

分类号: O157

密级: 无

单位代码: 10028

学号: 2180501022

首都师范大学博士学位论文

极值组合及其相关领域中若干问题的研究

Various problems in extremal
combinatorics and related fields

研究生: 徐子翔

指导教师: 葛根年 教授

学科专业: 应用数学

学科方向: 组合数学与信息安全

2022 年 3 月

首都师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

徐子渊

日期：2022年5月16日

首都师范大学学位论文授权使用声明

本人完全了解首都师范大学有关保留、使用学位论文的规定，学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版。有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅。有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索。有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

学位论文作者签名：

徐子渊

导师签名：

葛根平

日期：2022年5月16日

摘 要

极值组合学是近年来离散数学中最活跃的分支之一，处理的问题常常也由信息论和离散几何等其它领域的问题引发。本论文重点研究了极值组合学及其相关领域的各种问题，包括Turán问题、Ramsey问题、Erdős-Falconer问题，以及极值图论和置换码方面的一些新问题。我们使用了许多强有力且深刻的数学工具，包括随机代数方法、相关随机选择和Szemerédi正则引理来研究一些相关文献中提出的公开问题与猜想。

在第一章中，我们将简要介绍本文所讨论问题的背景，并总结我们对这些问题的主要贡献。

在第二章中，我们主要关注Turán问题，它是极值组合学中最重要的问题之一。其主要问题是确定不包含固定禁止子图的一个图的最大边数。当禁止子图 H 的染色数至少为 3 时，著名的Erdős-Stone-Simonovits定理便给出Turán数的渐近结果。因此，有趣的情况发生在 H 是二部图时，该问题被称为退化的Turán问题，一直被广泛地研究。与简单图的情况相比，超图Turán问题同样非常重要，但是已知的渐近结果很少。我们获得了关于不同禁止子结构的Turán问题的几个新结果。首先，使用随机代数方法，我们确定了当 $s \gg t$ 时完全二部 r -一致超图 $K_{s,t}^{(r)}$ 的Turán数的渐近阶。其次，我们发展了随机多重超图构造方法，并获得了一些超图的Turán数紧的下界。特别地，作为核心结果的一个主要推论，我们证明了源于1954年的著名的Kövári-Sós-Turán定理中关于大的常数 t 的阶也是紧的。第三，由于代数几何中著名的Lang-Weil界的限制，随机代数方法通常会迫使结果中某些常数非常大，针对这一缺陷，我们给出了禁掉几类特定子结构的图与超图的代数构造，包括完全二部图的1次剖分图和Berge型theta超

图，我们的结果显著地改进了Conlon、Janzer和Lee以及He与Tait得到的结果。最后，我们还研究了带权版本的Turán问题，并证明了一些新的结果，例如我们完全刻画了不含有完全子图的带权图的极值结构，并给出了两种顶点诱导函数下Erdős-Stone-Simonovits定理的推广。

在第三章中，我们考虑了Conlon和Tyomkyn最近提出的一个新的极值问题，其目的是在正常边着色的完全图中找到某个给定子图的两个或多个顶点不相交的染色同构子图。我们证明了关于这个新主题的两个新结果。首先，我们给出了一个确定性的正常边染色方案，并且证明了其具有线性级别的染色数，使得染色后的完全图不包含3个染色同构的 C_4 ，这改进了通过随机代数方法和Lovász局部引理获得的已知结果。其次，我们证明了如果对 K_n 进行任何染色数目为 $\Omega(n^{1+\frac{1}{2t-3}})$ 级别的正常边染色，染色后的 K_n 中必然包含两个染色同构的完全图 K_t 的1次剖分图，这个结果完整地回答了Conlon和Tyomkyn提出的公开问题，并且实际上证明了更强的结论。

在第四章中，我们考虑了在Hamming距离下著名的 Erdős-Falconer问题的一个新变种问题，其旨在量化一个集合有多大时，必然能够包含大量不同的Hamming距离。最近，有关有限域版本的Erdős-Falconer问题由于能够给调和分析、几何和组合学中的经典问题提供技术参考，从而备受关注。我们的研究成果显著改进了Yazici最近基于Hamming距离的Erdős-Falconer问题的渐近结果，并且我们进一步地得到了更为一般的推广结果。与通常研究者们使用傅立叶分析方法不同，我们研究该问题的主要工具包括相关随机选择、线性代数方法以及加性数论和编码理论的一些结果。

在第五章中，我们考虑了多染色Ramsey问题。Ramsey理论涉及到

了数学中大量深刻的结果，它们有一个共同的主题，即寻找大规模组合结构中所存在的特定子结构。它也是现代组合学中最核心的研究主题之一。我们研究的问题是多重染色Ramsey问题。使用随机区块构造和随机膨胀方法，我们得到了关于多个奇圈与单个完全图的多重染色Ramsey数的下界。特别地，这一结果改进了过去由Alon与Rödl所得到的已知下界结果。

在第六章中，我们研究了基于区组距离下置换码的一些理论问题。基于不同距离度量下的置换码，会在不同应用场景中被广泛使用。研究给定条件下编码的最大码字个数是编码理论的基本问题之一。针对置换码，我们首先建立了置换码和其对应图的独立集之间的联系，然后研究图的独立数的理论界。通过这种图论方法，我们改进了著名的Gilbert-Varshamov型渐近下界。我们还给出了一种基于多项式的编码方案构造，并利用极值集合论中的一些方法来获得一种新类型的上界，该上界在某些情况下优于经典的球填充上界。

在第七章中，我们将对其他研究问题做简要介绍。

关键词: 极值组合学, Turán问题, Ramsey问题, 染色同构问题, Erdős-Falconer问题, 置换码, 随机代数方法, 随机多重超图, 概率方法, 多项式结式

Abstract

Extremal combinatorics is among the most active branches in discrete mathematics, dealing with problems that are often motivated by questions in other areas such as information theory and discrete geometry. This thesis focuses on various problems in extremal combinatorics and related fields, including Turán problems, Ramsey problems, Erdős-Falconer problems, and some new problems on extremal graph theory and permutation codes. We use many powerful and deep tools including random algebraic method, dependent random choice and Szemerédi regularity lemma to attack several conjectures and open problems in the literature.

In Chapter 1 , we will briefly introduce the backgrounds of problems discussed in this thesis and summarize our main contributions towards these problems.

In Chapter 2 , we focus on Turán problem, which is one of the most important problems in extremal combinatorics. The main problem is to determine the maximum number of edges in a graph which does not contain a fixed forbidden subgraph. The celebrated Erdős-Stone-Simonovits gives an asymptotic solution when the forbidden subgraph H has chromatic number at least 3. Hence the interesting cases occur when H is bipartite, which has been widely studied as degenerate Turán problems. In contrast to the simple graph case, there are only a few results for the hypergraph Turán problems. We obtain

several new results on Turán problems of different forbidden substructures. Firstly, using the random algebraic method, we determine the Turán number of complete bipartite r -uniform hypergraph $K_{s,t}^{(r)}$ for $s \gg t$. Furthermore, we develop the random multi-hypergraph constructions and obtain some tight lower bounds for Turán number of some hypergraphs. As a corollary of our main results, we demonstrate sharpness of the constant in the famous Kövári-Sós-Turán theorem, which was obtained in 1954. Thirdly, since the random algebraic method usually requires some constant to be very large due to the so-called Lang-Weil bound from algebraic geometry, we give some algebraic constructions of extremal graphs and hypergraphs for certain substructures, including the 1-subdivision of complete bipartite graphs and Berge theta hypergraphs. These improve the corresponding results obtained by Conlon, Janzer and Lee, and He and Tait, respectively. Finally, we also study a weighted version of Turán problems and show some new results such as characterizing the extremal structure of clique-free graphs and proposing a generalized version of the Erdős-Stone-Simonovits theorem for weighed graphs under two types of vertex-induced weight functions.

In Chapter 3 , we consider a new extremal problem recently proposed by Conlon and Tyomkyn, which aims to find two or more vertex-disjoint color isomorphic copies of some given graph in proper edge colorings of complete graphs. We show two new results on this new topic. Firstly, we provide an explicit proper edge coloring of

complete graph K_n with linear number of colors such that there is no 3-fold color isomorphic copies of C_4 . This improves the previously known results obtained by the random algebraic method and Lovász Local Lemma. Secondly, we prove that any proper edge-coloring of K_n with $\Omega(n^{1+\frac{1}{2t-3}})$ colors must contain two color isomorphic copies of the 1-subdivision of complete graph K_t , which completely answers the question posed by Conlon and Tyomkyn in a stronger form.

In Chapter 4 , we consider a new variant of the famous Erdős-Falconer distance problem under Hamming distance, which aims to quantify the extent to which large sets must determine many distinct Hamming distances. Recently, finite field analogs of classical problems in harmonic analysis, geometry and combinatorics have received much attention because of the relative technical transparency afforded by the discrete setting. Our work significantly improves Yazici's asymptotic results for the Erdős-Falconer problem under Hamming distance, and we further obtain more general results on this topic. Unlike using Fourier analytical method as usual, our main tools include the celebrated dependent random choice, linear algebra method and some results from additive number theory and coding theory.

In Chapter 5 , we consider the multicolor Ramsey problems. Ramsey theory refers to a large body of deep results in mathematics which have a common theme: find uniform substructures in large combinatorial structures. It is now one of the most central research topics in modern combinatorics. The problem we study is the mul-

ticolor Ramsey problem. Using the random block constructions and random blowup argument, we obtain improved lower bound for multicolor Ramsey number of small odd cycles versus a large clique. In particular, our results improve the previously known lower bound obtained by Alon and Rödl.

In Chapter 6 , we study some theoretical problems in permutation codes under permutation block distance. Permutation codes under several different metrics are widely used due to their various applications. Studying the maximum size of codes under given conditions is one of the basic problems in coding theory. For permutation codes, we first establish a connection between permutation codes and independent sets in a corresponding graph and then study the bounds of the independence number of the graph. By this graph theoretic approach, we improve the Gilbert-Varshamov type bound asymptotically. We also propose a new encoding scheme based on certain constructions of binary constant weight codes and apply some methods from extremal set theory to obtain an upper bound of a new type, which beats the sphere-packing type bound in certain situations.

In Chapter 7 , we briefly introduce several other topics still under investigation.

Key words: Extremal combinatorics, Turán problems, Ramsey problems, color isomorphic, Erdős-Falconer problems, permutation codes, random algebraic method, random multi-hypergraphs, probabilistic method, polynomial resultant.

Contents

| | |
|--|----|
| 摘要 | i |
| Abstract | iv |
| Chapter 1 引言 | 1 |
| 1.1 若干Turán问题的新结果 | 1 |
| 1.2 正常边着色下染色同构子图问题 | 6 |
| 1.3 基于Hamming度量的Erdős-Falconer距离问题 | 8 |
| 1.4 多个奇圈与完全图的多染色Ramsey数 | 10 |
| 1.5 区组度量下的置换码 | 12 |
| 1.6 常用符号和声明 | 14 |
| Chapter 2 若干Turán问题的新结果 | 15 |
| 2.1 简介 | 15 |
| 2.1.1 关于完全二部 r -一致超图的Turán问题 | 19 |
| 2.1.2 随机多重超图构造 | 21 |
| 2.1.3 Turán问题中的确定性代数构造 | 23 |
| 2.1.4 顶点诱导的带权Turán问题 | 27 |
| 2.1.5 本章的结构 | 28 |
| 2.2 随机代数方法简介 | 29 |
| 2.3 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)})$ 的下界 | 31 |
| 2.4 关于 $K_{s,t}^{(r)}$ 的Turán问题的上界 | 34 |
| 2.4.1 $\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)})$ 的上界 | 34 |
| 2.4.2 $\text{ex}_r(n, K_{a,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)})$ 的上界 | 35 |
| 2.5 随机多重超图构造 | 36 |
| 2.5.1 完全 r 部 r -一致超图 | 37 |
| 2.5.2 完全二部 r -一致超图 | 40 |
| 2.5.3 Berge型theta超图 | 43 |

| | |
|--|-----|
| 2.6 代数构造的主要工具: 多项式结式 | 48 |
| 2.7 不包含 $K'_{3,25}$ 的极图构造 | 54 |
| 2.7.1 情况1: $a_1 = b_1$ 或 $a_1 = c_1$ 或 $b_1 = c_1$ | 58 |
| 2.7.2 情况2: $a_1 \neq b_1$, $a_1 \neq c_1$, $b_1 \neq c_1$; $a_2 = b_2$ 或 $a_2 = c_2$ 或 $b_2 = c_2$. | 60 |
| 2.7.3 情况3: $a_1 \neq b_1$, $a_1 \neq c_1$, $b_1 \neq c_1$; $a_2 \neq b_2$, $a_2 \neq c_2$ 且 $b_2 \neq c_2$ | 62 |
| 2.7.4 定理2.8的证明 | 69 |
| 2.8 不包含 $\Theta_{3,217}^B$ 的线性超图构造 | 69 |
| 2.8.1 (1, 2, 1, 2)型Berge型3长路径: 至多有8条 | 71 |
| 2.8.2 (1, 2, 3, 1)型Berge型3长路径: 至多有108条 | 78 |
| 2.8.3 (1, 2, 3, 2)型Berge型3长路径: 至多有36条 | 83 |
| 2.8.4 定理2.9的证明 | 87 |
| 2.9 关于 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)})$ 下界的改进 | 87 |
| 2.10 加法函数诱导的带权Turán问题 | 90 |
| 2.11 基于加法函数诱导下禁止完全子图的极图 | 91 |
| 2.11.1 禁止三角形 K_3 的情况 | 91 |
| 2.11.2 禁止完全子图 K_ℓ 的情况 | 92 |
| 2.12 带权图版本的Erdős-Stone-Simonovits定理 | 96 |
| 2.13 总结与展望 | 101 |
| Chapter 3 正常边着色下染色同构子图问题 | 103 |
| 3.1 简介 | 103 |
| 3.2 关于染色同构偶圈 C_4 的新结果 | 105 |
| 3.3 关于染色同构完全图的1次剖分图的新结果 | 110 |
| 3.4 总结与展望 | 117 |
| Chapter 4 基于Hamming度量的Erdős-Falconer距离问题 | 119 |
| 4.1 简介 | 119 |
| 4.2 一些相关的工具 | 124 |
| 4.2.1 编码理论中的工具 | 124 |
| 4.2.2 相关随机选择方法 | 128 |

| | |
|--------------------------------------|------------|
| 4.2.3 Vinogradov型定理 | 130 |
| 4.3 寻找任意正比例数量的Hamming距离 | 130 |
| 4.3.1 较小的素数Hamming距离的存在性 | 131 |
| 4.3.2 寻找较小的Hamming距离 | 132 |
| 4.3.3 寻找较大的Hamming距离 | 136 |
| 4.3.4 定理4.1的证明 | 138 |
| 4.4 Delsarte不等式的推广 | 138 |
| 4.5 嵌入二部距离图 | 141 |
| 4.5.1 嵌入距离图的思路 | 141 |
| 4.5.2 定理4.2的证明 | 142 |
| 4.5.3 定理4.3的证明 | 147 |
| 4.6 总结与展望 | 150 |
| | |
| Chapter 5 多个奇圈与完全图的多染色Ramsey数 | 153 |
| 5.1 简介 | 153 |
| 5.2 定理5.1的证明 | 154 |
| 5.3 总结与展望 | 157 |
| | |
| Chapter 6 区组度量下的置换码 | 159 |
| 6.1 简介 | 159 |
| 6.2 图论模型 | 164 |
| 6.3 渐近下界的改进 | 166 |
| 6.4 基于多项式的置换码构造 | 172 |
| 6.5 一种新型的上界 | 175 |
| 6.6 总结与展望 | 176 |
| | |
| Chapter 7 其它在研问题 | 178 |
| | |
| 致谢 | 198 |
| | |
| 攻读博士期间的学术成果 | 200 |

Chapter 1 引言

§ 1.1 若干Turán问题的新结果

Turán问题是极值组合学中最重要的问题之一。其原始的主要问题是确定不包含固定禁止子图的图的最大边数。经典的Turán数 $\text{ex}(n, H)$ 指的是 n 个顶点且不包含子图 H 的图的最大边数。理想情况下，人们希望能精确地计算Turán数的值。但实际上，即使是Turán数的渐近结果，目前已知的仍然不多。自1941年的开创性结果Turán定理[171]发表以来，确定不同图类的Turán数就成为了极值图论的基本核心问题。比如说，Turán本人[171]完全确定了 $H = K_t$ 时的Turán数，其中 K_t 是指 t 个顶点的完全图。其中，不包含 K_t 的图中，最简单的例子便是 $(t - 1)$ 部图。在给定顶点数目后，我们可以构造一个完全的 $(t - 1)$ 部图，使得任何不同部之间的顶点均连边，并且要保证每一部的顶点个数尽可能相等，即任何两部之间顶点数目最多相差1。Turán定理表明，上述构造总是能够给出给定顶点集后边数最多的不包含完全子图 K_t 的图，而且，它在同构意义下是唯一的。

Turán问题中，最基本的结果是Erdős-Stone-Simonovits定理，该定理说明了，对于给定的禁止子图 H ，一个 n 个顶点且不包含 H 的图的最大边数在渐近意义上是完全图边数的 $1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$ 倍，其中 $\chi(H)$ 表示 H 的染色数。可以看到，如果 H 不是二部图，那么Erdős-Stone-Simonovits定理就会给出紧的渐近结果。更具体地，Erdős-Stone-Simonovits定理可以用

公式 $\text{ex}(n, H) = (1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)) \binom{n}{2}$ 表示。但是，对于二部图 H ，它只能给出 $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$ 。因此，Turán问题中一个最主要的开放性问题是确定二部图的Turán数，不过，即使是想得到渐近意义上的结果，也是非常具有挑战性的。

经典的图版本的Turán问题有许多重要的推广和拓展问题。比如说，超图版本的Turán问题，作为直接的推广，其希望得到 n 个顶点且不包含某特定 r -一致超图作为子超图的 r -一致超图的最大超边数。对于图版本的Turán问题，目前人们已有相对丰富的结果，但对于超图版本的Turán问题，我们只知道非常稀少的结果。比如说，在解决了 $H = K_t$ 的问题后，Turán [172]提出了一个自然的推广问题，即确定完全 r -一致超图 $K_t^{(r)}$ 的Turán数。然而迄今为止，当 $t > r > 2$ 时，仍然没有任何一个例子得到完美地解决，即使连渐近意义上的结果也未被完全确定。对于这个问题，著名的数学家Erdős [60]对任何一个特殊情况的解决提供500美元的悬赏，而对任意一般情况下的解决方案提供了1000美元的悬赏。Turán问题的另一个重要的拓展是广义Turán问题。一般来说，广义Turán问题旨在研究函数 $\text{ex}(n, T, H)$ ，其表示在 n 个顶点且不包含子图 H 的图中，某一个特定图结构 T 的可能的最大数目。在最近的一篇经典论文 [9]中，组合数学家Alon和Shikhelman系统地研究了图版本的广义Turán问题，并且引发了大量的后续研究工作。

针对不同的禁止子结构，我们在图版本和超图版本的Turán型问题上取得了一系列新结果。在这里，我将列举并简要叙述我们所取得的新结果。

- 利用随机代数方法，我们得到了广义Turán数 $\text{ex}(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)})$ 的一般下界，其中禁止的超图 $K_{s,t}^{(r)}$ 是由Mubayi和Verstraëte [148]在2004年定义

的完全二部 r -一致超图。

定理1.1. 令正整数 $r \geq 3$ 。对于任何给定的正整数 t 和任何给定的具有 v 个顶点和 e 条边的 r -一致超图 \mathcal{T} , 存在常数 $c = c(r, t)$, 使得当 $s \geq c$ 时, 有

$$\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)}) = \Omega(n^{v - \frac{e}{t}})。$$

利用图论工具和一些组合计数方法, 我们还得到了当 \mathcal{T} 为某些特定结构时, 与我们所得的 $\text{ex}(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)})$ 的一般下界所匹配的上界结果。

定理1.2. 令正整数 $r \geq 3$ 。对任何正整数 t , 都会存在一个常数 $s(r, t)$, 使得当 $s \geq s(r, t)$ 时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Theta(n^{r - \frac{1}{t}})。$$

定理1.3. 令正整数 $r \geq 3$, $a = 1$ 以及 $b < t$ 。对任何正整数 t , 都会存在一个常数 $s'(r, t)$, 使得当 $s \geq s'(r, t)$ 时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{a,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)}) = \Theta(n^{a+b(r-1) - \frac{ab}{t}})。$$

- 我们发展了随机多重超图构造的方法, 利用这个方法, 我们得到了关于完全二部 r -一致超图、完全 r 部 r -一致超图和 r -一致的Berge型theta超图的Turán数的下界结果。特别地, 我们的结果可以给出如下推论, 当 t 充分大时, 源于1954年的著名的Kövári-Sós-Turán定理 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = O(t^{\frac{1}{s}} n^{2 - \frac{1}{s}})$ 中, 关于 t 的渐近阶是紧的。具体的结果如下。

定理1.4. 对于正整数 s_1, s_2, \dots, s_{r-1} 和 $r \geq 2$, 当 s_r 是一个充分大的常数时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}) = \Omega\left(s_r^{\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_{r-1}}} n^{r - \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_{r-1}}}\right)。$$

定理1.5. 对正整数 t 和 $r \geq 2$, 当 s 是一个充分大的常数时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Omega\left(s^{\frac{1}{t}} n^{r - \frac{1}{t}}\right)。$$

推论1.1. 对于给定的正整数 s , 当 t 充分大时, 有

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta\left(t^{\frac{1}{s}} n^{2 - \frac{1}{s}}\right)。$$

定理1.6. 令 $\ell \geq 2$ 为给定正整数, 当 t 充分大时, 有

$$\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) = \Omega_{\ell,r}\left(t^{\frac{1}{\ell}} n^{1 + \frac{1}{\ell}}\right)。$$

- 在极值图论中, 确定性的极图构造是非常具有挑战性的问题。为了构造确定性的极图, 我们开发了一种涉及到多项式结式的方法, 它可以有效地确定我们构造的图或者超图中是否存在特定的子结构。我们的主要结果包括 K_{3,t_1} 的 1 次剖分图 K'_{3,t_1} 的 Turán 数和 3-一致的 Berge 型 theta 超图 Θ_{3,t_2}^B 的线性 Turán 数的下界结果, 其中 $t_1 = 25$, $t_2 = 217$ 。作为比较, 常数 t_1 改进了 Bukh 和 Conlon 在文献[34]中给出的随机代数构造所得到的结果, 并针对 Conlon、Janzer 和 Lee 在文献[47]中提出的问题取得了显著的进展, 而常数 t_2 则改进了 He 和 Tait 在文献[36]中的结果。我们的具体结果如下。

定理1.7. $\text{ex}(n, K'_{3,25}) = \Theta(n^{\frac{4}{3}})$ 。

定理1.8. $\text{ex}_3^{\text{lin}}(n, \Theta_{3,217}^B) = \Theta(n^{\frac{4}{3}})$ 。

- 我们提供了一个明确的显式构造，给出了关于完全3部3一致超图 $K_{2,2,7}^{(3)}$ 的Turán数的下界结果 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)}) \geq \frac{1}{27}n^{\frac{19}{7}} + o(n^{\frac{19}{7}})$ 。我们的构造基于著名的Norm图，从结果意义上说，该结果改进了通过概率方法获得的下界 $\Omega(n^{\frac{73}{27}})$ 。具体的结果如下。

定理1.9.

$$\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)}) \geq \frac{1}{27}n^{\frac{19}{7}} + o(n^{\frac{19}{7}})。$$

- 在加法函数诱导的权重函数下，我们考虑了带权Turán问题的一种新变种问题。首先，我们刻画了该问题下不包含完全子图 K_ℓ 的极图结构。进一步地，我们证明了基于两种类型的顶点诱导权重函数下，带权图版本的Erdős-Stone-Simonovits定理。具体来说，令 $w : V(K_n) \rightarrow [0, \infty)$ 为顶点权重函数，边权重 $w_+ : E(K_n) \rightarrow [0, \infty)$ 是由加法函数 $w_+(uv) = w(u) + w(v)$ 给出。如果我们假设顶点权重是不同的，并且是有界的。对于给定的图 H ，我们将加法函数诱导下关于 H 的Turán数定义为

$$\text{ex}(n, w_+, H) := \max\{w_+(G) \mid G \subseteq K_n, G \text{ 不包含 } H \text{ 作为子图}\},$$

其中 $w_+(G) := \sum_{e \in E(G)} w_+(e)$ 。利用结构图论方法和著名的Szemerédi正则引理等工具，我们得到如下结果。

定理1.10. 对于给定的正整数 $\ell \geq 3$ ，有

$$\text{ex}(n, w_+, K_\ell) = \max_{\mathcal{P}} \sum_{P \in \mathcal{P}} (n - |P|)w(P),$$

其中分划 \mathcal{P} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\ell - 1$ 部的所有可能情况，另外， $|P|$ 是 P 中顶点的个数，以及 $w(P) := \sum_{v \in P} w(v)$ 。

定理1.11. 对于给定的图 H , 令 $w : V(K_n) \rightarrow [0, S]$ 为顶点的权重函数, 其中 S 为一个正常数。那么当 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\text{ex}(n, w_+, H) = \max_{\mathcal{R}} \sum_{P \in \mathcal{R}} (n - |P|)w(P) + o(n^2),$$

其中分划 \mathcal{R} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\chi(H) - 1$ 部的所有可能情况。

在第二章中, 我们将对上述结果进行更详细地介绍。

我们在关于Turán问题的主题中, 目前一共撰写了4篇论文。其中, 关于完全二部 r -一致超图的定理1.1、1.2、1.3和关于 $K_{2,2,7}^{(3)}$ 的定理1.9已发表在《SCIENCE CHINA Mathematics》。关于随机多重超图构造所得到的定理1.4、1.5、1.6已发表在《European Journal of Combinatorics》。关于 K_{3,t_1} 的一次剖分图的定理1.7和Berge型theta超图 Θ_{3,t_2}^B 的定理1.8, 我们已经投稿至《SCIENCE CHINA Mathematics》。关于带权Turán问题的定理1.10和1.11已发表在《Discrete Mathematics》。

§ 1.2 正常边着色下染色同构子图问题

我们称一个边着色是正常(proper)的, 是指如果两条不同的边具有公共关联的顶点, 那么这两条边必然被染成不同的颜色。近年来, 在正常边着色下的完全图中寻找彩虹结构的问题得到了广泛的研究。例如, 在Montgomery、Pokrovskiy和Sudakov最近的一项突破性研究成果中[146], 他们证明了著名的Ringel猜想。Ringel猜想的一个等价的叙述可以表示为, 在一个特定的正常边着色的 K_{2n+1} 中找到任何具有 n 条边彩虹树结构。与考虑寻找较大的特定子结构意图不同, Conlon和Tyomkyn[49]开始研究一个新类型的极值图论问题, 其目的是在正常边着色的完全图中找到给定子图的两个或多个顶点不相交的染色同构副本。更准确地说,

对于正整数 $k, n \geq 2$ 和一个给定的图 H , 令 $f_k(n, H)$ 表示最小的正整数 c , 使得存在对 K_n 的着色数为 c 的正常边着色方案, 满足边着色后的 K_n 中不包含 k 个顶点不相交且染色同构的图 H 的副本。作为一个极值图论问题, 以下问题是非常自然的。

问题1.1. 给定一个图 H 和一个整数 $k \geq 2$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 确定 $f_k(n, H)$ 的值。

在文献[49]中, Conlon 和 Tyomkyn 证明了许多关于函数 $f_k(n, H)$ 的一般结果, 我们列举其中一些结果如下。

定理1.12 ([49]). (i) 对于任何 v 个点, e 条边的给定图 H , 有

$$f_k(n, H) = O(\max\{n, n^{\frac{kv-2}{(k-1)e}}\})。$$

(ii) 对于任何包含偶圈作为子图的图 H , 都存在正整数 $k = k(H)$ 满足

$$f_k(n, H) = \Theta(n)。$$

关于 Conlon 和 Tyomkyn 提出的这个新问题, 我们一共得到了两方面的新结果, 针对的图类分别为长度为 4 的偶圈 C_4 和完全图 K_t 的 1 次剖分图。下面我们将列出并简要描述我们的新结果。

- Conlon 和 Tyomkyn 在文献[49] 使用随机代数方法的变种证明了当 k 是一个非常大的常数时, $f_k(n, C_4) = \Theta(n)$ 。他们提出了一个公开问题, 关于 $f_2(n, C_4) = \Theta(n)$ 是否成立。我们通过给出了一个对 K_n 的确定性着色函数, 证明了如下定理

定理1.13. $f_3(n, C_4) = \Theta(n)$ 。

特别地，我们的结果也改进了先前已知的由著名的Lovász局部引理所得到的上界 $O(n^{\frac{5}{4}})$ 。

- 使用Lovász局部引理，Conlon和Tyomkyn[49]证明了如果 $e(H) \geq 2v(H) - 2$ ，则 $f_2(n, H) = \Theta(n)$ 。他们提出了一个公开问题，关于 $e(H) \geq 2v(H) - 2$ 这个条件是否是紧的。为了回答他们的问题，我们研究了函数 $f_2(n, H_t)$ ，其中 H_t 是完全图 K_t 的 1 次剖分图。我们证明了如下定理。

定理1.14. $f_2(n, H_t) = \Omega(n^{1+\frac{1}{2t-3}})$ 。

我们的结果意味着 $t \geq 3$ 时，仅有 $e(H) \geq 2v(H) - 2t$ 的条件，并不能给出 $f_2(n, H) = \Theta(n)$ 。这个结果完整地回答了 Conlon 和 Tyomkyn 提出的公开问题，并且事实上，我们证明了更强的结论。

我们在正常边着色下染色同构子图问题的研究中，共撰写了 2 篇论文，其中关于染色同构的偶圈问题的定理 1.13 已经发表在《SIAM Journal on Discrete Mathematics》，关于染色同构的完全图的 1 次剖分图的定理 1.14 已经发表在《Discrete Mathematics》。

§ 1.3 基于Hamming度量的Erdős-Falconer距离问题

著名的Erdős-Falconer距离问题旨在量化一个集合有多大时，才能确保集合内的元素确定大量不同的距离。例如，在经典的欧几里得空间中，Erdős-Falconer猜想可以叙述为，如果一个 \mathbb{R}^d 的子集的 Hausdorff 维数超过 $\frac{d}{2}$ ，那么由这个集合的元素所决定的欧式距离集合的 Lebesgue 测度为正。Falconer[72]首先证明了当一个紧集 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 的 Hausdorff 维数大于 $\frac{d+1}{2}$ 时， A 中元素所决定的欧几里得距离集必然具有正的 Lebesgue 测

度。最近，有许多研究工作在特定的维度条件下改进了这个一般的阈值结果，参见文献[29, 54, 55, 68, 97, 104, 183]和其中的参考文献。而在离散空间中，Erdős-Falconer问题也受到了很多关注。Iosevich和Rudnev [109]首先证明了一个有限域向量空间上的子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^d$ 如果满足 $|A| > 2q^{\frac{d+1}{2}}$ ，那么集合 A 中的元素能够确定 \mathbb{F}_q 中所有可能的距离。有关有限域模型中的此类问题，我们建议读者可以参考文献 [1, 92, 105, 107, 125, 185] 及其中的参考文献。

在Erdős-Falconer距离问题这个主题中，我们首先考虑有限域的向量空间中基于 Hamming 距离下的Erdős-Falconer问题。利用概率方法和数论及编码理论中的若干结果，我们得到了如下定理。

定理1.15. 固定 $q \geq 4$ ，维度 n 趋于无穷大。对于任意的正比例 $0 < \alpha < 1$ ，存在一个与 α 和 q 有关的常数 $\beta = \beta(\alpha, q) > 0$ ，使得 \mathbb{F}_q^n 的一个子集 $I \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|I| > q^{(1-\beta)\cdot n}$ ，那么子集 I 中的元素两两之间构成的不同 Hamming 距离至少会有 αn 种。

与文献 [185] 中使用傅立叶分析方法不同，我们主要运用的是组合数学相关的方法，在某种程度上可以克服傅立叶分析方法在量化过程中存在较多损失的缺点。此外，我们给出了 $\beta = \beta(\alpha, q)$ 的一般定量结果，这些结果会依赖于数论和编码理论中已知的结果。

我们进一步考虑了Erdős-Falconer问题在图论层面的推广，这个推广问题旨在从 \mathbb{F}_q^n 的子集中找到许多不同的赋有相等 Hamming 距离的二部图。我们的主要结果可以表述如下。

定理1.16. 令 H 为满足 $\text{ex}(n, H) = O(n)$ 的二部图。如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c)n}$ ，其中 $c = c(q, H) > 0$ 为仅与 q 和 H 相关的常数，那么 A 会包含

$\Omega(n)$ 个不同的距离图 H , 满足每个距离图 H 的边的 Hamming 距离都相等。

我们还刻画了上述参数 c 和图 H 本身属性以及希望找到的不同距离图数目之间相关性。在证明该定理的过程中, 我们还得到了一个著名的 Delsarte 不等式的推广, 其本身也是有趣的。在这里我们对其进行简单的描述, 对于子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 和一个素数 p 。我们定义图 $G(A, p)$ 的点集为 $V(G(A, p)) = A$, 两个顶点 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ 连边当且仅当它们的 Hamming 距离 $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{p}$ 。我们的推广结果可以表示如下。

定理1.17. 令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$, 对于给定的素数 p 和给定的满足 $\text{ex}(n, F) \leq cn^{2-s}$ 的二部图 F , 这里常数 $c > 0$, $0 < s \leq 1$ 。如果图 $G(A, p)$ 不包含 F 作为子图, 则有

$$|A| \leq \left(c' \sum_{i=0}^{p-1} (q-1)^i \binom{n}{i} \right)^{\frac{1}{s}},$$

其中 $c' = \max\{4c, 2c+1\}$ 。

利用定理1.17, 我们可以适当地放宽定理1.16中对 H 的 Turán 数渐近结果的要求。在第四章中我们将对这些结果进行更详细地描述。

我们在 Erdős-Falconer 问题的主题中已撰写 2 篇论文, 其中关于基于 Hamming 距离下 Erdős-Falconer 问题的定理1.15 已发表在《SIAM Journal on Discrete Mathematics》上。有关图论层面进一步的推广定理1.16 和关于 Delsarte 不等式的推广定理1.17 已投稿至《Journal of Combinatorial Theory, Series A》。

§ 1.4 多个奇圈与完全图的多染色 Ramsey 数

Ramsey 理论希望描述的是“完全的无序是不存在的”, 换句话说, 希望保证一个足够大的结构总能包含某些特定的子结构。在图论中, 著

著名的Ramsey定理[158]告诉我们，对于任何图 H 都存在一个自然数 N 使得对完全图 K_N 的边做任何的多重染色，该染色后的 K_N 中都会包含单色的子图 H 。有了这一定性叙述后，分析这类最小自然数的定量结果便成为了整个Ramsey理论中的一个核心问题。尽管在过去的80余年有大量数学家展开对该定量问题的研究，但从结果意义上说，目前我们仍然知之甚少。

对于给定的图 H 和一个正整数 k ，多染色Ramsey数 $R_k(H; K_m)$ 指的是最小的数 N ，使得用 $k + 1$ 种颜色对 K_N 的每条边染色后， K_N 要么会包含有颜色全是某个 $1 \leq i \leq k$ 的单色 H ，要么会包含颜色全是 $k + 1$ 的单色 K_m 。目前最重要的问题是二染色的对角Ramsey数问题 $R_1(K_m; K_m)$ ，其最早的理论界 $2^{\frac{m}{2}} \leq R_1(K_m; K_m) \leq 2^{2m}$ 是由Erdős[58]以及 Erdős和Szekeres[67]给出。但是，过去的八十余年中，人们对该问题的理论界仅能给出非常微小的改进 [42, 159, 164]。对于较大的染色数 $k \geq 2$ ，Conlon和Ferber取得了突破性的成果 [45]，使用混合的随机代数方法，他们改进了多染色对角Ramsey数 $R_k(K_m; K_m)$ 的理论下界。最近，Wigderson[182]和Sawin [160]分别通过不同的方法继续地改进了 $R_k(K_m; K_m)$ 的理论下界。

而对于非对角的情况，目前已知的结果也很少。一个非常突出的结果是Alon和Rödl在文献 [7]中证明了 $R_k(K_3; K_m) = \Theta(m^{k+1} \text{poly log } m)$ 。同样是在这篇文献中，他们还给出了关于多个奇圈与完全图的多染色Ramsey数一般的下界 $R_k(C_{2\ell+1}; K_m) = \Omega(m^{\frac{k}{2\ell-1}+1}/(\log m)^{k+\frac{2k}{2\ell-1}})$ 。我们利用随机膨胀方法以及Mubayi和Verstraëte在文献[149]提出的随机区块构造，分别得到了当 H 是 C_5 和 C_7 时，多染色Ramsey数 $R_k(H; K_m)$ 的下界结果。

定理1.18. 对于给定的正整数 k , 以及 $m \rightarrow \infty$, 有

$$R_k(C_5; K_m) = \Omega\left(\left(\frac{m}{\log m}\right)^{\frac{3k}{8}+1}\right),$$

与

$$R_k(C_7; K_m) = \Omega\left(\left(\frac{m}{\log m}\right)^{\frac{2k}{9}+1}\right).$$

从结果意义上说, 我们的下界显著地改进了Alon和 Rödl在文献[7]中给出的对应结果。

这项工作目前已发表于《Discrete Mathematics》。

§ 1.5 区组度量下的置换码

令 S_n 为 n 元素上的置换群, 置换码指的是具有某些特定约束的 S_n 的子集。由于在不同的应用场景的潜力, 基于各种不同距离度量下的置换码问题被广泛研究。尤其是近年来, 诸如 Kendall τ 度量、Ulam 度量和 Cayley 度量下的置换码, 在云存储系统、基因组重测序和闪存的秩调制方案中得到了广泛的应用与研究[37, 73, 101, 123, 180, 189]。在这些距离度量下, 编码旨在纠正转位错误或易位错误。在文献[41]中, Chee 和 Vu 介绍了广义 Cayley 度量, 可以包括上述度量作为其特殊情况。然而, 两个置换之间的广义 Cayley 距离通常不容易计算, 因此相应置换码的构造很困难。在文献 [184], Yang、Schoeny 和 Dolecek 引入了区组距离的概念, 他们发现置换之间的区组距离可以简单地计算, 并且该距离与广义 Cayley 距离具有相同的阶。通过度量嵌入的方法, 可以将广义 Cayley 度量下置换码的构造问题转换为区组度量下置换码的构造问题。在编码理论中, 研究编码中码字个数的理论界和给出好的编码构造常常是最重要

