 58, 87, 116\}$

$v = 165$:

第一个 BIBD 的基区组：

$\{4, 32, 114, 39, 123\}$ $\{2, 137, 115, 20, 15\}$ $\{4, 61, 118, 163, 122\}$ $\{0, 112, 144, 136, 13\}$
$\{4, 18, 58, 144, 120\}$ $\{4, 126, 53, 138, 154\}$ $\{2, 70, 58, 134, 38\}$ $\{0, 10, 21, 93, 115\}$
$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

第二个 BIBD 的基区组：

$\{3, 131, 24, 1, 80\}$ $\{0, 161, 80, 102, 94\}$ $\{1, 105, 153, 104, 31\}$ $\{3, 67, 72, 162, 57\}$
$\{4, 144, 76, 104, 128\}$ $\{4, 46, 93, 49, 15\}$ $\{0, 50, 12, 32, 158\}$ $\{0, 9, 36, 119, 148\}$
$\{0, 33, 66, 99, 132\}$

$v = 185$:

第一个 BIBD 的基区组：

$\{3, 124, 131, 101, 184\}$ $\{3, 16, 100, 37, 126\}$ $\{2, 18, 74, 117, 67\}$ $\{0, 161, 37, 5, 15\}$
$\{3, 103, 157, 112, 115\}$ $\{1, 99, 135, 175, 56\}$ $\{0, 25, 49, 77, 144\}$ $\{4, 26, 142, 39, 62\}$
$\{0, 6, 20, 99, 132\}$ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

第二个 BIBD 的基区组：

$\{4, 126, 102, 117, 37\}$ $\{3, 145, 78, 159, 24\}$ $\{2, 103, 0, 25, 59\}$ $\{1, 133, 0, 48, 145\}$
$\{0, 153, 123, 140, 179\}$ $\{4, 96, 169, 173, 26\}$ $\{0, 36, 5, 91, 119\}$ $\{4, 11, 14, 120, 138\}$
$\{0, 8, 35, 125, 174\}$ $\{0, 37, 74, 111, 148\}$

$v = 205$:

第一个 BIBD 的基区组：

$\{0, 22, 26, 58, 69\}$	$\{0, 33, 55, 99, 171\}$	$\{0, 78, 175, 193, 203\}$	$\{0, 24, 60, 65, 110\}$
$\{0, 64, 72, 84, 196\}$	$\{0, 6, 89, 135, 187\}$	$\{0, 101, 122, 136, 176\}$	$\{0, 61, 98, 114, 147\}$
$\{0, 8, 71, 113, 128\}$	$\{0, 25, 56, 104, 148\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	

第二个 BIBD 的基区组：

$\{0, 16, 37, 106, 191\}$	$\{0, 92, 110, 160, 196\}$	$\{0, 56, 66, 89, 153\}$	$\{0, 3, 15, 42, 159\}$
$\{0, 5, 59, 78, 185\}$	$\{0, 76, 111, 124, 204\}$	$\{0, 53, 57, 162, 188\}$	$\{0, 7, 29, 67, 91\}$
$\{0, 2, 8, 142, 173\}$	$\{0, 47, 122, 150, 194\}$	$\{0, 41, 82, 123, 164\}$	

□

引理 7.8: *存在型为 4^6 的 $(5, 2)$-CRSSGDD。*

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{24}$ 上构造所要设计。它的组是 $\{\{0, 6, 12, 18\} + i : 0 \le i \le 5\}$。第一个 5-GDD 是由基区组 $\{0, 1, 3, 11, 20\}$ $+1 \pmod{24}$ 展开得到。第二个 5-GDD 是将前一个 GDD 的基区组乘以 -1 得到。 □

引理 7.9: *存在型为 $44^6 20^1$ 和 $44^6 40^1$ 的 $(5, 2)$-CRSSGDD。*

证明. 我们在集合 $\mathbb{Z}_{264} \cup M$ 上构造所要的设计。它们的组是 $\{\{0, 6, 12, \ldots, 258\} + i : 0 \le i \le 5\} \cup \{M\}$。把下边所列基区组中 $\mathbb{Z}_{264}$ 的元素 $+1 \pmod{264}$ 展开，M 中形如 $x_i \in \{x\} \times \mathbb{Z}_n$ 的元素的下标 $+1 \pmod{n}$ 展开。这样就得到第一个 GDD 的区组集。

$44^6 20^1$:

$M = (\{a\} \times \mathbb{Z}_{12}) \cup (\{b\} \times \mathbb{Z}_8)$

$\{3, 53, 120, 211, a_0\}$	$\{2, 16, 49, 71, a_0\}$	$\{8, 81, 138, 202, a_0\}$	$\{3, 113, 178, 236, b_0\}$
$\{7, 101, 126, 200, b_0\}$	$\{0, 15, 26, 28, 49\}$	$\{0, 37, 148, 152, 261\}$	$\{0, 98, 184, 229, 237\}$
$\{0, 7, 176, 196, 255\}$	$\{0, 5, 43, 87, 172\}$	$\{0, 17, 63, 124, 163\}$	$\{0, 19, 161, 202, 254\}$
$\{0, 51, 83, 187, 188\}$			

$44^6 40^1$:

$M = (\{a,b\}\times\mathbb{Z}_{12})\cup(\{c,d\}\times\mathbb{Z}_8)$			
$\{3,50,156,166,a_0\}$	$\{7,128,131,162,a_0\}$	$\{5,37,105,232,a_0\}$	$\{9,80,150,166,b_0\}$
$\{11,51,211,240,b_0\}$	$\{4,17,109,134,b_0\}$	$\{4,69,78,257,c_0\}$	$\{2,183,203,0,c_0\}$
$\{6,23,28,49,d_0\}$	$\{0,53,115,218,d_0\}$	$\{0,27,55,146,197\}$	$\{0,14,15,73,166\}$
$\{0,41,49,128,225\}$	$\{0,33,110,241,245\}$	$\{0,50,175,219,257\}$	