的两个问题。在文献 [184] 中，作者给出了一些经典理论界（如 Gilbert-Varshamov 型下界和球填充上界）和区组度量下置换码的若干构造。

对于正整数 n 和 d ，我们称 $\mathcal{C} \subseteq S_n$ 为一个基于区组距离下的 (n, d) -置换码，如果对于任何两个集合 \mathcal{C} 中的不同的置换 $\sigma, \pi \in \mathcal{C}$ ，它们的区组距离都满足 $d_B(\sigma, \pi) \geq d$ 。另外，我们记 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 为一个 (n, d) -置换码能包含的最大码字数目。利用极值组合中的方法，我们得到了若干改进的理论界限和编码的构造。首先，我们在渐近意义下，改进了经典 Gilbert-Varshamov 型下界，改进的幅度大概为 $\Omega(\log n)$ 倍。具体的结果如下。

定理1.19. 当 $d \geq 3$ 为给定的正整数， $n \rightarrow \infty$ ，那么

$$\mathcal{C}_B(n, d) = \Omega\left(\frac{n! \log n}{n^{d-1}}\right).$$

在渐近意义上，其为经典的 Gilbert-Varshamov 型下界的 $\Omega(\log n)$ 倍。

其次，我们提出了一种新的置换码构造，该构造受二元常重码的构造所启发，我们的具体结果可以表述如下。

定理1.20. 当 d 为给定的正整数， $n \rightarrow \infty$ ，那么存在一个码字个数为 $\Theta\left(\frac{n!}{n^{2d-2}}\right)$ 的 (n, d) -置换码。

与文献[184]中已知的构造方案相比，我们将 (n, d) -置换码的码字个数提高了 $\Theta(n^{2d-4})$ 倍。

第三，我们给出了关于 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的一个新型上界，其结果如下。

定理1.21. 对于正整数 n 和 d ，有

$$\mathcal{C}_B(n, d) \leq \frac{\binom{n}{d} \binom{n}{d} (n-d)!}{\binom{n-1}{n-d}}.$$

从结果意义上来说，当极小距离 d 相对接近码长 n 时，我们给出的新上界优于经典的球填充上界。

这项工作已经发表在《Designs, Codes and Cryptography》。

§ 1.6 常用符号和声明

在图论相关的问题中，对于图 G 顶点 x 的度数，我们一般写成 $d_G(x)$ ，并且如果 G 是清楚的，我们也会简写成 $d(x)$ 。我们一般用 $N_G(x)$ 来表示图 G 中顶点 x 的邻居集合。我们一般用 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度数，用 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度数。对于图 G 和子集 $X \subseteq V(G)$ ，我们一般用 $G[X]$ 表示由集合 X 诱导的子图。符号 $\Omega(\cdot)$ 、 $O(\cdot)$ 、 $\omega(\cdot)$ 、 $\Theta(\cdot)$ 和 $o(\cdot)$ 表示它们通常的渐近含义。其它文中可能存在的特殊记号，会在对应的章节中事先解释其具体的意义。一般我们会使用 \log 表示以2为底的对数，以及使用 \ln 表示自然对数。

由于本文中内容众多，整体上看我们可能会重复使用一些字母或数学符号，但是我们可以保证的是，在每个不同的小节中，每个字母和数学符号的含义都会是清楚明晰的。

Chapter 2 若干Turán问题的新结果

§ 2.1 简介

令 \mathcal{H} 为给定的 r -一致超图，我们用 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, \mathcal{H})$ 表示 n 个顶点且不包含 \mathcal{H} 作为子超图的 r -一致超图中所能包含的最多 \mathcal{T} 的数目。特别是，如果 \mathcal{T} 是一条边，则 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, \mathcal{H})$ 等价于经典的 Turán 数 $\text{ex}_r(n, \mathcal{H})$ 。一般当 $r = 2$ 时，我们通常使用 $\text{ex}(n, T, H)$ 来简记 $\text{ex}_2(n, T, H)$ 。类似地，我们通常使用 $\text{ex}(n, H)$ 来简记 $\text{ex}_2(n, H)$ 。

Turán 数的研究在极值图论中占有非常重要的地位。Turán 问题中最古老的结果之一是由 Mantel [139] 在 1907 年给出的，他证明了 n 个顶点图中，如果其边数超过 $\frac{n^2}{4}$ ，则该图必然会包含三角形 K_3 作为其子图。该结果后来被 Turán [171] 推广到不包含完全图 K_ℓ 的情况，因此一般称之为 Turán 定理。Erdős-Stone-Simonovits 定理 [65, 66] 则是 Turán 定理推广的渐近版本，它能够完全给出了一个不包含给定非二部子图的图能拥有的最大边数。Bollobás 在著作 [21] 中将 Erdős-Stone-Simonovits 定理描述为“极值图论的基本定理”。然而，当 H 是二部图时， $\text{ex}(n, H)$ 的渐近阶的确定却远未得到解决。一个最自然的例子是完全二部图 $K_{s,t}$ ，Kövari、Sós 和 Turán [128] 的一个著名结果表明对于任何正整数 $t \geq s$ ，我们都有 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = O(n^{2-\frac{1}{s}})$ 。而关于下界，Erdős、Rényi 和 Sós [64] 和 Brown [31] 分别证明了 $s = 2$ 和 $s = 3$ 时的匹配渐近下界。对于更

一般的 s 和 t , Kollár、Rónyai 和 Szabó [126] 首先证明了当 $t \geq s! + 1$ 时有 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Omega(n^{2-\frac{1}{s}})$ 。而后关于 s 和 t 的条件被 Alon、Rónyai 和 Szabó [8] 优化为 $t \geq (s-1)! + 1$ 。基于 [18] 中的一些代数几何的想法, Bukh [33] 给出了当 t 比 s 大得多时, 不包含完全二部图 $K_{s,t}$ 的图的新构造, 该构造一般被成为随机代数构造。他的构造也给出了渐近意义上匹配的下界结果 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Omega(n^{2-\frac{1}{s}})$ 。

另一个非常重要的二部图是偶圈, 关于偶圈的 Turán 数 $\text{ex}(n, C_{2\ell})$ 的极值结果首先由 Erdős [57] 研究, 然后是 Bondy 和 Simonovits [27] 给出了一般上界 $\text{ex}(n, C_{2\ell}) \leq 100\ell n^{1+\frac{1}{\ell}}$ 。最近, Bukh 和 Jiang [35] 将上界改进为 $\text{ex}(n, C_{2\ell}) \leq 80\sqrt{\ell} \log \ell n^{1+\frac{1}{\ell}}$ 。然而, 对于任何 $\ell \notin \{2, 3, 5\}$, $\text{ex}(n, C_{2\ell})$ 的渐近阶还都是未知的, 请参见文献 [31, 64, 181] 的结果。而对于一般 $\ell \notin \{2, 3, 5, 7\}$, 目前最好的下界结果由 Lazebnik、Ustimenko 和 Woldar [131] 得到, 而 $\text{ex}(n, C_{14})$ 目前已知最好下界结果可参考文献 [169]。

由于关于偶圈的 Turán 数已知的结果不多, 因此研究与偶圈具有相似结构的图类也是非常重要的。我们令 theta 图 $\Theta_{\ell,t}$ 是由两个固定的端点, 以及 t 条内部点不交的长度为 ℓ 的连接两个端点的路径所组成的图。由于不清楚 $\text{ex}(n, C_{2\ell}) = \Omega(n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 是否普遍成立, 因此对 $\text{ex}(n, \Theta_{\ell,t})$ 的研究会显得非常重要。Faudree 和 Simonovits [74] 首先给出了一般参数 ℓ 的上界 $\text{ex}(n, \Theta_{\ell,t}) = O_{\ell,t}(n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 。最近, Conlon [43] 证明了当 t 是一个足够大的常数时, 上述上界的渐近阶是紧的。之后 Bukh 和 Tait [36] 研究了 $\text{ex}(n, \Theta_{\ell,t})$ 在 ℓ 固定且 t 非常大时 t 的渐近行为, 并且当 ℓ 为奇数时, 他们进一步确定了 Turán 数对 t 的依赖性。当 ℓ 和 t 相对较小时, Verstraëte 和 Williford [176] 证明了 $\text{ex}(n, \Theta_{4,3}) \geq (\frac{1}{2} - o(1))n^{\frac{5}{4}}$, 并且这个结果可能意味着 C_8 的 Turán 数的渐近阶也会是 $\Theta(n^{\frac{5}{4}})$ 。

与简单图的情况相比, 超图版本的Turán问题的渐近结果则很少。例如, 对于任何 $t > r \geqslant 3$, 即使是关于完全 r -一致超图的Turán数 $\text{ex}_r(n, K_t^{(r)})$ 的渐近值仍然未知。除了完全超图外, 也有一些其它的较为稠密的超图结构被广泛地研究。令 $K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}$ 是一个完全 r 部 r -一致超图, 其每一部的定点数分别为 s_1, s_2, \dots, s_r , Mubayi [147]猜测 $\text{ex}_r(n, K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}) = \Theta(n^{r - \frac{1}{\prod_{i=1}^{r-1} s_i}})$, 其中 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \dots \leqslant s_r$ 。在同一篇论文中, 作者在 $s_1 = s_2 = \dots = s_{r-2} = 1$ 并且 (i) $s_{r-1} = 2, s_r \geqslant 2$, (ii) $s_{r-1} = s_r = 3$, (iii) $s_{r-1} \geqslant 3, s_r > (s_{r-1} - 1)!$ 的情况下证明了其猜想是对的。最近, 利用随机代数方法, Ma、Yuan 和 Zhang [137]证明了如果 s_r 远大于 s_1, s_2, \dots, s_{r-1} 时, 这个猜想也是正确的。

而作为图版本的偶圈在超图上的推广, Berge型圈 C_k^B 也受到了广泛地关注。Győri [99]首先给出了 $\text{ex}_3(n, C_3^B)$ 的渐近结果, 接着 Bollobás 和 Győri [22]证明了 $\text{ex}_3(n, C_5^B) = O(n^{\frac{3}{2}})$ 。一般地, Győri 和 Lemons [100]给出了一般的上界 $\text{ex}_r(n, C_{2\ell}^B) = O(n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 和 $\text{ex}_r(n, C_{2\ell+1}^B) = O(n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 对于所有 $\ell \geqslant 2$ 和 $r \geqslant 3$ 均成立。在文献 [96] 中, 我们可以知道当 $2 \leqslant r \leqslant 6$ 时, $\text{ex}_r(n, C_4^B) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$, 但当 $r \geqslant 7$ 时目前仍是未完全清楚的。更一般地, 对于所有 $r, \ell \geqslant 3$, 上界是否是紧的仍是一个开放的公开问题。对于 Berge型圈的更多极值结果, 我们建议读者参考 [86, 113, 175] 及参考文献。

同样地, 我们可以将theta图推广到超图上。由于 $\text{ex}_r(n, C_{2\ell}^B)$ 的精确渐近结果很少, 因此研究超图版本的theta结构也是很重要的。令 Berge型 theta超图 $\Theta_{\ell,t}^B$ 由一组不同的顶点 $x, y, v_1^1, \dots, v_{\ell-1}^1, \dots, v_1^t, \dots, v_{\ell-1}^t$ 和一组不同的边 $e_1^1, \dots, e_\ell^1, \dots, e_1^t, \dots, e_\ell^t$ 组成, 其中满足对于 $1 \leqslant i \leqslant t$ 和 $2 \leqslant j \leqslant \ell - 1$, 有 $\{x, v_1^i\} \subseteq e_1^i$, $\{v_{j-1}^i, v_j^i\} \subseteq e_j^i$ 以及 $\{v_{\ell-1}^i, y\} \subseteq e_\ell^i$ 。

最近, He和Tait [102]研究了 $\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B)$ 的渐近行为, 他们证明对于固定的 ℓ 和 r , 存在一个很大的常数 t , 使得 $\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) = \Theta(n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 。

对于超图版本的广义Turán问题, 当 \mathcal{T} 不是一条边时, $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, \mathcal{H})$ 只有零星的结果。当 $r = 2$ 时, 对应于图版本的广义Turán数 $\text{ex}(n, T, H)$, 其中 H 和 T 是给定的图。在 [9]中, Alon和Shikhelman系统地研究了极值函数 $\text{ex}(n, T, H)$, 并在完全图、完全二部图和树等某些图上获得了许多结果。后来, Ma、Yuan 和 Zhang [137]改进了他们的一些结果。他们证明对于任何正整数 $a < s, b \leq s$ 和 $t \geq f(a, b, s)$, $\text{ex}(n, K_{a,b}, K_{s,t}) = \Theta(n^{a+b-\frac{ab}{s}})$ 。在同一篇论文中, 他们还给出了关于若干不同的结构 \mathcal{T} 的 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r}^{(r)})$ 的一般下界。对于图和超图版本Turán问题的更多极值结果, 我们建议读者参考一些综述[80, 81, 121]及其参考文献。

我们在Turán问题上的新结果由四个部分组成。第一部分我们关注由 Mubayi和 Verstraëte [148]定义的完全二部 r -一致超图 $K_{s,t}^{(t)}$ 。使用随机代数方法, 当 $s \gg t$ 时, 我们确定了关于完全二部 r -一致超图 $K_{s,t}^{(t)}$ 的Turán数的渐近阶, 并且, 我们也得到了一些超图版本广义Turán问题的一些新的理论界。其次, 我们发展了一种称为随机多重超图构造的方法, 它可以帮助我们获得关于完全二部 r -一致超图和完全 r 部 r -一致超图的Turán数的下界结果。特别地, 我们的结果可以推出, 当 t 非常大时, 源于1954年的著名的Kövári-Sós-Turán定理 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = O(t^{\frac{1}{s}} n^{2-\frac{1}{s}})$ 中, 关于 t 的渐近阶也是紧的。由于代数几何领域中著名的Lang-Weil界, Bukh的随机代数方法通常要求某个常数非常大。基于此, 我们给出了一些代数构造来改善这种常数依赖性。我们考虑的禁止子结构包括Berge型theta超图和完全二部图的1次剖分图。此外, 我们给出了一个3-一致超图的代数构造, 它具有 $\Omega(n^{\frac{19}{7}})$ 条边, 并且不包含完全3部3-一致超图 $K_{2,2,7}^{(3)}$ 。最后, 我们考虑了

一个由Bennett、English和Talanda-Fisher提出的顶点诱导加权Turán型问题 [15]。我们主要考虑他们在加法权重函数下的公开问题，并刻画不包含 K_ℓ 的极图结构。基于这些结果，我们进一步地证明了著名的Erdős-Stone-simonovits定理的在两种类型的顶点诱导权重函数下的推广结果。

接下去我们将分小节地详细描述我们考虑的问题，相关的背景以及我们取得的具体结果。

2.1.1 关于完全二部 r -一致超图的Turán问题

在2004年，Mubayi和Verstraëte [148]考虑了完全二部图在超图层面的一种推广，我们称此超图结构为完全二部 r -一致超图。

定义2.1 (完全二部 r -一致超图). 令 X_1, X_2, \dots, X_t 为 t 个大小为 $r-1$ 且两两不交的集合，令 Y 为一个 s 元集合，且 Y 与 $\bigcup_{i \in [t]} X_i$ 也不相交。完全二部 r -一致超图 $K_{s,t}^{(r)}$ 的顶点集定义为 $(\bigcup_{i \in [t]} X_i) \cup Y$ ，其边的集合为 $\{X_i \cup \{y\} : i \in [t], y \in Y\}$ 。

在文献 [148] 中，Mubayi和Verstraëte 给出了当 $s \leq t$ 时 $\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)})$ 的若干理论界。例如，他们证明了 $\text{ex}_3(n, K_{2,t}^{(3)}) = \Theta(n^2)$ ，以及当 $\frac{n}{3} \geq t \geq s \geq 3$ 时有 $\text{ex}_3(n, K_{s,t}^{(3)}) = O(n^{3-\frac{1}{s}})$ 。他们也通过构造证明了当 $t > (s-1)! > 0$ 时， $\text{ex}_3(n, K_{s,t}^{(3)}) = \Omega(n^{3-\frac{2}{s}})$ 。在文献 [69] 中，Ergemlidze、Jiang 和 Methuku 确定了当 $t \rightarrow \infty$ 时，极限值 $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_3(n, K_{2,t}^{(3)})}{\binom{n}{2}} = \Theta(t^{1+o(1)})$ 。

我们观察到当 $r \geq 3, s \neq t$ 时， $K_{s,t}^{(r)}$ and $K_{t,s}^{(r)}$ 是不同构的。Mubayi 和 Verstraëte 在文献 [148] 中指出他们的结果对两种情况同时适用，因此他们仅考虑了 $t \geq s$ 的情况。我们则将进一步考虑 $s > t$ 时，关于 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 Turán 数的渐近行为。

我们的第一个结果给出了 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)})$ 的一般下界，如以下定理所示，其中 \mathcal{T} 可以是任意的一个 r -一致超图。

定理2.1. 令正整数 $r \geq 3$ 。对于任何给定的正整数 t 和任何给定的具有 v 个顶点和 e 条边的 r -一致超图 \mathcal{T} ，存在常数 $c = c(r, t)$ ，使得当 $s \geq c$ 时，有

$$\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)}) = \Omega(n^{v - \frac{e}{t}})。$$

为了证明定理 2.1，我们主要需要使用 Bukh 在文献 [33] 中提出的随机代数方法。

我们接下来给出当 $r \geq 3$, $s \geq t \geq 2$ 时关于 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 Turán 数的上界，这可以视作对 Mubayi 和 Verstraëte [148, 定理 1.4] 结果的推广。

定理2.2. 令正整数 $s \geq t \geq 2$ ，则有

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = O(n^{r - \frac{1}{t}})。$$

可以看出，当定理 2.1 中 \mathcal{T} 是一条边时，结合定理 2.1 和定理 2.2，我们就可以得到以下关于完全二部 r -一致超图 Turán 数的渐近阶。

推论2.1. 令正整数 $r \geq 3$ 。对任何正整数 t ，都会存在一个常数 $s(r, t)$ ，使得当 $s \geq s(r, t)$ 时，有

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Theta(n^{r - \frac{1}{t}})。$$

当 \mathcal{T} 是一个较小的完全二部 r -一致超图 $K_{a,b}^{(r)}$ ，其中 $a = 1$, $b < t$ ，那么我们可以得到以下超图版本的广义 Turán 问题 $\text{ex}_r(n, K_{a,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)})$ 的渐近阶。

定理2.3. 令正整数 $r \geq 3$, $a = 1$ 以及 $b < t$ 。对任何正整数 t , 都会存在一个常数 $s'(r, t)$, 使得当 $s \geq s'(r, t)$ 时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{a,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)}) = \Theta(n^{a+b(r-1)-\frac{ab}{t}})。$$

图版本的广义Turán问题的结果已有若干研究工作, 详见文献 [9, 70, 83, 87]。但是对于超图版本的广义Turán问题, 已知的研究结果则非常稀少。目前我们仅确定的渐近结果主要由Ma、Yuan和Zhang在文献 [137]中给出. 而我们的定理 2.3则给出了一些新的能够确定渐近阶的超图版本的广义Turán数的结果。

2.1.2 随机多重超图构造

由于Bukh[33]给出的随机代数方法会使用代数几何中著名的Lang-Weil定理, 在实际应用中总是会要求其中某些参数非常大, 因此确定对大参数渐近阶也是很有意义的问题。受Bukh和Tait[36]在theta图上的结果的启发, 我们研究了三个重要的对象, 包括完全 r 部 r -一致超图、完全二部 r -一致超图和Berge型theta超图。我们的主要思想是构造随机多重超图。下面我们列举在这一主题上我们的主要贡献。

- 完全 r 部 r -一致超图:

定理2.4. 对于正整数 s_1, s_2, \dots, s_{r-1} 和 $r \geq 2$, 当 s_r 是一个充分大的常数时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{s_1,s_2,\dots,s_r}^{(r)}) = \Omega(s_r^{\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_{r-1}}} n^{r - \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_{r-1}}})。$$

通过结合 [137, 引理3.1] 中给出的上界结果, 我们可以发现该结果关于常数 s_r 的阶是紧的。

- 完全二部 r -一致超图：

定理2.5. 对正整数 t 和 $r \geq 2$, 当 s 是一个充分大的常数时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Omega(s^{\frac{1}{t}} n^{r-\frac{1}{t}})。$$

通过结合定理 2.2 中给出的上界结果, 我们可以发现该结果关于常数 s 的阶是紧的。

定理 2.4 和定理 2.5 均能给出以下推论, 该推论意味着源于 1954 年的 Kövári-Sós-Turán 定理 [128] 关于充分大的常数 t 的阶是紧的。

推论2.2. 对于给定的正整数 s , 当 t 充分大时, 有

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta(t^{\frac{1}{s}} n^{2-\frac{1}{s}})。$$

- **Berge型theta超图:** 对于一般 ℓ , 文献[36]给出了一般的上界结果 $\text{ex}(n, \Theta_{\ell,t}) = O_\ell(t^{1-\frac{1}{\ell}} n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 。最近 Gerbner、 Methuku 和 Palmer [84] 则给出了在 t 足够大时Berge型theta超图问题的上界。

定理2.6 ([84]). 对于给定的正整数 $\ell \geq 2$, 当 t 充分大时, 有

$$\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) = O_{\ell,r}(t^{r-1-\frac{1}{\ell}} n^{1+\frac{1}{\ell}})。$$

虽然我们暂时还不能确定以上上界关于充分大的常数 t 是否是紧的, 但是利用我们的随机多重超图构造, 我们可以得到如下结果

定理2.7. 令 $\ell \geq 2$ 为给定正整数, 当 t 充分大时, 有

$$\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) = \Omega_{\ell,r}(t^{\frac{1}{\ell}} n^{1+\frac{1}{\ell}})。$$

2.1.3 Turán问题中的确定性代数构造

对于给定的图或者超图，给出渐近意义上紧的Turán数的下界是极值图论中最具挑战性的问题之一。从方法上说，目前通常有以下三种类型的构造方法：

- **概率方法：** 概率方法非常通用且易于应用，但通常并不能在Turán问题中给出渐近意义下紧的下界。例如，对于具有 a 个顶点和 b 条边的给定二部图 H ，常用的概率方法能够给出 $\text{ex}(n, H) = \Omega(n^{\frac{2b-a}{b-1}})$ 。比如当 $H = K_{s,t}$ 并且 $s \leq t$ 时，此方法只能给出 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Omega(n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}})$ ，这并不匹配已知的上界 $\text{ex}(n, K_{s,t}) = O(n^{2-\frac{1}{s}})$ 。
- **确定性构造：** 确定性构造通常能够给出Turán问题中渐近意义上紧的下界结果，它常常显得非常巧妙，但是只能应用在某些特殊情况下。例如，我们可以将有限域上向量空间中的点视为图的顶点，如果两个顶点满足有限域中的某些方程组，则定义它们是相邻的。使用上述思路，当 $s = 2, 3$ 时，文献 [31, 64] 分别给出了 $\text{ex}(n, K_{s,t})$ 紧的下界。对于 s 的一般值，Alon、Kollár、Rónyai和Szabó [8, 126]构造了射影版本的Norm图，得到当 $t \geq (s-1)! + 1$ 时， $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Omega(n^{2-\frac{1}{s}})$ 。此外，利用有限几何，Benson [16]和Singleton [163]在1966年分别给出了不含 C_6 和不含 C_{10} 的极图构造。此外，还有一些其它的确定性构造，可以详见文献 [44, 130, 143, 181]。
- **随机代数方法：** 随机代数方法结合了概率方法的灵活性和代数结构确定性的特点，最初是由 Blagojevic、Karasev和Bukh [18]提出，然后由Bukh [33]给出了在Turán问题中的简洁实现。在Bukh [33]的随机代数方法中，通常顶点集是有限域上的向量空间，边集由多个随机

多项式确定。该方法已应用于完全二部图 [33]、theta 图 [43]和其他几种类型的超图 [102, 137]。

对于这部分内容，我们的最初动机可以表述如下。

问题：如果我们可以使用 Bukh [33]的随机代数构造来获得某个给定结构 H 的 Turán 数紧的渐近下界，我们能否同样给出关于这个结构 H 的确定性构造呢？此外，正如我们上面提到的，随机代数方法通常需要一些参数非常大，我们能否通过确定性构造获得更好的参数相关性呢？

我们的这个动机并非孤例，据我们所知，近几年来出现了两种具有和我们相同动机的确定性构造。其一是 Verstraëte 和 Williford [176] 使用通过代数构造，给出了一个不包含 $\Theta_{4,3}$ 且具有 $\Omega(n^{\frac{5}{4}})$ 条边的极图，与 Conlon [43] 的结果相比，显著改善了常数的依赖性。其二是 Pohoata 和 Zakharov [155] 推广了 Alon、Kollár、Rónyai 和 Szabó [8, 126] 的工作，并证明了 $\text{ex}_r(n, K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}) = \Omega(n^{r - \frac{1}{s_1 s_2 \cdots s_{r-1}}})$ 对所有满足 $s_r \geq ((r-1)(s_1 \cdots s_{r-1} - 1))! + 1$ 的正整数 s_1, \dots, s_r 成立，这显著地改进了 Ma、Yuan 和 Zhang [137] 结果中的常数依赖性。

在这一部分中，我们主要关注两类禁止结构。第一类是完全二部图 $K_{3,t}$ 的 1 次剖分图。这里我们称图 H 的 1 次剖分图是指用长度为 2 的内部不相交路径来替换 H 的边后所获得的图，通常用 H' 或 $\text{sub}(H)$ 表示。在文献 [47] 中，Conlon、Janzer 和 Lee 证明了当 $2 \leq s \leq t$ 时，有 $\text{ex}(n, K'_{s,t}) = O(n^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2s}})$ 。结合文献 [34] 中的随机代数构造，他们还证明，当 t 远比 s 大时，他们得到的关于 Turán 数的上界是紧的。在同一篇论文中，他们明确提出了以下问题：

问题 2.1. 对于任何正整数 $s \geq 2$ ，求满足 $\text{ex}(n, K'_{s,t}) = \Omega(n^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2s}})$ 的最小

的正整数 t 。

$s = 2$ 的情况相当于考虑theta图 $\Theta_{4,t}$ 。正如我们前面所提到的，Verstraëte 和 Williford[176]给出了一个代数构造，证明了 $\text{ex}(n, \Theta_{4,3}) = \Omega(n^{\frac{5}{4}})$ 。这里我们考虑 $s = 3$ 得情况，并证明以下结果。

定理2.8. $\text{ex}(n, K'_{3,25}) = \Theta(n^{\frac{4}{3}})$ 。

在文献 [34]中，随机代数方法中已知的 t 的最小值关于 s 呈指级别增长，大概为 $t = s^{O(s^2)}$ 。我们粗略地估算发现，当 $s = 3$ 时，他们的构造给出关于 t 的指大约为 $t \approx 10^{56}$ 。我们将这个天文数字进行了大幅度地改进。

其次，我们考虑关于Berge型theta超图 $\Theta_{\ell,t}^B$ 的线性Turán问题。我们定义， r -一致Berge型theta超图 $\Theta_{\ell,t}^B$ 由不同的顶点 $x, y, v_1^1, \dots, v_{\ell-1}^1, \dots, v_1^t, \dots, v_{\ell-1}^t$ 和一组不同的边 $e_1^1, \dots, e_\ell^1, \dots, e_1^t, \dots, e_\ell^t$ 组成，其中当 $1 \leq i \leq t$ 以及 $2 \leq j \leq \ell - 1$ 时，点和边的关系满足 $\{x, v_1^i\} \subseteq e_1^i, \{v_{j-1}^i, v_j^i\} \subseteq e_j^i$ 以及 $\{v_{\ell-1}^i, y\} \subseteq e_\ell^i$ 。如果每对超边最多有一个公共顶点，则超图称为线性的。给定一个 r -一致超图 \mathcal{F} ， \mathcal{F} 的线性Turán数一般记为 $\text{ex}_r^{\text{lin}}(n, \mathcal{F})$ ，表示 n 个点的不包含 \mathcal{F} 作为子超图的 r -一致线性超图的最大边数。很容易看出 $\text{ex}_r^{\text{lin}}(n, \mathcal{F}) \leq \text{ex}_r(n, \mathcal{F})$ 。

最近，He和Tait [102]证明了如下上界。

$$\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) \leq c_{r,\ell,t} n^{1+\frac{1}{\ell}},$$

其中 $c_{r,\ell,t}$ 是只和 r, ℓ, t 有关的常数。同时，他们也证明了

$$\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) = \Omega_{\ell,r}(n^{1+\frac{1}{\ell}}),$$

其中 t 是远大于 ℓ 的常数。

因此很自然地要问，对于 $\ell \geq 3$ ，是否存在改进的构造来说明 $t(\ell)$ 可以被选择为一个合理的量。当 $\ell = 3$ ，我们通过显式构造证明以下结果。

定理2.9. $\text{ex}_3^{lin}(n, \Theta_{3,217}^B) = \Theta(n^{\frac{4}{3}})$ 。

我们在表 2.1 中列出了目前已知的关于Bukh的随机代数方法和确定性构造方法的常数比较。

| 禁止结构 H | 随机代数方法 | 常数关系 |
|--|---|---|
| $\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Omega(n^{2-\frac{1}{s}})$ | $t \geq s^{4s}$ [18] | 确定性构造 |
| $\text{ex}(n, \Theta_{\ell,t}) = \Omega(n^{1+\frac{1}{t}})$ | $t = \ell^{O(\ell^2)}$ [43] | $t \geq (s-1)! + 1$ [8] $\ell = 4, t \geq 3$ [176] |
| $\text{ex}_r(n, K_{s_1, \dots, s_r}^{(r)}) = \Omega(n^{r - \frac{1}{s_1 \cdots s_{r-1}}})$ | $s_r \geq (\prod_{i=1}^{r-1} s_i)^{O(\prod_{i=1}^{r-1} s_i)}$ [137] | $s_r \geq ((r-1)(s_1 \cdots s_{r-1} - 1))! + 1$ [155] |
| $\text{ex}(n, \text{sub}(K_{s,t})) = \Omega(n^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2s}})$ | $t = s^{O(s^2)}$ [34] | $s = 3, t \geq 25$ |
| $\text{ex}_r^{lin}(n, \Theta_{\ell,t}^B) = \Omega(n^{1+\frac{1}{t}})$ | $t = \ell^{O(\ell^2)}$ [34] | $\ell = 3, t \geq 217$ |

表 2.1 关于Bukh的随机代数方法和确定性构造方法的常数比较

除了上面提到的两类代数构造，我们还考虑了当 \mathcal{H} 是一个完全 r 部 r 一致超图 $K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}$ 的Turán问题，其可以看作是关于完全二部图Turán问题的另一个扩展。如前面所提，Mubayi[147]猜测 $\text{ex}_r(n, K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}) = \Theta(n^{r - \frac{1}{\prod_{i=1}^{r-1} s_i}})$ ，其中 $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_r$ 。特别是当 s_1, s_2, \dots, s_r 比较小时， $\text{ex}_r(n, K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)})$ 的问题备受关注。例如，Katz、Krop 和 Maggioni [120] 证明了 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,2}^{(3)}) = \Omega(n^{\frac{8}{3}})$ ，这一结果改进了由概率方法得到的下界。接下来，我们将改进 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)})$ 下界结果，如下所示。

定理2.10.

$$\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)}) \geq \frac{1}{27} n^{\frac{19}{7}} + o(n^{\frac{19}{7}})。$$

在这之前，已知最好的下界结果 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)}) = \Omega(n^{\frac{73}{27}})$ 是通过概率方法获得的。我们的定理2.10通过一个确定性构造改进了该结果。注意

到， Mubayi猜想的上界部分是由Erdős[59]证明的，所以改进下界结果是更有趣且更具有挑战性的部分。

2.1.4 顶点诱导的带权Turán问题

带权图因其在组合优化和人工智能领域的应用而被广泛研究。近几十年来，在极值图论领域出现了一些关于带权图的问题。例如，其中一个问题是在 n 个顶点上的带权图中所需的边数，以保证它包含指定类型的子图。Bondy和Fan [25, 26]开始了对此类问题的研究，并将一些关于无权图中关于路径和圈的经典定理推广到带权图上。此后由许多文献 [79, 133, 186]给出了对Bondy-Fan结果的一些相关推广。

同样，也有许多文献中给出了一些经典定理的带权版本。Bondy、Broersma、van den Heuvel和Veldman[24]给出了Ore定理的加权版本推广，又如Bollobás和Scott [23] 研究了带权有向图的类似问题。Mathew 和 Sunitha[141]推广了图论中著名的Menger定理，它在流和网络理论的许多领域中都发挥着至关重要的作用。对于Turán型问题的推广，Bondy 和 Tuza[28]研究了整数带权版本的Turán问题，并且给出了Turán定理的推广。在[28]中，他们还对某些情况下的极图结构进行了刻画。

最近，Bennett、English和Talandi-Fisher[15]提出了一种新型带权Turán问题，其中边的权重由关联的顶点所诱导。该问题的目的是在禁止给定子图 H 的情况下确定 G 的最大的边权重之和，并刻画极图的结构。他们考虑了两种类型的顶点诱导函数，例如乘法函数和最小边权重函数。通俗地说，边的权重可以定义为顶点权重的乘积或者最小值。在这两个诱导函数下，他们刻画了不含有完全子图 K_ℓ 的极图结构。利用这些结果，他们解决了一些多部图的Turán问题，并计算了某些树的最大交叉数。他们还在加法函数下提出了一个新的Turán问题作为公开问题。

在这里, 我们首先关注由Bennett、English和Talandá-Fisher提出的加法函数下新的Turán问题。我们证明, 如果所有顶点权重都是不同的, 并且严格为正, 那么不包含 K_ℓ 的极图 F 必然是完全 $(\ell - 1)$ 部图。这个结果将呈现在后文的定理 2.13 中。此外, 我们证明了基于加法函数和乘法函数下极图结构之间的差异。使用Szemerédi正则引理和计数引理, 我们进一步给出了著名的Erdős-Stone-Simonovits定理在基于加法函数和乘法函数的带权版本推广。从我们的结果中可以看出, 对于染色数 $\chi(H) \geq 3$ 的任意有限图 H , 为了得到具有最大权重之和并且不包含 H 作为子图的图, 我们只需从完全 $(\chi(H) - 1)$ 部图中寻找即可。这个结果将呈现在定理 2.14 中。

2.1.5 本章的结构

由于本章内容较多, 我们在这里说明各节的结构。

在§ 2.2 中, 我们将简要介绍随机代数方法。在§ 2.3 中, 我们会重点关注完全二部 r -一致的超图相关的Turán问题。首先我们会通过随机代数方法证明定理 2.1, 然后我们在§ 2.4 中给出一些一般的上界, 包括证明推论 2.1 和定理 2.3。

在§ 2.5 中, 我们主要利用随机多重超图构造方法来证明我们的主要结果, 包括关于完全的 r 部 r -一致的超图, 完全二部 r -一致超图以及Berge型theta超图的Turán问题的下界结果。

在§ 2.6 中, 我们将给出一些关于多项式结式的基础知识, 这是我们代数构造中使用的主要技术。在§ 2.7 节中, 我们给出了定理 2.8 的证明。我们会在§ 2.8 中证明定理 2.9。另外, 我们会在§ 2.9 中给出 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)})$ 的一个改进下界。

在§ 2.10 中, 我们会先介绍基于加法函数的带权Turán问题的一些定

义和基本事实。在§ 2.11中，我们首先会证明不包含三角形 K_3 的结果，然后我们通过归纳法来得到不包含一般完全子图 K_ℓ 的结果。然后，我们会讨论在加法函数和乘法函数下寻找到极图结构的不同策略。Erdős-Stone-Simonovits定理的带权版本在§ 2.12中给出，该证明会利用到Szemerédi正则引理和计数引理。

最后，关于相关Turán问题的一些注记和未解决的公开问题，我们将集中列在§ 2.13中。

§ 2.2 随机代数方法简介

在Turán问题的构造问题上，经典的方法主要有两种：

1. 概率方法：非常通用且易于应用，但通常不会给出紧的渐近结果，结果不够强。
2. 代数方法：它常常能给出了紧的渐近结果，但只在某些特殊情况下有效，适用范围不广。

我们简要回顾，在超图Turán问题中利用概率方法可以得到如下结果。令 \mathcal{H} 是一个具有 v 个顶点和 e 条边的 r -一致超图。文献[32]中利用概率方法可以得到

$$\text{ex}_r(n, \mathcal{H}) = \Omega(n^{\frac{er-v}{e-1}}).$$

比如说，当 $\mathcal{H} = K_{s,t}^{(r)}$ ，概率方法便可以给出如下下界结果

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Omega(n^{r - \frac{1}{t} - \frac{(r-1)t^2 - rt + 1}{st^2 - t}}).$$

最近，Bukh [33]，它结合了以上两种经典方法，提出了随机代数构造的想法。这个想法中，我们会用顶点集 $V = \mathbb{F}_q^s \times \mathbb{F}_q^s$ 来构造一个图，只

需选择一个或多个具有特定性质的随机多项式

$$f \in \mathbb{F}_q[x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_s]$$

来定义一对点 (x, y) 在图中是否连边，通常，如果 $f(x, y) = 0$ ，则我们会定义 (x, y) 连成一条边。该方法兼顾了概率方法的灵活性和代数结构确定性，目前已被成功应用于完全二部图 [33]、theta 图 [43]和其他几种类型的超图 [102, 137]。

为了应用该随机代数方法，我们需要建立多项式与超图的联系。

对于每个 $i \in [r]$ ，令 $\mathbf{X}^i = (X_1^i, X_2^i, \dots, X_t^i) \in \mathbb{F}_q^t$ 。考虑在 \mathbb{F}_q 上有 rt 个变量的多项式 $f \in \mathbb{F}_q[\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^r]$ 。我们说这样一个多项式 f 在 \mathbf{X}^i 上的度数最多为 td ，如果它的每个单项式关于 \mathbf{X}^i 的度数最多为 td ，即我们有 $(X_1^i)^{\alpha_1}(X_2^i)^{\alpha_2} \cdots (X_t^i)^{\alpha_t}$ 满足 $\sum_{j=1}^t \alpha_j \leq td$ 。此外，称多项式 f 为对称的，如果对于每个 $1 \leq i \leq j \leq r$ ，将 \mathbf{X}^i 与 \mathbf{X}^j 交换不影响 f 的值。为方便起见，我们可以将对称多项式的域视为族 $\binom{\mathbb{F}_q^t}{r}$ 。然后给定一个对称多项式 f ，我们可以定义一个 r -一致超图 \mathcal{G}_f 如下：顶点集 $V(\mathcal{G}_f) = \mathbb{F}_q^t$ ，每个 r 元组 $\{u^1, u^2, \dots, u^r\} \in \binom{\mathbb{F}_q^t}{r}$ 形成 \mathcal{G}_f 的边当且仅当 $f(u^1, u^2, \dots, u^r) = 0$ 。