第二个 GDD 通过乘子 43（型为 $44^6 20^1$ 的）或 35（型为 $44^6 40^1$ 的）作用到第一个 GDD 上得到，注意 M 中的点在这个过程中保持不变。 □

定理 7.4: 对任意 $v\equiv 5 \pmod{20}$ 且 $v\geq 45$，$(v,5,2)$-CRSS 设计均存在。

证明. 对于 $v\leq 205$ 的情形，见引理 7.6–7.7。

对任意 $v\geq 345$ 且 $v\notin\{365,385,405,425,485,505,525,605,625,725\}$，将 v 写为 $v=100t+20x+5$，这里 $t\geq 3$，$x\in\{2,3,4,5,6\}$ 并且 $x<t$。我们由一个 TD$(6,5t)$ 出发（定理 2.8），对前五个组中的点赋权 4，对最后一个组中的点赋权 0 或 4，由于型为 4^5 和 4^6 的 $(5,2)$-CRSSGDD 均存在（引理 7.1 和 7.8），这样我们就得到了一个型为 $(20t)^5(20x+4)^1$ 的 $(5,2)$-CRSSGDD。添加一个无穷点并填入 $(20t+1,5,2)$-CRSS 设计（定理 7.3）或 $(20x+5,5,2)$-CRSS 设计，这样我们就得到了所要的 $(100t+20x+5,5,2)$-CRSS 设计。

对于 $v\in\{225,325,425,525,625,725\}$，由定理 2.8 存在 TD$(5,u)$，$u\in\{9,13,17,21,25,29\}$。对每个点赋权 5，由于型为 5^5 的 $(5,2)$-CRSSGDD 存在（引理 7.1），我们得到了一个型为 $(5u)^5$ 的 $(5,2)$-CRSSGDD。之后填充组即可。

对于 $v\in\{245,365,485,605\}$，由定理 2.8 存在 TD$(6,u+1)$，$u\in\{10,15,20,25\}$。删去任意一个区组中的五个点，我们可以得到一个型为 $u^5(u+1)^1$ 的 $\{5,6\}$-GDD。对每个点赋权 4 得到型为 $(4u)^5(4u+4)^1$ 的 $(5,2)$-CRSSGDD。添加一个点并填充组。

对于 $v\in\{265,385,505\}$，我们由 TD$(6,u)$ 出发，$u\in\{11,16,21\}$，对每个点赋权 4 得到一个型为 $(4u)^6$ 的 $(5,2)$-CRSSGDD。然后添加一个无穷点并填充组。对于 $v\in\{285,305\}$，由引理 7.9 存在型为 $44^6 20^1$ 和 $44^6 40^1$ 的 $(5,2)$-CRSSGDD。添加一个无穷点并填充组。对于 $v=405$，对 TD$(5,9)$ 中的点赋权 9，由于型为 9^5 的

$(5,2)$-CRSSGDD 存在（引理 7.1），我们得到了一个型为 81^5 的 $(5,2)$-CRSSGDD，最后填充组就可得到所要的设计。 □

综合定理 7.3 和 7.4，我们有下述结论：

定理 7.5: *除了可能的例外值 $v=25$，$(v,5,2)$-CRSS 设计存在当且仅当 $v\equiv 1,5 \pmod{20}$，$v\geq 21$。*

7.4 最优 $(n,8,5)_3$-码

本节中，我们将确定当 $n\equiv 0,1,4,5 \pmod{20}$ 时，$(n,d,w)_q$-码的最大码字个数 $A_q(n,d,w)$。下面的关于 $A_q(n,d,w)$ 的上界是由 Svanström 给出的。

引理 7.10 ([151]): $A_q(n,d,w)\leq \left\lfloor \frac{(q-1)n}{w}A_q(n-1,d,w-1)\right\rfloor$.

引理 7.11 ([69]): $A_q(n,2w,w)=\lfloor n/w\rfloor$.

综合引理 7.10 和 7.11，我们有：

$$A_q(n,2(w-1),w)\leq \left\lfloor \frac{(q-1)n}{w}\left\lfloor\frac{n-1}{w-1}\right\rfloor\right\rfloor \tag{7.1}$$

命题 7.2: *若存在 $(n,k,q-1)$-CRSS 设计，则存在最优的 $(n,2(k-1),k)_q$-码。*

证明. 由假设，我们有一个区组集为 $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{q-1}\mathcal{B}_i$ 的 $(n,k,q-1)$-CRSS 设计，这里对任意 $1\leq i,j\leq q-1$，$\mathcal{B}_i\cap\mathcal{B}_j=\emptyset$，并且 $\mathcal{B}_i$ 形成 $(n,k,1)$-BIBD 的区组集。从每个 $(n,k,1)$-BIBD 的区组集出发，我们可以构造一个 $(n,2(k-1),k)_2$-码，这样我们得到了 $q-1$ 个 $(n,2(k-1),k)_2$-码 $\mathcal{C}_i$, $1\leq i\leq q-1$。与文献[40]中的方法类似，对 $\mathcal{C}_i$，用 i 替换每个码字中的 1，这样我们就得到一个 q 元码 $\mathcal{C}'_i$。从而 $\mathcal{C}'=\bigcup_{i=1}^{q-1}\mathcal{C}'_i$ 就是一个重量为 k，距离为 $2(k-1)$ 的 q 元码。

最后，由于 $(n,k,q-1)$-CRSS 设计有 $\frac{(q-1)n(n-1)}{k(k-1)}$ 个区组，正好达到了 $(n,2(k-1),k)_q$-码码字个数的上界，这就说明了我们上面构造的码是最优的。 □