我们一般会用随机多项式来表示从 \mathcal{P}_d 中均匀随机选择的多项式。由于随机多项式的常数项是从 \mathbb{F}_q 中均匀随机选取的，因此可以很容易地证明，对于任何固定的 r 元集合 (v_1, v_2, \dots, v_r) ，随机多项式 f 都满足

$$\mathbb{P}[f(v_1, v_2, \dots, v_r) = 0] = \frac{1}{q}.$$

在我们实际构造随机超图时，我们的邻边规则会和多项式的零点有关，因此，我们常常可以用代数几何中的代数簇(algebraic variety)来描述一些子结构。具体地，令 $\bar{\mathbb{F}}_q$ 为 \mathbb{F}_q 上的代数闭域，则对于给定的一组多项

式 f_1, f_2, \dots, f_s , 一个代数簇就形如

$$W = \{x \in \bar{\mathbb{F}}_q^t : f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_s(x) = 0\}.$$

也就是说, 代数簇可以看作一组多项式的公共根的集合。令 $W(\mathbb{F}_q) = W \cap \mathbb{F}_q$, 如果上述参数 s 和 t 以及多项式的最大次数都以 M 为上界, 则我们称 W 的复杂度至多 M 。

对于每个 $1 \leq i \leq r$, 令 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{F}_q[\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^r]$ 表示每个 \mathbf{X}^i 度数最多为 td 的所有对称多项式的集合。然后我们从 \mathcal{P} 中均匀随机选择一个多项式 f , 并令 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_f$ 为与之关联的 r -一致超图。现在我们需要介绍文献 [33] 和 [137] 中的两个重要引理。第一个引理是随机代数构造的关键, 它提供了非常不光滑的概率分布。而第二个引理将帮助我们计算某些情况下的特定事件的概率。

引理2.1 ([33]). 对于任何 t 和 d , 都存在常数 $c > 0$ 使得如下命题成立: 假设 $f_1(Y), f_2(Y), \dots, f_t(Y)$ 为 t 个 \mathbb{F}_q^t 上度数之多 td 的多项式, 那么对于如下集合

$$W = \{y \in \mathbb{F}_q^t : f_1(y) = f_2(y) = \dots = f_t(y) = 0\},$$

则有 $|W| < c$, 或者 $|W| \geq q - c\sqrt{q}$ 。

引理2.2 ([137]). 给定一个集合 $U \subseteq \binom{\mathbb{F}_q^t}{r}$, 我们令 $V \subseteq \mathbb{F}_q^t$ 为包含所有 U 中 r 元组的元素所构成的集合。假设 $\binom{|U|}{2} < q$, $\binom{|V|}{2} < q$ 以及 $|U| \leq td$ 。如果 f 是一个从 \mathcal{P} 中选取的随机多项式, 则有

$$\mathbb{P}[f(u^1, u^2, \dots, u^r) = 0, \forall \{u^1, u^2, \dots, u^r\} \in U] = q^{-|U|}.$$

§ 2.3 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)})$ 的下界

我们本节的目标是通过随机代数构造证明定理 2.1。对于给定的正

整数 t 和 $r \geq 3$, 以及具有 v 个顶点和 e 条边的 r -一致超图 \mathcal{T} , 在本节中, 我们始终记参数 $d = (r - 1)t^2 - t + e + 1$ 。我们令 q 是一个足够大的素数幂, \mathbb{F}_q 是 q 阶的有限域。我们随机均匀地选择一个多项式 $f \in \mathcal{P}$ 并让 \mathcal{G} 按上一小节的规则, 成为与多项式 f 相关联的 r -一致超图 \mathcal{G}_f 。令 $n = q^t$ 为 \mathcal{G} 的顶点个数, 其中 q 足够大。注意到, 虽然我们在这里仅考虑 q 是素数幂的情况, 但我们可以使用 Bertrand 公设说明对所有正整数 n , 该结论仍然成立。我们将证明在平均意义下, 这个随机超图 \mathcal{G} 会包含大量的 \mathcal{T} , 以及非常少的 $K_{s,t}^{(r)}$ 。然后我们可以使用移除方法来破坏掉所有潜在的 $K_{s,t}^{(r)}$, 从而获得一个新的超图 \mathcal{G}' , 这个新的超图 \mathcal{G}' 不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 作为子超图, 并且 \mathcal{G}' 仍然包含大量 \mathcal{T} 。

由于 \mathcal{T} 有 v 个顶点和 e 条边, 因此很容易验证 $\binom{v}{2} < q$, $\binom{e}{2} < q$ 以及 $e < t((r - 1)t^2 - t + e + 1) = td$ 。然后由引理 2.2, 对于给定的 v 个顶点, 这样的 v 个顶点形成 \mathcal{T} 的概率等于 $\frac{1}{q^e}$ 。现在我们用 X 表示为 \mathcal{T} 在 \mathcal{G} 中的数目, 我们可以得到 X 的期望为

$$\mathbb{E}[X] = \Omega\left(\frac{1}{q^e} \binom{q^t}{v}\right) = \Omega(q^{tv-e}) = \Omega(n^{v-\frac{e}{t}})。$$

我们令 R 为 $K_{1,t}^{(r)}$ 的固定带标号的副本, 对于 $1 \leq j \leq t$ 和 $i \in [r - 1]$, 我们将其顶点表示为 a 和 u_j^i , 满足 $u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{r-1}$ 形成 t 不同的 $(r - 1)$ 元组。现在我们固定 \mathcal{G} 中一组顶点序列 w_j^i , 其中 $1 \leq j \leq t$ 以及 $i \in [r - 1]$ 。令 W 是 \mathcal{G} 中 R 的副本构成的集合, 并且使得对于 $1 \leq j \leq t$ 和 $i \in [r - 1]$, w_j^i 对应于 u_j^i 。我们希望能够直接估计 $|W|$ 的大小, 但事实上我们很难直接估计 $|W|$, 因此我们转而去考虑 $|W|^d$ 的值。注意到, $|W|^d$ 代表的是拼凑了 W 中 d 个副本 R 后形成的有序集合的数目, 特别要注意的是, 这其中 R 的这些副本中可能是会存在重复的糟糕情况。所以我们需要列出该

有序集合中所有潜在可能的每个成员 P 。不难得到 P 必然是下列集合 \mathcal{K} 中的一员，其中

$$\mathcal{K} := \{K_{1,t}^{(r)}, K_{2,t}^{(r)}, \dots, K_{d,t}^{(r)}\}.$$

对于给定的 $P \in \mathcal{K}$ ，我们令 $N_d(P)$ 表示为 $R \in W$ 的 d 个副本拼在一起后，以 P 的形式出现在 \mathcal{G} 的所有可能的有序集合总数。容易看出 $N_d(P) = O(n^{|P|-t(r-1)})$ ，其中 $|P|$ 是 P 中的顶点数。由于 P 的边数为 $e(P) = t(|P| - t(r-1)) \leq td$ 并且 q 足够大，由引理2.2，潜在结构 P 出现在 \mathcal{G} 中的概率是 $q^{-e(P)}$ 。通过以上分析，我们有

$$\mathbb{E}[|W|^d] = \sum_{P \in \mathcal{K}} N_d(P) q^{-e(P)} = \sum_{P \in \mathcal{K}} O(q^{t(|P|-t(r-1))}) q^{-e(P)} = O(1).$$

注意到， W 中的未被固定的顶点集合由满足以下方程组

$$f(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{r-1}, x) = 0$$

的顶点 $x \in \mathbb{F}_q^t$ 所组成，其中 $1 \leq j \leq t$ 。因为 $f(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{r-1}, \cdot)$ 的度数最多为 td ，由引理2.1，我们有 $|W| < c$ ，或者 $|W| \geq q - c\sqrt{q} \geq \frac{q}{10}$ ，其中 c 的值仅取决于 t 和 d 。通过马尔可夫不等式，我们得到

$$\mathbb{P}[|W| \geq c] = \mathbb{P}[|W| \geq \frac{q}{10}] = \mathbb{P}[|W|^d \geq (\frac{q}{10})^d] \leq \frac{\mathbb{E}[|W|^d]}{(\frac{q}{10})^d} = \frac{O(1)}{q^d}.$$

对于 $1 \leq j \leq t$ 以及 $i \in [r-1]$ ，一组点集序列 w_j^i 被称为是坏的，如果其对应的集合 W 满足 $|W| \geq c$ 。令 B 表示 \mathcal{G} 中坏的序列的数目，我们有

$$\mathbb{E}[B] \leq [t(r-1)]! \binom{n}{t(r-1)} \frac{O(1)}{q^d} = O(q^{(r-1)t^2-d}) = O(q^{t-e-1}).$$

现在我们从每个坏序列中去掉一个顶点，得到一个新的超图 \mathcal{G}' ，显然 \mathcal{G}' 不再包含任何坏序列，所以当 $s \geq c$ 时 \mathcal{G}' 就不再包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 了。注意到，由于

每个顶点最多存在于 $O(n^{v-1})$ 个在 \mathcal{G} 里不同的 \mathcal{T} 中，所以被移除的 \mathcal{T} 副本总数最多为 $O(n^{v-1}) \cdot B$ 。因此 \mathcal{G}' 中剩余的 \mathcal{T} 的数目的期望至少为

$$\Omega(n^{v-\frac{e}{t}}) - \mathbb{E}[B] \cdot O(n^{v-1}) = \Omega(n^{v-\frac{e}{t}})。$$

同时，也很容易验证剩余的顶点数目至少为 $n - O(n^{1-\frac{e+1}{t}}) = n - o(n)$ 。

因此，当 $s \geq c$ 时，就会存在一个不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 r -一致超图，其有至多 n 个顶点，并且有至少 $\Omega(n^{v-\frac{e}{t}})$ 个 \mathcal{T} 的副本。至此，我们就完成了定理2.1的证明。

§ 2.4 关于 $K_{s,t}^{(r)}$ 的Turán问题的上界

有了定理2.1中的非常一般的下界结果，我们现在希望能够得到一些相匹配的上界结果。在本节中，我们给出 $\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)})$ 和 $\text{ex}_r(n, K_{a,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)})$ 在一定条件下的渐近阶。

2.4.1 $\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)})$ 的上界

$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)})$ 的这个上界结果可以看作是Mubayi和Verstraëte [148, 定理1.4]的一个推广。在我们证明定理2.2之前，我们需要介绍我们将会用到的一个由Erdős和Kleitman[63]给出的引理。

引理2.3 ([63]). 令 \mathcal{G} 是一个 rn 个顶点的 r -一致超图。则 \mathcal{G} 包含一个 r 部的子超图 \mathcal{G}' ，满足 \mathcal{G}' 的每一部的顶点数均为 n ，并且有 $e(\mathcal{G}') \geq \frac{r!}{r^r} e(\mathcal{G})$ 。

我们用 $z(n, K_{s,t}^{(r)})$ 表示不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 r 部 r -一致超图能具有的的最大边数，其中每一部的顶点数均为 n 。由引理2.3，为了证明定理2.2，我们现在只需要证明 $z(n, K_{s,t}^{(r)}) = O(n^{r-\frac{1}{t}})$ 即可。

定理2.2的证明. 我们令 $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, B$ 是不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 r 部 r -一致超图 \mathcal{H} 的每一部点集, 并且每部中顶点的数目均为 n 。假设 \mathcal{H} 有超过 $c'_{s,t}n^{r-\frac{1}{t}}$ 条边, 其中 $c'_{s,t}$ 是由经典的Kövári-Sós-Turán定理给出的 [128]。换句话说, 如果一个二部图的每一部均有 n 个点, 并且其边数超过 $c'_{s,t}n^{2-\frac{1}{t}}$, 则该二部图会包含一个完全二部图 $K_{s,t}$ 作为子图。显然, $c'_{s,t}$ 和 n 是无关的。接着, 我们考虑顶点集合为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{r-1}$ 的完全 $(r-1)$ 部 $(r-1)$ -一致超图 $K_{n,n,\dots,n}^{(r-1)}$ 。文献 [17]中的结果指出, $K_{n,n,\dots,n}^{(r-1)}$ 可以进行完美匹配分解, 因此我们可以对 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{r-1}$ 的 $(r-1)$ 元组分解成 $\frac{n^{r-1}}{n} = n^{r-2}$ 个匹配 $M_1, M_2, \dots, M_{n^{r-2}}$ 。令 \mathcal{H}_i 是由包含 M_i 中的一些 $(r-1)$ 元组的超边所诱导的 \mathcal{H} 的子超图。根据鸽巢原理, 必然存在某个 i , 使得 \mathcal{H}_i 包含了超过 $c'_{s,t}n^{2-\frac{1}{t}}$ 条边。接下来我们在顶点集 $A_{r-1} \cup B$ 上构造一个辅助二部图 G_i , 其边集如下定义为

$$\{(a_{r-1}, b) : \exists(a_1, a_2, \dots, a_{r-2}), a_i \in A_i, (a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, b) \in E(\mathcal{H}_i)\}。$$

由于 $c'_{s,t}$ 的定义和性质, 我们可以发现 G_i 会包含一个 $K_{s,t}$ 满足其在 B 中有 s 个顶点, 在 A_{r-1} 中有 t 顶点, 但这个完全二部图会通过 M_i 诱导出 $K_{s,t}^{(r)}$, 这就与 \mathcal{H} 不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 的假设相矛盾。至此, 证明完毕。 \square

2.4.2 $\text{ex}_r(n, K_{a,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)})$ 的上界

由于下界已经由随机代数方法给出, 为了证明定理2.3, 我们只需要证明以下引理。我们的证明思路类似于文献[9]中的证明方法。

引理2.4. 当 $b < t$ 时, 有

$$\text{ex}_r(n, K_{1,b}^{(r)}, K_{s,t}^{(r)}) = O(n^{b(r-1)-\frac{b}{t}+1})。$$

证明. 令 \mathcal{G} 为 n 个顶点且不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 r -一致超图。对于超图 \mathcal{G} 中的点 $v \in V(\mathcal{G})$, 我们令 $N(v)$ 表示集合

$$N(v) = \{(b_1, b_2, \dots, b_{r-1}) | b_i \in V(\mathcal{G}), (v, b_1, b_2, \dots, b_{r-1}) \in E(\mathcal{G})\}.$$

我们接下去对 \mathcal{G} 中 $K_{1,b}^{(r)}$ 的数目进行计数, 我们发现 \mathcal{G} 中 $K_{1,b}^{(r)}$ 的数目至多为

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(\mathcal{G})} \binom{|N(v)|}{b} &\leq \frac{1}{b!} \sum_{v \in V(\mathcal{G})} |N(v)|^b \leq \frac{1}{b!} n^{1-\frac{b}{t}} \left(\sum_{v \in V(\mathcal{G})} |N(v)|^t \right)^{\frac{b}{t}} \\ &\leq (1 + o(1)) \frac{n^{1-\frac{b}{t}}}{b!} \left(((s-1)(t(r-1))! + (t(r-1)-1)!) n^{t(r-1)} \right)^{\frac{b}{t}} \\ &= O(n^{b(r-1)-\frac{b}{t}+1}). \end{aligned}$$

我们需要对上述的一些不等式进行必要的解释。首先我们有不等式 $0 < p \leq q$, $\sum_{i=1}^m x_i^p \leq m^{1-\frac{p}{q}} (\sum_{i=1}^m x_i^q)^{\frac{p}{q}}$ 。其次, 我们用数两次的方法估计 $\sum_A \binom{|N(v)|}{t}$ 。更具体地说, 我们考虑把需要估计的部分分成两块, 即 $\sum_A \binom{|N(v)|}{t} = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} |N(T)| + \sum_{T \in \mathcal{T}_2} |N(T)|$, 其中 \mathcal{T}_1 包括了所有 t 个点不交的 $(r-1)$ 元组, \mathcal{T}_2 则包含了其他类型的 t 个 $(r-1)$ 元组。另外, $N(T)$ 包含了所有能和每个 T 中的 $(r-1)$ 元组形成超边的点。对于第一部分 $\sum_{T \in \mathcal{T}_1} |N(T)|$, 我们观察到, 对于每个 $T \in \mathcal{T}_1$, 如果 $|N(T)| > s-1$, 那么我们就能够找到 $K_{s,t}^{(r)}$, 这会与我们的假设矛盾。而对于第二部分 $\sum_{T \in \mathcal{T}_2} |N(T)|$, 我们注意到 $|N(T)| < n$ 并且 T 中点的数目会严格小于 $t(r-1)$, 因此我们有 $\sum_{T \in \mathcal{T}_2} |N(T)| < (1 + o(1))(t(r-1)-1)! n^{t(r-1)}$ 。至此, 证明完毕。 \square

§ 2.5 随机多重超图构造

在本节中, 我们将通过随机多重超图的构造, 来给出对于几类不同的超图 \mathcal{T} 的Turán数 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T})$ 的一些下界。在这里, 我们简要说明我们的

主要思想。我们首先通过合并若干个随机超图来构造一个随机多重超图。我们的目标是说明这个多重超图平均意义上包含许多条边，并且只包含很少的子结构 \mathcal{T} ，也包含很少的多重边。对于不同的禁止超图结构 \mathcal{T} ，我们将定义相应的坏结构，并估计它们的数量。最后，我们将从每个坏结构中删除一个顶点并删除所有多重边以获得一个新的超图，该超图就不会包含 \mathcal{T} 作为子结构的，并且具有预期的边数。

我们的证明主要包含三个重要的步骤。首先，我们构造的随机多重超图是多个随机超图的并，这些随机超图是由一些次数有限的随机多项式定义的。因此引理2.2可以帮助我们分别估计正常的边和多重边的数目期望。其次，由于不同随机超图之间的独立性，当我们需要估计某些结构的数目期望时，引理2.2仍然有效，尽管多重超图中这些结构的边可能来自于不同的原始随机超图，但这并不影响我们的估计。第三个要素是，由于随机超图是由次数有限的随机多项式定义的，我们可以适当地定义多重超图中的坏结构，并且我们可以把坏结构的集合看成是一种具有代数性质的集合的，这样的话，引理2.1结合马尔可夫不等式可以帮助我们来限制坏结构的数目期望。

接下去，我们将分三小节分别证明对应结构的定理。

2.5.1 完全 r 部 r -一致超图

在本小节中，我们考虑完全 r 部 r -一致超图 $K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}$ 的Turán数下界问题，我们的构造主要基于文献[137]中所构造的随机超图。

定义2.2 ([137]). 给定正整数 s_1, s_2, \dots, s_{r-1} 和 r ，我们令 $b = \prod_{i=1}^{r-1} s_i$, $t = \sum_{i=1}^{r-1} s_i$, $s = b(t - 1) + 2$ 以及 $d = bs$ 。令 $N = q^b$ ，我们从 \mathcal{P}_d 中均匀随机且独立地选取多项式 f 。我们定义 N 个点的 r -一致超图 \mathcal{G} 如下： \mathcal{G} 的顶点集

为 $V(\mathcal{G}) = \mathbb{F}_q^b$, r 元组 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 连边当且仅当 $f(v_1, v_2, \dots, v_r) = 0$ 。

我们从 \mathcal{P}_d 中独立随机地选取 h 个对称多项式 f_1, f_2, \dots, f_h , 并将它们关联的超图表示为 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_h$ 。令 $\bar{\mathcal{G}}$ 为由 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_h$ 并在一起形成的多重超图。在多重超图 $\bar{\mathcal{G}}$ 中, 令 T 是 $K_{s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, 1}^{(r)}$ 的带标号的固定副本, 我们将其顶点表示为 u 和 v_j^i , 其中 $1 \leq i \leq r-1$ 以及 $1 \leq j \leq s_i$, 并且需要满足 $v_1^i, v_2^i, \dots, v_{s_i}^i$ 在同一部中。对于 $1 \leq i \leq r-1$, 我们固定一组顶点 $w_1^i, w_2^i, \dots, w_{s_i}^i$, 这些顶点会根据 T 的固定带标号的副本而形成 b 不同的 $(r-1)$ 元组。由于多重超图中每条边都有可能来源于 h 种不同的原始超图 \mathcal{G}_k , 因此一共有至多 h^b 中不同类型的带标号的 T 。我们令 p 是一个正整数, W 是 T 的副本族, 它包含 $\bar{\mathcal{G}}$ 中固定的顶点序列 $w_1^i, w_2^i, \dots, w_{s_i}^i$, 其中 $1 \leq i \leq r-1$ 。我们称顶点序列为 $w_1^i, w_2^i, \dots, w_{s_i}^i$ 为一个 p -坏序列, 如果对应集合 W 的大小为 $|W| \geq p$ 。令 B_p 是 $\bar{\mathcal{G}}$ 中所有 p -坏序列的集合。

引理2.5. 存在常数 p 和 C , 它们仅取决于 $s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, r$, 使得

$$\mathbb{E}[|B_{ph^b}|] \leq Ch^b N^{1-\frac{2}{b}}。$$

证明. 固定一种类型 $I \in [h]^b$, 称顶点序列 $\{w_1^i, w_2^i, \dots, w_{s_i}^i : 1 \leq i \leq r-1\}$ 为 (p, I) -坏序列, 如果其对应集合 W_I 的大小为 $|W_I| \geq p$, 其中这里的 p 将在后面确定。因为类型的总数是 h^b , 我们由期望的线性性, 可以得到 (p, I) -坏序列的数目期望是 $O(N^{1-\frac{2}{b}})$ 。

接下去我们重点考虑如何估计集合 W_I 的大小。我们发现很难直接估计 $|W_I|$, 因此我们转而考虑 $|W_I|^s$ 。注意到 $|W_I|^s$ 可以表示来自 W_I 的 T 的 s 个副本拼接后的有序集合的数量, 并且这些 T 中非固定的那个点可能是相同的, 因此这些集合的每个成员都可以是下列集合

$$\mathcal{K} := \{K_{s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, 1}^{(r)}, K_{s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, 2}^{(r)}, \dots, K_{s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s}^{(r)}\}$$

中的元素。对于给定的 $P \in \mathcal{K}$, 我们令 $N_s(P)$ 是出现在 $T \in W_I$ 的 s 个副本拼在一起后形成的有序集合是 P 的数量。注意 P 中非固定顶点的个数是 $|P| - t$, 所以 $N_s(P) = O(n^{|P|-t})$ 。另外, P 的边集可以写成固定的类型 I 而写成

$$E(P) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \cdots \cup E(P_h),$$

其中 $E(P_i)$ 包含来源于单个超图 \mathcal{G}_i 中的边, 其中 $i = 1, 2, \dots, h$ 。因为随机超图 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_h$ 都是被独立均匀选取的, 因此, 由引理 2.2, 我们有

$$\mathbb{E}[|W|^s] = \sum_{P \in \mathcal{K}} N_s(P) \prod_{i=1}^h q^{e(P_i)} = \sum_{P \in \mathcal{K}} O(N^{|P|-t}) \cdot q^{b(|P|-t)} = O(1).$$

固定一种类型 I , W_I 作为一个代数簇, 包含了所有满足 b 个方程的方程组 $f_k(w_{j_1}^1, w_{j_2}^2, \dots, w_{j_{r-1}}^{r-1}, x) = 0$ 的点 $x \in \mathbb{F}_q^b$, 其中 $1 \leq i \leq r-1$ 以及 $1 \leq j_i \leq s_i$, 并且对于具体的一条边 $(w_{j_1}^1, w_{j_2}^2, \dots, w_{j_{r-1}}^{r-1}, x)$, k 的选取仅仅取决于类型 I 。注意到, 由于每个随机多项式 $f_k(w_{j_1}^1, w_{j_2}^2, \dots, w_{j_{r-1}}^{r-1}, x)$ 都是从 \mathcal{P}_d 中选取的, 因此我们可以得到每个 W_I 的复杂度都是有限的, 并且他们的复杂度均不超过 bs 。由引理 2.1, 我们可以发现, 要么有 $|W_I| \leq c_I$, 要么有 $|W_I| \geq \frac{q}{2}$ 。接着我们可以用马尔可夫不等式去控制如下概率

$$\mathbb{P}[|W_I| > c_I] = \mathbb{P}[|W_I| \geq \frac{q}{2}] = \mathbb{P}[|W_I|^s \geq (\frac{q}{2})^s] \leq \frac{\mathbb{E}[|W_I|^s]}{(\frac{q}{2})^s} = \frac{O(1)}{q^s}.$$

令 $p = \max_{I \in [h]^b} c_I$, (p, I) -坏序列的数目期望至多为 $t!N^t \cdot \frac{O(1)}{q^s} = O(N^{1-\frac{2}{b}})$ 。因为总共的类型数有 h^b , 再由期望的线性性, 该引理得证。 \square

接下去我们要证明关于 r 部 r -一致超图的主要定理。

定理 2.4 的证明. 令 $\bar{\mathcal{G}}$ 为如上定义的随机多重超图. 容易得到, $\bar{\mathcal{G}}$ 中边数的期望为 $\frac{h}{q} \binom{N}{r}$ 。令 e_M 表示多重边的数目, 我们可以得到如下关于多重边数

目的期望

$$\mathbb{E}[e_M] \leq \binom{N}{r} \sum_{i=2}^h \binom{h}{i} q^{-i} = O(N^{r-\frac{2}{b}})。$$

进一步地, 由引理2.5, ph^b -坏序列的数目至多为 $Ch^b N^{1-\frac{2}{b}}$ 。接着, 我们移除所有的多重边, 以及我们将从每个 ph^b -坏序列中移除一个点, 从而得到一个新的超图 \mathcal{G}' 。由于超图中每个点至多被包含在不超过 $O(N^{r-1})$ 条边中, 因此, 超图 \mathcal{G}' 中边的数目的期望至少为

$$\frac{h}{q} \binom{N}{r} - \binom{N}{r} \sum_{i=2}^h \binom{h}{i} q^{-i} - O(N^{r-1}) Ch^b N^{1-\frac{2}{b}}。$$

当 s_r 足够大时, 我们可以选取 $h = (\frac{s_r}{p})^{\frac{1}{b}}$, 这样以来, 便会存在一个不包含 $K_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(r)}$ 作为子超图的 r -一致超图, 且其会具有 $\Omega(s_r^{\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_{r-1}}} n^{r-\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_{r-1}}})$ 条边。至此, 定理 2.4 已证明完毕。 \square

2.5.2 完全二部 r -一致超图

在这一小节中, 我们将主要考虑完全二部 r -一致超图 $K_{s,t}^{(r)}$ 的 Turán 数的下界问题, 我们首先将利用 § 2.3 中的构造。

定义2.3. 给定正整数 t 与 r , 我们令 $N = q^t$, $m = (r-1)t^2 - t + 2$, 以及 $d = mt$, 我们从 \mathcal{P}_d 中均匀随机独立地选取多项式 f 。我们定义一个 N 个点的 r -一致超图 \mathcal{H} 如下: \mathcal{H} 的顶点集为 $V(\mathcal{H}) = \mathbb{F}_q^t$, \mathcal{H} 中的 r 元组 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \in \binom{\mathbb{F}_q^t}{r}$ 构成一条边当且仅当 $f(v_1, v_2, \dots, v_r) = 0$ 。

然后我们从 \mathcal{P}_d 中均匀选择 h 个独立随机对称多项式 f_1, f_2, \dots, f_h , 并将它们关联的超图记为 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_h$ 。令 $\bar{\mathcal{H}}$ 由超图 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_h$ 并在一起形成的多重超图。在多重超图 $\bar{\mathcal{H}}$ 中, 令 R 是 $K_{1,t}^{(r)}$ 的固定带标号副本, 我们将其顶点表示为 a 和 u_j^i , 其中 $1 \leq j \leq t$, $i \in [r-1]$, 并且满

足 $u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{r-1}$ 形成 t 个不同的 $(r-1)$ -元组，对应于 R 的固定标记副本。由 R 的每条边都可以属于 h 个不同的原始超图 \mathcal{H}_k ，因此 R 的给定标记副本总共有 h^t 种类型。现在对于 $1 \leq j \leq t$ 和 $i \in [r-1]$ ，我们固定一组 $\bar{\mathcal{H}}$ 中的顶点序列 w_j^i 。令 W 是 R 在 $\bar{\mathcal{H}}$ 中的副本族，满足对所有 $1 \leq j \leq t$ 和 $i \in [r-1]$ ， w_j^i 对应于 u_j^i 。如果对应的集合 W 满足 $|W| \geq p$ ，我们称这样的顶点序列是 p -坏的序列。

引理2.6. 存在常数 $p = p(t, r)$ 与 $C = C(t, r)$ 使得

$$\mathbb{E}[|B_{ph^t}|] \leq Ch^t q^{t-2}.$$

证明. 固定某种类型 $J \in [h]^t$ ，我们称一组顶点序列 $\{w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{r-1} : 1 \leq j \leq t\}$ 是 (p, J) -坏的，如果它对应的集合 W_J 满足 $|W_J| \geq p$ ，其中 p 的具体数值会在后续给出。接下去我们要证明 (p, J) 坏的序列数目至多为 $O(q^{t-2})$ 。

基于和前面情况类似的原因，我们选择去估计 $|W_J|^m$ 而非直接估计 $|W_J|$ 本身。注意到， $|W_J|^m$ 代表着所有 W_J 中 m 个 R 的副本所组成的全部可能的有序集合的数目，其中由于每个副本 R 中不固定的点可能产生重复，因此我们需要列出所有可能拼成的结构 L ，通过观察，我们发现可能拼成的结构 L 必然会落在如下集合

$$\mathcal{L} := \{K_{1,t}^{(r)}, K_{2,t}^{(r)}, \dots, K_{m,t}^{(r)}\}.$$

对于给定的 $L \in \mathcal{L}$ ，我们用 $N_m(L)$ 表示 $R \in W_J$ 的 m 个副本的能够拼成的有序集合为 L 的情况总数。注意到，由于 L 中不固定顶点的个数是 $|L| - t(r-1)$ ，所以 $N_m(L) = O(q^{t(|L|-t(r-1))})$ 。另一方面，根据类型 $J \in [h]^t$ ，边集 $E(L)$ 可以写成

$$E(L) = E(L_1) \cup E(L_2) \cup \dots \cup E(L_h),$$

其中 $E(L_i)$ 包含来源于原始超图 \mathcal{H}_i 中的边, $i = 1, 2, \dots, h$ 。又因为这些随机超图 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_h$ 是被独立均匀选取的, 因此由引理2.2, 我们可以得到

$$\mathbb{E}[|W_J|^m] = \sum_{L \in \mathcal{L}} N_m(L) \prod_{i=1}^h q^{-e(L_i)} = \sum_{L \in \mathcal{L}} O(q^{t(|L|-t(r-1))})q^{-e(L)} = O(1)。$$

我们可以看到, W_J 可以看作包含所有以下满足方程组的点 $x \in \mathbb{F}_q^t$ 的代数簇:

$$f_k(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{r-1}, x) = 0,$$

其中 $1 \leq j \leq t$, 另外, 方程组里 k 的选取仅取决于边的分布类型 J , 以及 f_k 是用于定义随机超图 \mathcal{H}_k 的随机多项式。容易发现, 对于每个 $k \in [h]$, 随机多项式 $f_k(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{r-1}, x)$ 的次数至多只有 d , 因此, 代数簇 W_J 的复杂度是有界的。于是, 我们便可以使用引理2.1, 得到对于集合 W_J , 要么有 $|W_J| \leq c_J$, 要么有 $|W_J| \geq \frac{q}{2}$, 其中 c_J 是一个只和 d 以及类型 J 相关的常数。接着, 应用经典的马尔可夫不等式, 我们可以得到

$$\mathbb{P}[|W_J| > c_J] = \mathbb{P}[|W_J| \geq \frac{q}{2}] = \mathbb{P}[|W_J|^m \geq (\frac{q}{2})^m] \leq \frac{\mathbb{E}[|W_J|^m]}{(\frac{q}{2})^m} = \frac{O(1)}{q^m}。$$

现在, 我们令 $p = \max_{J \in [h]^t} c_J$, 那么 (p, J) 坏的序列的数目期望至多为 $(t(r-1))!N^{t(r-1)} \cdot \frac{O(1)}{q^m} = O(q^{t-2})$ 。另一方面, 由于不同的边分布类型 $J \in [h]^t$ 只有 h^t 种, 那么根据期望的线性性, 引理2.6得证。 \square

接下去我们将证明关于完全二部 r -一致超图的结果。

定理2.5的证明. 令 $\bar{\mathcal{H}}$ 为如上定义的随机多重超图。由引理2.2可得, $\bar{\mathcal{H}}$ 中边数的期望为 $\frac{h}{q} \binom{N}{r}$ 。我们令 e_M 表示重边的数目, 我们可以估计重边数目的期望为

$$\mathbb{E}[e_M] \leq \binom{N}{r} \sum_{i=2}^h \binom{h}{i} q^{-i} = O(N^{r-\frac{2}{t}})。$$

我们已经在引理2.6中已经证明了, ph^t -坏的序列数目至多为 Ch^tq^{t-2} 。接着我们可以移除所有的重边, 并且在每个 ph^t -坏的序列中移除一个点, 从而得到一个新的超图 \mathcal{H}' 。因为每个超图中的顶点至多只能包含在 $O(N^{r-1})$ 条边中, 因此 \mathcal{H}' 中边的数目至少为

$$\frac{h}{q} \binom{N}{r} - \binom{N}{r} \sum_{i=2}^h \binom{h}{i} q^{-i} - O(N^{r-1}) Ch^t q^{t-2}。$$

当 s 足够大时, 我们令 $h = (\frac{s}{p})^{\frac{1}{t}}$, 那么就会存在一个不包含 $K_{s,t}^{(r)}$ 的超图, 并且其具有 $\Omega(s^{\frac{1}{t}}n^{r-\frac{1}{t}})$ 条边。至此, 定理2.5已证明完毕。 \square

2.5.3 Berge型theta超图

最后, 我们要证明关于Berge型theta超图的结果。首先我们还是要给出单个随机超图的构造。

定义2.4. 给定正整数 r 和 ℓ , 我们令 $d = r\ell^2$, $N = q^\ell$, 我们从 \mathcal{P}_d 均匀随机独立地选取 $\ell(r-1)-1$ 个对称多项式 $f_1, f_2, \dots, f_{\ell(r-1)-1}$ 。令 \mathcal{F} 为如下定义的 rN 个点的 r 部 r -一致超图: 点集为 r 个不相同的 \mathbb{F}_q^ℓ , 即 $V(\mathcal{F}) = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}$, 对于 $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq r$, r 元组 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 形成一条 \mathcal{F} 中的边当且仅当

$$f_1(v_1, v_2, \dots, v_r) = \dots = f_{\ell(r-1)-1}(v_1, v_2, \dots, v_r) = 0。$$

我们会独立均匀随机地选取 h 个随机超图 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_h$, 并且令 $\bar{\mathcal{F}}$ 为这 h 个超图的并组成的随机超图。那么对于随机多重超图 $\bar{\mathcal{F}}$ 和正整数 p , 我们称一对点 (x, y) 是 p -坏的点对, 如果在存在至少有 p 条连接了 x 和 y 的的长度至多为 ℓ 的Berge型路径。那么接下去我们首先需要估计 $\bar{\mathcal{F}}$ 中 ph^ℓ 坏的点对的数目, 即我们需要给出下述引理。

引理2.7. 令 B_{ph^ℓ} 表示由 $\bar{\mathcal{F}}$ 中所有 ph^ℓ -坏的点对组成的集合。那么存在常数 $p = p(r, \ell)$ 和 $C = C(r, \ell)$, 使得

$$\mathbb{E}[|B_{ph^\ell}|] \leq Ch^\ell q^{\ell(2-r)}.$$

证明. 令 $\ell_0 \leq \ell$ 为正整数, 再令 $K = (k_1, k_2, \dots, k_{\ell_0}) \in [h]^{\ell_0}$ 为一个固定的超边组成类型。具体地说, 我们称一条边集为 $e_1, e_2, \dots, e_{\ell_0}$ 的Berge型路径的类型为 $(k_1, k_2, \dots, k_{\ell_0})$, 如果对于 $1 \leq j \leq \ell_0$, 它的边 $e_j \in E(\mathcal{F}_{k_j})$ 。给定一个固定的类型 $K = (k_1, k_2, \dots, k_{\ell_0}) \in [h]^{\ell_0}$, 我们称 (x, y) 是 (p, K) -坏的点对, 如果存在至少 p 条类型为 K 的Berge型路径连接点 x 和 y 。由于总共的不同类型只有 $\sum_{\ell_0 \leq \ell} h^{\ell_0} \leq \ell h^\ell$ 种, 所以我们需要做的是, 证明对每一个给定的类型 K , 都存在常数 $p = p(r, \ell)$ 使得 $(\frac{p}{\ell}, K)$ -坏的点对的数目不超过 $O_{r,\ell}(q^{\ell(2-r)})$ 。

我们首先要估计两个点之间较短的Berge型路径的数目期望。令 x 和 y 为 $\bar{\mathcal{F}}$ 中一对固定的点, 再令 $K = (k_1, k_2, \dots, k_{\ell_0})$ 为一种固定的类型。我们记 S_K 为连接点 x 和 y 的类型为 K 的Berge型路径的集合。我们发现, 直接估计 $|S_K|$ 仍然是一件非常困难的事情, 因此我们转而考虑去估计 $|S_K|^{r\ell}$, 注意到 $|S_K|^{r\ell}$ 表示的是将 $r\ell$ 个类型为 K 的并且连接 x 和 y 的Berge型路径拼在一起后所形成的结构的数目。我们需要注意到, 这些Berge型路径拼在一起, 是有可能产生很多点的重复的, 不过我们可以保证每一个拼凑后的结构中, 边的数目至多是 $r\ell\ell_0$ 。

令 $P_{\ell_0, m}$ 表示上述集合中, 边数至多为 m 的Berge型路径的数目。注意到, 任何一个 $\bar{\mathcal{F}}$ 中落在拼接后的合集里的 m 条边的 Y_m , 其边集都可以根据类型 K 而表示成

$$E(Y_m) = E(Y_{m,1}) \cup E(Y_{m,2}) \cup \cdots \cup E(Y_{m,h}),$$

其中 $E(Y_{m,i})$ 包含所有源自随机超图 \mathcal{F}_i 中的边, $i = 1, 2, \dots, h$ 。又因为随机超图 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_h$ 均是均匀随机独立选取的, 因此由引理2.2, 我们可以得到当 $m \leq r\ell^2$ 时, 任何一个特定的 Y_m 被包含在 $\bar{\mathcal{F}}$ 的概率是

$$\prod_{i=1}^h q^{e(Y_{m,i})(1-\ell(r-1))} = q^{m(1-\ell(r-1))}.$$

因此, 我们有

$$\mathbb{E}[|S_K|^{r\ell}] = \sum_{m=1}^{r\ell^2} P_{\ell_0, m} q^{m(1-\ell(r-1))}.$$