综合定理 7.5 和命题 7.2，对任意 $n\equiv 1,5 \pmod{20}, n\geq 21$ 且 $n\neq 25$，最优的 $(n,8,5)_3$ 码均存在。对于 $n\equiv 0,4 \pmod{20}, n\geq 20$ 且 $n\neq 24$ 的情形，与文献[173]中的方法类似，我们由最优的 $(n+1,8,5)_3$-码出发，删去一个位置并且去掉所有在这

个位置上非零的码字，这样就可得到长为 n 的最优码。最后对于 $n=24$，我们由型为 4^6 的 $(5,2)$-CRSSGDD 出发，利用命题 7.2 中的构造方法，我们可以得到最优的 $(24,8,5)_3$-码。于是我们有下面的结论：

定理 7.6: 对任意 $n \equiv 0,1,4,5 \pmod{20}, n \geq 20$，除了可能的例外值 $n=25$，$A_3(n,8,5)=\left\lfloor \frac{2n}{5}\left\lfloor \frac{n-1}{4}\right\rfloor\right\rfloor$。

参 考 文 献

[1] R. J. R. Abel, *Existence of Five MOLS of Orders 18 and 60*, J. Combin. Des., to appear (DOI: 10.1002/jcd.21384).

[2] R. J. R. Abel and A. Assaf, *Modified group divisible designs with block size* 5 *and* $\lambda = 1$, Discrete Math. **256** (2002), 1–22.

[3] R. J. R. Abel, A. M. Assaf, I. Bluskov, M. Greig, and N. Shalaby, *New results on GDDs, covering, packing and directable designs with block size* 5, J. Combin. Des. **18** (2010), 337–368.

[4] R. J. R. Abel and F. E. Bennett, *Existence of directed BIBDs with block size* 7 *and related perfect* 5*-deletion-correcting codes of length* 7, Des. Codes Crytogr. **57** (2010), 383–397.

[5] R. J. R. Abel, F. E. Bennett and M. Greig, *PBD-closure*, C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (Eds.), Handbook of Combinatorial Designs (2nd ed.), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2007), 247–255.

[6] R.J.R. Abel and M. Buratti, *Some progress on* $(v, 4, 1)$ *difference families and optical orthogonal codes*, J. Comb. Theory Ser. A **106** (2004), 59–75.

[7] R. J. R. Abel, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, *Mutually orthogonal Latin squares (MOLS)*, C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (Eds.), Handbook of Combinatorial Designs (2nd ed.), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2007), 160–193.

[8] R. J. R. Abel, G. Ge, M. Greig, and A. C. H. Ling, *Further results on* $(v, \{5, w^*\}, 1)$*-PBDs*, Discrete Math. **309** (2009), 2323–2339.

[9] P. Adams, D. E. Bryant, and M. Buchanan, *A survey on the existence of G-designs*, J. Combin. Des. **16** (2008), 373–410.

[10] A. M. Assaf and R. Wei, *Modified group divisible designs with block size 4 and* $\lambda = 1$, Discrete Math., **195** (1999), 15–25.

[11] R. D. Baker, *An elliptic semiplane*, J. Comb. Theory Ser. A **25** (1978), 193–195.

[12] F. E. Bennett, Y. Chang, G. Ge, and M. Greig, *Existence of* $(v, \{5, w^*\}, 1)$*-PBDs*, Discrete Math. **279** (2004), 61–105.

[13] F. E. Bennett, R. Wei, J. Yin, and A. Mahmoodi, *Existence of DBIBDs with block size six*, Utilitas Math. **43** (1993), 205–217.

[14] J.-C. Bermond, C. J. Colbourn, D. Coudert, G. Ge, A. C. H. Ling, and X. Muñoz, *Traffic grooming in unidirectional WDM rings with grooming ratio* $C = 6$, SIAM J. Discrete Math. **19** (2005), 523–542.

[15] J.-C. Bermond, C. J. Colbourn, A. C. H. Ling, and M. L. Yu, *Grooming in unidirectional rings:* $K_4 - e$ *designs*, Discrete Math. **284** (2004), 67–72.

[16] J.-C. Bermond and D. Coudert, *Traffic grooming in unidirectional WDM ring networks using design theory*, In IEEE, editor, IEEE Conf. Commun. (ICC'03), volume 2, Los Alamitos, CA, 2003, 1402–1406.

[17] J.-C. Bermond, D. Coudert, and X. Muñoz, *Traffic grooming in unidirectional WDM ring networks: the all-to-all unitary case*, Proceedings of the ONDM03, Seventh IFIP Workshop Optical Network Design and Modelling, Budapest, Feb 2003, 1135–1153.

[18] J.-C. Bermond, C. Huang, A. Rosa, and D. Sotteau, *Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices*, Ars Combin. **10** (1980), 211–254.

[19] J.-C. Bermond and J. Schönheim, *G-decomposition of* K_n*, where G has four vertices or less*, Discrete Math. **19** (1977), 113–120.

[20] T. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz, *Design Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.

[21] S. Blake-Wilson and K. T. Phelps, *Constant weight codes and group divisible designs*, Des. Codes Cryptogr. **16** (1999), no. 1, 11–27.

[22] G. T. Bogdanova, *Bounds for the Maximum Size of Ternary Constant-Composition Codes*, Proc. of the International Workshop on Optimal Codes, Jun. (1998), 15–18.

[23] G. Bogdanova, *New bounds for the maximum size of ternary constant weight codes*, Serdica Math. J. **26** (2000), no. 1, 5–12.

[24] G. T. Bogdanova and S. N. Kapralov, *Enumeration of optimal ternary codes with a given composition*, Problemy Peredachi Informatsii **39** (2003), no. 4, 35–40.

[25] G. T. Bogdanova and D. S Ocetarova, *Some Ternary Constant-Composition Codes*, Proc. Sixth Int. Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Pskov, Russia, Sep. (1998), 41–45,

[26] P. A. H. Bours, *On the construction of perfect deletion-correcting codes using design theory*, Des. Codes Cryptogr. **6** (1995), 5–20.

[27] A. E. Brouwer, A. Schrijver and H. Hanani, *Group divisible designs with block-size four*, Discrete Math. **20** (1977), 1–10.

[28] A. E. Brouwer, J. B. Shearer, N. J. A. Sloane and W. D. Smith, *A new table of constant weight codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), no. 6, 1334–1380.

[29] M. Buratti, *Recursive constructions for difference matrices and relative difference families*, J. Combin. Des. **6** (1998), 165–182.

[30] K. A. Bush, *Orthogonal arrays of index unity*, Ann. Math. Stat. **23** (1952) 426–434.

[31] H. Cao, L. Ji and L. Zhu, *Constructions for generalized Steiner systems* $\mathrm{GS}(3,4,v,2)$, Des. Codes Cryptogr. **45** (2007), no. 2, 185–197.

[32] H. Cao, L. Wang and R. Wei, *The existence of HGDDs with block size four and its application to double frames*, Discrete Math. **309** (2009), 945–949.

[33] Y. X. Chang, *The spectra for two classes of graph designs*, Ars Combin. **65** (2002), 237–243.

[34] Y. Chang and Y. Miao, *General constructions for double group divisible designs and double frames*, Des. Codes Cryptogr. **26** (2002), 155–168.

[35] Y. M. Chee, S. H. Dau, A. C. H. Ling and S. Ling, *The sizes of optimal q-ary codes of weight three and distance four: a complete solution*, IEEE Trans. Inform. Theory **54** (2008), no. 3, 1291–1295.

[36] Y. M. Chee, S. H. Dau, A. C. H. Ling and S. Ling, *Linear size optimal q-ary constant-weight codes and constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **56** (2010), no. 1, 140–151.

[37] Y. M. Chee, G. Ge and A. C. H. Ling, *Group divisible codes and their application in the construction of optimal constant-composition codes of weight three*, IEEE Trans. Inform. Theory **54** (2008), no. 8, 3552–3564.

[38] Y. M. Chee, G. Ge and A. C. H. Ling, *Spectrum of Sizes for Perfect Deletion-Correcting Codes*, SIAM J. Discrete Math. **24** (2010), pp. 33–55.

[39] Y. M. Chee, G. Ge, H. Zhang and X. Zhang, *Hanani triple packings and optimal q-ary codes of constant weight three*, Des. Codes Cryptogr. to appear.

[40] Y. M. Chee and S. Ling, *Constructions for q-ary constant-weight codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **53** (2007), no. 1, 135–146.

[41] Y. M. Chee and S. Ling, *Improved lower bounds for constant GC-content DNA codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **54** (2008), no. 1, 391–394.

[42] Y. M. Chee, A. C. H. Ling, S. Ling and H. Shen, *The PBD-closure of constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **53** (2007), no. 8, 2685–2692.

[43] K. Chen, G. Ge and L. Zhu, *Generalized Steiner triple systems with group size five*, J. Combin. Des. **7** (1999), no. 6, 441–452.

[44] K. Chen, G. Ge and L. Zhu, *Starters and related codes*, J. Statist. Plann. Inference **86** (2000), no. 2, 379–395.

[45] W. Chu, C. J. Colbourn and P. Dukes, *Constructions for permutation codes in power-line communications*, Des. Codes Cryptogr. **32** (2004), no. 1-3, 51–64.

[46] W. Chu, C. J. Colbourn and P. Dukes, *On constant composition codes*, Discrete Appl. Math. **154** (2006), no. 6, 912–929.

[47] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), *Handbook of combinatorial designs*, second ed., Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[48] C. J. Colbourn, H.-L. Fu, G. Ge, A. C. H. Ling and H.-C. Lu, *Minimizing SONET ADMs in unidirectional WDM rings with grooming ratio 7*, SIAM J. Discrete Math. **23** (2008), 109–122.

[49] C. J. Colbourn, G. Ge and A. C. H. Ling, *Optimal grooming with grooming ratio eight*, Discrete Appl. Math. **157** (2009), 2763–2772.

[50] C. J. Colbourn, G. Ge and A. C. H. Ling, *Optical grooming with grooming ratio nine*, Discrete Math. **311** (2011), 8–15.

[51] C. J. Colbourn, D. G. Hoffman and R. Rees, *A new class of group divisible designs with block size three*, J. Combin. Theory Ser. A **59** (1992), no. 1, 73–89.

[52] C. J. Colbourn, T. Kløve and A. C. H. Ling, *Permutation arrays for powerline communication and mutually orthogonal Latin squares*, IEEE Trans. Inform. Theory **50** (2004), no. 6, 1289–1291.

[53] C. J. Colbourn, D. R. Stinson and L. Zhu, *More frames with block size four*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **23** (1997), 3–20.

[54] C. J. Colbourn and P. J. Wan, *Minimizing drop cost for SONET/WDM networks with $\frac{1}{8}$ wavelength requirements*, Networks, **37** (2001), 107–116.

[55] D. J. Costello and G. D. Forney, *Channel coding: The road to channel capacity*, Proc. IEEE **95** (2007), no. 6, 1150–1177.

[56] D. Deng, R. S. Rees and H. Shen, *On the existence and application of incomplete nearly Kirkman triple systems with a hole of size* 6 *or* 12, Discrete Math. **261** (2003), 209–233.