接下去我们要利用He和Tait在文献[102]中的一个结论, 即他们证明了以下上界

$$P_{\ell_0, m} = O_{\ell_0, r}(q^{m(\ell_0(r-1)-1)}).$$

因此我们可以得到

$$\mathbb{E}[|S_K|^{r\ell}] = \sum_{m=1}^{r\ell^2} P_{\ell_0, m} q^{m(1-\ell(r-1))} \leq \sum_{m=1}^{r\ell^2} 1 = C_K,$$

其中, 最后一个不等式成立是因为 $\ell_0 \leq \ell$ 。

接下去我们要证明 $|S_K|$ 要么会很小, 即被一个常数给控制住, 要么会非常大。但是, 在这个问题中, 我们未能找到非常合适的公共根集合来直接表示 S_K , 因此我们无法直接把 S_K 写成代数簇。故而, 我们需要先仔细地分析一番 S_K 的结构特征。

由Berge型路径的定义, S_K 中长度为 ℓ_0 的每个Berge型路径包含一列核心顶点和边, 如 $(x, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{\ell_0-1}, e_{\ell_0}, y)$ 。因此我们可以将Berge路径集根据每个核心顶点 v_i 所在的部进行划分。因此对于固定类型 K , S_K 可以根据每个核心顶点所属的部, 划分为不相交的集。将 $S_{t_1, t_2, \dots, t_{\ell_0-1}}$ 表示为从 x 到 y 的Berge路径组成的集合, 使得第 i 个核心顶点 $v_i \in V_{t_i}$ 。如果我们

将 σ 视为来自 $[r]^{\ell_0-1}$ 的 $\ell_0 - 1$ 元组，那么我们可以将 S_K 写为

$$S_K = \bigcup_{\sigma \in [r]^{\ell_0-1}} S_{K,\sigma},$$

并且容易看出这是一组不相交的集合的并集。

现在我们固定一组 $S_{K,\sigma}$ ，我们将长度为 ℓ_0 的任意Berge型路径中的核心顶点表示为 $v_1, v_2, \dots, v_{\ell_0-1}$ ，边 e_j 中的非核心顶点为 $w_1^{k_j}, w_2^{k_j}, \dots, w_{r-2}^{k_j}$ ，其中 e_j 是 \mathcal{F}_{k_j} 中的边。这里我们需要确保非核心顶点是根据它们所在部而排序的，即，如果 $w_{s_1}^i \in V_{t_1}$ 和 $w_{s_2}^i \in V_{t_2}$ ，有 $s_1 < s_2$ ，那么 $t_1 < t_2$ 。

接下去我们定义代数簇 $T_{K,\sigma}$ 为

$$\{z \in \mathbb{F}_q^{\ell_0(r-1)-1} : f_{i,1}^{k_1}(z) = \dots = f_{i,\ell_0}^{k_{\ell_0}}(z) = 0, 1 \leq i \leq \ell_0(r-1)-1\},$$

其中 $f_{i,j}^{k_j}$ 是第 j 个用于定义随机超图 \mathcal{F}_{k_j} 的随机多项式，并且， $z \in \mathbb{F}_q^{\ell_0(r-1)-1}$ 会跑遍序列 $(v_1, \dots, v_{\ell_0-1}, w_1^{k_1}, \dots, w_{r-2}^{k_1}, \dots, w_1^{k_{\ell_0}}, \dots, w_{r-2}^{k_{\ell_0}})$ 。注意到，这里每 z 都是一个向量，其中核心顶点在前，非核心顶点在后。

我们接着更清晰地展开表达多项式 $f_{i,1}^{k_1}(z) = f_{i,2}^{k_2}(z) = \dots = f_{i,\ell_0}^{k_{\ell_0}}(z)$ 。

$$f_{i,1}^{k_1}(z) = f_i^{k_1}(x, v_1, w_1^{k_1}, \dots, w_{r-2}^{k_1}),$$

$$f_{i,2}^{k_2}(z) = f_i^{k_2}(v_1, v_2, w_1^{k_2}, \dots, w_{r-2}^{k_2}),$$

\dots

$$f_{i,\ell_0}^{k_{\ell_0}}(z) = f_i^{k_{\ell_0}}(v_{\ell_0-1}, y, w_1^{k_{\ell_0}}, \dots, w_{r-2}^{k_{\ell_0}}),$$

其中 $1 \leq i \leq \ell_0(r-1)-1$ 。注意到，当 σ 固定时，所有非核心顶点的顺序是固定的，因此我们也根据 σ 固定 $f_i^{k_j}$ 的参数顺序。比如说，假设 $v_{\ell_0-1} \in V_1$ 以及 $y \in V_3$ ，那么我们可以将 $f_{i,\ell_0}^{k_{\ell_0}}(z)$ 写成

$$f_{i,\ell_0}^{k_{\ell_0}}(z) = f_i^{k_{\ell_0}}(v_{\ell_0-1}, w_1^{k_{\ell_0}}, y, w_2^{k_{\ell_0}}, \dots, w_{r-2}^{k_{\ell_0}}).$$

很容易看出 $S_{K,\sigma} \subseteq T_{K,\sigma}$ 。但是 $T_{K,\sigma}$ 不仅包含 $S_{K,\sigma}$ 中的所有 Berge 型路径，它也会包含一些退化的情况，因此为了获得 $S_{K,\sigma}$ ，我们需要把退化的情况刻画清楚。如果 $T_{K,\sigma}$ 包含退化的游走 $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{\ell_0-1}, v_{\ell_0} = y$ ，那么对于 $0 \leq a < b \leq \ell_0$ ，我们定义

$$D_{a,b} \triangleq T_{K,\sigma} \cap \{v_0, \dots, v_{\ell_0}, w_1^{k_1}, \dots, w_{r-2}^{k_{\ell_0}} : v_a = v_b\}.$$

我们令 $D \triangleq \bigcup_{a,b} D_{a,b}$ 。因为代数簇的并集也是代数簇，所以我们可见 D 也是一个代数簇，并且满足 D 的复杂度是有界限的。

现在我们可以使用引理 2.1 来分析 $S_{K,\sigma} = T_{K,\sigma} \setminus D$ 了。对于任意类型 K 和 $\sigma \in [r]^{\ell_0-1}$ ，都会存在一个常数 $c(K, \sigma)$ ，它依赖于 K 和 σ ，使得要么有 $|S_{K,\sigma}| \leq c(K, \sigma)$ ，要么有 $|S_{K,\sigma}| \geq \frac{q}{2}$ 。由于 $|S_K| = \sum_{\sigma \in [r]^{\ell_0-1}} |S_{K,\sigma}|$ ，如果存在 σ 使得 $|S_{K,\sigma}| > c(K, \sigma)$ ，那么 $|S_K| \geq |S_{K,\sigma}| \geq \frac{q}{2}$ ，否则 $|S_K| \leq c(K, \ell_0, r)$ ，其中常数 $c(K, \ell_0, r)$ 取决于 ℓ_0 和 r 。最后，通过马尔可夫不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|S_K| > c(K, \ell_0, r)] &= \mathbb{P}[|S_K| \geq \frac{q}{2}] = \mathbb{P}[|S_K|^{r\ell} \geq (\frac{q}{2})^{r\ell}] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(|S_K|^{r\ell})}{(\frac{q}{2})^{r\ell}} = \frac{C_K}{(\frac{q}{2})^{r\ell}} = O_{\ell_0, r}(q^{-r\ell}). \end{aligned}$$

令 $p \triangleq \ell \max_{\ell_0 \leq \ell} c(K, \ell_0, r)$ ，我们可以得到 $(\frac{p}{\ell}, K)$ -坏的点对的数目期望至多为 $\frac{C_K(rN)^2}{(\frac{q}{2})^{r\ell}} = O_{r, \ell}(q^{\ell(2-r)})$ 。再借助期望的线性性，我们就完整地证明了引理 2.7。□

定理 2.7 的证明。 当 $\ell \geq 2$ 时，我们令 $\bar{\mathcal{F}}$ 为如上定义的随机多重超图。根据引理 2.7，存在常数 $p = p(r, \ell)$ 与 $C = C(r, \ell)$ 使得 ph^ℓ -坏点对的数目期望至多为 $Ch^\ell q^{\ell(2-r)}$ 。我们令 \mathcal{F} 为将 $\bar{\mathcal{F}}$ 中的所有多重边移除后得到的简单超图。

因为 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_h$ 是独立均匀随机选取的，那么由引理2.2， $\bar{\mathcal{F}}$ 中的边数的期望为 $hq^{\ell+1} = h(\frac{N}{r})^{1+\frac{1}{\ell}}$ 。我们再令 Y 为多重边的数目，可以通过下式估计重边的数目的期望：

$$\mathbb{E}[Y] \leq N^r \sum_{i=2}^h \binom{h}{i} \left(\frac{1}{q^{\ell(r-1)-1}}\right)^i = o(N).$$

然后我们可以去掉 \mathcal{F} 中所有的 $p\ell$ -坏点对得到一个新的超图 \mathcal{F}' 。因为每个顶点最多在 $O(n^{r-1})$ 条边里，最多有 $O(n^{r-1})|B_{p\ell}|$ 边被删除。因此，剩下的边的数目的期望至少为

$$\mathbb{E}[e(\mathcal{F}')] \geq h\left(\frac{N}{r}\right)^{1+\frac{1}{\ell}} - 2N^{r-1}\mathbb{E}[|B_{p\ell}|] - N^r \sum_{i=2}^h \binom{h}{i} \left(\frac{1}{q^{\ell(r-1)-1}}\right)^i.$$

基于上述讨论，当 t 足够大时，令 $h = (\frac{t}{p})^{\frac{1}{\ell}}$ ，存在 n 个顶点， $\Omega_{r,\ell}(t^{\frac{1}{\ell}}n^{1+\frac{1}{\ell}})$ 条边，并且不包含 $\Theta_{\ell,t}^B$ 的超图 \mathcal{F}' 。至此，我们的主要定理得证。

□

§ 2.6 代数构造的主要工具：多项式结式

在本小节中，我们主要将介绍我们在使用代数方法获得极图的构造中，所要用到的一些主要工具。

令 q 为素数幂， s 和 t 为正整数， \mathbb{F}_q 为 q 阶的有限域。在代数构造中，我们一般会这样构造一个图 G ，它的顶点集为 \mathbb{F}_q^t ，两个顶点 $u, v \in \mathbb{F}_q^t$ 连成一条边的条件是， $f_i(u, v) = 0$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, s$ 成立，其中 $f_i \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_{2t}]$ 。为了证明 G 不包含某个结构，我们首先固定几个顶点，然后估计这些顶点之间的某些子结构的个数（例如，考虑theta graph $\Theta_{k,t}$ ，我们需要证明在任意两个固定顶点之间最多有 $t-1$ 个长度为 k 的路径，而对于完全二部图 $K_{s,t}$ ，我们需要证明对任何的 s 个顶点，它们最多有 $t-1$ 个

公共邻点)。从这些条件, 我们一般可以得到一系列方程

$$F_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = F_m(x_1, \dots, x_m) = 0.$$

(一般来说, 应该有 m 个方程和 m 个变量), 其中 F_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 来自 f_i ($i = 1, 2, \dots, s$)。如果构造有效, 则上述方程有有限多个解, 即我们可以说明下列集合

$$W = \{x \in \mathbb{F}_q^m : F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}.$$

的维度 $\dim(W) = 0$ 。著名的Bézout定理告诉我们, W 的大小受 F_i 次数的乘积的限制。

定理2.11 (Bézout定理). 令 $F_i \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_m]$ for $i = 1, \dots, m$ 。如果一个代数簇 $W = \{x \in \mathbb{F}_q^m : F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}$ 的维度 $\dim(W) = 0$, 那么我们有

$$|W| \leq \prod_{i=1}^m \deg(F_i).$$

一般来说, Bézout定理并没有给出 W 大小的最佳上界。另一方面, 计算 W 的维数不容易。但是对于某些特定情况, 我们可以通过直接消除变量来确定 W 的大小。

当禁止子图相对比较小时, 比如说, 考虑定理2.12中theta图 $\Theta_{4,t}$ 的问题, 我们可以得到方程组(2.1)-(2.3), 这些多项式的次数分别为2、3和3, 因此这种情况可以通过人工计算来完成。但是当禁止结构变得复杂时, 比如§ 2.8中的 $\Theta_{3,t}^B$, 我们会得到方程组(2.66)-(2.73), 这些多项式的次数分别为2、2、2、3、3和3。消除5个变量后, 最终多项式的次数为40 (见方程(2.74)), 这几乎是不可能通过手动计算得到的。对于 $K'_{3,t}$ 的情况也是类

似的。因此我们引入了多项式的结式(resultant)，使得这些计算层面的问题，可以通过计算机软件来解决其中一些情况。

为了方便读者，我们回顾一些关于多项式结式的基础知识。令 \mathbb{F} 为一个域， $\mathbb{F}[x]$ 为系数在 \mathbb{F} 中的多项式环。我们给出结式的定义如下。

定义2.5. 令 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$, 那么 f 和 g 的结式可以用下列 $(m+n) \times (m+n)$ 矩阵的行列式定义,

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & & & b_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & b_2 & b_1 & \ddots & & \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 & \\ a_m & \vdots & \ddots & a_1 & b_n & \vdots & \ddots & b_1 & \\ & a_m & \ddots & a_2 & b_n & \ddots & b_2 & & \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & a_m & & & b_n & & \end{array} \right),$$

n m

一般我们记为 $R(f, g)$ 。

两个多项式的结式有如下重要性质。

引理2.8. [78, 定理3.18] 如果 $\gcd(f(x), g(x)) = h(x)$, 其中 $\deg(h(x)) \geq 1$, 那么我们有 $R(f, g) = 0$ 。特别地, 如果 f 和 g 在 \mathbb{F} 上有公共根, 那么我们有 $R(f, g) = 0$ 。

当我们考虑多变量多项式时, 我们可以类似地定义结式, 并且当我们固定一个变量时, 上面的引理仍然成立。对于任意 $f, g \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$, 我

们令 $R(f, g; x_i)$ 表示 f 和 g 相对于变量 x_i 的结式，那么我们有 $R(f, g; x_i) \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ 。

例2.1. 我们考虑下列方程组：

$$\begin{aligned} f &= xy - 1 = 0, \\ g &= x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

将 f 和 g 视为以 x 为变量的多项式，其系数为以 y 为变量的多项式，然后我们可以计算得到

$$R(f, g; x) = \det \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ -1 & y & 0 \\ 0 & -1 & y^2 - 4 \end{pmatrix} = y^4 - 4y^2 + 1.$$

由引理2.8，我们只需要解方程 $y^4 - 4y^2 + 1 = 0$ ，就可以解得原方程组中的 y 分量。

作为一个热身，我们将对以下定理中所述的结果给出一个新的证明，该定理是由Verstraëte和Williford在文献[176]中给出。这里，我们回顾以下定义，一个theta图 $\Theta_{k,t}$ 是由连接两个固定端点的 t 个内部不相交的长度为 k 的路径所组成的图。

定理2.12 ([176]). $\text{ex}(n, \Theta_{4,3}) = \Omega(n^{\frac{5}{4}})$ 。

证明. 令 q 为奇素数幂。图 G_q 为定义在顶点集 $V = \mathbb{F}_q^4$ 上的图，顶点 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in V$ 和顶点 $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ 连成一条边当且仅当 $u \neq v$ 并且满足方程组

$$u_2 + v_2 = u_1 v_1,$$

$$u_3 + v_4 = u_1 v_1^2,$$

$$u_4 + v_3 = u_1^2 v_1.$$

从上面的方程组，很容易看出如果 $r, s \in V$ 是不同的顶点，并且它们有一个共同的邻居，那么 $r_1 \neq s_1$ 。可以计算得到 G_q 有 $n := q^4$ 个顶点和 $\Omega(n^{\frac{5}{4}})$ 条边。接下去我们要证明该图 G_q 不包含 $\Theta_{4,3}$ 作为子图。假设 G_q 包含一个 $\Theta_{4,3}$ 作为子图，其中该 $\Theta_{4,3}$ 的边集为

$$\{au, uv, vw, wb, ax, xy, yz, zb, ad, de, ef, fb\}.$$

我们首先考虑其中的一个长度为8的圈 $\{au, uv, vw, wb, ax, xy, yz, zb\}$ 。由 G_q 的定义，我们由如下方程组

$$\begin{aligned} a_2 + u_2 &= a_1 u_1, & a_3 + u_4 &= a_1 u_1^2, & a_4 + u_3 &= a_1^2 u_1, \\ u_2 + v_2 &= v_1 u_1, & v_3 + u_4 &= v_1 u_1^2, & v_4 + u_3 &= v_1^2 u_1, \\ w_2 + v_2 &= w_1 v_1, & v_3 + w_4 &= v_1 w_1^2, & v_4 + w_3 &= v_1^2 w_1, \\ w_2 + b_2 &= w_1 b_1, & b_3 + w_4 &= b_1 w_1^2, & b_4 + w_3 &= b_1^2 w_1, \\ z_2 + b_2 &= z_1 b_1, & b_3 + z_4 &= b_1 z_1^2, & b_4 + z_3 &= b_1^2 z_1, \\ z_2 + y_2 &= y_1 z_1, & y_3 + z_4 &= y_1 z_1^2, & y_4 + z_3 &= y_1^2 z_1, \\ x_2 + y_2 &= y_1 x_1, & y_3 + x_4 &= y_1 x_1^2, & y_4 + x_3 &= y_1^2 x_1, \\ x_2 + a_2 &= x_1 a_1, & a_3 + x_4 &= a_1 x_1^2, & a_4 + x_3 &= a_1^2 x_1. \end{aligned}$$

我们可以分别从左边8个，中间8个和右边8个方程中得到如下式子

$$f_1 := a_1 u_1 - u_1 v_1 + v_1 w_1 - w_1 b_1 + b_1 z_1 - z_1 y_1 + y_1 x_1 - x_1 a_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$f_2 := a_1 u_1^2 - u_1^2 v_1 + v_1 w_1^2 - w_1^2 b_1 + b_1 z_1^2 - z_1^2 y_1 + y_1 x_1^2 - x_1^2 a_1 = 0, \quad (2.2)$$

$$f_3 := a_1^2 u_1 - u_1 v_1^2 + v_1^2 w_1 - w_1 b_1^2 + b_1^2 z_1 - z_1 y_1^2 + y_1^2 x_1 - x_1 a_1^2 = 0. \quad (2.3)$$

将每个 $f_i (i = 1, 2, 3)$ 视作关于变量 u_1 的多项式，则我们可以计算得到

$$R(f_1, f_2; u_1) = g_1(a_1 - v_1),$$

$$R(f_1, f_3; u_1) = g_2(a_1 - v_1),$$

其中

$$\begin{aligned} g_1 := & -a_1 b_1 w_1^2 + 2a_1 b_1 w_1 x_1 - 2a_1 b_1 x_1 z_1 + a_1 b_1 z_1^2 + a_1 v_1 w_1^2 \\ & - 2a_1 v_1 w_1 x_1 + a_1 v_1 x_1^2 - a_1 x_1^2 y_1 + 2a_1 x_1 y_1 z_1 - a_1 y_1 z_1^2 \\ & + b_1^2 w_1^2 - 2b_1^2 w_1 z_1 + b_1^2 z_1^2 - b_1 v_1 w_1^2 + 2b_1 v_1 w_1 z_1 - b_1 v_1 z_1^2 \\ & - 2b_1 w_1 x_1 y_1 + 2b_1 w_1 y_1 z_1 + 2b_1 x_1 y_1 z_1 - 2b_1 y_1 z_1^2 + 2v_1 w_1 x_1 y_1 - \\ & 2v_1 w_1 y_1 z_1 - v_1 x_1^2 y_1 + v_1 y_1 z_1^2 + x_1^2 y_1^2 - 2x_1 y_1^2 z_1 + y_1^2 z_1^2, \\ g_2 = & a_1 b_1 w_1 - a_1 b_1 z_1 - a_1 v_1 w_1 + a_1 v_1 x_1 - a_1 x_1 y_1 + a_1 y_1 z_1 - b_1^2 w_1 \\ & + b_1^2 z_1 + b_1 v_1 w_1 - b_1 v_1 z_1 - v_1 x_1 y_1 + v_1 y_1 z_1 + x_1 y_1^2 - y_1^2 z_1. \end{aligned}$$

因为顶点 a 和顶点 v 是有一个公共邻点的，因此 $a_1 \neq v_1$ ，从而我们可以得到 $g_1 = g_2 = 0$ 。接着，我们可以把 g_1 和 g_2 视作关于变量 x_1 的多项式，那么我们有

$$\begin{aligned} R(g_1, g_2; x_1) := & (b_1 - y_1)(w_1 - z_1)^2(v_1 - y_1)(v_1 - b_1) \\ & (a_1 - y_1)(a_1 - b_1)(a_1 - v_1 + b_1 - y_1). \end{aligned}$$

注意到, b 与 y (以及 w 与 z , v 与 b , a 与 y)具有一个公共邻点, 因此我们有 $a_1 = b_1$ 或 $v_1 = y_1$ 或 $a_1 + b_1 = v_1 + y_1$ 成立。我们分情况讨论如下。

如果 $a_1 = b_1$, 那么代入 f_1 和 f_2 我们可以得到 $R(f_1, f_2; u_1) = (z_1 - x_1)(v_1 - y_1)(a_1 - y_1)(a_1 - v_1)$ 。又因为 x 和 z (以及 a 和 y , a 和 v)是有一个公共邻点的, 所以我们必然有 $v_1 = y_1$ 。再将 $a_1 = b_1$ 和 $v_1 = y_1$ 代入 f_1 和 f_3 , 那么我们有 $R(f_1, f_3; u_1) = (z_1 - x_1)(w_1 - z_1)(a_1 - v_1)^3 = 0$, 这会和 z 与 x (以及 w 和 z , a 和 v)有公共邻点相矛盾。因此, 我们有 $a_1 \neq b_1$ 。用类似的讨论我们也可以证明 $v_1 \neq y_1$, 这里我们不赘述了。

因此, 我们有

$$a_1 + b_1 = v_1 + y_1。$$

另外, 由于长度为8的偶圈具有对称性, 因此我们也有

$$u_1 + z_1 = x_1 + w_1。 \quad (2.4)$$

$\Theta_{4,3}$ 中共包含3个不同的长度为8的偶圈 $\{au, uv, vw, wb, ax, xy, yz, zb\}$, $\{au, uv, vw, wb, ad, de, ef, fb\}$ 和 $\{ax, xy, yz, zb, ad, de, ef, fb\}$ 。那么我们可以得到 $a_1 + b_1 = v_1 + y_1 = v_1 + e_1 = y_1 + e_1$ 。因此我们有 $v_1 = y_1 = e_1$ 以及 $a_1 + b_1 = 2v_1$ 。再将这些方程组代入 f_1 , 我们可以得到 $(a_1 - v_1)(u_1 + w_1 - x_1 - z_1) = 0$ 。又因为 a 和 v 是有一个公共邻点的, 因此 $a_1 \neq v_1$ 。所以只能是 $u_1 + w_1 = x_1 + z_1$ 。再结合(2.4), 我们发现 $u_1 = x_1$, 但这是显然不可能的, 因为 u 和 x 也是有公共邻点的。至此, 我们就证明了该定理。 \square

§ 2.7 不包含 $K'_{3,25}$ 的极图构造

本小节中, 我们专注于构造 n 个点的不包含 $K'_{3,25}$ 的图, 并且该图具有至少 $\Omega(n^{\frac{4}{3}})$ 条边。我们首先需要精心选取一些参数和集合, 为我们的

极图构造作铺垫。令 \mathbb{F}_p 为 p 阶有限域，其中 $p \geq 11$ 是一个奇素数并且满足 $p \equiv 5 \pmod{6}$ 。令集合

$$S = \left\{ x : x \in \{1, 2, \dots, \frac{p-5}{6}\} \text{ and } x \equiv 1 \pmod{3} \right\} \subseteq \mathbb{F}_p.$$

我们会需要用到以下引理。

引理2.9. 对于任何的 $x, y, z, t \in S$ ，我们有 $x + y \neq 0$, $x + y + z + t \neq 0$, $x + 5y \neq 0$ 以及 $x^2 + xy + y^2 \neq 0$ 。

证明. 因为 $x, y, z, t \in \mathbb{F}_p$, 并且 $x, y, z, t \in \{1, 2, \dots, \frac{p-5}{6}\}$, 所以我们有 $x + y \neq 0$, $x + y + z + t \neq 0$ 以及 $x + 5y \neq 0$ 。注意到，由于 $p \equiv 5 \pmod{6}$, -3 是一个模 p 意义下的二次非剩余，因此， $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + 3(\frac{y}{2})^2 \neq 0$ 。 \square

接下去，我们将给出不包含 $K'_{3,25}$ 的极图 G_p 的具体构造。

构造2.1. 我们将 G_p 的顶点集定义为 $V := S \times \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$, 其中点 $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ 和点 $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ 相连的条件是 $x \neq y$ 并且满足

$$x_2 + y_3 = x_1 y_1^2,$$

$$x_3 + y_2 = x_1^2 y_1.$$

给定任何一个点 $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$, 由上面的方程组可见，对于满足方程的 y , $y_1 \in S$ 可以唯一地确定 y_2 和 y_3 。又因为 $x \neq y$, 因此每个点的度数至少为 $\frac{p-5}{18} - 1 = \frac{p-23}{18}$ 。因此，我们可以算得， G_p 有 $n := \lceil \frac{p-5}{18} \rceil p^2$ 个点，以及至少 $\frac{1}{18 \times 18 \times 2} (p-23)(p-5)p^2 = \Omega(n^{\frac{4}{3}})$ 条边。那么接下来，我们的任务就是要证明 G_p 不包含 $K'_{3,25}$ 作为子图。我们先证明如下一个简单的引理。

引理2.10. 如果 $x \neq y \in V$ 有一个公共邻点, 那么我们有, $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$ 以及 $x_3 \neq y_3$ 。

证明. 假如说 x 和 y 有一个公共邻点 u , 那么由 G_p 的定义可以得到如下方程组,

$$x_2 + u_3 = x_1 u_1^2, \quad (2.5)$$

$$x_3 + u_2 = x_1^2 u_1, \quad (2.6)$$

$$y_2 + u_3 = y_1 u_1^2, \quad (2.7)$$

$$y_3 + u_2 = y_1^2 u_1. \quad (2.8)$$

我们分开讨论我们要证明的三种情况。

情况1: $x_1 \neq y_1$ 。

对于这种情况, 如果 $x_1 = y_1$, 那么由方程(2.5)和(2.7), 我们有 $x_2 = y_2$, 同理, 由方程(2.6)和(2.8), 我们有 $x_3 = y_3$, 这就会导致 $x = y$, 这显然是不可能的, 由此, 我们证明了 $x_1 \neq y_1$ 。

情况2: $x_2 \neq y_2$ 。

对于这种情况, 如果 $x_2 = y_2$, 那么由方程(2.5)和(2.7), 我们由 $(x_1 - y_1)u_1^2 = 0$, 那么就会有 $x_1 = y_1$, 前面我们已经证明了这是不可能的。因此 $x_2 \neq y_2$ 。

情况3: $x_3 \neq y_3$ 。

对于这种情况, 如果 $x_3 = y_3$, 那么由方程(2.6)和(2.8), 我们有 $u_1(x_1^2 - y_1^2) = 0$ 。因为 $x_1 \neq y_1$, 所以只能是 $x_1 + y_1 = 0$, 这会和引理2.9矛盾。至此, 引理得证。 \square

对于给定的三个不同的点 $a, b, c \in V$, 我们现在估计满足 x, y, z, w 各不相同, 并且 ax, xw, by, yw, cz, zw 均构成图 G_p 的边的序列 $(x, y, z, w) \in$

V^4 的数目。根据完全二部图的1次剖分图的结构，我们可以发现，我们只需要证明至多只存在24个不同的满足上述条件的序列即可。根据图 G_p 的定义，我们可以得到下列方程

$$\begin{aligned} a_2 + x_3 &= a_1 x_1^2, & a_3 + x_2 &= a_1^2 x_1, \\ w_2 + x_3 &= w_1 x_1^2, & w_3 + x_2 &= w_1^2 x_1, \\ b_2 + y_3 &= b_1 y_1^2, & b_3 + y_2 &= b_1^2 y_1, \\ w_2 + y_3 &= w_1 y_1^2, & w_3 + y_2 &= w_1^2 y_1, \\ c_2 + z_3 &= c_1 z_1^2, & c_3 + z_2 &= c_1^2 z_1, \\ w_2 + z_3 &= w_1 z_1^2, & w_3 + z_2 &= w_1^2 z_1. \end{aligned}$$

将 $x_2, x_3, y_2, y_3, z_2, z_3$ 从上述方程中消去，我们可以得到以下方程

$$f_1 := a_2 - w_2 - x_1^2(a_1 - w_1) = 0, \quad (2.9)$$

$$f_2 := a_3 - w_3 - x_1(a_1^2 - w_1^2) = 0, \quad (2.10)$$

$$f_3 := b_2 - w_2 - y_1^2(b_1 - w_1) = 0, \quad (2.11)$$

$$f_4 := b_3 - w_3 - y_1(b_1^2 - w_1^2) = 0, \quad (2.12)$$

$$f_5 := c_2 - w_2 - z_1^2(c_1 - w_1) = 0, \quad (2.13)$$

$$f_6 := c_3 - w_3 - z_1(c_1^2 - w_1^2) = 0. \quad (2.14)$$

接下去，我们将分三个小节分别讨论各种不同的情况。另外，我们的部分计算会借助计算机软件MAGMA程序实现，我们将代码写在了文献[187]的附录。接下去的证明中，每当我们需要用到MAGMA程序，我们都会引用文献[187]中对应的程序代码。

2.7.1 情况1: $a_1 = b_1$ 或 $a_1 = c_1$ 或 $b_1 = c_1$

我们首先讨论 $a_1 = b_1$ 或 $a_1 = c_1$ 或 $b_1 = c_1$ 发生的情况, 我们需要证明如下引理。

引理2.11. (1) 如果 $a_1 = b_1$, 那么 $a_2 \neq b_2$ 并且 $a_3 \neq b_3$ 。

(2) 如果 $a_1 = c_1$, 那么 $a_2 \neq c_2$ 并且 $a_3 \neq c_3$ 。

(3) 如果 $b_1 = c_1$, 那么 $b_2 \neq c_2$ 并且 $b_3 \neq c_3$ 。

证明. 在这里, 我们仅需证明第一种情况, 剩余两种同理可得。如果 $a_2 = b_2$, 那么由方程(2.9)和(2.11), 我们可以得到 $x_1^2 = y_1^2$, 因此要么 $x_1 = y_1$, 要么有 $x_1 = -y_1$, 这会和引理2.9以及引理2.10相矛盾。

如果 $a_3 = b_3$, 那么由方程(2.10)和(2.12), 我们有 $x_1 = y_1$, 这同样会和引理2.9矛盾。至此, 该引理证明完毕。 \square

假设 $a_1 = b_1$, 那么方程(2.9)-(2.14)可以写成

$$f_1 := a_2 - w_2 - x_1^2(a_1 - w_1) = 0,$$

$$f_2 := a_3 - w_3 - x_1(a_1^2 - w_1^2) = 0,$$

$$f_3 := b_2 - w_2 - y_1^2(a_1 - w_1) = 0,$$

$$f_4 := b_3 - w_3 - y_1(a_1^2 - w_1^2) = 0,$$

$$f_5 := c_2 - w_2 - z_1^2(c_1 - w_1) = 0,$$

$$f_6 := c_3 - w_3 - z_1(c_1^2 - w_1^2) = 0。$$

我们将 $f_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 视作关于变量 $x_1, y_1, z_1, w_1, w_2, w_3$ 的多项式。由文献[187]附录A中的MAGMA Program 1, 我们可以得到

$$R(f_1, f_2; x_1) = g_1 \cdot (a_1 - w_1),$$

$$R(f_3, f_4; y_1) = g_2 \cdot (a_1 - w_1),$$

$$R(f_5, f_6; z_1) = g_3 \cdot (c_1 - w_1).$$

由引理2.10, 我们有 $a_1 \neq w_1$ 以及 $c_1 \neq w_1$ 。那么, $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ 以及

$$R(g_1, g_2; w_2) = g_4 \cdot (a_1 - w_1)(a_1 + w_1)^2,$$

$$R(g_1, g_3; w_2) = g_5.$$

再由引理2.9和引理2.10, 我们有 $a_1 + w_1 \neq 0$ 并且 $a_1 - w_1 \neq 0$, 那么有 $g_4 = g_5 = 0$ 。现在我们令 $h = R(g_4, g_5; w_3)$, 那么 h 是关于变量 w_1 且次数至为8的多项式。我们可以把 h 写成 $h = \sum_{i=0}^8 h_i w_1^i$ 。通过计算我们可以得到

$$h_8 = -(a_2 - b_2)^2(a_1 - c_1).$$

又由引理2.11, 我们有 $a_2 \neq b_2$ 。如果 $a_1 \neq c_1$, 那么关于 w_1 至多只有8个解。对于给定的 w_1 , g_4 是关于变量 w_3 的次数为1的多项式。我们可以把 g_4 写成 $g_4 = s_1 w_3 + s_0$, 其中 $s_1 = a_3 - b_3 \neq 0$ 。因此 w_3 至多只有1个解。如果 w_1 和 w_3 给定, 那么剩下的所有变量都会被唯一确定。因此这种类型的序列 (x, y, z, w) 至多只能有 $8 (= 8 \times 1)$ 种。

而如果 $a_1 = c_1$, 那么我们可以通过计算得到 $g_5 = g_6 \cdot (a_1 - w_1)(a_1 + w_1)^2$ 。现在我们令 $h' = R(g_4, g_6; w_3)$, 那么 h' 是一个关于变量 w_1 的次数为3的多项式。于是我们可以将 h' 写作 $h' = \sum_{i=0}^3 k_i w_1^i$ 。现在我们将 $k_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 视作变量 a_2 的多项式, 那么根据文献[187]附录A中的MAGMA Program 2, 我们有

$$R(k_0, k_3; a_2) = 4(b_3 - c_3)^2(a_3 - c_3)(a_3 - b_3).$$

那么由引理2.11, $R(k_0, k_3; a_2) \neq 0$, 则 k_0 和 k_3 不可能同时为0。因此, 关于 w_1 至多只有3个解。同上面情况类似, 固定 w_1 后, 关于 w_3 至多只有1个解。而且, 一旦 w_1 和 w_3 给定, 那么剩下的变量就都会被唯一确定。因此这种类型的序列 (x, y, z, w) 至多只能有 $3(= 3 \times 1)$ 种。

因此, 如果 $a_1 = b_1$ 或者 $a_1 = c_1$ 或者 $b_1 = c_1$, 至多只能有8种满足条件的序列 (x, y, z, w) 。

2.7.2 情况2: $a_1 \neq b_1, a_1 \neq c_1, b_1 \neq c_1; a_2 = b_2$ 或 $a_2 = c_2$ 或 $b_2 = c_2$

不失一般性, 我们假设 $a_2 = b_2$ 。那么方程(2.9)-(2.14)可以写成

$$f_1 := a_2 - w_2 - x_1^2(a_1 - w_1) = 0,$$

$$f_2 := a_3 - w_3 - x_1(a_1^2 - w_1^2) = 0,$$

$$f_3 := a_2 - w_2 - y_1^2(b_1 - w_1) = 0,$$

$$f_4 := b_3 - w_3 - y_1(b_1^2 - w_1^2) = 0,$$

$$f_5 := c_2 - w_2 - z_1^2(c_1 - w_1) = 0,$$

$$f_6 := c_3 - w_3 - z_1(c_1^2 - w_1^2) = 0.$$

我们可以把 $f_i(i = 1, 2, \dots, 6)$ 视为关于变量 $x_1, y_1, z_1, w_1, w_2, w_3$ 的多项式。根据文献[187]附录A中的MAGMA Program 3, 我们可以得到

$$R(f_1, f_2; x_1) = g_1 \cdot (a_1 - w_1),$$

$$R(f_3, f_4; y_1) = g_2 \cdot (b_1 - w_1),$$

$$R(f_5, f_6; z_1) = g_3 \cdot (c_1 - w_1).$$

注意到, a 和 w (以及 b 和 w , c 和 w)有一个公共邻点, 由引理2.10, 我们有 $a_1 \neq w_1$ (以及 $b_1 \neq w_1, c_1 \neq w_1$)。于是, 我们有 $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ 以及

$$R(g_1, g_2; w_2) = g_4,$$

$$R(g_1, g_3; w_2) = g_5,$$

$$R(g_4, g_5; w_3) = h \cdot (a_1 - w_1)^2(a_1 + w_1)^4,$$

其中 h 是一个关于变量 w_1 的次数为 10 的多项式。由引理 2.9 和引理 2.10，我们由 $a_1 \neq w_1$ 以及 $a_1 + w_1 \neq 0$ ，那么 $h = 0$ 。我们可以将 h 写成 $h = \sum_{i=0}^{10} h_i w_1^i$ ，其中

$$h_{10} = (a_2 - c_2)^2(a_1 - b_1)^2。$$

如果 $a_2 \neq c_2$ ，则 $h_{10} \neq 0$ 。因此， w_1 最多有 10 个解。对于任何固定的 w_1 ， g_4 和 g_5 是关于 w_3 的次数为 2 的多项式。我们可以将 g_4 和 g_5 写为 $g_4 = \sum_{i=0}^2 s_i w_3^i$ 和 $g_5 = \sum_{i=0}^2 t_i w_3^i$ ，而后我们有 $s_2 = s'_2 \cdot (a_1 - b_1)$ 和 $t_2 = t'_2 \cdot (a_1 - c_1)$ 。于是我们可以计算得到 $s'_2 - t'_2 = (b_1 - c_1)(a_1 + b_1 + c_1 + w_1)$ 。根据引理 2.9 和 引理 2.10，我们有 $s'_2 - t'_2 \neq 0$ 。因此， s_2 和 t_2 中至少有一个不为 0，则 w_3 最多有 2 个解。如果给定 w_1 和 w_3 ，那么所有剩余的变量都会被唯一确定。因此，对于这种情况，最多有 $20 (= 10 \times 2)$ 种可能满足条件的 (x, y, z, w) 序列。