[57] C. Ding, *Optimal Constant Composition Codes From Zero-Difference Balanced Functions*, IEEE Trans. Inform. Theory **54** (2008), no. 12, 5766–5770.

[58] C. Ding and J. Yin, *Algebraic constrctions of constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **51** (2005), no. 4, 1585–1589.

[59] C. Ding and J. Yin, *Combinatorial constructions of optimal constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **51** (2005), no. 10, 3671–3674.

[60] C. Ding and J. Yin, *A construction of optimal constant composition codes*, Des. Codes Cryptogr. **40** (2006), no. 2, 157–165.

[61] C. Ding and J. Yuan, *A family of optimal constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **51** (2005), no. 10, 3668–3671.

[62] Y. Ding, *A construction for constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **54** (2008), no. 10, 3738–3741.

[63] D. A. Drake, *Partial λ-geometries and generalized Hadamard matrices over groups*, Canad. J. Math. **31** (1979), 617–627.

[64] A. G. D'yachkov, *Random constant composition codes for multiple access channels*, Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform. **13** (1984), no. 6, 357–369.

[65] T. Ericson and V. Zinoview, *Spherical codes generated by binary partitions of symmetric pointsets*, IEEE Trans. Inform. Theory **41** (1995), no. 1, 107–129.

[66] T. Etzion, *Optimal constant weight codes over Z_k and generalized designs*, Discrete Math. **169** (1997), no. 1-3, 55–82.

[67] N. Francetić, P. Danziger and E. Mendelsohn, *Group divisible covering designs with block size 4: A type of covering array with row limit*, J. Combin. Des. **21** (2013), 311–341.

[68] F.-W. Fu, T. Kløve, Y. Luo and V. K. Wei, *On the Svanström bound for ternary constant-weight codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **47** (2001), no. 5, 2061–2064.

[69] F.-W. Fu, A. J. H. Vinck and S. Y. Shen, *On the constructions of constant-weight codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **44** (1998), no. 1, 328–333.

[70] R. Fuji-Hara, Y. Miao, J. Wang, J. Yin, *Directed $B(K,1;v)$ with $K=\{4,5\}$ and $\{4,6\}$ related to deletion/insertion-correcting codes*, J. Combin. Des. **9** (2001), 147–156.

[71] S. C. Furino, Y. Miao, and J. X. Yin, *Frames and Resolvable Designs: Uses, Constructions and Existence*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[72] F. Gao and G. Ge, *Optimal ternary constant composition codes of weight four and distance five*, IEEE Trans. Inform. Theory **57** (2011), no. 6, 3742–3757.

[73] G. Ge, *Generalized Steiner triple systems with group size* $g \equiv 1, 5 \pmod 6$, Australas. J. Combin. **21** (2000), 37–47.

[74] G. Ge, *Uniform frames with block size four and index one or three*, J. Combin. Des. **9** (2001), 28–39.

[75] G. Ge, *Resolvable group divisible designs with block size four*, Discrete Math. **243** (2002), 109–119.

[76] G. Ge, *On* $(g, 4; 1)$*-difference matrices*, Discrete Math. **301** (2005), no. 2-3, 164–174.

[77] G. Ge, *Group divisible designs*, C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (Eds.), Handbook of Combinatorial Designs (2nd ed.), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2007), 255–260.

[78] G. Ge and C. W. H. Lam, *Resolvable group divisible designs with block size four and group size six*, Discrete Math. **268** (2003), 139–151.

[79] G. Ge, C. W. H. Lam and A. C. H. Ling, *Some new uniform frames with block size four and index one or three*, J. Combin. Des. **12** (2004), 112–122.

[80] G. Ge, C. W. H. Lam, A. C. H. Ling, and H. Shen, *Resolvable maximum packings with quadruples*, Des. Codes Cryptogr. **35** (2005), 287–302.

[81] G. Ge and A. C. H. Ling, *A systematic approach to some block design constructions*, J. Combin. Theory Ser. A **108** (2004), no. 1, 89–97.

[82] G. Ge and A. C. H. Ling, *Group divisible designs with block size four and group type* $g^u m^1$ *for small* g, Discrete Math. **285** (2004), no. 1-3, 97–120.

[83] G. Ge and A. C. H. Ling, *A survey on resolvable group divisible designs with block size four*, Discrete Math. **279** (2004), 225–245.

[84] G. Ge and A. C. H. Ling, *Some more* 5*-GDDs and optimal* $(v, 5, 1)$*-packings*, J. Combin. Des. **12** (2004), 132–141.

[85] G. Ge and A. C. H. Ling, *Group divisible designs with block size four and group type* $g^u m^1$ *with minimum* m, Des. Codes Cryptogr. **34** (2005), no. 1, 117–126.

[86] G. Ge and A. C. H. Ling, *Asymptotic results on the existence of* 4*-RGDDs and uniform* 5*-GDDs*, J. Combin. Des. **13** (2005), no. 3, 222–237.

[87] G. Ge and A. C. H. Ling, *On the existence of* $(K_5 \setminus e)$*-designs with application to optical networks*, SIAM J. Discrete Math. **21** (2007), 851–864.

[88] G. Ge and R. S. Rees, *On group-divisible designs with block size four and group-type* $g^u m^1$, Des. Codes Cryptogr. **27** (2002), 5–24.

[89] G. Ge and R. S. Rees, *On group-divisible designs with block size four and group-type* $6^u m^1$, Discrete Math. **279** (2004), 247–265.

[90] G. Ge, R. S. Rees and L. Zhu, *Group-divisible designs with block size four and group-type* $g^u m^1$ *with* m *as large or as small as possible*, J. Comb. Theory Ser. A **98** (2002), 357–376.

[91] G. Ge, J. Wang and R. Wei, *MGDD with block size 4 and its application to sampling designs*, Discrete Math. **272** (2003), 277–283.

[92] G. Ge and R. Wei, *HGDDs with block size four*, Discrete Math. **279** (2004), 267–276.

[93] www.emba.uvm.edu/˜dinitz/newresults.part3.1.html

[94] M. Grüttmüller and R. S. Rees, *Mandatory representation designs MRD* $(4, k; v)$ *with* $k \equiv 1 \mod 3$, Utilitas Math. **60** (2001), 153–180.

[95] H.-D. O. F. Gronau, D. L. Kreher and A. C. H. Ling, *Super-simple* $(v, 5, 2)$*-designs*, Discrete Appl. Math. **138** (2004), no. 1-2, 65–77.

[96] H. Hanani, *Balanced incomplete block designs and related designs*, Discrete Math. **11** (1975), 255–369.

[97] A. Hartman, *On small packing and covering design with block size* 4, Discrete Math. **59** (1986), 275–281.

[98] S. Hartmann, *On simple and super-simple transversal designs*, J. Combin. Des. **8** (2000), 311–320.

[99] K. Heinrich and J. Yin, *On group divisible covering designs*, Discrete Math. **202** (1999), no. 1-3, 101–112.

[100] J. Q. Hu, *Optimal traffic grooming for wavelength-division-multiplexing rings with all-to-all uniform traffic*, OSA Journal of Optical Networks **1** (2002), 32–42.

[101] C. Huang, *Balanced graph designs on small graphs*, Utilitas Math. **10** (1976), 77–108.

[102] S. Huczynska, *Equidistant frequency permutation arrays and related constant composition codes*, Des. Codes Cryptogr. **54** (2010), no. 2, 109–120.

[103] S. Huczynska and G. L. Mullen, *Frequency permutation arrays*, J. Combin. Des. **14** (2006), no. 6, 463–478.

[104] K. A. S. Immink, *Codes for Mass Data Storage Systems*, 2nd ed., Shannon Foundation Publishers, 2004.

[105] L. Ji, D. Wu and L. Zhu, *Existence of generalized Steiner systems* $\mathrm{GS}(2,4,v,2)$, Des. Codes Cryptogr. **36** (2005), no. 1, 83–99.

[106] D. J. Kinniment, *Synchronization and arbitration in digital systems*, Wiley, 2008.

[107] O. D. King, *Bounds for DNA codes with constant GC-content*, Electron. J. Combin. **10** (2003), Research Paper 33, 13 pp. (electronic).

[108] E. Kolotoğlu, *The existence and construction of ($K_5 \setminus e$)-designs of orders 27, 135, 162, and 216*, J. Combin. Des. **21** (2013), 280–302.

[109] D. S. Krotov, *Inductive constructions of perfect ternary constant-weight codes with distance* 3, Problemy Peredachi Informatsii **37** (2001), no. 1, 3–11.

[110] E. R. Lamken, W. H. Mills, and R. S. Rees, *Resolvable minimum coverings with quadruples*, J. Combin. Des. **6** (1998), 431–450.

[111] V. I. Levenshteĭn, *Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals*, Soviet Phys. Dokl. **10** (1965), 707–710.

[112] V. I. Levenshteĭn, *Binary codes capable of correcting spurious insertions and deletions of ones*, Problems Inform. Transmission **1** (1965), 8–17.

[113] V. I. Levenshteĭn, *Perfect codes in the metric of deletions and insertions*, Diskret. Mat. **3** (1991), 3–20.

[114] Q. Li and Y. Chang, *Decomposition of lambda-fold complete graphs into a certain five-vertex graph*, Australas J Combin. **30** (2004), 175–182.

[115] Q. Li and Y. Chang, *A few more* $(K_v, K_5\backslash e)$*-designs*, Bull Inst Combin Appl. **45** (2005), 11–16.

[116] A. C. H. Ling, *Pairwise Balanced Designs and Related Codes*, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Ontaro, 1997.

[117] A. C. H. Ling and C. J. Colbourn, *Modified group divisible designs with block size four*, Discrete Math. **219** (2000), 207–221.

[118] Y. Luo, F. W. Fu, A. J. H. Vinck, and W. Chen, *On constant-composition codes over* $\mathbb{Z}_q$, IEEE Trans. Inform. Theory **49** (2003), no. 11, 3010–3016.

[119] J. Luo and T. Helleseth, *Constant composition codes as subcodes of cyclic codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **57** (2011), no. 11, 7482–7488.

[120] H. F. MacNeish, *Euler squares*, Ann. of Math. **23** (1922), 221–227.

[121] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[122] M. Marron, K. M. Swenson and B.M.E. Moret, *Genomic distances under deletions and insertions*, in Computing and Combinatorics, Lecture Notes in Comput. Sci. 2697, Springer, Berlin, 2003, 537–547.

[123] O. Milenkovic and N. Kashyap, *On the design of codes for DNA computing*, Coding and cryptography, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 3969, Springer, Berlin, 2006, pp. 100–119.

[124] R.C. Mullin, A.C.H. Ling, R.J.R. Abel, F.E. Bennett, *On the closure of subsets of* $\{4, 5, \ldots, 9\}$ *which contain* $\{4\}^*$, Ars Combin. **45** (1997), 33–76.

[125] P. R. J. Östergård and M. Svanström, *Ternary constant weight codes*, Electron. J. Combin. **9** (2002), no. 1, Research Paper 41, 23 pp. (electronic).

[126] K. Phelps and C. Yin, *Generalized Steiner systems with block size three and group size* $g \equiv 3 \pmod 6$, J. Combin. Des. **5** (1997), no. 6, 417–432.