如果 $a_2 = c_2$ ，那么 $h_i = 0$ 对于 $i = 6, 7, 8, 9, 10$ 都成立。我们可以将 h_4 和 h_5 视为关于变量 a_1 的多项式，根据文献 [187] 附录 A 中的 MAGMA Program 4，我们可以得到

$$R(h_4, h_5; a_1) = 80(b_1 - c_1)^2(a_3 - b_3)^4(a_3 - c_3)^4(b_3 - c_3)^4。$$

如果 $R(h_4, h_5; a_1) \neq 0$ ，则 h_4 和 h_5 中至少有一个不为 0。因此关于 w_1 最多有 5 个解。对于任何固定的 w_1 ，通过与上述类似的讨论，对于 w_3 ，最多有 2 个解。如果给定 w_1 和 w_3 ，那么所有剩余的变量都能被唯一确定。因此，对于这种情况，最多有 $10 (= 5 \times 2)$ 种满足条件的序列 (x, y, z, w) 。

如果 $R(h_4, h_5; a_1) = 0$, 那么不失一般性地, 我们可以假设 $a_3 = b_3$ 。

根据文献[187]附录A中的MAGMA Program 5, 我们可以得到

$$g_4 = (a_3 - w_3)^2(a_1 - b_1) \cdot g'_4,$$

其中 $g'_4 = -w_1^2 + (a_1 + b_1)w_1 + a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2$ 。那么由方程(2.10), 如果 $a_3 = w_3$, 则 $a_1^2 = w_1^2$, 但这是不可能的。因此 $a_3 \neq w_3$ 和 $a_1 \neq b_1$, 那么 w_1 最多有2个解。对于任何固定的 w_1 , g_5 是关于 w_3 的二次多项式。我们可以将 g_5 写为 $g_5 = \sum_{i=0}^2 t_i w_3^i$, 这样我们有 $t_2 = t'_2 \cdot (a_1 - c_1)$ 。我们可以计算得到 $g'_4 - t'_2 = (b_1 - c_1)(a_1 + b_1 + c_1 + w_1)$ 。根据引理2.9和引理2.10, 我们有 $g'_4 - t'_2 \neq 0$ 。因此, 对于 w_3 最多有2个解。如果给定 w_1 和 w_3 , 那么所有剩余的变量会被唯一确定的。因此, 对于这种情况, 最多有 $4 (= 2 \times 2)$ 种不同的 (x, y, z, w) 序列。

因此, 如果 $a_1 \neq b_1$, $a_1 \neq c_1$, $b_1 \neq c_1$ 以及 $a_2 = b_2$ 或 $a_2 = c_2$ 或 $b_2 = c_2$, 至多只能有20种满足条件的序列 (x, y, z, w) 。

2.7.3 情况3: $a_1 \neq b_1$, $a_1 \neq c_1$, $b_1 \neq c_1$; $a_2 \neq b_2$, $a_2 \neq c_2$ 且 $b_2 \neq c_2$

对于这种情况, 我们首先需要如下的辅助性引理。

引理2.12. 如果 G_p 包含一个 $\Theta_{3,3} = \{da, db, dc, ax, by, cz, wx, wy, wz\}$ 作为子图, 那么我们有 $a_1y_1 - a_1z_1 - b_1x_1 + b_1z_1 + c_1x_1 - c_1y_1 = 0$ 。

引理2.12的证明. 注意到 da, ax, xw, wy, yb, bd 构成了一个长度为6的偶圈, 那么根据图 G_p 的定义, 我们有

$$d_3 + a_2 = d_1^2 a_1, \quad a_3 + d_2 = a_1^2 d_1, \quad (2.15)$$

$$a_2 + x_3 = a_1 x_1^2, \quad x_2 + a_3 = x_1 a_1^2, \quad (2.16)$$

$$x_3 + w_2 = x_1^2 w_1, \quad w_3 + x_2 = w_1^2 x_1, \quad (2.17)$$

$$w_2 + y_3 = w_1 y_1^2, \quad y_2 + w_3 = y_1 w_1^2, \quad (2.18)$$

$$y_3 + b_2 = y_1^2 b_1, \quad b_3 + y_2 = b_1^2 y_1, \quad (2.19)$$

$$b_2 + d_3 = b_1 d_1^2, \quad d_2 + b_3 = d_1 b_1^2. \quad (2.20)$$

于是我们可以通过计算得到

$$f_1 := d_1^2 a_1 - a_1 x_1^2 + x_1^2 w_1 - w_1 y_1^2 + y_1^2 b_1 - b_1 d_1^2 = 0,$$

$$f_2 := d_1 a_1^2 - a_1^2 x_1 + x_1 w_1^2 - w_1^2 y_1 + y_1 b_1^2 - b_1^2 d_1 = 0,$$

其中 f_1 通过(2.15)-(2.20)左边6个方程得到, f_2 则是由(2.15)-(2.20)右边6个方程得到。我们把 f_1, f_2 视作关于变量 $a_1, u_1, v_1, b_1, x_1, w_1$ 的多项式, 那么通过计算可以得到

$$\begin{aligned} R(f_1, f_2; b_1) = & (a_1 - w_1)(x_1 - y_1)(d_1 - y_1)(d_1 - x_1) \\ & (d_1^2 a_1 + d_1^2 w_1 - d_1 a_1 x_1 - d_1 a_1 y_1 + d_1 x_1 w_1 + d_1 w_1 y_1 \\ & - a_1 x_1^2 - a_1 x_1 y_1 - a_1 y_1^2 + x_1^2 w_1 + x_1 w_1 y_1 - w_1 y_1^2). \end{aligned}$$

再有引理2.10以及 $f_1 = f_2 = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} & d_1^2 a_1 + d_1^2 w_1 - d_1 a_1 x_1 - d_1 a_1 y_1 + d_1 x_1 w_1 + d_1 w_1 y_1 - a_1 x_1^2 - a_1 x_1 y_1 - \\ & a_1 y_1^2 + x_1^2 w_1 + x_1 w_1 y_1 - w_1 y_1^2 = 0. \end{aligned}$$

同样地, da, ax, xw, wz, zc, cd 也构成一个长度为6的偶圈, 我们同样有

$$\begin{aligned} & d_1^2 a_1 + d_1^2 w_1 - d_1 a_1 x_1 - d_1 a_1 z_1 + d_1 x_1 w_1 + d_1 w_1 z_1 - a_1 x_1^2 - a_1 x_1 z_1 - \\ & a_1 z_1^2 + x_1^2 w_1 + x_1 w_1 z_1 - w_1 z_1^2 = 0. \end{aligned}$$

通过上面两个方程, 我们可以得到

$$(d_1 + x_1)(w_1 - a_1)y_1 - (w_1 + a_1)y_1^2$$

$$= (d_1 + x_1)(w_1 - a_1)z_1 - (w_1 + a_1)z_1^2.$$

由上式计算可得,

$$\frac{d_1 + x_1}{w_1 + a_1} = \frac{y_1 + z_1}{w_1 - a_1}.$$

由于 $\Theta_{3,3}$ 的结构具有对称性, 我们有

$$\frac{w_1 + a_1}{d_1 + x_1} = \frac{b_1 + c_1}{d_1 - x_1}.$$

通过上述两个方程, 我们可以得到

$$g_1 = (y_1 + z_1)(b_1 + c_1) - (w_1 - a_1)(d_1 - x_1) = 0.$$

再次利用 $\Theta_{3,3}$ 的对称性, 我们还可以得到

$$g_2 = (x_1 + z_1)(a_1 + c_1) - (w_1 - b_1)(d_1 - y_1) = 0,$$

$$g_3 = (x_1 + y_1)(a_1 + b_1) - (w_1 - c_1)(d_1 - z_1) = 0.$$

我们现在可将 $g_i (i = 1, 2, 3)$ 视作关于变量 d_1, w_1 的多项式。根据文献[187]附录A中的MAGMA Program 6, 我们可以得到

$$R(g_1, g_2; d_1) = h_1 \cdot (a_1 + b_1 + c_1 - w_1),$$

$$R(g_1, g_3; d_1) = h_2 \cdot (a_1 + b_1 + c_1 - w_1).$$

注意到, 因为 $a_1, b_1, c_1, w_1 \in S$, 则 $w_1 \in \{1, 2, \dots, \frac{p-5}{6}\}$ 且有 $w_1 \equiv 1 \pmod{3}$, 并且还有 $a_1 + b_1 + c_1 \in \{3, \dots, \frac{p-5}{2}\}$ 以及 $a_1 + b_1 + c_1 \equiv 0 \pmod{3}$ 。因此 $a_1 + b_1 + c_1 - w_1 \neq 0$ 。再由 $h_1 = h_2 = 0$, 我们可以计算得到 $R(h_1, h_2; w_1) = (y_1 + z_1)(a_1 y_1 - a_1 z_1 - b_1 x_1 + b_1 z_1 + c_1 x_1 - c_1 y_1) = 0$ 。因此有 $a_1 y_1 - a_1 z_1 - b_1 x_1 + b_1 z_1 + c_1 x_1 - c_1 y_1 = 0$ 。 \square

注记2.1. 在上面的证明中, 对于 $d \in V$, 我们不需要条件 $d_1 \in S$ 。因此, 如果 $d_1 \in \mathbb{F}_p^* \setminus S$, 则引理 2.12 仍然成立。

由引理2.10可知, 如果 d, a, b, c, x, y, z, w 构成一个 $\Theta_{3,3}$ 并且其边集为

$$\{da, db, dc, ax, by, cz, wx, wy, wz\},$$

那么我们有 $a_3 \neq b_3$ 。

断言2.1. 如果 $a_1y_1 - a_1z_1 - b_1x_1 + b_1z_1 + c_1x_1 - c_1y_1 = 0$ 以及 $a_3 \neq b_3$, 那么至多只有24种满足条件的序列 (x, y, z, w) 。

断言2.1的证明. 如果 $f_7 = a_1y_1 - a_1z_1 - b_1x_1 + b_1z_1 + c_1x_1 - c_1y_1 = 0$, 那么我们可以把 f_7 和方程(2.9)-(2.14)中的 $f_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 都视为关于变量 $x_1, y_1, z_1, w_1, w_2, w_3$ 的多项式。我们令 $g_1 = f_1 - f_3$, $g_2 = f_1 - f_5$ 以及 $g_3 = f_2 - f_4$ 。根据文献[187]附录A中的MAGMA Program 7, 我们可以得到

$$R(g_1, g_2; w_1) = g_5,$$

$$R(g_1, g_3; w_1) = g_6 \cdot (x_1 - y_1),$$

$$R(f_7, g_5; x_1) = h_1 \cdot (y_1 - z_1),$$

$$R(f_7, g_6; x_1) = h_2,$$

$$R(h_1, h_2; z_1) = (b_1 - c_1)^3(a_1 - b_1)^6(a_1y_1^2 - b_1y_1^2 - a_2 + b_2)^2 \cdot s,$$

其中 s 是一个关于 y_1 的次数为8的多项式。

如果 $a_1y_1^2 - b_1y_1^2 - a_2 + b_2 = 0$, 那么由方程(2.9)和(2.11), 我们可以得到

$$0 = f_1 - f_3$$

$$\begin{aligned}
 &= a_2 - b_2 - x_1^2(a_1 - w_1) + y_1^2(b_1 - w_1) \\
 &= a_2 - b_2 - (x_1^2 - y_1^2)(a_1 - w_1) + y_1^2(b_1 - a_1)。
 \end{aligned}$$

那么我们将会导出 $(x_1^2 - y_1^2)(a_1 - w_1) = 0$, 这会和已知性质矛盾。因此 $a_1y_1^2 - b_1y_1^2 - a_2 + b_2 \neq 0$ 。

接着, 我们可以将 s 写为 $s = \sum_{i=0}^8 s_i y_1^i$, 然后我们可以计算得到 $s_8 = s'_8 \cdot (b_1 - c_1)^3(a_1 - c_1)^4(a_1 - b_1)^4$, $s_7 = s'_7 \cdot (b_1 - c_1)^3(a_3 - b_3)(a_1 - c_1)^3(a_1 - b_1)^3$ 。我们将 s'_8 和 s'_7 视为关于 a_1 的多项式, 然后由引理2.9, 我们有 $R(s'_7, s'_8; a_1) = (b_1 + c_1)(b_1 + 5c_1)(b_1^2 + b_1c_1 + c_1^2) \neq 0$ 。因此, 对于 y_1 , 最多有 8 个解。对于任何给定的 y_1 , h_1 是 z_1 的 3 次多项式。我们可以将 h_1 写为 $h_1 = \sum_{i=0}^3 s_i z_1^i$, 则有 $s_3 = (a_1 - c_1)(a_1 - b_1)^2 \neq 0$ 。因此, z_1 最多有 3 个解。如果给定 y_1 和 z_1 , 那么所有剩余的变量都是唯一确定的。因此, 对于这种情况, 最多有 $24 (= 8 \times 3)$ 种不同的 (x, y, z, w) 序列。 \square

现在我们将方程(2.9)-(2.14)中的 f_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 视为关于变量 $x_1, y_1, z_1, w_1, w_2, w_3$ 的多项式。根据文献[187]附录A中的MAGMA Program 8, 我们可以得到

$$R(f_1, f_2; x_1) = g_1 \cdot (a_1 - w_1),$$

$$R(f_3, f_4; y_1) = g_2 \cdot (b_1 - w_1),$$

$$R(f_5, f_6; z_1) = g_3 \cdot (c_1 - w_1)。$$

由引理2.10, 我们有 $a_1 \neq w_1$ 以及 $c_1 \neq w_1$ 。那么通过计算我们可以得到

$$R(g_1, g_2; w_2) = g_4,$$

$$R(g_1, g_3; w_2) = g_5,$$

$$R(g_4, g_5; w_3) = h \cdot (a_1 - w_1)^2(a_1 + w_1)^4,$$

其中 h 是一个关于 w_1 次数为 10 的多项式。由引理 2.9，我们有 $a_1 + w_1 \neq 0$ ，那么 $h = 0$ 。我们可以将 h 写成 $h = \sum_{i=0}^{10} h_i w_1^i$ 。

如果 h_i 种至少有一个不为 0，那么 w_1 最多有 10 个解。对于任何固定的 w_1 ， g_4 和 g_5 是 w_3 的次数为 2 的多项式。我们可以将 g_4 和 g_5 分别写成 $g_4 = \sum_{i=0}^2 s_i w_3^i$, $g_5 = \sum_{i=0}^2 t_i w_3^i$ ，那么 $s_2 = s'_2 \cdot (a_1 - b_1)$ 以及 $t_2 = t'_2 \cdot (a_1 - c_1)$ 。我们可以计算得到 $s'_2 - t'_2 = (b_1 - c_1)(a_1 + b_1 + c_1 + w_1)$ 。根据引理 2.9 和 引理 2.10，我们有 $s'_2 - t'_2 \neq 0$ 。因此， s_2 和 t_2 中至少有一个不为 0，那么 w_3 最多只有 2 个解。如果给定 w_1 和 w_3 ，那么所有剩余的变量会被唯一确定。因此，对于这种情况，最多有 $20 (= 10 \times 2)$ 种不同的 (x, y, z, w) 序列。

如果对于 $0 \leq i \leq 10$, $h_i = 0$ ，那么我们可以将 h_i 视作关于变量 b_2, c_2, c_3 的多项式。通过计算我们可以得到

$$h_{10} = (a_1 b_2 - a_1 c_2 - a_2 b_1 + a_2 c_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)^2.$$

令 $h'_{10} = a_1 b_2 - a_1 c_2 - a_2 b_1 + a_2 c_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1$ 。根据文献[187]附录 A 中的 MAGMA Program 8，我们可以得到

$$R(h'_{10}, h_8; c_2) = (a_2 - b_2)(a_1 - b_1) \cdot k_1,$$

$$R(h'_{10}, h_6; c_2) = (a_2 - b_2)(a_1 - b_1) \cdot k_2,$$

$$R(k_1, k_2; c_3) = (b_1 - c_1)^4(a_1 - c_1)^4(a_1 - b_1)^4 \cdot r_1^2,$$

$$R(k_1, k_2; b_2) = (b_1 - c_1)^2(a_1 - c_1)^2(a_1 - b_1) \cdot r_2^2,$$

其中 $r_1 =$

$$a_1^3 a_2 - a_1^3 b_2 + a_1^2 a_2 b_1 - a_1^2 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_1^2 + a_1 b_1^2 b_2 - a_2 b_1^3 - a_3^2 + 2a_3 b_3 + b_1^3 b_2 - b_3^2, \quad (2.21)$$

$$r_2 = a_1^2 b_3 - a_1^2 c_3 - a_3 b_1^2 + a_3 c_1^2 + b_1^2 c_3 - b_3 c_1^2. \quad (2.22)$$

通过计算我们可以得到

$$\begin{aligned} R(h'_{10}, h_8; b_2) &= (a_2 - c_2)(a_1 - c_1) \cdot k_3, \\ R(h'_{10}, h_6; b_2) &= (a_2 - c_2)(a_1 - c_1) \cdot k_4, \\ R(k_3, k_4; c_3) &= (b_1 - c_1)^4 (a_1 - c_1)^2 (a_1 - b_1)^4 \cdot r_3^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} r_3 = &a_1^4 a_2 - a_1^4 c_2 - 2a_1^2 a_2 b_1^2 + 2a_1^2 b_1^2 c_2 - a_1 a_3^2 + 2a_1 a_3 b_3 - a_1 b_3^2 \\ &+ a_2 b_1^4 + a_3^2 c_1 - 2a_3 b_3 c_1 - b_1^4 c_2 + b_3^2 c_1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

现在我们令 $d_1 := \frac{a_3 - b_3}{a_1^2 - b_1^2}$, $d_2 := a_1^2 (\frac{a_3 - b_3}{a_1^2 - b_1^2}) - a_3$, 以及 $d_3 := a_1 (\frac{a_3 - b_3}{a_1^2 - b_1^2})^2 - a_2$ 。因为 $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ (见方程(2.21), (2.22)以及(2.23)), 通过计算我们可以得到

$$\begin{aligned} a_2 + d_3 &= a_1 d_1^2, & a_3 + d_2 &= a_1^2 d_1, \\ b_2 + d_3 &= b_1 d_1^2, & b_3 + d_2 &= b_1^2 d_1, \\ c_2 + d_3 &= c_1 d_1^2, & c_3 + d_2 &= c_1^2 d_1. \end{aligned}$$

易见 $d = (d_1, d_2, d_3)$ 是顶点 a, b, c 的一个公共邻点, 因此我们可以得到, d, a, b, c, x, y, z, w 共同组成一个 $\Theta_{3,3}$ 。由引理2.12和断言2.1, 对于这种情况, 最多有24种不同的 (x, y, z, w) 序列。

注记2.2. 注意到 d_1 不一定会在 S 种, 那么会使得 $d \notin V$, 但是根据注记2.1, 我们仍能保证同样的结论。事实上在这里我们并不一定需要引

入结构 $\Theta_{3,3}$ 。注意到如果点 $d = (d_1, d_2, d_3)$ 满足上述关于 a, b, c 的方程组，那么引理2.12的结论依然是成立的。

因此，如果 $a_1 \neq b_1, a_1 \neq c_1, b_1 \neq c_1, a_2 \neq b_2, a_2 \neq c_2$ ，以及 $b_2 \neq c_2$ ，最多有24种不同的满足要求的 (x, y, z, w) 序列。

2.7.4 定理2.8的证明

基于前面三个小节的讨论，我们可以得到，对于任何给定三个顶点 $a, b, c \in V$ ，至多有24种不同的满足 ax, xw, by, yw, cz, zw 为 G_p 中的边的序列序列 (x, y, z, w) 。考虑到 $K'_{3,25}$ 的结构，我们就已经说明了 G_p 是不包含 $K'_{3,25}$ 作为子图的。至此，整个定理证明完毕。

§ 2.8 不包含 $\Theta_{3,217}^B$ 的线性超图构造

在本节中，我们主要给出一个 n 个顶点且不包含 $\Theta_{3,217}^B$ 的3一致线性超图，并且其具有 $\Omega(n^{\frac{4}{3}})$ 条边。首先我们需要做一些铺垫性的准备工作。

令 p 为一个充分大的素数，令 \mathbb{F}_p 为 p 阶有限域。我们令

$$T_1 = \left\{2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}\right\},$$

$$T_2 = \left\{\frac{p+3}{2}, \dots, p-1\right\},$$

$$T_3 = \mathbb{F}_p \setminus \{-x^2 : x \in \mathbb{F}_p\},$$

$$T_4 = \{x : x \in \mathbb{F}_p, x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ or } 3x - 1 = 0 \text{ or } 3x - 2 = 0\},$$

$$T_5 :=$$

$$\left\{x : x \in \mathbb{F}_p, x^5 - \frac{12757}{10872}x^4 + \frac{1123}{3624}x^3 + \frac{289}{1359}x^2 - \frac{49}{453}x - \frac{2}{151} = 0\right\}.$$

因为 p 是充分大的素数，因此上面的每个 T_i 都是良定义的。注意 $T_1 \cup T_2 \cup \{0, 1, \frac{p+1}{2}\} = \mathbb{F}_p$, $|T_3| = \frac{p-1}{2}$ 。那么会存在 $i \in \{1, 2\}$ 使得 $|T_i \cap T_3| \geq \frac{p-7}{4}$ 。不失一般性，我们假设 $|T_1 \cap T_3| \geq \frac{p-7}{4}$ 。令 $S_1 = (T_1 \cap T_3) \setminus (T_4 \cup T_5)$, $S_2 = \mathbb{F}_p \setminus \{0, 1\}$ 。由于 $|T_4| \leq 4$ 和 $|T_5| \leq 5$, 那么 $|S_1| \geq \frac{p-43}{4}$ 。

接下去我们准备给出一个3部3一致线性超图的构造。对于 $1 \leq i \leq 3$, 令 $V_i = S_1 \times S_2 \times S_2 \times \{i\}$ 。 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 将是我们超图的顶点集。给定 $x_1, x_2, x_3 \in S_1$ 和 $a \in \mathbb{F}_p^*$, 令 $e(x_1, x_2, x_3, a)$ 为由形如 $(x_1, x_2x_3 + a, x_2^2x_3 + a, 1)$ 、 $(x_2, x_3x_1 + a, x_3^2x_1 + a, 2)$ 和 $(x_3, x_1x_2 + a, x_1^2x_2 + a, 3)$ 这样三个点构成的超边。

定义2.6. 我们定义超图 \mathcal{H} , 其顶点集为

$$V(\mathcal{H}) = \{(b, c, d, i) : b \in S_1, c, d \in S_2, 1 \leq i \leq 3\}。$$

其边集为

$$E(\mathcal{H}) = \{e(x_1, x_2, x_3, a) : e(x_1, x_2, x_3, a) \subseteq V(\mathcal{H})\}。$$

根据定义，我们可以立刻得到如下命题。

命题2.1. \mathcal{H} 是一个线性超图。

证明. 令 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in S_1$, $a, b \in \mathbb{F}_p^*$ 。如果 $|e(x_1, x_2, x_3, a) \cap e(y_1, y_2, y_3, b)| = 2$ ，不失一般性地，我们可以假设前两个点相同。那么我们有

$$x_1 = y_1, \tag{2.24}$$

$$x_2x_3 + a = y_2y_3 + b, \tag{2.25}$$

$$x_2^2x_3 + a = y_2^2y_3 + b, \tag{2.26}$$

$$x_2 = y_2, \quad (2.27)$$

$$x_3x_1 + a = y_3y_1 + b, \quad (2.28)$$

$$x_3^2x_1 + a = y_3^2y_1 + b. \quad (2.29)$$

将 $x_2 = y_2$ (方程(2.27)) 代入方程(2.25)和(2.26)，接着通过计算方程(2.25)-(2.26)，我们有

$$(x_2 - x_2^2)x_3 = (x_2 - x_2^2)y_3.$$

注意到， $x_2 \neq 0, 1$ ，我们有 $x_3 = y_3$ ，则 $a = b$ 。因此会导致 $e(x_1, x_2, x_3, a) = e(y_1, y_2, y_3, b)$ ，这会与假设矛盾。因此， \mathcal{H} 必然是线性的。 \square

容易看出 \mathcal{H} 的顶点数为 $n := 3|S_1|(p-2)^2$ ，且至少有 $|S_1|^3(p-13) = \Omega(n^{\frac{4}{3}})$ 条边。本节接下去的主要任务为，我们将证明 \mathcal{H} 是不包含 $\Theta_{3,217}^B$ 的。

我们称 Berge 型 3 长路径 $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$ 的类型为 (i_1, i_2, i_3, i_4) 型，如果对于 $1 \leq j \leq 4$ ， $v_j \in V_{i_j}$ 。同理，我们称 Berge 型 4 长的圈 $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1$ 的类型为 (i_1, i_2, i_3, i_4) 型，如果对于 $1 \leq j \leq 4$ ， $v_j \in V_{i_j}$ 。

通过对称性，不失一般性地，我们只需要考虑三种 Berge 型 3 长路径：(1, 2, 1, 2)型，(1, 2, 3, 1)型和(1, 2, 3, 2)型。我们的做法是，给定两个端点后，我们将估计这两个端点之间三种类型的 Berge 型 3 长路径的数量上限。在下文中，我们根据类型将讨论分为三个小节。

2.8.1 (1, 2, 1, 2)型 Berge 型 3 长路径：至多有 8 条

我们首先需要一个关于 Berge 型 4 长的圈的引理。

引理 2.13. \mathcal{H} 中不存在(1, 2, 1, 2)型的 Berge 型 4 长的圈。

证明. 我们用反证法, 假设 $(u_1, v_1, w_1, 1), e(x_1, x_2, x_3, a_1), (u_2, v_2, w_2, 2), e(y_1, y_2, y_3, a_2), (u_3, v_3, w_3, 1), e(z_1, z_2, z_3, a_3), (u_4, v_4, w_4, 2), e(t_1, t_2, t_3, a_4), (u_1, v_1, w_1, 1)$ 构成了一个Berge型4长的圈。那么由超图 \mathcal{H} 的定义, 我们有

$$u_1 = x_1 = t_1, \quad (2.30)$$

$$v_1 = x_2x_3 + a_1 = t_2t_3 + a_4, \quad (2.31)$$

$$w_1 = x_2^2x_3 + a_1 = t_2^2t_3 + a_4, \quad (2.32)$$

$$u_2 = x_2 = y_2, \quad (2.33)$$

$$v_2 = x_3x_1 + a_1 = y_3y_1 + a_2, \quad (2.34)$$

$$w_2 = x_3^2x_1 + a_1 = y_3^2y_1 + a_2, \quad (2.35)$$

$$u_3 = y_1 = z_1, \quad (2.36)$$

$$v_3 = y_2y_3 + a_2 = z_2z_3 + a_3, \quad (2.37)$$

$$w_3 = y_2^2y_3 + a_2 = z_2^2z_3 + a_3, \quad (2.38)$$

$$u_4 = z_2 = t_2, , \quad (2.39)$$

$$v_4 = z_3z_1 + a_3 = t_3t_1 + a_4, \quad (2.40)$$

$$w_4 = z_3^2z_1 + a_3 = t_3^2t_1 + a_4. \quad (2.41)$$

通过计算我们可以得到下列方程。

$$f_1 := x_2x_3 - x_3x_1 + t_3x_1 - z_2t_3 + z_2z_3 - z_3y_1 + y_3y_1 - x_2y_3 = 0,$$

$$f_2 := x_2x_3 - x_2^2x_3 - z_2t_3 + z_2^2t_3 = 0,$$

$$f_3 := x_3x_1 - x_3^2x_1 - y_3y_1 + y_3^2y_1 = 0,$$

$$f_4 := z_3y_1 - z_3^2y_1 - t_3x_1 + t_3^2x_1 = 0,$$

$$f_5 := x_2y_3 - x_2^2y_3 - z_2z_3 + z_2^2z_3 = 0,$$

其中 f_1 是从方程(2.30)、(2.31)、(2.33)、(2.34)、(2.36)、(2.37)、(2.39)和(2.40) 中得到, f_2 则是从方程(2.31)、(2.32)和(2.39)中得到, f_3 则是从方程(2.34) 和(2.35) 中得到, f_4 从方程(2.30)、(2.36)、(2.40)和(2.41)中得到, 以及 f_5 是从方程(2.33)、(2.37)和(2.38)中得到。

接下去我们将 f_i 视为关于 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_3, z_2, z_3, t_3$ 的多项式, 通过计算我们可以得到

$$\begin{aligned} g_1 &= R(f_3, f_4; x_1), \\ g_2 &= R(f_2, f_5; x_2), \\ h &= R(g_1, g_2; x_3). \end{aligned}$$

根据文献[187]附录B中的MAGMA Program 9, 多项式 h 可以被因式分解成

$$h = t_3^2 z_3^2 z_2^4 y_3^2 y_1^2 (z_3 - t_3)^2 (z_2 - 1)^4 (y_3 - z_3)^2.$$

因为 h 是从多项式 f_i 得来的, 所以其必然是零多项式。因此有 $z_2 = 1$ 或者 $z_3 = t_3$ 或者 $y_3 = z_3$ 。

如果 $z_2 = 1$, 那么有 $u_4 = 1$, 由集合 S_1 的定义, 这会和 $(u_4, v_4, w_4, 2) \in V_2$ 相矛盾。

而如果 $z_3 = t_3$, 那么由方程(2.40)和(2.41), 我们有 $z_1(z_3 - z_3^2) = t_1(z_3 - z_3^2)$ 。注意到, $z_3 - z_3^2 \neq 0$, 则 $z_1 = t_1$, 因此 $a_3 = a_4$ 。这会导致 $e(z_1, z_2, z_3, a_3) = e(t_1, t_2, t_3, a_4)$, 这显然不能成立。

如果 $y_3 = z_3$, 那么由方程(2.37)与(2.38), 我们有 $y_2 - y_2^2 = z_2 - z_2^2 \neq 0$ 。因为 $x_2 = y_2$ and $z_2 = t_2$ 我们有 $x_2 - x_2^2 = t_2 - t_2^2$ 。从

方程(2.31)和(2.32)中我们可以得到 $x_3 = t_3$ 。再把 $x_3 = t_3$ 和 $y_3 = z_3$ 代入 f_1 中，我们可以得到

$$(x_2 - z_2)(x_3 - y_3) = 0.$$

如果 $x_3 = y_3$ ，那么会导致 $z_3 = t_3$ ，这是不可能的。如果 $x_2 = z_2$ ，那么 $x_2 = t_2$ 以及 $a_1 = a_4$ ，这就会导致 $e(x_1, x_2, x_3, a_1) = e(t_1, t_2, t_3, a_4)$ 这显然也是不可能的。综上所述， \mathcal{H} 中不存在 $(1, 2, 1, 2)$ 型的Berge型4长的圈。 \square

接下去我们考虑 $(1, 2, 1, 2)$ 型Berge型3长路径的情况。对于任何给定的 $(b_1, c_1, d_1, 1) \in V_1$ 和 $(b_2, c_2, d_2, 2) \in V_2$ 中，假设存在 $(u_1, v_1, w_1, 2) \in V_2$ 、 $(u_2, v_2, w_2, 1) \in V_1$ ， $e(x_1, x_2, x_3, a_1)$ 、 $e(y_1, y_2, y_3, a_2)$ 和 $e(z_1, z_2, z_3, a_3)$ 使得 $(b_1, c_1, d_1, 1)$ 、 $e(x_1, x_2, x_3, a_1)$ 、 $(u_1, v_1, w_1, 2)$ 、 $e(y_1, y_2, y_3, a_2)$ 、 $(u_2, v_2, w_2, 1)$ 、 $e(z_1, z_2, z_3, a_3)$ 、 $(b_2, c_2, d_2, 2)$ 形成一个Berge型3长路径。那么根据 \mathcal{H} 的定义，我们有

$$b_1 = x_1, \tag{2.42}$$

$$c_1 = x_2 x_3 + a_1, \tag{2.43}$$

$$d_1 = x_2^2 x_3 + a_1, \tag{2.44}$$

$$u_1 = x_2 = y_2, \tag{2.45}$$

$$v_1 = x_3 x_1 + a_1 = y_3 y_1 + a_2, \tag{2.46}$$

$$w_1 = x_3^2 x_1 + a_1 = y_3^2 y_1 + a_2, \tag{2.47}$$

$$b_2 = z_2, \tag{2.48}$$

$$c_2 = z_3 z_1 + a_3, \tag{2.49}$$

$$d_2 = z_3^2 z_1 + a_3, \tag{2.50}$$

$$u_2 = y_1 = z_1, \quad (2.51)$$

$$v_2 = y_2y_3 + a_2 = z_2z_3 + a_3, \quad (2.52)$$

$$w_2 = y_2^2y_3 + a_2 = z_2^2z_3 + a_3. \quad (2.53)$$

那么我们可以从上述方程组中得到下列方程

$$f_1 := x_2x_3 + a_1 - c_1 = 0,$$

$$f_2 := x_2^2x_3 + a_1 - d_1 = 0,$$

$$f_3 := z_3y_1 + a_3 - c_2 = 0,$$

$$f_4 := z_3^2y_1 + a_3 - d_2 = 0,$$

$$f_5 := x_3b_1 + a_1 - y_3y_1 - a_2 = 0,$$

$$f_6 := x_3^2b_1 + a_1 - y_3^2y_1 - a_2 = 0,$$

$$f_7 := x_2y_3 + a_2 - b_2z_3 - a_3 = 0,$$

$$f_8 := x_2^2y_3 + a_2 - b_2^2z_3 - a_3 = 0,$$

其中 f_1 由方程(2.43)得到, f_2 由方程(2.44)得到, f_3 由方程(2.49)和(2.51)得到, f_4 由方程(2.50)和(2.51)得到, f_5 由方程(2.42)和(2.46)得到, f_6 由方程(2.42)和(2.47)得到, f_7 由方程(2.45)、(2.48)和(2.52)得到, f_8 则是由方程(2.45)、(2.48)和(2.53)得到。

接下去我们又需要一个简单的引理。

引理2.14.

(1) 对于 $1 \leq i \leq 2$ 以及 $1 \leq j \leq 3$, 我们有 $b_i, c_i, d_i, u_i, v_i, w_i, x_j, y_j, z_j \notin \{0, 1\}$ 。

(2) $c_1 \neq d_1, x_2 \neq b_2, c_2 \neq d_2$ 。

(3) $x_2 + b_2 \neq 1$, $x_2^2 - x_2 + c_1 - d_1 \neq 0$, $b_1 + b_2^2 \neq 0$.

证明. 以上结论均可以从 \mathcal{H} 的定义中直接推出。我么仅证明 $x_2^2 - x_2 + c_1 - d_1 \neq 0$ 。如果 $x_2^2 - x_2 + c_1 - d_1 = 0$, 那么由方程 f_1 和 f_2 , 我们有 $c_1 - d_1 = (x_2 - x_2^2)x_3$, 这这导致 $x_3 = 1$, 这是不可能的。 \square

注记2.3. 当我们考虑两个多项式的结式时, 我们可以先分解那些非零因子。

接下去我们可以将 f_i 视作关于变量 $x_2, x_3, y_1, y_3, z_3, a_1, a_2, a_3$ 的多项式, 通过计算我们可以得到如下多项式。

$$\begin{aligned} g_1 &= R(f_1, f_2; a_1), & g_2 &= R(f_5, f_6; a_1), \\ g_3 &= R(f_1, f_5; a_1), & g_4 &= R(f_3, f_4; a_3), \\ g_5 &= R(f_7, f_8; a_3), & g_6 &= R(f_3, f_7; a_3), \\ g_7 &= R(g_3, g_6; a_2), & g_8 &= R(g_1, g_2; x_3), \\ g_9 &= R(g_1, g_7; x_3), & g_{10} &= R(g_4, g_5; z_3), \\ g_{11} &= R(g_5, g_9; z_3), & g_{12} &= R(g_8, g_{10}; y_1), \\ g_{13} &= R(g_8, g_{11}; y_1). \end{aligned}$$

根据文献[187]附录B中的MAGMA Program 10, 多项式 g_{12} 和 g_{13} 可以进行如下分解:

$$g_{12} = y_3 x_2 (x_2 - 1) g_{14},$$

$$g_{13} = y_3 x_2 (x_2 - 1) g_{15}.$$

这样我们可以得到 $R(g_{14}, g_{15}; y_3) =$

$$b_1 x_2^2 (c_1 - d_1) (x_2 - 1)^2 (x_2 - b_2) (x_2 + b_2 - 1) (x_2^2 - x_2 + c_1 - d_1) g_{16},$$

其中 g_{16} 是一个关于 x_2 次数为4的多项式。

由引理2.14, 我们有 $b_1x_2^2(c_1-d_1)(x_2-1)^2(x_2-b_2)(x_2+b_2-1)(x_2^2-x_2+c_1-d_1) \neq 0$ 。又因为 g_{16} 是从 f_i 得到的, 我们有 $g_{16} = 0$ 。我们可以把 g_{16} 写成 $g_{16} = h_4x_2^4 + h_3x_2^3 + h_2x_2^2 + h_1x_2 + h_0$ 。我们可以说 h_4, h_3, h_2, h_1, h_0 不可能全为0。否则的话, 我们可以将 h_i 视为关于变量 $b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2$ 的多项式, 而后 h_0 可以进行如下分解

$$\begin{aligned} h_0 = & (-b_1c_1^2 + 2b_1c_1d_1 - b_1c_1b_2^2 + b_1c_1b_2 - b_1d_1^2 + b_1d_1b_2^2 - b_1d_1b_2 - b_2^4c_2 \\ & + b_2^4d_2 + 2b_2^3c_2 - 2b_2^3d_2 - b_2^2c_2 + b_2^2d_2) \cdot h_5. \end{aligned}$$

断言2.2. $g_{17} := -b_1c_1^2 + 2b_1c_1d_1 - b_1c_1b_2^2 + b_1c_1b_2 - b_1d_1^2 + b_1d_1b_2^2 - b_1d_1b_2 - b_2^4c_2 + b_2^4d_2 + 2b_2^3c_2 - 2b_2^3d_2 - b_2^2c_2 + b_2^2d_2 \neq 0$ 。

断言2.2的证明. 如果 $g_{17} = 0$, 那么根据文献[187]附录B中的MAGMA Program 11, 我们有

$$\begin{aligned} R(g_{17}, h_1; d_2) = & b_2^3(b_2 - 1)^3(c_1 - d_1)b_1 \cdot \\ & (b_1c_1 - b_1d_1 - c_1b_2^2 + d_1b_2 + b_2^2c_2 - b_2c_2), \\ R(g_{17}, h_1; c_2) = & b_2^4(b_2 - 1)^4(c_1 - d_1)b_1(b_1c_1^2 - 2b_1c_1d_1 + b_1d_1^2 + c_1b_2^4 \\ & - c_1b_2^3 - d_1b_2^3 + d_1b_2^2 - b_2^4d_2 + 2b_2^3d_2 - b_2^2d_2). \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & b_1c_1 - b_1d_1 - c_1b_2^2 + d_1b_2 + b_2^2c_2 - b_2c_2 = 0, \\ & b_1c_1^2 - 2b_1c_1d_1 + b_1d_1^2 + c_1b_2^4 - c_1b_2^3 - d_1b_2^3 + d_1b_2^2 \\ & - b_2^4d_2 + 2b_2^3d_2 - b_2^2d_2 = 0. \end{aligned}$$

我们令 $t_1 = b_1, t_2 = b_2, t_3 = \frac{c_1-d_1}{b_2-b_2^2}, a_4 = \frac{d_1-b_2c_1}{1-b_2}$ 。很容易验证，我们有 $(b_1, c_1, d_1, 1), (b_2, c_2, d_2, 2) \in e(t_1, t_2, t_3, a_4)$ 。这样便会存在 $(1, 2, 1, 2)$ 型的Berge型4长的圈，这会和引理2.13相矛盾。至此，该断言已证毕。 \square

通过计算我们可以得到

$$R(h_1, h_5; c_1) = b_2^6 b_1^3 (c_2 - d_2)^2 (b_2 - 1)^6 (b_1 + b_2^2)^2.$$

由引理2.14，我们有 $R(h_1, h_5; c_1) \neq 0$ ，这是不可能的。因此，我们可以得到 h_4, h_3, h_2, h_1, h_0 不可能都是0。注意到， $g_{16} = h_4 x_2^4 + h_3 x_2^3 + h_2 x_2^2 + h_1 x_2 + h_0$ ，则 x_2 最多只能有4个解。

对于任何固定的 x_2 ，我们考虑多项式 g_{15} ，它是关于 y_3 的多项式，且次数为2。我们将 g_{15} 写为 $g_{15} = \sum_{i=0}^2 l_i y_3^i$ ，其中 $l_2 = b_2 x_2^3 (x_2 - 1)(x_2 - b_2) \neq 0$ 。因此，当 x_2 给定时， y_3 最多只有2个解。如果给定 x_2 和 y_3 ，那么所有剩余的变量都是唯一确定的。因此，对于任何给定的 $(b_1, c_1, d_1, 1) \in V_1, (b_2, c_2, d_2, 2) \in V_2$ ，最多有 $4 \times 2 = 8$ 个 $(1, 2, 1, 2)$ 型的Berge型3长路径，且 $(b_1, c_1, d_1, 1), (b_2, c_2, d_2, 2)$ 是其核心顶点。

2.8.2 $(1, 2, 3, 1)$ 型Berge型3长路径：至多有108条

对于任何给定的 $(b_1, c_1, d_1, 1), (b_2, c_2, d_2, 1) \in V_1$ ，假设存在如下顶点和边 $(u_1, v_1, w_1, 2) \in V_2$ 、 $(u_2, v_2, w_2, 3) \in V_3$ 和 $e(x_1, x_2, x_3, a_1)$ 、 $e(y_1, y_2, y_3, a_2)$ 和 $e(z_1, z_2, z_3, a_3)$ ，使得 $(b_1, c_1, d_1, 1)$ 、 $e(x_1, x_2, x_3, a_1)$ 、 $(u_1, v_1, w_1, 2)$ 、 $e(y_1, y_2, y_3, a_2)$ 、 $(u_2, v_2, w_2, 3)$ 、 $e(z_1, z_2, z_3, a_3)$ 和 $(b_2, c_2, d_2, 1)$ 形成Berge型3长的路径。

那么由 \mathcal{H} 的定义，我们可以得到

$$b_1 = x_1, \tag{2.54}$$

$$c_1 = x_2x_3 + a_1, \quad (2.55)$$

$$d_1 = x_2^2x_3 + a_1, \quad (2.56)$$

$$u_1 = x_2 = y_2, \quad (2.57)$$

$$v_1 = x_3x_1 + a_1 = y_3y_1 + a_2, \quad (2.58)$$

$$w_1 = x_3^2x_1 + a_1 = y_3^2y_1 + a_2, \quad (2.59)$$

$$b_2 = z_1, \quad (2.60)$$

$$c_2 = z_2y_3 + a_3, \quad (2.61)$$

$$d_2 = z_2^2y_3 + a_3, \quad (2.62)$$

$$u_2 = y_3 = z_3, \quad (2.63)$$

$$v_2 = y_1y_2 + a_2 = z_1z_2 + a_3, \quad (2.64)$$

$$w_2 = y_1^2y_2 + a_2 = z_1^2z_2 + a_3. \quad (2.65)$$

由上我们可以得到如下方程

$$f_1 := x_2x_3 + a_1 - c_1 = 0, \quad (2.66)$$

$$f_2 := x_2^2x_3 + a_1 - d_1 = 0, \quad (2.67)$$

$$f_3 := z_2y_3 + a_3 - c_2 = 0, \quad (2.68)$$

$$f_4 := z_2^2y_3 + a_3 - d_2 = 0, \quad (2.69)$$

$$f_5 := x_3b_1 + a_1 - y_3y_1 - a_2 = 0, \quad (2.70)$$

$$f_6 := x_3^2b_1 + a_1 - y_3^2y_1 - a_2 = 0, \quad (2.71)$$

$$f_7 := y_1x_2 + a_2 - b_2z_2 - a_3 = 0, \quad (2.72)$$

$$f_8 := y_1^2x_2 + a_2 - b_2^2z_2 - a_3 = 0, \quad (2.73)$$

其中 f_1 由方程(2.55)得到, f_2 由方程(2.56)得到, f_3 由方程(2.61)得到, f_4 由方程(2.62)得到, f_5 由方程(2.54)和(2.58)得到, f_6 由方程(2.54)和(2.59)得到, f_7 由方程(2.57)、(2.60)和(2.64)得到, f_8 由方程(2.57)、(2.60)和(2.65)得到。

接下去我们需要如下简单的性质。

引理2.15.

(1) 对于 $1 \leq i \leq 2$ 和 $1 \leq j \leq 3$, $b_i, c_i, d_i, u_i, v_i, w_i, x_j, y_j, z_j \notin \{0, 1\}$ 。

(2) $c_1 \neq d_1$, $c_2 \neq d_2$, $b_1 + b_2 \neq 1$ 。

(3) $b_1^2 - 4b_1 + 1 \neq 0$, $2b_2 \neq 1$, $3b_2 \neq 1$ 。

(4) $b_2^5 - \frac{12757}{10872}b_2^4 + \frac{1123}{3624}b_2^3 + \frac{289}{1359}b_2^2 - \frac{49}{453}b_2 - \frac{2}{151} \neq 0$ 。

证明. 这些性质均可以从 \mathcal{H} 的定义直接推出, 我们这里就不赘述详细的证明了。 \square

现在我们可以把 f_i 视为关于 $x_2, x_3, y_1, y_3, z_2, a_1, a_2, a_3$ 的多项式, 通过计算我们可以得到如下多项式

$$g_1 = R(f_1, f_2; a_1), \quad g_2 = R(f_5, f_6; a_1),$$

$$g_3 = R(f_1, f_5; a_1), \quad g_4 = R(f_3, f_4; a_3),$$

$$g_5 = R(f_7, f_8; a_3), \quad g_6 = R(f_3, f_7; a_3),$$

$$g_7 = R(g_3, g_6; a_2), \quad g_8 = R(g_1, g_2; x_3),$$

$$g_9 = R(g_1, g_7; x_3), \quad g_{10} = R(g_4, g_5; z_2),$$

$$g_{11} = R(g_5, g_9; z_2), \quad g_{12} = R(g_{10}, g_{11}; y_3),$$

$$g_{13} = R(g_8, g_{11}; y_3)。$$

那么根据文献[187]附录B中的MAGMA Program 12, 多项式 g_{12} 和 g_{13} 可以被分解为

$$g_{12} = b_2 y_1 x_2 \cdot g_{14},$$

$$g_{13} = y_1 x_2^2 (x_2 - 1)^2 \cdot g_{15}.$$

通过计算我们可以得到

$$g_{16} := R(g_{14}, g_{15}; y_1) = b_2^5 (b_2 - 1)^8 x_2^9 (x_2 - 1) \cdot g_{17}^2 g_{18}, \quad (2.74)$$

其中 $g_{17} = x_2^3 + x_2^2 c_1 + x_2^2 b_2^2 - 2x_2^2 b_2 - x_2^2 c_2 - x_2^2 - x_2 d_1 - x_2 b_2^3 + 2x_2 b_2 + x_2 c_2 - b_1 c_1 + b_1 d_1 + b_2^3 - b_2^2$ 以及 g_{18} 是一个关于 x_2 次数为24的多项式。我们可以把 g_{18} 写成 $g_{18} = \sum_{i=0}^{24} h_i x_2^i$ 。我们断言 h_i ($0 \leq i \leq 24$)不可能都是0, 否则, 我们可以找出6个系数:

$$h_0 = b_2^2 (b_2 - 1)^2 (c_1 - d_1)^{10} b_1^5 \cdot k_0,$$

$$h_1 = b_2 (b_2 - 1) (c_1 - d_1)^9 b_1^5 \cdot k_1,$$

$$h_2 = (c_1 - d_1)^8 b_1^4 \cdot k_2,$$

$$h_3 = (c_1 - d_1)^7 b_1^4 \cdot k_3,$$

$$h_4 = (c_1 - d_1)^6 b_1^3 \cdot k_4,$$

$$h_{24} = (c_2 - d_2) b_2^4 (b_2 - 1)^2 \cdot k_5.$$

然后我们把 k_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)视作关于 $b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 的多项式, 我们则可以得到以下多项式

$$R(k_0, k_1; d_1) = (c_2 - d_2) b_2^2 (b_2 - 1)^2 \cdot k_6,$$

$$R(k_0, k_5; d_1) = k_7,$$

$$\begin{aligned}
 R(k_0, k_2; d_1) &= (c_2 - d_2)b_2^3(b_2 - 1)^3 b_1 \cdot k_8, \\
 R(k_0, k_3; d_1) &= (c_2 - d_2)b_2^2(b_2 - 1)^3 \cdot k_9, \\
 R(k_0, k_4; d_1) &= (c_2 - d_2)b_2^3(b_2 - 1)^3 b_1 \cdot k_{10}, \\
 R(k_6, k_7; d_2) &= (c_1 - c_2) \cdot k_{11}, \\
 R(k_6, k_8; d_2) &= (c_1 - c_2)b_1^2(b_1 - 1)^2(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 - 1) \cdot k_{12}, \\
 R(k_6, k_9; d_2) &= (c_1 - c_2)b_1^4(b_1 - 1)^3(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 - 1) \cdot k_{13}, \\
 R(k_6, k_{10}; d_2) &= (c_1 - c_2)b_1^4(b_1 - 1)^4(b_1 - b_2)(b_1 + b_2 - 1) \cdot k_{14}.
 \end{aligned}$$

断言2.3. 我们有 $b_1 \neq b_2$, $c_1 \neq c_2$ 。

断言2.3的证明. 如果 $b_1 = b_2$, 那么我们可以把其代入 k_0 来得到 k_{15} , 以及代入 k_1 来得到 k_{16} 。再将 k_{15} 和 k_{16} 分解后可以得到

$$k_{15} = b_2(b_2 - 1) \cdot k_{17},$$

$$k_{16} = b_2(b_2 - 1) \cdot k_{18}.$$

通过计算我们可以得到 $R(k_{17}, k_{18}; c_1) = (c_2 - d_2)(b_2 - \frac{1}{3})(d_1 - d_2)$, 因此 $d_1 = d_2$ 。同理, 我们可以计算得到 $c_1 = c_2$ 。这就会导致 $(b_1, c_1, d_1, 1) = (b_2, c_2, d_2, 1)$, 这显然是不可能的。

类似地, 我们可以推出 $c_1 \neq c_2$, 我们就不赘述细节了。至此我们的断言2.3已证明完毕。 \square

现在我们可以计算得到

$$\begin{aligned}
 k_{19} &= R(k_{11}, k_{12}; c_1), \\
 R(k_{12}, k_{13}; c_1) &= b_1^2(b_1 - b_2)^2(b_1^2 - 4b_1 + 1)^2 \cdot k_{20}, \\
 R(k_{12}, k_{14}; c_1) &= b_1^3(b_1 - b_2)^3(b_1^2 - 4b_1 + 1)^3 \cdot k_{21},
 \end{aligned}$$

$$k_{22} = R(k_{19}, k_{20}; b_1),$$

$$k_{23} = R(k_{19}, k_{21}; b_1),$$

其中多项式 $k_i(i = 22, 23)$ 可以被分解为

$$\begin{aligned} k_{22} &= b_2^{89}(b_2 - 1)^{20}(b_2 - \frac{2}{3})^{17}(b_2 - \frac{1}{3})^{10} \cdot \\ &(b_2^5 - \frac{12757}{10872}b_2^4 + \frac{1123}{3624}b_2^3 + \frac{289}{1359}b_2^2 - \frac{49}{453}b_2 - \frac{2}{151})^4 \cdot k_{24}, \\ k_{23} &= b_2^{91}(b_2 - 1)^{30}(b_2 - \frac{2}{3})^{26}(b_2 - \frac{1}{3})^{15} \cdot \\ &(b_2^5 - \frac{12757}{10872}b_2^4 + \frac{1123}{3624}b_2^3 + \frac{289}{1359}b_2^2 - \frac{49}{453}b_2 - \frac{2}{151})^6 \cdot k_{25}. \end{aligned}$$

从中可以看到，我们有 $R(k_{24}, k_{25}; b_2) \neq 0$ ，从而产生矛盾。因此，根据(2.74)， x_2 至多有 $24+3=27$ 个解。

现在对于任何固定的 x_2 ， g_{15} 是关于 y_1 的多项式，其次数为4。我们把 g_{15} 写成 $g_{15} = \sum_{i=0}^4 l_i y_1^i$ ，然后我们有 $l_4 = b_2(b_2 - 1)x_2^4(x_2 - 1)^2 \neq 0$ 。因此，对于 y_1 最多有4个解。而且一旦 x_2 和 y_1 给定，那么所有剩余的变量都是唯一确定的。

因此，对于任何给定的 $(b_1, c_1, d_1, 1), (b_2, c_2, d_2, 1) \in V_1$ ，最多有 $27 \times 4 = 108$ 个 $(1, 2, 3, 1)$ 型的Berge型3长路径，并且满足顶点 $(b_1, c_1, d_1, 1)$ 和顶点 $(b_2, c_2, d_2, 1)$ 是它们的核心顶点。

2.8.3 $(1, 2, 3, 2)$ 型Berge型3长路径：至多有36条

对于给定的 $(b_1, c_1, d_1, 1) \in V_1, (b_2, c_2, d_2, 2) \in V_2$ ，假设存在两个顶点 $(u_1, v_1, w_1, 2) \in V_2, (u_2, v_2, w_2, 3) \in V_3$ 以及三条边 $e(x_1, x_2, x_3, a_1)$ 、 $e(y_1, y_2, y_3, a_2)$ 和 $e(z_1, z_2, z_3, a_3)$ 使得 $(b_1, c_1, d_1, 1)、e(x_1, x_2, x_3, a_1)$ 、 $(u_1, v_1, w_1, 2)、e(y_1, y_2, y_3, a_2)$ 、 $(u_2, v_2, w_2, 3)、e(z_1, z_2, z_3, a_3)$ 和 $(b_2, c_2, d_2, 2)$ 构成一个Berge型3长路径。

根据超图 \mathcal{H} 的定义，我们有

$$b_1 = x_1, \quad (2.75)$$

$$c_1 = x_2x_3 + a_1, \quad (2.76)$$

$$d_1 = x_2^2x_3 + a_1, \quad (2.77)$$

$$u_1 = x_2 = y_2, \quad (2.78)$$

$$v_1 = x_3x_1 + a_1 = y_3y_1 + a_2, \quad (2.79)$$

$$w_1 = x_3^2x_1 + a_1 = y_3^2y_1 + a_2, \quad (2.80)$$

$$b_2 = z_2, \quad (2.81)$$

$$c_2 = z_3z_1 + a_3, \quad (2.82)$$

$$d_2 = z_3^2z_1 + a_3, \quad (2.83)$$

$$u_2 = y_3 = z_3, \quad (2.84)$$

$$v_2 = y_1y_2 + a_2 = z_1z_2 + a_3, \quad (2.85)$$

$$w_2 = y_1^2y_2 + a_2 = z_1^2z_2 + a_3. \quad (2.86)$$

由上我们可以得到如下方程

$$f_1 := x_2x_3 + a_1 - c_1 = 0,$$

$$f_2 := x_2^2x_3 + a_1 - d_1 = 0,$$

$$f_3 := y_3z_1 + a_3 - c_2 = 0,$$

$$f_4 := y_3^2z_1 + a_3 - d_2 = 0,$$

$$f_5 := x_3b_1 + a_1 - y_3y_1 - a_2 = 0,$$

$$f_6 := x_3^2b_1 + a_1 - y_3^2y_1 - a_2 = 0,$$

$$f_7 := y_1x_2 + a_2 - z_1b_2 - a_3 = 0,$$

$$f_8 := y_1^2 x_2 + a_2 - z_1^2 b_2 - a_3 = 0,$$

其中 f_1 由方程(2.76)得到, f_2 由方程(2.77)得到, f_3 由方程(2.82)和(2.84)得到, f_4 是由方程(2.83)和(2.84)得到, f_5 由方程(2.75)和(2.79)得到, f_6 由方程(2.75)和(2.80)得到, f_7 由方程(2.78)、(2.81)和(2.85)得到, f_8 由方程(2.78)、(2.81)和(2.86)得到。接下去我们需要如下简单但重要的引理。

引理2.16.

- (1) 对于 $1 \leq i \leq 2$ 以及 $1 \leq j \leq 3$, 我们有 $b_i, c_i, d_i, u_i, v_i, w_i, x_j, y_j, z_j \notin \{0, 1\}$ 。
- (2) $c_1 \neq d_1, c_2 \neq d_2, x_2 \neq b_2$ 。
- (3) $x_2^2 - x_2 + c_1 - d_1 \neq 0$ 。

证明. 我们再这里仅证明 $x_2 \neq b_2$, 其它的几项可以通过 \mathcal{H} 的定义直接得到。注意到, 如果 $x_2 = b_2$, 那么有 $y_2 = z_2$ 。根据在 v_2 和 w_2 上的方程, 我们有 $y_1 = z_1$, 那么 $a_2 = a_3$ 。这会导致 $e(y_1, y_2, y_3, a_2) = e(z_1, z_2, z_3, a_3)$, 从而产生矛盾。□

我们可以将 f_i 视作关于变量 $x_2, x_3, y_1, y_3, z_1, a_1, a_2, a_3$ 的多项式, 通过计算可以得到

$$\begin{aligned} g_1 &= R(f_1, f_2; a_1), & g_2 &= R(f_5, f_6; a_1), \\ g_3 &= R(f_1, f_5; a_1), & g_4 &= R(f_3, f_4; a_3), \\ g_5 &= R(f_7, f_8; a_3), & g_6 &= R(f_3, f_7; a_3), \\ g_7 &= R(g_3, g_6; a_2), & g_8 &= R(g_1, g_2; x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_9 &= R(g_1, g_7; x_3), & g_{10} &= R(g_4, g_5; z_1), \\ g_{11} &= R(g_4, g_9; z_1), & g_{12} &= R(g_8, g_{10}; y_1), \\ g_{13} &= R(g_8, g_{11}; y_1). \end{aligned}$$

那么根据文献[187]附录B中的MAGMA Program 13, 多项式 g_{12} 和 g_{13} 可以被分解为

$$\begin{aligned} g_{12} &= y_3^2(y_3 - 1)^2 x_2 \cdot g_{14}, \\ g_{13} &= y_3(y_3 - 1)x_2(x_2 - 1) \cdot g_{15}. \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$R(g_{14}, g_{15}; y_3) = x_2^2(x_2 - 1)^2 \cdot g_{16},$$

其中 g_{16} 是关于 x_2 的次数为18的多项式。可以将其写作 $g_{16} = \sum_{i=0}^{18} h_i x_2^i$ 。通过计算我们可以得到,

$$h_0 = (c_1 - d_1)^{10} b_1^5 (b_1 - 1) \neq 0.$$

因此关于 x_2 至多有18个解。

对于给定的 x_2 , g_{14} 是一个关于 y_3 的次数为2的多项式。于是我们可以将 g_{14} 写成 $g_{14} = \sum_{i=0}^2 l_i y_3^i$, 那么 $l_2 = x_2^2(x_2 - 1)^2 l'_2$ 。我们还可以把 l_i 视为关于 $x_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 的多项式, 根据文献[187]附录B中的MAGMA Program 14, 我们有 $R(l_0, l'_2; b_1) =$

$$(c_2 - d_2)^2 b_2 (c_1 - d_1)^2 x_2^2 (x_2 - 1)^4 (x_2 - b_2) (x_2^2 - x_2 + c_1 - d_1)^2 \neq 0.$$

因此关于 y_3 至多仅有2个解。如果 x_2 和 y_3 给定, 那么剩下的所有变量都会被唯一确定。

因此，给定 $(b_1, c_1, d_1, 1) \in V_1$ 和 $(b_2, c_2, d_2, 2) \in V_2$ ，至多有 $18 \times 2 = 36$ 种 $(1, 2, 3, 2)$ 型 Berge 型 3 长路径，满足它们的核心顶点为 $(b_1, c_1, d_1, 1)$ 和 $(b_2, c_2, d_2, 2)$ 。

2.8.4 定理2.9的证明

注意到我们构造的超图为3部超图，假设两个固定端点在同一部中，那么不失一般性地，我们可以假设 $(b_1, c_1, d_1, 1), (b_2, c_2, d_2, 1) \in V_1$ 。那么会存在两种类型的Berge型3长路径： $(1, 2, 3, 1)$ 型和 $(1, 3, 2, 1)$ 型。根据前面的讨论，这样的Berge型3长路径至多只有 $108 \times 2 = 216$ 条。

假设两个固定端点不在同一部中，那么不失一般性地，我们可以假设 $(b_1, c_1, d_1, 1) \in V_1$ 和 $(b_2, c_2, d_2, 2) \in V_2$ 。那么会存在三种类型的Berge型3长路径： $(1, 2, 1, 2)$ 型， $(1, 2, 3, 2)$ 型和 $(1, 3, 1, 2)$ 型。根据前面的讨论，这样的Berge型3长路径至多只有 $8 + 36 \times 2 = 80$ 条。

综上所述， \mathcal{H} 不会包含 $\Theta_{3,217}^B$ 。至此，我们就完整地证明了定理2.9。

§ 2.9 关于 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)})$ 下界的改进

令 \mathcal{H} 是一个 r -一致超图，其顶点数目为 v ，边数为 $e > 0$ 。直接应用概率方法[32]可以给出 $\text{ex}_r(n, \mathcal{H}) > cn^\alpha$ ，其中 $\alpha = r - \frac{vr}{e-1}$ ， c 与 n 无关。这样就给出下界 $\text{ex}_3(n, K_{2,2,7}^{(3)}) = \Omega(n^{\frac{73}{27}})$ 。在本节中，我们会证明定理2.10，成功地将指数 $\frac{73}{27}$ 改进为 $\frac{19}{7}$ 。我们的构造利用了 Norm 图的相关构造，并且我们的构造是一个确定性的构造。

首先我们需要一些铺垫性的说明。令 \mathbb{F}_q 为 q 阶的有限域， \mathbb{F}_{q^r} 为其扩域。对于 $x \in \mathbb{F}_{q^r}$ ，其 Norm 函数 $\text{Norm}_r(x)$ 可以被定义为

$$\text{Norm}_r(x) = \prod_{i=0}^{r-1} x^{q^i}.$$

则 $\text{Norm}_r(x) \in \mathbb{F}_q$ 。我们需要文献[126]中的下列结果。

引理2.17 ([126]). 如果 $(D_1, d_1), \dots, (D_s, d_s)$ 为 $\mathbb{F}_{q^{s-1}} \times \mathbb{F}_q^*$ 中不同的元素, 那么下列 s 个方程的方程组

$$\text{Norm}_{s-1}(D_i + X) = d_i x, \quad 1 \leq i \leq s$$

至多只有 $(s-1)!$ 个解 $(X, x) \in \mathbb{F}_{q^{s-1}} \times \mathbb{F}_q^*$ 。

我们还需要下列引理。

引理2.18. 令 m 为充分大的整数, $k = \lfloor \sqrt{m} \rfloor - 1$ 以及 $\ell = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 。再令

$$S_1 = \{0, 1, 2, \dots, \ell - 1\},$$

$$S_2 = \{0, k, 2k, \dots, (\ell - 1)k\},$$

$$S_3 = \{0, k + 1, 2(k + 1), \dots, (\ell - 1)(k + 1)\}$$

为 \mathbb{Z}_m 上的加性子集。那么对于 $1 \leq i \neq j \leq 3$, 我们有 $|S_i + S_j| = |S_i||S_j| = \ell^2$ 。

证明. 首先非常容易验证, $|S_1 + S_2| = \ell^2$ 。

接着, 对于给定的 $x \in \mathbb{Z}_m$, 如果 $x = i + j(k + 1)$, 其中 $0 \leq i, j \leq \ell - 1$, 那么我们有 $x = (i + j) + jk$, 那么至多只有一组解 (i, j) , 因此 $|S_1 + S_3| = \ell^2$ 。同理可证 $|S_2 + S_3| = \ell^2$ 。□

定理2.10 的证明. 令 q 为一个奇素数幂, 再令 $k = \lfloor \sqrt{q-1} \rfloor - 1$ 以及 $\ell = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 。令

$$S_1 = \{0, 1, 2, \dots, \ell - 1\},$$

$$S_2 = \{0, k, 2k, \dots, (\ell - 1)k\},$$

$$S_3 = \{0, k+1, 2(k+1), \dots, (\ell-1)(k+1)\}$$

为 \mathbb{Z}_m 的加性子集。由引理2.18, 对于 $1 \leq i \neq j \leq 3$, 我们有 $|S_i + S_j| = |S_i||S_j| = \ell^2$ 。

令 g 为 \mathbb{F}_q 中的本原元, 对于 $1 \leq i \leq 3$, 令集合 $B_i = \{g^j : j \in S_i\}$ 。令超图 \mathcal{G} 为3一致超图, 其点集为 $A_i = \mathbb{F}_{q^3} \times B_i$, 其中 $i = 1, 2, 3$ 。对于 $i = 1, 2, 3$, 3个顶点 $(D_i, d_i) \in A_i$ 形成一条超边的条件为 $\text{Norm}_3(D_1 + D_2 + D_3) = d_1 d_2 d_3$ 。

容易验证的是, \mathcal{G} 有 $n := 3\ell q^3 = \frac{3}{2}q^{\frac{7}{2}} + o(q^{\frac{7}{2}})$ 个顶点, 以及至少 $\frac{(\ell q^3)^3}{q} \geq \frac{1}{27}n^{\frac{19}{7}} + o(n^{\frac{19}{7}})$ 条边。

接下去我们需要证明 \mathcal{G} 不包含 $K_{2,2,7}^{(3)}$ 作为子图。反之, 如果 \mathcal{G} 中存在一个 $K_{2,2,7}^{(3)}$, 不失一般性地, 我们可以假设 $(D_i, d_i) \in A_1$, $(E_j, e_j) \in A_2$, $(X_k, x_k) \in A_3$ 构成一个 $K_{2,2,7}^{(3)}$, 其中 $i, j \in [2]$, $k \in [7]$ 。我们令 $T_{ij} := D_i + E_j$, 再令 $t_{ij} = d_i e_j$, 那么对于 $i, j \in [2]$ 与 $k \in [7]$, 我们有

$$\text{Norm}_3(T_{ij} + X_k) = t_{ij} x_k.$$

这意味着对于 $i, j \in [2]$, 方程组

$$\text{Norm}_3(T_{ij} + X) = t_{ij} x$$

有至少7个解 (X, x) 。

由 B_i 的定义, 我们有 $|\{t_{ij} : i, j \in [2]\}| = 4$ 。因此对于 $i, j \in [2]$, 我们可知 (T_{ij}, t_{ij}) 是各不相同的元素。由引理2.17, 至多只有 $(4-1)! = 6$ 个解, 与前面讨论得出的至少有7个解的结论矛盾。从而我们证明了 \mathcal{G} 不包含 $K_{2,2,7}^{(3)}$ 作为子图。至此, 定理2.10得证。 \square

注记2.4. 我们相信指数 $\frac{19}{7}$ 应该还有改进的空间，因此我们并没有努力尝试优化我们结果中的主项的系数 $\frac{1}{27}$ 。

§ 2.10 加法函数诱导的带权Turán问题

我们首先将介绍一些关于加法函数诱导的带权Turán问题的基本概念和问题。

令 $w : V(K_n) \rightarrow [0, \infty)$ 为顶点权重函数，边权重 $w_+ : E(K_n) \rightarrow [0, \infty)$ 是由加法函数 $w_+(uv) = w(u) + w(v)$ 给出。在这一部分中，我们总是假设顶点权重是不同的，并且是有界的。对于给定的图 H ，我们将加法函数诱导下关于 H 的Turán数定义为

$$\text{ex}(n, w_+, H) := \max\{w_+(G) \mid G \subseteq K_n, G \text{不包含 } H \text{ 作为子图}\},$$

其中 $w_+(G) := \sum_{e \in E(G)} w_+(e)$ 。我们称 F 是关于 H 的极图，如果满足

$$w_+(F) = \max\{w_+(G) \mid G \subseteq K_n, G \text{不包含 } H \text{ 作为子图}\}.$$

另外，下列性质是很容易得到的：

$$w_+(G) = \sum_{i=1}^n d_G(v_i)w(v_i),$$

其中 $d_G(v_i)$ 为点 v_i 在图 G 中的度数。利用这个公式，我们得到以下关于极图中顶点度分布的命题。

命题2.2. 对于给定的 H ，假设 F 是关于 H 的极图，对于顶点 $u, v \in V(F)$ ，如果 $w(u) > w(v)$ ，那么我们有 $d(u) \geq d(v)$ 。

证明. 假设存在两个顶点 $u, v \in V(F)$ 满足 $w(u) > w(v)$ 但是 $d(u) < d(v)$ 。首先我们可以交换顶点 u 和顶点 v 的权重，从而得到一个新图 F' 。更严

谨地说，我们可以删除所有原本与 u 与 v 关联的边，并添加 $\{ux : x \in N_F(v)\}$ 和 $\{vy : y \in N_F(u)\}$ 到 $E(F')$ 中。此外，如果 uv 本身是 F 中的一条边，我们将在 F' 中保留 uv 。注意到，此操作不会更改 F 的结构。由于

$$w(u)d(v) + w(v)d(u) > w(u)d(u) + w(v)d(v),$$

就会有 $w_+(F') > w_+(F)$ ，这与 F 是关于 H 的极图的假设相矛盾。 \square

命题2.2表明，如果我们想最大化 $w_+(G)$ ，权重较大的顶点应该与更多的顶点相邻。接下去我们将开始证明我们关于这个问题的两方面结果。

§ 2.11 基于加法函数诱导下禁止完全子图的极图

2.11.1 禁止三角形 K_3 的情况

我们首先考虑禁止三角形 K_3 的情况，即考虑极值 $\text{ex}(n, w_+, K_3)$ 。我们会先证明如下引理。

引理2.19. $\text{ex}(n, w_+, K_3) =$

$$\max_{1 \leq r \leq n-1} \left\{ (n-r) \sum_{i=1}^r w(v_i) + r \sum_{j=r+1}^n w(v_j) \right\},$$

其中 $w(v_1) > w(v_2) > \dots > w(v_n)$ 。

在这里，我们证明了一个相对更强的结果，即如果所有顶点权重都是不同的并且严格为正，那么任何无三角形的极图都必须完全二部图。注意到，引理 2.19 可由下列命题立即得证。

命题2.3. 如果 F 是关于三角形 K_3 的极图，那么 F 是一个完全二部图。

证明. 假设 F 是关于三角形 K_3 的极图，但 F 不是完全二部图，不失一般性地可以假设 $w(v_1) > w(v_2) > \dots > w(v_n)$ 。令 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为

F 中顶点的度数序列。由命题2.2, 我们有 $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$ 。那么我们可以构造一个新的完全二部图 $F' = L \cup R$, 其中 R 是 v_1 的邻点集合, 即 $|L| = n - d(v_1)$, $|R| = d(v_1)$ 。那么我们有

$$w_+(F') = d(v_1) \sum_{v_i \in L} w(v_i) + (n - d(v_1)) \sum_{v_i \in R} w(v_i),$$

以及

$$w_+(F') - w_+(F) = \sum_{v_i \in L} (d(v_1) - d(v_i)) w(v_i) + \sum_{v_i \in R} (n - d(v_1) - d(v_i)) w(v_i).$$

观察到 R 中的每个顶点 u_1 都不能与 R 中任何其他的顶点 u_2 相邻, 否则的话, $\{u_1, u_2, v_1\}$ 会形成一个三角形。这个观察告诉我们, 如果 $v_i \in R$, 那么 $d(v_i) \leq n - d(v_1)$ 。通过上面的分析, 由于所有顶点权重都是严格正的并且 F 不是二部图, 我们得到 $w_+(F') - w_+(F) > 0$, 这会与 F 是关于三角形 K_3 的极图的假设相矛盾。事实上, 如果对于 $v_i \in L$ 都有 $d(v_i) = d(v_1)$ 以及对于 $v_i \in R$, $d(v_i) = n - d(v_1)$, 那么 F 是完全二部图或者 F 会包含三角形。因此, 如果 F 是关于 K_3 的极图, 那么 F 必然是完全二部图, 证明完毕。 \square

注记2.5. 在命题2.3的证明中, 我们只是构造了一个新图 F' , 使得 F' 中的每个顶点的度数都大于或等于 F 中的度数。要注意的是, F' 不必是极图。由命题2.2, 我们知道, 要构造一个极图 $F = L \cup R$, 我们应该把顶点 v_1, v_2, \dots, v_r 放到 L , 并将剩余的顶点放入 R , 其中 r 的值取决于顶点权重函数。

2.11.2 禁止完全子图 K_ℓ 的情况

在上一小节中, 我们证明了基于加法函数, 如果所有顶点权重都严格为正且不同, 则任何无三角形的极图都是完全二部图。很自然地要问

在禁止一般完全子图 K_ℓ 时是否有类似的结果，其中 K_ℓ 是 ℓ 个顶点的完全子图，我们接下去要给这个自然的问题一个肯定的答复。首先我们证明如下引理。

引理2.20. 如果 G 是关于 K_ℓ 的极图，那么 G 一定是一个完全 $(\ell - 1)$ 部图。

证明. 在命题2.3的证明中，我们证明了如果 F 不包含三角形作为子图，那么我们可以构造一个完全二部图 F' 使得 $w_+(F') \geq w_+(F)$ ，如果 F 也是一个完全二分图，则等式可以成立。接下来，我们将通过对 ℓ 归纳证明不包含 K_ℓ 的图也有类似结果。更准确地说，我们将证明如果 G 不包含 K_ℓ ，那么我们可以构造一个完全 $(\ell - 1)$ 部图 \tilde{G} 使得 $w_+(\tilde{G}) \geq w_+(G)$ ，如果 G 也是一个完全 $(\ell - 1)$ 部图，则等式可以成立。

假设上述结论对 $\ell - 1$ 成立，那么我们考虑不包含 K_ℓ 的极图 G 的情况。为方便起见，我们将 $d_i := d(v_i)$ 表示为 v_i 在 G 中的度数。不失一般性，我们假设 $w(v_1) > w(v_2) > \dots > w(v_n)$ 。根据命题2.2，我们有 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ 。令 $N(v_1)$ 为 v_1 在 G 中的邻点集合， $G[N(v_1)]$ 为 G 中由 $N(v_1)$ 诱导的子图。那么 $|N(v_1)| = d_1$ ，并且 $G[N(v_1)]$ 是不包含 $K_{\ell-1}$ 的，否则会推出 G 中包含 K_ℓ 。所以通过归纳假设，存在一个完全 $(\ell - 2)$ 部图 M ，其顶点集为 $N(v_1)$ ，使得 $w_+(M) \geq w_+(G[N(v_1)])$ ，而且只有当 $G[N(v_1)]$ 是一个完全 $(\ell - 2)$ 部图时等号才成立。然后我们可以构造一个新图 $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ ，其边集由以下两部分组成：

$$\tilde{E} = \{uv \mid v \in V \setminus N(v_1), u \in N(v_1)\} \cup E(M).$$

我们可以得到

$$w_+(\tilde{G}) = \sum_{v_i \in V(G) \setminus N(v_1)} d_1 w(v_i) + w_+(M) + \sum_{v_i \in N(v_1)} (n - d_1) w(v_i).$$

这样一来，我们可以把 $w_+(\tilde{G}) - w_+(G)$ 写成 $w_+(\tilde{G}) - w_+(G) =$

$$\begin{aligned} & \sum_{v_i \in V(G) \setminus N(v_1)} (d_1 - d_i)w(v_i) + (w_+(M) - w_+(G[N(v_1)])) \\ & + \sum_{v_i \in N(v_1)} (n - d_1 - |N_{G \setminus N(v_1)}(v_i)|)w(v_i). \end{aligned}$$

如我们所知，对于 $v_i \in V(G) \setminus N(v_1)$ ，我们 $d_1 \geq d_i$ ，以及 $w_+(M) \geq w_+(G[N(v_1)])$ ，还有 $|N_{G \setminus N(v_1)}(v_i)| \leq n - d_1$ ，所以我们可得 $w_+(\tilde{G}) \geq w_+(G)$ 。另外，也很容易看到如果 $w_+(\tilde{G}) = w_+(G)$ ，那么 G 也是一个完全 $(\ell - 1)$ 部图。至此，该引理已证明完毕。 \square

注意到，上面证明里的 \tilde{G} 也不一定是极值图，如何将 n 个顶点划分为 $\ell - 1$ 个部分取决于顶点权重函数。利用引理 2.20，我们断言如果所有顶点权重都是严格正的，并且各不相同话，那么关于 K_ℓ 的任何极图都必须是完全 $(\ell - 1)$ 部图。因此，我们可以立即获得我们的主要结果，如下所示。

定理 2.13. $\text{ex}(n, w_+, K_\ell) =$

$$\max_{\mathcal{P}} \sum_{P \in \mathcal{P}} (n - |P|)w(P),$$

其中分划 \mathcal{P} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\ell - 1$ 部的所有可能情况，另外， $|P|$ 是 P 中顶点的个数，以及 $w(P) := \sum_{v \in P} w(v)$ 。