[127] K. Phelps and C. Yin, *Generalized Steiner systems with block size three and group size four*, Ars Combin. **53** (1999), 133–146.

[128] C. W. Pratt and K. Cornely, *Essential biochemistry*, John Wiley & Sons, New York, 2004.

[129] R. S. Rees, *Two new direct product-type constructions for resolvable group-divisible designs*, J. Combin. Des. **1** (1993), 15–26.

[130] R. S. Rees, *Group-divisible designs with block size k having $k+1$ groups for $k = 4, 5$*, J. Combin. Des. **8** (2000), 363–386.

[131] R. S. Rees, *Truncated transversal designs: A new lower bound on the number of idempotent MOLS of side n*, J. Comb. Theory Ser. A **90** (2000), 257–266.

[132] R. Rees and D. R. Stinson, *Kirkman triple systems with maximum subsystems*, Ars Combin. **25** (1988), 125–132.

[133] R. Rees and D. R. Stinson, *On combinatorial designs with subdesigns*, Ann. Discrete Math. **42** (1989), 259–279.

[134] R. Rees and D. R. Stinson, *On the existence of incomplete designs of block size four having one hole*, Utilitas Math. **35** (1989), 119–152.

[135] R. S. Rees and D. R. Stinson, *Frames with block size four*, Canad. J. Math. **44** (1992), 1030–1049.

[136] C. A. Rodger, *Graph decompositions*, Le Matematiche (Catania) **45** (1990), 119–140.

[137] D.G. Sarvate, *Some results on directed and cyclic designs*, Ars Combin. **19** (1985), 179–190.

[138] E. Schuster, *Group divisible designs with block size four and group type $g^u m^1$ where g is a multiple of 8*, Discrete Math. **310** (2010), 2258–2270.

[139] E. Schuster and G. Ge, *On uniformly resolvable designs with block sizes 3 and 4*, Des. Codes Cryptogr. **57** (2010), 45–69.

[140] J. Seberry and D. Skillicorn, *All Directed BIBDs with $k = 3$ exist*, J. Combin. Theory Ser. A **29** (1980), 244–248.

[141] N. Shalaby, J. Wang and J. Yin, *Existence of perfect 4-deletion-correcting codes with length six*, Des. Codes Cryptogr.**27** (2002), 145–156.

[142] H. Shen, *On the existence of nearly Kirkman systems*, Ann. Discrete Math. **52** (1992), 511–518.

[143] H. Shen and J. Shen, *Existence of resolvable group divisible designs with block size four I*, Discrete Math. **254** (2002), 513–525.

[144] B. Sklar, *Digital communications: fundamentals and applications*, 2nd ed., Prentice Hall Communications Engineering and Emerging Technologies Series, 2001.

[145] D. R. Stinson, *Frames for Kirkman triple systems*, Discrete Math. **65** (1987), 289–300.

[146] D. J. Street and J. R. Seberry, *All DBIBDs with block size four exist*, Utilitas Math. **18** (1980), 27–34.

[147] D. J. Street and W. H. Wilson, *On directed balanced incomplete block designs with block size five*, Utilitas Math. **18** (1980), 161–174.

[148] X. Sun and G. Ge, *Resolvable group divisible designs with block size four and general index*, Discrete Math. **309** (2009), 2982–2989.

[149] M. Svanström, *A lower bound for ternary constant weight codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **43** (1997), no. 5, 1630–1632.

[150] M. Svanström, *A class of perfect ternary constant-weight codes*, Des. Codes Cryptogr. **18** (1999), no. 1-3, 223–229.

[151] M. Svanström, *Ternary Codes with Weight Constraints*, Ph.D dissertation, Linköpings Universitet, Linköping, Sweden, 1999.

[152] M. Svanström, *Constructions of ternary constant-composition codes with weight three*, IEEE Trans. Inform. Theory **46** (2000), no. 7, 2644–2647.

[153] M. Svanström, P. R. J. Östergård and G. T. Bogdanova, *Bounds and constructions for ternary constant-composition codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **48** (2002), no. 1, 101–111.

[154] I. E. Telatar and R. G. Gallager, *Zero error decision feedback capacity of discrete memoryless channels*, Proc. Bilkent Int. Conf. New Trends Commun. Control Signal Process., E. Arikan, Ed., 1990, pp. 228–233, Elsevier.

[155] D. T. Todorov, *Four mutually orthogonal Latin squares of order* 14, J Combin. Des. **20** (2012), 363–367.

[156] J. Wang, *Some combinatorial constructions for optimal perfect deletion-correcting codes*, Des. Codes Cryptogr. **48** (2008), 331–347.

[157] J. Wang and H. Shen, *Existence of* $(v, K_{1(3)} \cup \{w^*\})$*-PBDs and its applications*, Des. Codes Cryptogr. **46** (2008), 1–16.

[158] C. Wang, Y. Tang and P. Danziger, *Resolvable modified group divisible designs with block size three*, J. Combin. Des. **15** (2007), 2–14.

[159] J. Wang and J.Yin, *Constructions for perfect* 5*-deletion-correcting codes of length* 7, IEEE Trans. Inform. Theory **52** (2006), 3676–3685.

[160] B. Wen, J. Wang and J. Yin, *Optimal grid holey packings with block size* 3 *and* 4, Des. Codes Cryptogr. **52** (2009), no. 1, 107–124.

[161] R. M. Wilson, *An existence theory for pairwise balanced designs. I. Composition theorems and morphisms*, J. Combin. Theory Ser. A **13** (1972), 220–245.

[162] R. M. Wilson, *An existence theory for pairwise balanced designs. II. The structure of PBD-closed sets and the existence conjectures*, J. Combin. Theory Ser. A **13** (1972), 246–273.

[163] R. M. Wilson, *Constructions and uses of pairwise balanced designs*, Math. Centre Tracts **55** (1974), 18–41.

[164] H. Wu and J. Chang, *Constructing constant composition codes via distance-increasing mappings*, SIAM J. Discrete Math. **26** (2012), no. 1, 375–383.

[165] J. Yan and J. Yin, *Constructions of optimal GDRP($n, \lambda; v$)'s of type* $\lambda^1\mu^{m-1}$, Discrete Appl. Math. **156** (2008), no. 14, 2666–2678.

[166] J. Yan and J. Yin, *A class of optimal constant composition codes from GDRPs*, Des. Codes Cryptogr. **50** (2009), no. 1, 61–76.

[167] J. Yin, *A combinatorial construction for perfect deletion-correcting codes*, Des. Codes Cryptogr., **23** (1999), 99–110.

[168] J. Yin, A. C. H. Ling, C. J. Colbourn, and R. J. R. Abel, *The existence of uniform* 5-*GDDs*, J. Combin. Des. **5** (1997), 275–299.

[169] J. Yin, Y. Lu and J. Wang, *Maximum distance holey packings and related codes*, Sci. China Ser. A **42** (1999), no. 12, 1262–1269.

[170] J. Yin and Y. Tang, *A new combinatorial approach to the construction of constant composition codes*, Sci. China Ser. A **51** (2008), no. 3, 416–426.

[171] J. Yin, J. Yan and C. Wang, *Generalized balanced tournament designs and related codes*, Des. Codes Cryptogr. **46** (2008), no. 2, 211–230.

[172] H. Zhang, *Combinatorial constructions for several classes of codes*, Ph.D. Thesis, Zhejiang University, Hangzhou, 2013.

[173] H. Zhang and G. Ge, *Optimal ternary constant-weight codes of weight four and distance six*, IEEE Trans. Inform. Theory **56** (2010), no. 5, 2188–2203.

[174] H. Zhang and G. Ge, *Completely reducible super-simple designs with block size four and related super-simple packings*, Des. Codes Cryptogr. **58** (2011), 321–346.

[175] X. Zhang and G. Ge, *On the existence of partitionable skew Room frames*, Discrete Math. **307** (2007), no. 22, 2786–2807.

[176] M. Zhu and G. Ge, *Quaternary constant-composition codes with weight* 4 *and distances* 5 *or* 6, IEEE Trans. Inform. Theory **58** (2012), no. 9, 6012–6022.

个人简介

- 魏恒嘉，男，浙江大学理学院数学系博士生，导师：葛根年。

- 通信地址：中国浙江省杭州市浙江大学玉泉校区数学系，310027。

- 联系方式：13567103075，ven0505@163.com

- 教育经历：

  2005.9–2009.6，东华大学数学系，数学与应用数学专业，理学学士

  2009.9–今，浙江大学理学院数学系，应用数学专业，理学博士，导师：葛根年，研究方向：组合设计及其应用。

- 研究兴趣：组合设计理论，编码理论及数学在实际中的相关应用

攻读博士学位期间主要研究成果

[1] H. Wei and G. Ge, *Group divisible designs with block size four and group type $g^u m^1$ for more small g*, Discrete Math. **313** (2013), 2065–2083.

[2] H. Wei and G. Ge, *Group divisible designs with block size four and group type $g^u m^1$ for $g \equiv 0 \bmod 6$*, J. Combin. Des. **22** (2014), 26–52.

[3] H. Wei and G. Ge, *Kirkman frames having hole type $h^u m^1$ for $h \equiv 0 \bmod 12$*, Des. Codes Cryptogr. **72** (2014), 497–510.

[4] H. Wei and G. Ge, *Group divisible designs with block size four and group type $g^u m^1$*, Des. Codes Cryptogr., to appear.

[5] H. Wei and G. Ge, *Group divisible designs with block sizes from $K_{1(3)}$ and Kirkman frames of type $h^u m^1$*, Discrete Math., to appear.

[6] H. Wei and G. Ge, *Spectrum of sizes for perfect 2-deletion-correcting codes of length 4*, Des. Codes Cryptogr., to appear.

[7] H. Wei, H. Zhang and G. Ge, *Completely reducible super-simple designs with block size five and index two*, Des. Codes Cryptogr., to appear.

[8] G. Ge, S. Hu, E. Kolotoğlu, and H. Wei, *A complete solution to spectrum problem for five-vertex graphs with application to traffic grooming in optical networks*, J. Combin. Des., to appear.

[9] G. Ge, E. Kolotoğlu and H. Wei, *Optimal groomings with grooming ratios six and seven*, J. Combin. Des., to appear.

[10] S. Li, H. Wei and G. Ge, *A combinatorial approach to support recovery*, submitted.

[11] S. Li, H. Wei and G. Ge, *Explicit constructions of disjunct matrices via algebraic curves over finite fields*, submitted.

[12] H. Wei and G. Ge, *Some more* 4-*RGDDs,* 4-*frames and* 5-*GDDs*, submitted.

[13] H. Wei, H. Zhang, M. Zhu, and G. Ge, *Optimal ternary constant-composition codes with weight four and distance six*, submitted.

[14] C. J. Colbourn, G. Ge, and H. Wei, *Group divisible covering designs with block size 4*, in manuscript.

[15] H. Wei and G. Ge, *Directed B*$(K, 1; v)$ *with* $K \in \{4, \ldots, 9\}$ *which contains* $\{4\}$, in manuscript.

[16] G. Ge and H. Wei, *Well balanced designs with block size three*, under investigation.

[17] G. Ge, H. Zhang and H. Wei, *Optimal quaternary constant weight codes with weight four and distance six*, under investigation.