接下去我们将我们的结果与 [15] 中的类似结果进行比较。我们令 $w : V(K_n) \rightarrow [0, \infty)$ 为顶点权重函数，乘法函数下的边权重为 $w_\pi : E(K_n) \rightarrow [0, \infty)$ 由 $w_\pi(uv) = w(u) \cdot w(v)$ 给出。他们证明了在乘法函数下，不包含 K_ℓ 的极图必须是完全 $(\ell - 1)$ 部图。

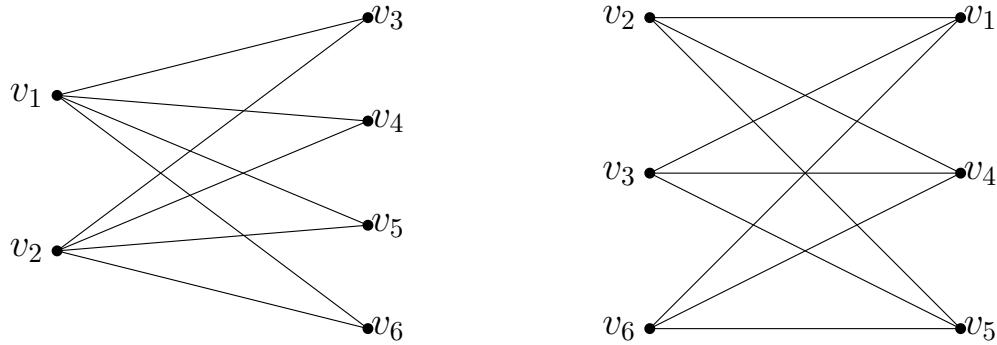
命题2.4. [15] $\text{ex}(n, w_\pi, K_\ell) =$

$$\max_{\mathcal{P}} \sum_{\substack{P, P' \in \mathcal{P} \\ P \neq P'}} w(P)w(P'),$$

其中分划 \mathcal{P} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\ell - 1$ 部的所有可能情况, 以及 $w(P) := \sum_{v \in P} w(v)$ 。

看起来两种情况的结果是一样的, 即关于 K_ℓ 的极图都是完全 $(\ell - 1)$ 部图。很自然地要问这两种极图的结构是否完全相同。下面我们展示一个简单的例子, 并对这个问题给出否定的答案。

例2.2. 令顶点的权重 $w(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = (41, 33, 29, 13, 11, 7)$ 。那么基于两种不同函数下, 不包含三角形的极图结构可见下图。



注记2.6. 在加法函数的情况下, 命题2.2告诉我们权重较大的顶点应该与更多的顶点相邻。如图所示, 权重较大的顶点放在左侧, 其中包含的顶点少于右侧。而在乘法函数的情况下, 对于给定的顶点权重函数, 所有顶点的权重之和是固定的, 然后通过柯西-施瓦茨不等式, 最优的策略是最小化每个部分之间的权重差异。在例2.2中, 6个顶点的总权重为134, 差的最小值为4, 则我们得到如图所示的极图结构。

§ 2.12 带权图版本的Erdős-Stone-Simonovits定理

在定理2.13中, 我们考虑了在没有给定大小的完全子图 K_ℓ 的情况下, 确定极图结构的问题。我们已经证明, 对于给定的顶点权重函数, 如果所有顶点权重都是不同的且严格为正, 则关于 K_ℓ 的任何极图都必须是完全 $(\ell - 1)$ 部图。现在我们将把该结果推广到禁止任意子图上来, 我们的结

果可以看作是经典的Erdős-Stone-Simonovits定理的带权图版本推广。

我们首先回顾经典的Erdős-Stone-Simonovits定理, 我们令 $\chi(H)$ 为图 H 的染色数, 即对图 H 正常点染色所需的最少染色数。

定理2.14 (Erdős-Stone-Simonovits定理). 固定一个图 H , 当 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \binom{n}{2}.$$

在我们的加法函数诱导的带权Turán问题中, 如果所有的顶点权重均是严格正的, 并且是有界的, 那么我们可以得到 $\text{ex}(n, w_+, H)$ 的渐近结果如下。

定理2.15. 对于给定的图 H , 令 $w : V(K_n) \rightarrow [0, S]$ 为顶点的权重函数, 其中 S 为一个正常数。那么当 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\text{ex}(n, w_+, H) = \max_{\mathcal{R}} \sum_{P \in \mathcal{R}} (n - |P|)w(P) + o(n^2),$$

其中分划 \mathcal{R} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\chi(H) - 1$ 部的所有可能情况。

证明定理2.15之前, 我们需要介绍我们将会用到的Szemerédi正则引理。

引理2.21 (Szemerédi正则引理). 对于任何 $m, \epsilon > 0$, 都会存在一个整数 M 使得下列性质成立。如果图 G 有 $n \geq m$ 个点, 那么存在一个整数 k 满

足 $m \leq k \leq M$, 以及一个分划 \mathcal{P} 将 $V(G)$ 分划为 $k+1$ 部, 即 V_0, V_1, \dots, V_k , 满足对于 $1 \leq i < j \leq k$, 有 $|V_i| = |V_j|$, 而 $|V_0| < \epsilon n$ 。那么几乎所有 $0 \leq i < j \leq k$ 的点对 (V_i, V_j) (额外情况总数不超过 ϵk^2 个点对), 都满足对于每个子集 $A \subseteq V_i$ 和子集 $B \subseteq V_j$, 其中 $|A| \geq \epsilon |V_i|$, $|B| \geq \epsilon |V_j|$, 我们都有,

$$\left| \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|} - \frac{e(V_i, V_j)}{|V_i| \cdot |V_j|} \right| < \epsilon,$$

其中 $e(A, B)$ 为一个顶点在 A 中, 另一个顶点在 B 中的边的数目。

令 X 和 Y 为 V 中不相交的子集, 我们定义关于点对 (X, Y) 的密度为

$$d(X, Y) := \frac{e(X, Y)}{|X| \cdot |Y|},$$

另外我们称一对点集 X 和 Y 是 ϵ -正则的, 如果对于所有满足 $|A| \geq \epsilon |X|$, $|B| \geq \epsilon |Y|$ 的子集 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$, 我们都有

$$\left| \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|} - \frac{e(V_i, V_j)}{|V_i| \cdot |V_j|} \right| = |d(X, Y) - d(A, B)| \leq \epsilon.$$

我们成一个将 V 分成 $k+1$ 个集合 (V_0, V_1, \dots, V_k) 的分划为 ϵ -正则的分划, 如果满足

1. $|V_0| < \epsilon n$, 并且对于所有 $1 \leq i < j \leq k$, 我们都有 $|V_i| = |V_j|$ 。
2. 除了至多 ϵk^2 个点对, 其它所有 $1 \leq i < j \leq k$ 的点对 V_i, V_j 都是 ϵ -正则的。

现在我们介绍Szemerédi正则引理的一个应用, 该应用在[127]中提出, 也出现在经典的图论教科书[53]中。令 G 有 ϵ -正则分划 $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$, V_0 为异常集合, $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k| = \ell$ 。给定 $d \in [0, 1]$, 令 R 是定义在 $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ 上的图, 其中两个顶点 V_i 和 V_j 在 R 中连边当且仅

当它们在 G 中形成密度至少为 d 的 ϵ -正则点对。我们将 R 称为 G 关于参数为 ϵ 、 ℓ 和 d 的正则化图。给定 $s \in \mathbb{N}$, 将 R 的每个顶点 V_i 替换为 s 个顶点的集合 V_i^s , 并将每条边替换为对应的 s 元集合之间的完全二部图, 最终得到的图将用 R_s 表示, 我们通常称 R_s 为 R 的 s -膨胀图。下面的引理告诉我们 R_s 的子图在某些条件下也可以在 G 中找到。

引理2.22. [53] 对于所有 $d \in (0, 1]$ 和 $\Delta \geq 1$, 都会存在 $\epsilon_0 > 0$ 满足如下性质: 如果对任何图 G, H 是一个最大度 $\Delta(H) \leq \Delta$ 的图, $s \in \mathbb{N}$, 以及 R 是关于 G 的参数为 $\epsilon \leq \epsilon_0$ 、 $\ell \geq \frac{2s}{d^\Delta}$ 的正则化图。则有

$$H \subseteq R_s \Rightarrow H \subseteq G.$$

有了这些工具在手, 接下去我们就可以开始证明定理2.15了。

定理2.15的证明. 假设 n 充分大, 那么对于任意实数 $t > 0$, 我们令 $\epsilon = \frac{t}{9T}$, 其中

$$T = \max_{e \in E(K_n)} w_+(e).$$

假设 G 是 K_n 的子图并且 G 不包含 H 。我们关于 G 和 ϵ 应用Szemerédi正则引理, 其中 $m \geq \frac{1}{\epsilon}$ 。我们会得到一个 ϵ -分划: $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$, 其中 $|V_0| < \epsilon n$ 并且 $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k| = \ell$ 。则令 R 为 G 的正则化图, 即 $|V(R)| = k$, 且对于每 $1 \leq i < j \leq k$, V_i 和 V_j 在 R 中连边当且仅当 V_i 和 V_j 在 G 中是 ϵ -正则的并且边密度至少为 10ϵ 。我们现在定义一个函数 $f : V(R) \rightarrow [0, \infty)$ 使得 $f(V_i) = \frac{\sum_{v \in V_i} w(v)}{|V_i|}$ 。令 F 为基于点集 $V(R)$ 的完全图, $|V(F)| = k$, 它的顶点权重与 R 相同。

由于 H 是具有染色数 $\chi(H)$, 且 $\Delta(H) \leq \Delta$ 的有限图, 那么 H 是某个完全 $\chi(H)$ 部图的子图。我们知道 R 是参数为 ϵ 的正则化图。接下来我们

断言 R 是不包含 $K_{\chi(H)}$ 的，否则会存在常数 s ，使得 $H \subseteq R_s$ 。很容易检验 $\ell = \frac{n-|V_0|}{k} > \frac{2s}{(10\epsilon)^\Delta}$ ，这是由于 n 足够大。因此，由引理2.22得到 $H \subseteq G$ ，这与 G 不包含 H 相矛盾。然后根据定理2.13中关于不包含 K_ℓ 的极图的结果，我们有

$$\sum_{e \in E(R)} w_+(e) \leq \max_{\mathcal{P}} \sum_{P \in \mathcal{P}} (k - |P|) f(P),$$

其中分划 \mathcal{P} 会跑遍将 $V(F)$ 分划成 $\chi(H) - 1$ 部的所有可能情况。我们令 \hat{G} 为 R 的 $|V_i|$ -膨胀图，具体地说，我们通过将 R 的每个顶点替换为 $|V_i|$ 个顶点的独立集来构造 \hat{G} ，并且每条在对应的独立集之间的边被替换为完全二部图。 \hat{G} 与 G 具有相同的顶点权重，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(\hat{G})} w_+(e) &= |V_i|^2 \max_{\mathcal{P}} \sum_{P \in \mathcal{P}} (k - |P|) f(P) \\ &\leq \max_{\mathcal{P}} \sum_{P \in \mathcal{P}} (n - |P| \cdot |V_i|) \sum_{V_i \in P} w(V_i) \\ &\leq \max_{\mathcal{R}} \sum_{P \in \mathcal{R}} (n - |P|) w(P), \end{aligned}$$

其中分划 \mathcal{R} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\chi(H) - 1$ 部的所有可能情况。那么显然我们有

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum_{e \in E'} w_+(e) \leq \sum_{e \in E(\hat{G})} w_+(e),$$

其中 $E' \subseteq E(G)$ 包含了所有 G 中满足边密度至少为 10ϵ 的 ϵ -正则对 (V_i, V_j) 之间的所有边，这里 $1 \leq i, j \leq k$ 。

通过上述分析，我们可以将所有落在边集 $E(G)$ 、但是不落在 $E(\hat{G})$ 的边进行分类如下：

1. 边 $(x, y) \in V_i \times V_j$ ，其中 (V_i, V_j) ($1 \leq i, j \leq k$) 不是 ϵ -正则的。

2. 边 $(x, y) \in V_i \times V_j$, 其中 (V_i, V_j) 之间的边密度小于 10ϵ 。
3. 边 $(x, y) \in V_i \times V_i$, 其中 $0 \leq i \leq k$ 。
4. 边 $(x, y) \in V_0 \times V_i$, 其中 $1 \leq i \leq k$ 。

因为 T 是最大的边权重数, 因此我们可以估计落在边集 $E(G)$ 、但是不落在 $E(\hat{G})$ 的边的总权重

$$\sum_{e \in E(G) \setminus E(\hat{G})} w_+(e) < \left[\epsilon k^2 \left(\frac{n}{k} \right)^2 + 10\epsilon \binom{k}{2} \left(\frac{n}{k} \right)^2 + k \left(\frac{n}{k} \right)^2 + \binom{\epsilon n}{2} + \epsilon n \left(\frac{n}{k} \right) k \right] T < tn^2.$$

通过上述分析, 我们有

$$\sum_{e \in E(G)} w_+(e) \leq \max_{\mathcal{R}} \sum_{P \in \mathcal{R}} (n - |P|)w(P) + tn^2.$$

因为 t 是可以任意取的, 至此, 定理2.15已证明完毕。 \square

对于Bennett、English和Talanda-Fisher在文献[15]中介绍的基于乘法函数诱导权重的Turán问题, 通过命题2.4和定理2.15的证明, 我们也可以得到如下的推广, 我们在这里不再赘述其具体的证明。

定理2.16. 对于给定的图 H , 我们令 $w : V(K_n) \rightarrow [0, S]$ 为顶点权重函数, 其中 S 为一个正常数。当 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\text{ex}(n, w_\pi, H) = \max_{\mathcal{R}} \sum_{\substack{P, P' \in \mathcal{R} \\ P \neq P'}} w(P')w(P) + o(n^2),$$

其中分划 \mathcal{R} 会跑遍将 $V(K_n)$ 分划成 $\chi(H) - 1$ 部的所有可能情况, 以及 $w(P) = \sum_{v \in P} w(v)$ 。

§ 2.13 总结与展望

在本章中，我们研究了若干重要且有趣的Turán型问题，在这里我们将对一些结果做一个简单的总结，并且对未来的研究方向和问题做一些展望。首先，我们研究了完全二部图所对应的超图Turán问题的两个扩展。第一个对象是完全二部 r -一致超图。文献[148]中的作者介绍了这种结构，并给出了 $\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)})$ 的一些一般理论界。他们还提出了关于3-一致超图的猜想。在这里我们将他们的猜想推广到一般的 $r \geq 3$ 。

猜想2.1. 令 s, t 为满足 $2 \leq s \leq t$ 的正整数，那么有

$$\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Theta(n^{r-\frac{2}{s}})。$$

虽然我们仍然无法验证这个猜想，但有一些证据可以支持这个猜想。比如说，Ergemlidze、Jiang和Methuku在文献[69]中证明 $\text{ex}_4(n, K_{2,t}^{(4)}) \geq (1+o(1))\frac{t-1}{8}n^3$ 。但出人意料的是，近日，Bradač、Gishboliner、Janzer和Sudakov在文献[30]中证明了，我们的猜想2.1在 $r \geq 3$ 为偶数的情况下是不正确的。

此外，在文献[148]中，作者指出他们的结果可以同时适用于 $t \geq s$ 和 $s > t$ ，因此为简单起见，他们仅考虑了 $t \geq s$ 的。然而，当 s 远大于 t 时，令我们惊讶的是，我们通过随机代数构造获得了 $\text{ex}_r(n, K_{s,t}^{(r)}) = \Omega(n^{r-\frac{1}{t}})$ 。同时，我们还获得了当 \mathcal{T} 是一条边或 r -一致超图 $K_{1,b}^{(r)}$, $b < t$ 时，广义Turán数 $\text{ex}_r(n, \mathcal{T}, K_{s,t}^{(r)})$ 紧的渐近阶。寻找更多与我们给出的下界所匹配的例子会是很有趣的问题。

利用随机多重超图构造的方法，我们确定了关于完全 r 部 r -一致超图和完全二部 r -一致超图的Turán数对于某个大常数的依赖性。特别地，我

们的结果可以推出完全二部图的结果，这意味着源自于1954年的Kövári-Sós-Turán定理中，对于大常数 t 的渐近结果是紧的。

但是，我们无法确定关于Berge型theta超图类似的结果，即当 t 很大时，是否有 $\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B) = \Theta_{\ell,r}(t^{r-1-\frac{1}{\ell}}n^{1+\frac{1}{\ell}})$ ？我们坚信这个结果是对的，这也是有例子支撑的，例如，Gerbner、Methuku和Vizer在文献[85]中的结果确定了 $\text{ex}_3(n, \Theta_{2,t}^B) = (1 + o(1))\frac{1}{6}(t - 1)^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}$ 。此外，对于一些相对较小的 ℓ 和 t ，确定 $\text{ex}_r(n, \Theta_{\ell,t}^B)$ 也会很有趣。

我们通过确定性代数构造，给出了关于 $K'_{3,25}$ 的Turán数和 $\Theta_{3,217}^B$ 的线性Turán数的紧的渐近结果。我们的主要深刻地利用了多项式结式。当然，我们相信这里的参数25和217仍然有改进的空间。以及正如我们在§ 2.6中提到的，多项式结式可以解决一些人工计算难以处理的情况。我们相信多项式结式可以用来构造更多的极图，找到更多这样的例子会很有趣。

最后，我们考虑由Bennett、English和Talanda-Fisher在文献[15]中介绍的顶点诱导带权Turán问题。我们的贡献主要集中在基于加法函数的带权Turán问题上。我们首先描述了在加法函数下不包含 K_ℓ 的极图结构，并指出了与之前乘法函数下极图的异同。基于完全图的结果，我们进一步给出了两种顶点诱导权重函数下带权图版本的Erdős-Stone-Simonovits定理的推广。在未来的研究中，我们希望找到更多可以利用这些结果的应用。

Chapter 3 正常边着色下染色同构子图问题

§ 3.1 简介

近年来，在正常边着色的完全图中寻找彩虹结构的问题得到了广泛的研究。例如，在Montgomery、Pokrovskiy和Sudakov最近的一项突破性工作[146]中，他们证明了著名的Ringel猜想，该猜想其中一个描述涉及在特定的正常边着色后的 K_{2n+1} 中找到任何具有 n 条边的彩虹树结构。还有很多关于在正常边着色中寻找较大结构的论文，可见文献[56, 144, 145, 156]。最近，Conlon和Tyomkyn[49]研究了一类新的极值图论问题，该问题旨在正常边着色的完全图中找到某些给定图的两个或多个顶点不相交的染色同构子图。

对于 $k, n \geq 2$ 和一个给定的图 H ，我们定义 $f_k(n, H)$ 为最小整数 c ，使得存在 K_n 的 c 种颜色正常边着色方案，满足着色后的 K_n 不包含 k 个顶点不相交染色同构的子图副本 H 。自然地，我们需要考虑以下问题。

问题3.1. 给定正整数 $k \geq 2$ 和一个图 H ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，确定 $f_k(n, H)$ 的值。

在文献[49]中，Conlon和Tyomkyn系统地研究了这个问题。他们首先对 $f_k(n, H)$ 的性质进行了许多有用的观察。例如， $f_k(n, H)$ 关于 n 单调递增，但会关于 k 单调递减。此外， $f_k(n, H)$ 在对图 H 取子图的意义

上是单调递减的，严格地说，当 H' 是 H 的子图时，我们有 $f_k(n, H) \leq f_k(n, H')$ 。此外，由于 K_n 的每个正常边着色至少使用 $n - 1$ 颜色，因此 $n - 1 \leq f_k(n, H) \leq \binom{n}{2}$ 。使用Lovász局部引理和Bukh的随机代数方法[33]，他们证明了以下结果。

定理3.1 ([49]). (i) 对于任何 v 个点， e 条边的给定图 H ，有

$$f_k(n, H) = O(\max\{n, n^{\frac{kv-2}{(k-1)e}}\})。$$

(ii) 对于任何包含偶圈作为子图的图 H ，都存在正整数 $k = k(H)$ 满足

$$f_k(n, H) = \Theta(n)。$$

Conlon和Tyomkyn还建议当 H 为偶圈时研究 $f_k(n, H)$ 。注意到，定理3.1蕴含着以下两个关于偶圈 C_4 的结果，第一个是 $f_k(n, C_4) = O(n^{\frac{2k-1}{2k-2}})$ ，第二个是，存在一个整数 k 使得 $f_k(n, C_4) = \Theta(n)$ 。由于Lang-Weil定理[129]，随机代数方法得到的常数 k 会非常大，因此他们提了如下公开问题，当 $H = C_4$ 时，是否有 $f_2(n, C_4) = \Theta(n)$ ？

我们在本节中的第一个结果是关于 $f_k(n, C_4)$ 。我们尝试估计最小整数 k ，使得 $f_k(n, C_4) = \Theta(n)$ ，我们通过确定性代数构造给出以下结果。

定理3.2. $f_3(n, C_4) = \Theta(n)$ 。

这个结果改进了由定理3.1获得的上界 $O(n^{\frac{5}{4}})$ ，同时，我们的结果也许提供了些许能够 $f_2(n, C_4) = \Theta(n)$ 的证据。Conlon和Tyomkyn[49]也证明了 $f_2(n, C_6) = \Omega(n^{\frac{4}{3}})$ 。最近，Janzer[111]开发了一种新方法来寻找给定长度的偶圈，作为其中一项结果，他们证明了更为一般的下界结果。

定理3.3 ([111]). 令 $k, \ell \geq 2$ 为给定的正整数，则有

$$f_k(n, C_{2\ell}) = \Omega(n^{\frac{k}{k-1} \cdot \frac{\ell-1}{\ell}})。$$

定理3.1给出了如果 $e(H) \geq 2v(H)-2$, 则 $f_2(n, H) = \Theta(n)$ 。Conlon和 Tyomkyn在文献[49]中提出了一个公开问题, 关于 $e(H) \geq 2v(H)-2$ 这个条件是否是紧的。为了回答他们的问题, 我们研究了函数 $f_2(n, H_t)$, 其中 H_t 是完全图 K_t 的1次剖分图。我们证明 $f_2(n, H_t) = \Omega(n^{1+\frac{1}{2t-3}})$, 这个结果意味着当 $t \geq 3$ 时, $e(H) \geq 2v(H)-2t$ 不能给出 $f_2(n, H) = \Theta(n)$ 。这个结果完整地回答了 Conlon和 Tyomkyn提出的公开问题, 并且事实上, 我们证明了更强的结论。

定理3.4. 令 $t \geq 3$ 为固定的正整数, 则有

$$f_2(n, H_t) = \Omega(n^{1+\frac{1}{2t-3}})。$$

定理3.4表明 $f_2(n, H_t)$ 随 n 呈超线性增长。因为 $e(H_t) = 2v(H_t)-2t$ 以及 $v(H_t) = \frac{t(t+1)}{2}$, 我们的结果表明, 当 t 趋于无穷大时, $e(H) \geq (2-o(1))v(H)$ 并不一定能够推出 $f_2(n, H) = \Theta(n)$ 。

§ 3.2 关于染色同构偶圈 C_4 的新结果

在本节中, 我们将证明定理3.2。我们的证明会基于以下思路。我们首先选择一个域 \mathcal{K} , 并构造一个映射 $\pi : V \rightarrow \mathcal{K}$, 其中 $V = V(K_n)$ 。然后我们选择一个对称多项式 $P \in \mathcal{K}[x, y]$, 并用 $P(\pi(a), \pi(b))$ 为边 ab 进行着色。我们旨在表明, 在这种着色方案下, 我们获得的边着色在每个颜色类中最大度数都是有界的 (因此通过著名的Vizing定理, 我们能够获得正常的边着色)。接下去, 对于给定 $A, B \subseteq \mathcal{K}$, 令 $P(A, B)$ 表示 $\{P(a, b) : a \in A, b \in B\}$ 。我们希望像集的大小 $|P(\pi(V), \pi(V))|$ 是 $O(n)$, 以及, 我们需要证明我们在这个着色方案中不可能找到很多染色同构且点不相交的偶圈 C_4 结构。

如果 \mathcal{K} 是一个特征为 0 的域, 那么根据对称版本的 Elekes-Ronyai 定理[118], 我们的对称多项式 $P(x, y)$ 会形如 $f(u(x) + u(y))$ 或 $f(u(x)u(y))$, 其中 f, u 是 $\mathcal{K}[x]$ 中的某个单变量多项式。然而, 在这种情况下, 染色同构的偶圈 C_4 如果比较少, 就会意味着集合 $u(\pi(V))$ 具有较低的加性或乘性能量, 这会导致像集的大小 $|P(\pi(V)), \pi(V))|$ 为 $\Theta(\pi(V)^2)$, 从而使得 $\pi(V) = O(n^{\frac{1}{2}})$ 。因此颜色类的最大度数是 $\Omega(n^{\frac{1}{2}})$, 这就意味着该边着色方案不再是正常的了。

我们通过选择适当的有限域 \mathbb{F}_p 作为域 \mathcal{K} 来解决这个问题, 并且我们选择我们的多项式 P 为 \mathbb{R} 上的扩展多项式。这意味着, 如果我们将多项式视为 $\mathbb{R}[x, y]$ 中的一个元素, 并且 $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$, 通过单射 π , 可以说明边着色是正常的, 并且在着色后的完全图中不会有很多染色同构的偶圈 C_4 。并且像 $|P(\pi(V), \pi(V))|$ 为 $\Theta(n^2)$ 。现在, 通过取 $p = O(n)$, 将颜色都映射到 \mathbb{F}_p , 将帮助我们证明 $|P(\pi(V), \pi(V))|$ 为 $O(n)$ 。通过仔细选择多项式 $P(x, y)$ 、顶点映射 π 和特征 p , 并利用多项式的性质, 我们便可以证明, 我们的着色方案是正常的, 着色后的完全图中染色同构的偶圈 C_4 结构不会太多。

下面我们将给出这个结果的详细证明。

定理 3.2 的证明. 令 $p \equiv 5 \pmod{6}$ 为充分大的素数, 令集合

$$A = \left\{ 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor \right\}$$

为 \mathbb{F}_p 的子集。

我们说明一下如此选择素数 $p \equiv 5 \pmod{6}$ 的目的。主要是为了使 -3 成为一个模 p 非剩余。根据二次互反律, 如果 r 和 s 是奇素数, 如果 $r \equiv 1 \pmod{4}$, 将 r^* 定义为 r , 如果 $r \equiv 3 \pmod{4}$, 则定义 r^* 为 $-r$ 。那么 s 是一个模 r 的二次剩余当且仅当 r^* 是一个模 s 的二次剩余。将此结果应用到

$r = 3$ 和 $s = p$, 我们看到 -3 是一个模 p 的二次剩余当且仅当 p 是模 3 的二次剩余, 即 $p \equiv 1 \pmod{3}$ 。有了这一点说明, 接下去我们要给出我们的着色方案, 以及展开相关性质的证明。

令 G 为定义在 A 上的完全图, 我们令 $P(x, y) = x^2 + xy + y^2 \in \mathbb{F}_p[x, y]$ 。令 $P^*(A, A)$ 为受限制的像集, 这指的是,

$$P^*(A, A) = \{P(a, b) : a, b \in A, a \neq b\}.$$

接下去我们定义着色函数

$$\chi : E(G) \rightarrow P^*(A, A),$$

满足对每组 $x, y \in A$, $x \neq y$, 我们给边 xy 染上颜色 $P(x, y)$ 。注意到, 由于 $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$, 以及我们已经说明过 -3 是模 p 的二次非剩余, 因此显然有 $x^2 + xy + y^2 \neq 0$ 。因此 $P^*(A, A) \subseteq \mathbb{F}_p^*$ 。

接下去, 我们要说明边着色 χ 是正常的。假设有 $a \in \mathbb{F}_p^*$, 使得 xy 和 xz 的颜色均为 a 。也就是说, 我们有 $x^2 + xy + y^2 = a$ 和 $x^2 + xz + z^2 = a$ 。因此 $(y - z)(x + y + z) = 0$ 。根据我们构造的顶点集 A 的定义, $x + y + z \neq 0$ 。这意味着 $y = z$, 导出矛盾。因此, 我们证明了两条不同的边 xy 和 xz 不能被赋予相同颜色, 即染色 χ 是正常的。

令 $a, b, c, d \in \mathbb{F}_p^*$ 满足 $a \neq b, b \neq c, c \neq d, d \neq a$ 。假设颜色 a, b, c, d 为一个长度为 4 的偶圈 $x, y, z, w \in A$ 的边的颜色, 那么我们有

$$x^2 + xy + y^2 = a, \tag{3.1}$$

$$y^2 + yz + z^2 = b, \tag{3.2}$$

$$z^2 + zw + w^2 = c, \tag{3.3}$$

$$w^2 + wx + x^2 = d. \tag{3.4}$$

通过方程(3.1)和(3.2), 我们可以得到

$$y = \frac{a-b}{x-z} - x - z. \quad (3.5)$$

同理, 通过方程(3.3)和(3.4)我们可以得到

$$w = \frac{c-d}{z-x} - z - x. \quad (3.6)$$

将方程(3.5)和(3.6)分别带入到方程(3.1)中(3.4), 我们可以得到

$$x^2 + x \left(\frac{a-b}{x-z} - x - z \right) + \left(\frac{a-b}{x-z} - x - z \right)^2 = a, \quad (3.7)$$

$$x^2 + x \left(\frac{c-d}{z-x} - z - x \right) + \left(\frac{c-d}{z-x} - z - x \right)^2 = d. \quad (3.8)$$

在方程(3.7)和(3.8)中做一些简单的换元 $u \mapsto x+z$, $v \mapsto x-z$, 我们可以得到 $v \neq 0$, 以及有

$$v^4 + 3u^2v^2 - 6(a-b)uv - 2(a+b)v^2 + 4(a-b)^2 = 0, \quad (3.9)$$

$$v^4 + 3u^2v^2 - 6(c-d)uv - 2(c+d)v^2 + 4(c-d)^2 = 0. \quad (3.10)$$

假设 $a-b=c-d$, 那么由方程(3.9)和(3.10), 我们可以得到 $a+b=c+d$, 因此我们有 $a=c$ 和 $b=d$ 。那么由方程(3.5)和(3.6), 我们有 $y+w+2x+2z=0$, 同理, 根据对称性我们有 $x+z+2y+2w=0$ 。这就会使得 $x+z=y+w=0$, 与集合 A 的定义相矛盾。

那么我们就有 $a-b \neq c-d$ 。通过方程(3.9)和(3.10)我们可以得到

$$uv = \frac{(a+b-c-d)v^2}{3(c-d-a+b)} + \frac{2}{3}(c-d+a-b). \quad (3.11)$$

把(3.11)放入方程(3.9), 并且乘系数 $3(c-d-a+b)^2$, 我们可以得到

$$k_2v^4 + k_1v^2 + k_0 = 0, \quad (3.12)$$

其中

$$\begin{aligned} k_2 &= 4(a^2 - ab - 2ac + ad + b^2 + bc - 2bd + c^2 - cd + d^2), \\ k_1 &= 4(a - b - c + d)(a^2 - 2ac - 3ad - b^2 + 3bc + 2bd + c^2 - d^2), \\ k_0 &= 4(a - b - c + d)^2 \cdot \\ &\quad (a^2 - 2ab - ac + ad + b^2 + bc - bd + c^2 - 2cd + d^2). \end{aligned}$$

首先我们假设 $k_2 = k_1 = k_0 = 0$, 因为 $a - b - c + d \neq 0$, 我们有

$$a^2 - ab - 2ac + ad + b^2 + bc - 2bd + c^2 - cd + d^2 = 0, \quad (3.13)$$

$$a^2 - 2ab - ac + ad + b^2 + bc - bd + c^2 - 2cd + d^2 = 0. \quad (3.14)$$

那么从方程(3.13)和(3.14)可以看出, $(a - d)(b - c) = 0$, 这显然会与 $b \neq c$ 和 $d \neq a$ 的前提相矛盾。注意到, $v = x - z$ 以及 $x, z \in A$ 。因此, 如果 k_i ($i = 0, 1, 2$) 中至少有一个不是 0, 则 $(AA) \setminus \{0\}$ 中的 v 最多有 4 个解。但是如果 v 的解数至少为 3 的话, 则会存在两个解 v_1 和 v_2 , 使得 $v_1 + v_2 = 0$ 。在这种情况下, 我们令 x_1, z_1, u_1 是关于 v_1 的对应解, (x_2, z_2, u_2) 为关于 v_2 的对应解。那么 $v_1^2 = v_2^2$, 由方程(3.11), 我们有 $u_1 v_1 = u_2 v_2$ 。因此 $u_1 = -u_2$ 。注意到, 由于 $v_i = x_i - z_i$ 以及 $u_i = x_i + z_i$, 我们有 $x_1 - z_1 = -x_2 + z_2$ 以及 $x_1 + z_1 = -x_2 - z_2$ 。那么我们可以得到 $x_1 + x_2 = 0$, 这与 A 的构造相矛盾。

因此, 实际上 $(A - A) \setminus \{0\}$ 中的关于 v 最多只能有 2 个解。那么对于任何给定的 v , 由方程(3.11)可知 u 也有唯一解。注意到 $x = \frac{u+v}{2}$ 以及 $z = \frac{u-v}{2}$, 那么由方程(3.5)和(3.6), y 和 w 会被 x 和 z 所唯一确定。因此, 边的颜色为 a, b, c, d 的染色同构的偶圈 C_4 最多只能由 2 个。至此, 我们就完整地证明了我们的定理。 \square

§ 3.3 关于染色同构完全图的1次剖分图的新结果

在本节中，我们要证明定理3.4。

假设 $C = \gamma n^{1+\frac{1}{2t-3}}$ ，其中 γ 是一个足够小的常数。再假设 n 足够大。

为了方便我们的证明，我们还将假设 n 是 4 的倍数。首先，我们需要以下引理，它将帮助我们构造我们所需要的辅助图。

引理3.1. 给定一个关于 $G = K_n$ 的边的正常 C -染色 χ ，随机地取一个 $V(G)$ 等部划分，将其分划成 4 部，即 X_1, X_2, X_3 和 X_4 。则 G 中形如 $\{x_1x_3, x_2x_4\}$ 的单色匹配的数目期望至少为 $\frac{1}{64} \sum_{c \in \chi} \binom{e_c}{2}$ ，其中 e_c 表示 G 中颜色为 c 的边的数目，以及 $x_i \in X_i, i = 1, 2, 3, 4$ 。

引理3.1的证明. 给定一个关于 $G = K_n$ 的边的正常 C -染色 χ ，随机地取一个 $V(G)$ 等部划分，将其分划成 4 部： X_1, X_2, X_3 和 X_4 。注意到， G 的边可以以两种不同的方式嵌入到 X_1 和 X_3 之间，对于 X_2 和 X_4 同样也是有两种方式，并且一对给定的边可以以两种方式嵌入 X_1 和 X_3 以及 X_2 和 X_4 之间。因此，给定单色匹配，其形式为 $\{x_1x_3, x_2x_4\}$ 的概率为

$$2^3 \cdot \frac{\binom{n-4}{h-1, h-1, h-1, h-1}}{\binom{n}{h, h, h, h}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{(n-4)^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \geq \frac{1}{64},$$

其中 $x_i \in X_i, i = 1, 2, 3, 4$ ，以及 $h = \frac{n}{4}$ 。然后再利用期望的线性性，我们就证明了该引理。 \square

接下去我们构造一个辅助图 \mathcal{G} 如下。给定一个关于 $G = K_n$ 的边的正常 C -染色 χ ，我们选择把点集 $V(G)$ 划分成 X_1, X_2, X_3 和 X_4 ，满足形如 $\{x_1x_3, x_2x_4\}$ 的单色匹配的数目至少为 $\frac{1}{64} \sum_{c \in \chi} \binom{e_c}{2}$ ，其中 e_c 颜色为 c 的边的数目，以及 $x_i \in X_i, i = 1, 2, 3, 4$ 。令 \mathcal{G} 为一个二部图，其中点集

为 $V(\mathcal{G}) = (X_1 \times X_2) \cup (X_3 \times X_4)$, 顶点 $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ 和 $(x_3, x_4) \in X_3 \times X_4$ 连边当且仅当 $\{x_1x_3, x_2x_4\}$ 构成一个图 G 中的单色匹配。不难验证, $|V(\mathcal{G})| = \frac{n^2}{8}$, 以及 \mathcal{G} 的边数等于 G 中形如 $\{x_1x_3, x_2x_4\}$ 的单色匹配的数目。因此, 我们有

$$|E(\mathcal{G})| \geq \frac{1}{64} \sum_{c \in \chi} \binom{e_c}{2} \geq \frac{n^4}{512C} > \frac{|V(\mathcal{G})|^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4t-6}}}{512\gamma},$$

其中第二个不等式我们利用了 $\binom{x}{2}$ 的凸性, 以及等式 $\sum_{c \in \chi} e_c = \binom{n}{2}$ 。

根据辅助图 \mathcal{G} 的定义, \mathcal{G} 的顶点是有序对。如果 S 的坐标不等于 T 的任何坐标, 则称有序对 S 和 T 不相交。我们的核心任务是, 我们将证明 \mathcal{G} 包含一个 H_t 的副本, 并且满足其顶点是各不相交的。下列引理对于确保 H_t 中的顶点各不相交会非常有用。

引理3.2. 对于 \mathcal{G} 中的任意顶点 S 和 G 中的任意顶点 v , \mathcal{G} 中最多只能有一个顶点 T 满足 ST 是 \mathcal{G} 中的一条边, 而且 v 在 T 中。

引理3.2的证明. 不失一般性地, 我们可以假设 $S = (s_1, s_2) \in X_1 \times X_2$ 以及 $v \in X_3$ 。如果存在两个不同的顶点 $T_1 = (v, t_1)$ 和 $T_2 = (v, t_2)$, 使得 T_1 和 T_2 都与 S 在 \mathcal{G} 中连边, 那么对于 G 中的边 s_1t_1 和 s_2t_2 的颜色就会相同, 这与正常边染色的定义矛盾, 至此该引理得证。 \square

如果 $\max_{v \in V(F)} \deg(v) \leq K \cdot \min_{v \in V(F)} \deg(v)$, 则称 F 是一个 K -几乎正则的图。进一步地, 我们说 F 是一个平衡二部图, 如果 $V(F) = A \cup B$ 满足 $\frac{1}{2}|B| \leq |A| \leq 2|B|$ 。我们将使用以下引理, 它已在许多问题中被使用, 详见文献[47, 48, 110, 116, 166]。

引理3.3. 对任何常数 $0 < \alpha < 1$, 都会存在 n_0 使得, 如果 $n > n_0$, $c \geq 1$, 以及 F 是一个 n 个顶点、至少 $cn^{1+\alpha}$ 条边的图, 那么 F 会包含一个 K -几乎正

则的平衡二部子图 F' , F' 有 m 个顶点, 满足 $m \geq n^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}}$, 以及有 $|E(F')| \geq \frac{c}{10}m^{1+\alpha}$, 这里 $K = 60 \cdot 2^{1+\frac{1}{\alpha^2}}$ 。

令 \mathcal{G} 为如上定义的辅助图。通过引理3.3, 我们可以找到一个 K -几乎正则的平衡二部子图 \mathcal{G}_0 满足 $|V(\mathcal{G}_0)| = n_1 \geq |V(\mathcal{G})|^{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}}$ 和 $|E(\mathcal{G}_0)| \geq \frac{c_0}{10}n_1^{1+\alpha}$, 其中 $\alpha = \frac{t-2}{2t-3}$, $K = 60 \cdot 2^{1+\frac{1}{\alpha^2}}$, $c_0 = \frac{1}{512\gamma} \geq 1$ 。由于常数 γ 被选择得足够小, $c_1 = \frac{c_0}{10}$ 是一个足够大的常数。为了证明我们的主要结果, 只需证明在 \mathcal{G}_0 中存在 H_t 的副本, 其中的该 H_t 的顶点是各不相交的, 因为如果我们能找到一个在 \mathcal{G}_0 中的顶点两两不相交的 H_t , 那么我们就可以在 G 中找到两个顶点不相交的染色同构的 H_t 副本, 这样便能够证明我们的主要结果。

定理3.5. 令 \mathcal{G}_0 为如上面定义的 \mathcal{G} 的子图, 那么 \mathcal{G}_0 会包含顶点两两不相交的 H_t 作为子图。

在证明上述定理之前, 我们需要一些对我们证明有用辅助性结论。由 K -几乎正则平衡二部图的定义, 令 $\mathcal{G}_0 = A \cup B$, $|B| = m$, \mathcal{G}_0 中每个点的度数会介于 δ 和 $K\delta$ 之间, 其中 $\delta \geq c_1 m^{\frac{t-2}{2t-3}}$, c_1 可以为足够大的常数。然后我们在顶点集 A 上定义一个辅助权重图 W_A , 其中 W_A 中的点对 uv 的权重是 $d_{\mathcal{G}_0}(u, v) = |N_{\mathcal{G}_0}(u) \cap N_{\mathcal{G}_0}(v)|$ 。有时我们也会将点对 uv 的权重写为 $W(u, v)$ 。此外, 对于 A 的子集 U , 我们把集合的权重写为 $W(U) = \sum_{uv \in \binom{U}{2}} d_{\mathcal{G}_0}(u, v)$ 。关于在 \mathcal{G}_0 上定义的权重图 W_A 相关的引理可见文献[48]。

引理3.4 ([48]). 令 $\mathcal{G}_0 = A \cup B$ 为二部图, 其中 $|B| = m$, A 中点的最小度数至少为 δ 。那么, 对任何满足 $\delta|U| \geq 2m$ 的子集 $U \subseteq A$, 我们都有

$$W(U) = \sum_{uv \in \binom{U}{2}} d_{\mathcal{G}_0}(u, v) \geq \frac{\delta^2}{2m} \binom{|U|}{2}.$$

我们继续考虑 \mathcal{G}_0 上的权重图 W_A 。对于不同的顶点 $u, v \in A$, 如果 $1 \leq W(u, v) < 2\binom{t}{2}$, 我们就称边 uv 是轻的(light), 如果 $W(u, v) \geq 2\binom{t}{2}$, 我们就称边 uv 是重的(heavy)。通过引理3.2, 我们可以看到, 如果 W_A 中有全由重边组成的 K_t 的副本, 则 \mathcal{G}_0 中一定会存在 H_t 的副本, 其中 H_t 的顶点两两不相交。基于以上观察, 我们可以得到以下引理。

引理3.5. 如果 \mathcal{G}_0 中不存在满足顶点两两不相交的 H_t 的副本, 那么对于任何满足 $|U| \geq \frac{8tm}{\delta}$ 和 $|U| \geq 2$ 的子集 $U \subseteq A$, 诱导子图 $W_A[U]$ 中轻边的数目至少有 $\frac{\delta^2}{16t^3m}\binom{|U|}{2}$ 。

引理3.5的证明. 由引理3.4, 对任何满足 $|U| \geq \frac{8tm}{\delta}$ 的子集 $U \subseteq A$, 我们有

$$W(U) \geq \frac{\delta^2}{2m}\binom{|U|}{2} \geq \frac{\delta^2}{8m}|U|^2 \geq 8t^2m.$$

令 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 以及 $h_i := |N_{\mathcal{G}'}(b_i)|$ 。我们再令 \mathcal{G}' 为 \mathcal{G}_0 的诱导子图 $\mathcal{G}_0[U, B]$ 。现在假设对于某个 i , $h_i \geq 2(t-1)$ 。由于 \mathcal{G}_0 不包含满足顶点两两不相交的 H_t 的副本, 所以在权重图 $W_A[N_{\mathcal{G}'}(b_i)]$ 中没有由重边形成的 K_t 。因此根据经典的Turán定理, $W_A[N_{\mathcal{G}'}(b_i)]$ 中的轻边的数目至少为

$$\frac{1}{t-1}\binom{h_i}{2} \geq \frac{h_i^2}{4(t-1)}.$$

进一步地, 注意到

$$\sum_{i:h_i < 2(t-1)} \binom{h_i}{2} < 4t^2m \leq \frac{W(U)}{2},$$

这就意味着

$$\sum_{i:h_i \geq 2(t-1)} \binom{h_i}{2} \geq \frac{W(U)}{2}.$$

由轻边的定义，每一条轻边至多出现在 $2\binom{t}{2}$ 个集合 $N_{\mathcal{G}'}(b_i)$ 中，因此，我们可以得到 $W_A[U]$ 中轻边的总数目至少为

$$\frac{1}{2\binom{t}{2}} \sum_{i:h_i \geq 2(t-1)} \frac{h_i^2}{4(t-1)} \geq \frac{W(U)}{8t^3} \geq \frac{\delta^2}{16t^3m} \binom{|U|}{2}.$$

至此，该引理证明完毕。 \square

有了这个铺垫性的工具与结论，现在我们就可以证明定理3.4了。事实上，我们只需要证明定理3.5就足够了。这里回顾一下， \mathcal{G}_0 中的顶点是有序对，如果 S 的坐标不等于 T 的任何坐标，则称 S 和 T 的顶点在 $V(\mathcal{G}_0)$ 中是不相交的。

定理3.5的证明. 我们的目标是在 \mathcal{G}_0 中找到 H_t 的副本，其中一部的顶点为 u_1, u_2, \dots, u_t ，另一部中，对于每个 $1 \leq i < j \leq t$ ，顶点 $v_{i,j}$ 为 u_i 和 u_j 的公共邻点。首先，如果我们能够在 \mathcal{G}_0 中找到 H_t 的副本，那么根据引理3.2，我们知道对于任何 $1 \leq i < j \leq t$ ， u_i 和 u_j 是不相交的，因为它们有共同的邻居 $v_{i,j}$ 。同样， $v_{i,j}$ 和 $v_{i,k}$ 是不相交的。因此我们只需要证明对于任何不同的 i, j, k, ℓ ， $v_{i,j}$ 和 $v_{k,\ell}$ 是不相交的。

我们首先用递归构造来得到满足如下性质的点 $u_1, u_2, \dots, u_{t-1} \in A$ 。

- (i) 对于不同的 $i, j \leq t-1$ ， u_i 和 u_j 构成 W_A 中的一条轻边。
- (ii) 对于不同的 $i, j, k \leq t-1$ ，在 \mathcal{G}_0 中有 $N_{\mathcal{G}_0}(u_i) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_j) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_k) = \emptyset$ 。
- (iii) 对不同的 $i, j, k, \ell \leq t-1$ ， $N_{\mathcal{G}_0}(u_i) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_j)$ 的点和 $N_{\mathcal{G}_0}(u_k) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_\ell)$ 中的点都是各不相交的。

(iv) 对于每个 $1 \leq i \leq t-1$, 满足对于每个 $j \leq i$, $u_j u$ 都是轻边的点 u 的数目至少为 $(\frac{\delta^2}{64t^3m})^i \cdot |A|$ 。

正如我们上面所讨论的, 性质(i)、(ii)和(iv)有助于我们在 \mathcal{G}_0 中找到 H_t 的副本, 而性质(iii)能够帮助我们证明该 H_t 的顶点在 \mathcal{G}_0 中是各不相交的。

由于 \mathcal{G}_0 是平衡的以及 m 是足够大的, 所以有 $|A| \geq \frac{m}{2} \geq \frac{8tm}{\delta}$ 。根据引理3.5, A 中至少有 $\frac{\delta^2}{16t^3m} \binom{|A|}{2}$ 条轻边。所以根据鸽巢原理, 我们可以选择某个顶点 $u_1 \in A$ 使得轻边 $u_1 u$ 的数目至少为 $\frac{\delta^2}{16t^3m}(|A|-1) \geq \frac{\delta^2}{64t^3m}|A|$ 。假设对于 $2 \leq \ell \leq t-1$, 我们已选择了具有属性(i)、(ii)、(iii)和(iv)的 $\ell-1$ 个点 $u_1, u_2, \dots, u_{\ell-1}$ 。我们令 U_0 为满足对于每个 $j \leq \ell-1$, $u_j u$ 都是轻边的点 $u \in A$ 构成的集合。通过性质(iv), 我们有 $|U_0| \geq (\frac{\delta^2}{64t^3m})^{\ell-1}|A|$ 。我们再令 U 由具有以下性质的 $u \in U_0$ 构成:

- 对于所有 $1 \leq i < j \leq \ell-1$, 在 \mathcal{G}_0 中有 $N_{\mathcal{G}_0}(u_i) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_j) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u) = \emptyset$ 。
- 对于所有各不相同的 $1 \leq i, j, k \leq \ell-1$, $N_{\mathcal{G}_0}(u_i) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_j)$ 中的点与 $N_{\mathcal{G}_0}(u_k) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u)$ 中的点各不相交。

接下来我们证明 $|U_0 \setminus U|$ 的不能很大, 这意味着我们总是可以保证 $|U|$ 足够大。首先, 由于 W_A 中的边 $u_i u_j$ 都是轻的, 因此有 $W(u_i, u_j) < 2 \binom{t}{2}$ 。另一方面, 由于 \mathcal{G}_0 是 K -几乎正则的, 所以 B 中每个顶点的度数最多为 $K\delta$, 这意味着满足对于所有不同的 $1 \leq i < j \leq \ell-1$, 都有 $N_{\mathcal{G}_0}(u_i) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_j) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u) \neq \emptyset$ 的顶点 $u \in A$ 的数量至多为 $\binom{\ell-1}{2} \cdot 2 \binom{t}{2} \cdot K\delta$ 。

接下来, 对于任何的 $i, j, k \leq \ell-1$, 假如 $(x, y) \in N_{\mathcal{G}_0}(u_i) \cap N_{\mathcal{G}_0}(u_j)$ 将要被我们选作 H_t 中的 $v_{i,j}$, 那么根据引理3.2, 每个 x 和 y 被包含在至多一个 $N_{\mathcal{G}_0}(u_k)$ 的点中。因此, 对于任何给定的 $i, j, k \leq \ell-1$, 至多有 $4 \binom{t}{2}$ 个 B 中的点, 将永远不会被我们用来选作 H_t 中的点 $v_{k,\ell}$, 并且, 我们要从 U_0 删除所

有这些点在 A 中的邻点。注意到，我们需要对所有不同的 $i, j, k \leq \ell-1$ 进行这样的删除操作，因此我们会从 U_0 中删除掉至多 $\binom{\ell-1}{2} \cdot (\ell-3) \cdot 4 \binom{t}{2} \cdot K\delta$ 个点。因此 $|U_0 \setminus U| \leq \binom{\ell-1}{2} \cdot 2 \binom{t}{2} \cdot K\delta + \binom{\ell-1}{2} \cdot (\ell-3) \cdot 4 \binom{t}{2} \cdot K\delta$ 。又因为 m 是充分大的，所以我们有

$$\left(\frac{\delta^2}{64t^3m}\right)^{\ell-1} |A| \geq 2 \binom{\ell-1}{2} \cdot (\ell-3) \cdot 4 \binom{t}{2} \cdot K\delta + 2 \binom{\ell-1}{2} \cdot 2 \binom{t}{2} \cdot K\delta,$$

这意味着

$$|U| \geq \frac{|U_0|}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{64t^3m}\right)^{\ell-1} |A|.$$

另外，我们注意到， $\delta \geq c_1 m^{\frac{t-2}{2t-3}}$ 对于某个充分大的常数 c_1 成立，因此，对于任何 $2 \leq \ell \leq t-1$ ，我们有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{64t^3m}\right)^{\ell-1} |A| \geq \frac{8tm}{\delta}.$$

由引理3.5和鸽巢原理，一定存在某个 $u_\ell \in U$ 使得有至少 $\frac{\delta^2}{16t^3m}(|U|-1) \geq \left(\frac{\delta^2}{64t^3m}\right)^\ell |A|$ 条轻的边与 u_ℓ 关联。那么至此，对于 $2 \leq \ell \leq t-1$ ，我们就已经选取了适当的点 u_ℓ ，那么我们完成了对于点 u_1, u_2, \dots, u_{t-1} 的递归构造。

现在，我们记 $\ell = t-1$ ，那么存在一个满足 $|V| \geq \left(\frac{\delta^2}{64t^3m}\right)^{t-1} \cdot |A|$ 的集合 $V \subseteq A$ ，使得对每个 $i \leq t-1$ 以及 $v \in V$ ，有 $u_i v$ 为轻的边。最后，我们需要证明存在一个点 $u_t \in V$ ，满足对于任何 $i < j < t$ ， $N_{G_0}(u_i) \cap N_{G_0}(u_j) \cap N_{G_0}(u_t) = \emptyset$ ，以及对于任何不同的 $i, j, k < t$ ， $N_{G_0}(u_i) \cap N_{G_0}(u_j) \cap N_{G_0}(u_k) \cap N_{G_0}(u_t)$ 中的点是不相交的。利用与前面的删除方法相同，我们会删除至多不超过 $\binom{t-1}{2} \cdot (t-3) \cdot 4 \binom{t}{2} \cdot K\delta + \binom{t-1}{2} \cdot 2 \binom{t}{2} \cdot K\delta$ 个 V 中的点。那么我们就可以发现，一定会存在满足要求的顶点 u_t ，因为 $|V| \geq \left(\frac{\delta^2}{64t^3m}\right)^{t-1} \cdot |A| > \binom{t-1}{2} \cdot (t-3) \cdot 4 \binom{t}{2} \cdot K\delta + \binom{t-1}{2} \cdot 2 \binom{t}{2} \cdot K\delta$ 。基于上述

讨论，便会存在一个 H_t 满足顶点两两不相交。至此，我们的定理已证明完毕。 \square

§ 3.4 总结与展望

虽然定理3.2的证明看起来比较初等，但我们实际上用到了一些多项式结式的思想方法。对于任何多项式 $f, g \in \mathcal{K}[x_1, \dots, x_n]$ ，令 $R(f, g; x_i)$ 表示 f 和 g 关于变量 x_i 的结式。那么在定理3.2的证明中，方程(3.1)、(3.2)、(3.3)和 (3.4)事实上能给导出 $\mathbb{F}_p[x, y, z, w]$ 上的以下四个多项式：

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, w) &= x^2 + xy + y^2 - a = 0, \\ f_2(x, y, z, w) &= y^2 + yz + z^2 - b = 0, \\ f_3(x, y, z, w) &= z^2 + zw + w^2 - c = 0, \\ f_4(x, y, z, w) &= w^2 + wx + x^2 - d = 0. \end{aligned}$$

通过利用类似于我们在前面写到的方法来计算 $f_5(x, z) := R(f_1, f_2; y)$ 和 $f_6(x, z) := R(f_3, f_4; w)$ 以及 $g(x) := R(f_5, f_6; z)$ ，我们可以得到 $g(x) = 0$ ，以及 $g(x)$ 是一个关于变量 x^2 的二次多项式，当然，这也和方程(3.12)的结果类似。那么我们只需要分析 $g(x)$ 即可完成证明，这类似于我们在方程(3.12)中对于 k_0, k_1, k_2 的处理。这个例子也说明，我们在 Turán 问题中所利用过的多项式结式方法，在很多极值图论问题中，都具有应用的潜力。

关于函数 $f_k(n, H)$ 的问题，文献[49, 111] 中有几个有趣的结果和方法。而我们主要关注了 H 是偶圈 C_4 以及完全图 K_t 的 1 次剖分图的情况，对于 H_t ，我们证明了 $f_2(n, H_t) = \Omega(n^{1+\frac{1}{2t-3}})$ 。注意到我们的定理3.1给出了 $f_2(n, H_t) = O(n^{1+\frac{2}{t}})$ ，因此，确定指数 β 使得 $f_2(n, H_t) = \Theta(n^\beta)$ 将会

是非常有趣且具有挑战性的问题。

定理3.1(i)还说明了如果 H 是一个二部图, $e(H) \geq \frac{k}{k-1}|H| - \frac{2}{k-1}$ 的话, 有 $f_k(n, H) = \Theta(n)$ 。而我们的主要结果表明, 当 $k = 2$ 时, 这个定理不能被改进为形如: $e(H) \geq 2|H| - 2t$ 意味着 $f_2(n, H) = \Theta(n)$ 的样子, 这回答了Conlon和Tyomkyn提出的公开问题。那么当 $k \geq 3$ 时, 上述条件是否可以改进呢? 这将是个很有趣的问题。

在经典的Turán问题中, 有一个著名的猜想叫作有理指数猜想[81, 猜想1.6], 这个猜想叙述的是, 对于每个有理数 $r \in (1, 2)$, 都会存在单个部图 H , 使得 $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^r)$ 。这个猜想仍然远未被完全解决, 对于这个猜想的当前进展, 这参见文献[47, 112, 114, 115, 119]以及其中的参考文献。关于我们考虑的在这个主题, 已知结果表明, $f_2(n, H)$ 也许存在大致相似的情况。因此, 我们认为以下猜想是有意义的。

猜想3.1. 对于每个有理数 $r \in (1, 2)$, 都存在一个二部图 H , 使得

$$f_2(n, H) = \Theta(n^r).$$

Chapter 4 基于Hamming度量的Erdős-Falconer距离问题

§ 4.1 简介

经典的Erdős-Falconer猜想描述的是，如果 \mathbb{R}^d 的子集的Hausdorff维数超过 $\frac{d}{2}$ ，那么距离集的Lebesgue测度为正。该猜想的第一个突破性结果由Falconer在文献[72]中给出，它证明了对于 $d \geq 2$ ，如果 \mathbb{R}^d 中子集的Hausdorff维数大于 $\frac{d+1}{2}$ ，则欧式距离集的勒贝格测度为正。从那时起，由若干研究工作通过不同的方法改进了这一结果，可详见文献[29, 55, 68, 97, 104, 183]和其中的参考文献中的结果。

最近，调和分析、几何和组合学中经典问题的有限域版本问题受到了很多关注。在文献[109]中，Iosevich和Rudnev研究了Erdős-Falconer距离问题的有限域版本，并开发了傅立叶分析方法来研究此类组合问题。有关欧式距离和相关几何问题的更多文献，可参考文献[1, 92, 105, 107, 125]及其参考文献。最近，Yazici[185]在有限域的高维向量空间 \mathbb{F}_q^n 上考虑了类似的距离问题。Yazici使用傅立叶分析方法证明了如果 $|I| > \frac{q^{n-1}}{n} \binom{n}{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{4}$ ，其中 $4 \mid n$ ，则 I 的点确定了所有的偶数Hamming距离 $0 < d < n - 2$ 。我们进一步深入研究了Yazici提出的这个问题，并显著地改进了其渐近意义上的结果。

此外，Erdős-Falconer问题有一个图论上有趣的推广，旨在在 \mathbb{R}^d 的大子集中找到具有规定度量的图结构。为方便起见，我们用图论的语言来

描述这些问题。对于给定的图 $G = (V, E)$, 如果对于每条边 $e \in E$ 都有一个相关的距离 d_e , 则我们称图 G 为距离图。如果存在嵌入 $\phi : V(G) \rightarrow X$, 使得对于每条边 $uv \in E$, $\phi(u)$ 和 $\phi(v)$ 的距离等于 d_{uv} , 则我们称子集 X 包含距离图 G 的等距副本。Erdős-Falconer 问题的这种图论版本推广旨在于研究, 对于给定的图 H , 当一个全空间的子集 A 有多大时, 可以保证 A 包含大量不同的关于 H 的等距副本。关于这个主题很多有趣的研究工作。例如, 在欧式空间中, Bennett、Iosevich 和 Taylor[14] 证明, 对于每个维度大于 $\frac{d+1}{2}$ 的紧集 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 中, 都会存在一个开区间 $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, 使得对于每个 $\ell \in (a, b)$, A 会包含任意长度的路径的等距副本, 其中这条路径中每条边的欧式距离正好都是 ℓ 。此外, 还许多其他重要的图族也被广泛研究, 例如偶圈[93]、等边三角形[106]等。相应地, 有限域版本的问题也受到了广泛关注。例如, 最近 Iosevich 和 Parshall[108] 给出了相对稀疏图的一般定量结果。更准确地说, 他们表明对于给定的 $n, t \in \mathbb{N}$, 如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| \geq 12n^2 q^{\frac{d-1}{2}+t}$, 那么 A 包含所有最大度为 t 的 n 个点的图等距副本。其余许多类型的图类也有被研究, 例如 k -单纯形[13, 39]、路径[12]和完全图[177]等。而我们将在 Hamming 距离下考虑在有限域的高维向量空间 \mathbb{F}_q^n 中的类似问题。

接下去我们将具体介绍我们考虑的问题以及我们取得的若干结果。

令 \mathbb{F}_q 为 q 阶的有限域, 其中 $q \geq 4$ 是素数幂。(我们会在后面的讨论中阐述为什么 $q \notin \{2, 3\}$)。对于两个在 \mathbb{F}_q^n 中元素 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 之间的 Hamming 距离可以定义为 $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n d_H(a_i, b_i)$, 其中如果 $a_i \neq b_i$, 则 $d_H(a_i, b_i)$ 等于 1, 否则为 0。令 I 是 \mathbb{F}_q^n 的子集, I 可以看作是长度为 n 的 q 元码字。在编码理论中, 我们通常在 q 是固定的并且 $n \rightarrow \infty$ 的假设下考虑具体问题。我们将在本节中处理的第一

个问题是， $|I|$ 需要有多大时，才可以保证 I 的距离集 $\Delta(I)$ 包含非常多不同的Hamming距离。为方便起见，我们在Hamming距离下给出如下定义。

定义4.1. 令 I 为 \mathbb{F}_q^n 的子集，我们称 I 为一个 α -距离码，如果 I 中元素所决定的Hamming距离集 $\Delta(I)$ 包含至少 αn 个不同的Hamming距离。我们记函数 $\mathcal{I}(n, q, \alpha)$ 为最小可能的 $|I|$ ，满足只要 $|I| \geq \mathcal{I}(n, q, \alpha)$ ，则 I 必然是一个 α -距离码。

那么， \mathbb{F}_q^n 中Hamming度量下Erdős-Falconer距离问题可以写成如下形式。

问题4.1. 对于给定的素数幂 q ，和一个实数 $0 < \alpha < 1$ ，确定 $\mathcal{I}(n, q, \alpha)$ 的值。

在该观点下，Yazici的结果[185]相当于 $\mathcal{I}(n, q, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \leq \frac{q^{n-1}}{n} \binom{n}{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{4}}$ ，其中 $4 | n$ 。我们将关注这个函数的渐近行为，即假设 q 是固定的并且 $n \rightarrow \infty$ 。我们的主要结果表明，对于任意的正比例 $0 < \alpha < 1$ ，都存在常数 $\beta = \beta(\alpha) > 0$ ，使得如果 $|I| > q^{(1-\beta) \cdot n}$ ，则 I 必然是 α -距离码。

定理4.1. 令 $q \geq 4$ 为一个素数幂。对于任何给定的 $0 < \alpha < 1$ ，存在一个正的常数 $\beta = \beta(\alpha) > 0$ ，使得

$$q^{H_q(\alpha - \frac{1}{n}) \cdot n - o(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}(n, q, \alpha) \leq q^{(1-\beta) \cdot n},$$

其中， $H_q(x) = x \log_q(q-1) - x \log_q x - (1-x) \log_q(1-x)$ 。

我们将在本节中考虑的第二个问题是，基于Hamming距离下，对于给定的图 H ，子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 有多大时，可以保证 A 中包含大量不同的 H 的等距副本。请注意，对于具有 $e(H)$ 条边的图 H ，所有可能的距离图 H 的数

量最多为 $n^{e(H)}$ 。此外，如果我们要求 H 的所有边的Hamming距离都相同，那么最多有 n 个可能的等距副本。我们的主要结果集中在二部图上，当一个二部图 H 满足 $\text{ex}(n, H) = O(n)$ ，并且 H 的边的Hamming距离都相同的话，我们有如下结果。这里我们将 $\text{ex}(n, H)$ 表示为 H 的Turán数，即 n 个点且不含有 H 作为子图的图的最大边数。

定理4.2. 令 H 为满足 $\text{ex}(n, H) = O(n)$ 的二部图。如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_1)n}$ ，其中 $c_1 = c_1(q, H) > 0$ 为仅与 q 和 H 相关的常数，那么 A 会包含 $\Omega(n)$ 个不同的等距副本 H ，满足每个等距副本 H 的边的Hamming距离都相同。

著名的Erdős-Stone-Simonovits定理 [65, 66]给出了关于 H 的Turán数 $\text{ex}(n, H)$ 的渐近结果。然而，当 H 是一个二部图时，要确定 $\text{ex}(n, H)$ 的精确渐近结果是具有挑战性的。有一些已知的图类，其Turán数关于 n 呈线性增长。例如，路径和匹配[62]，具有 k 个顶点的树[2–4]，星图 $K_{1,t}$ [128]。更一般地，Alon、Krivelevich和Sudakov[6]证明，对于某一部的最大度不超过1的二部图 H ，我们有 $\text{ex}(n, H) = O(n)$ 。因此我们可以有以下直接的推论。

推论4.1.

- (1) 令 $t \geq 1$ 为正整数， $K_{1,t}$ 为星图。则存在 $\alpha_2 > 0$ ，如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_2)n}$ ，其中 $c_2 = c_2(q, t, \alpha_2) > 0$ 为某个仅与 q, t, α_2 相关的常数。则 A 包含 $\alpha_2 n$ 个不同的等距副本 $K_{1,t}$ ，且其边的Hamming距离都相同。
- (2) 令 $m \geq 1$ 为正整数， T_m 为 m 条边的树。则存在 $\alpha_3 > 0$ ，如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_3)n}$ ，其中 $c_3 = c_3(q, m, \alpha_3) > 0$ 为某个仅与 q, t, α_3 相关的常数。则 A 包含 $\alpha_3 m$ 个不同的等距副本 T_m ，且其边的Hamming距离都相同。

常数。则 A 包含 $\alpha_3 n$ 个不同的等距副本 T_m , 且其边的 Hamming 距离都相同

- (3) 令 $s \geq 1$ 为正整数, M_s 为 s 条边的匹配。则存在 $\alpha_4 > 0$, 如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_4)n}$, 其中 $c_4 = c_4(q, s, \alpha_4) > 0$ 为某个仅与 q, s, α_4 相关的常数。则 A 包含 $\alpha_4 n$ 个不同的等距副本 M_s , 且其边的 Hamming 距离都相同。
- (4) 令 $H = H_1 \cup H_2$ 为二部图且满足 H_1 中点的最大度为 1. 那么存在 α_5 , 如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_5)n}$, 其中 $c_5 = c_5(q, H, \alpha_5) > 0$ 为某个仅与 q, H, α_5 相关的常数。则 A 包含 $\alpha_5 n$ 个不同的等距副本 H , 且 H 的边的 Hamming 距离都相同。

前面我们提到, 对于一个图 H , 如果我们要求 H 所有边的 Hamming 距离都相同, 那么最多有 n 个可能的等距副本。这意味着, 当 \mathbb{F}_q^n 的子集达到某个阈值时, 我们可以找到具有 $\text{ex}(n, H) = O(n)$ 的二部图 H 的正比例数目的所有可能等距副本。其所有边的 Hamming 距离都相同。事实上我们也可以考虑更一般的二部图, 和更一般的距离分配。接下来我们证明, 如果我们不要求 H 的所有边都有相同的 Hamming 距离, 那么对于任何给定的二部图, 我们还是可以找到 $\Omega(n)$ 数目不同的 H 的等距副本。

定理4.3. 对于给定的二部图 H , 存在某个 α_6 , 如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_6)n}$, 其中 $c_6 = c_6(q, H, \alpha_6) > 0$ 为仅与 q, H, α_6 相关的常数, 那么 A 会包含 $\alpha_6 n$ 个不同的 H 的等距副本。

本节中接下去的内容将这样安排: 在 § 4.2, 我们将介绍若干我们将要用到的来自不同领域的工具与结论, 这些领域包含了极值组合学, 数

论和编码理论等。定理4.1的证明将呈现在§ 4.3中。在§ 4.4中，我们将主要介绍并证明一个模版本的Delsarte的推广，这个结果除了对我们接下去的证明很有帮助，其本身也是有趣的。定理4.2和定理4.3的证明将呈现在§ 4.5中。最后，我们将在§ 4.6对一些我们认为有价值的问题展开讨论，并留下若干公开问题作为进一步的研究方向。

§ 4.2 一些相关的工具

在本节中，我们将简要介绍来自三个不同领域的相关工具和结果，它们对证明我们的结果很有用。我们首先介绍一些编码理论的基础知识，例如Hamming球的体积计算和反码方法。其次是著名的相关随机选择方法，它在极值组合学中起着重要作用。最后我们将介绍一个数论中的重要结果及其相关推论。

4.2.1 编码理论中的工具

4.2.1.1 Hamming球的体积

编码理论的基本问题是，对于给定的极小距离 d 和码长 n ，问 q 元码的码字数目可以有多大？最经典的理论界包括有Gilbert-Varshamov界和球填充界，并且两者都取决于给定半径的Hamming球的体积。这里我们回顾一下，一个 \mathbb{F}_q^n 中半径为 w 的Hamming球 $B_q(n, w)$ 是所有长度为 n 并且满足Hamming重量至多 w 的 q 元码字的集合。那么Hamming球 $B_q(n, pn)$ 的体积为 $Vol_q(n, pn) = \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i$ 。我们可以得到 $Vol_q(n, pn)$ 的下界和上界如下。

命题4.1. 令 $q \geq 3$ 为正整数以及 $0 \leq p \leq 1 - \frac{1}{q}$ 为一个实数。那么对于充

分大的 n , 有

$$q^{H_q(p) \cdot n - o(n)} \leq Vol_q(n, pn) \leq q^{H_q(p) \cdot n},$$

其中 $H_q(x) = x \log_q(q-1) - x \log_q x - (1-x) \log_q(1-x)$ 。

证明. 我们首先给出上界 $Vol_q(n, pn) \leq q^{H_q(p) \cdot n}$ 的证明, 考虑如下不等式

$$\begin{aligned} 1 &= (p + (1-p))^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &\geq \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i (1-p)^n \left(\frac{p}{(q-1)(1-p)}\right)^i \\ &\geq \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i (1-p)^n \left(\frac{p}{(q-1)(1-p)}\right)^{pn} \\ &= \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i \left(\frac{p}{q-1}\right)^{pn} (1-p)^{(1-p)n}. \end{aligned}$$

我们对上述不等式做若干解释: 第一个不等式是由于我们在求和项中删除了一些项, 第二个不等式是由于 $\frac{p}{(q-1)(1-p)} \leq 1$, 因为我们假设了 $q \geq 3$, $p \leq 1 - \frac{1}{q}$ 以及 $pn \geq 1$ 。又因为有

$$q^{-H_q(p) \cdot n} = \left(\frac{p}{q-1}\right)^{pn} (1-p)^{(1-p)n},$$

那么上面最后一个式子意味着

$$Vol_q(n, pn) \cdot q^{-H_q(p) \cdot n} \leq 1.$$

这就给出了我们声称的上界, 那么接下去我们要证明下界 $Vol_q(n, pn) \geq$

$q^{H_q(p) \cdot n - o(n)}$ 。我们首先需要经典的Stirling估计如下：

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\lambda(n)},$$

其中 $\lambda(n) = \frac{1}{12n}$ 。又因为

$$\begin{aligned} \binom{n}{pn} &= \frac{n!}{(pn)!(n-pn)!} \\ &\geq \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{pn}{e}\right)^{pn} \left(\frac{(1-p)n}{e}\right)^{(1-p)n}} \cdot \frac{e^{-\lambda(pn)-\lambda(n-pn)}}{\sqrt{2\pi p(n-pn)}} \\ &= \frac{\ell(n)}{p^{pn}(1-p)^{(1-p)n}}, \end{aligned}$$

其中 $\ell(n) = \frac{e^{-\lambda(pn)-\lambda(n-pn)}}{\sqrt{2\pi p(n-pn)}}$ 。那么现在我们有

$$\begin{aligned} Vol_q(n, pn) &\geq \binom{n}{pn} (q-1)^{pn} \\ &> \frac{(q-1)^{pn}}{p^{pn}(1-p)^{(1-p)n}} \cdot \ell(n) \\ &\geq q^{H_q(n) \cdot n + \log_q(\ell(n))}. \end{aligned}$$

至此，关于Hamming球体积的上下界均已证明完毕。 \square

注记4.1. 函数 $H_q(p)$ 有一些较好的性质。例如，对于任何整数 $q \geq 3$ 和实数 $0 \leq p \leq 1 - \frac{1}{q}$, $H_q(p) < 1$ 。此外，该函数关于 p 单调递增，而会关于 q 单调递减。

注记4.2. 考虑半径为 $\lceil \frac{\alpha n - 1}{2} \rceil$ 的Hamming球 $B_q(n, \lceil \frac{\alpha n - 1}{2} \rceil)$ 。Hamming度量也具有三角不等式，因此我们可以得到 $|\Delta(B_q(n, \lceil \frac{\alpha n - 1}{2} \rceil))| \leq \alpha n - 1$ 。结合命题4.1，我们得到定理4.1中给出的下界结果。

4.2.1.2 反码方法

之前我们提到，编码理论的基本问题是，对于给定的极小距离 d 和码长 n ，问一个码的码字数目可以有多大？为了解决编码理论的基本问题，有许多源于不同理论思想的的理论界被提出，如Plotkin界、Griesmer界和Johnson界。有关编码理论的理论界的更多信息，可以参考教科书[173]和其中的参考文献。类似于码的定义，如果一个子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 的任意两个元素之间的距离都不超过 d ，则称 A 是具有最大距离 d 的反码(Anti-code)。反码方法通常用于构造达到Griesmer界的编码。特别是，最大反码的精确表达式可用于推导编码理论基本问题的上界，而且可以比经典的球填充码得到更好的结果。最近，不同空间和度量上的反码问题被广泛研究，可以参考文献[71, 140, 161, 162]。

我们接下来要介绍一个关于 q 元码的反码结果，这个结果对我们的证明也是非常重要的。我们记 $C_r(t)$ 为集合

$$C_r(t) := \{\mathbf{c} \in \mathbb{F}_q^n : |\{i : 1 \leq i \leq t + 2r, c_i = 1\}| \geq t + r\}.$$

Frankl与Tokushige在文献[77]证明了在一定条件下， $C_r(t)$ 是满足极大距离为 $n - t$ 的非二元极大反码。

引理4.1 ([77]). 令 $q \geq 3$ 为正整数，令 $r := \lfloor \frac{t-1}{q-2} \rfloor$ ，那么当 $n \geq t + 2r$ 时， $C_r(t)$ 为极大距离为 $n - t$ 的极大反码。进一步地，

$$|C_r(t)| = q^{n-t-2r} \sum_{i=0}^r \binom{t+2r}{i} (q-1)^i.$$

那么基于我们前面对Hamming球体积的估计，我们可以得到如下推论。

推论4.2. 令 $q \geq 3$ 以及 $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ 。再令 $t := (\frac{1-\alpha}{2}) \cdot n$ 以及 $r := \lfloor \frac{t-1}{q-2} \rfloor$ 。如果 $n \geq t + 2r$, 则有

$$|C_r(t)| \leq q^{(1-(1-H_q(\gamma))(\frac{1-\alpha}{2})) \cdot n}。$$

证明. 由命题4.1, 我们有 $|C_r(t)| \leq q^{n-(1-H_q(\frac{r}{t+2r}))(t+2r)}$ 。又因为 $t + 2r \geq (\frac{1-\alpha}{2}) \cdot n$ 以及 $H_q(p)$ 关于 p 单调递增, 因此该推论成立。 \square

注记4.3. 前面我们提到, 在我们的主要结果中, 我们将设定 $q \geq 4$, 因为当 $q = 2$ 时, 最大反码正好是Hamming球。另一方面, 当 $q = 2$ 时, 可以构造码 $\mathcal{C} := \{\mathbf{c} : \sum_{i=1}^n c_i \equiv 0 \pmod{2}\}$, 可以发现其大小为 $\Omega(2^n)$ 但是其Hamming距离集 $\Delta(\mathcal{C})$ 仅包含大约 $\frac{n}{2}$ 个不同的距离。此外, 当 $q = 3$ 时, 如果我们的比例 $\alpha < \frac{1}{3}$, 那么 $t + 2r$ 有可能大于 n 。而我们核心结果的证明又比较依赖这个结果, 因此我们为了利用推论4.2来证明引理4.7, 我们就设定了 $q \geq 4$ 。

4.2.2 相关随机选择方法

相关随机选择方法是一种非常强力的概率方法。其早期版本被许多组研究人员证明和应用, 例如Gowers[89]在为长度为4的Szemerédi定理提供了新的证明的过程中用到了该方法。从那时起, 相关随机选择在极值图论、Ramsey理论、加性组合学和组合几何中出现了一系列惊人的应用。欲了解更多信息, 可以参考非常详尽的综述[75]以及其中的参考文献。在这里, 我们需要用到一个非对称版本的相关随机选择引理, 为了完整性, 我们也将对其进行简单的证明。

引理4.2. 令 $H = (A \cup B, E)$ 为满足 $|A| = n$, $|B| = m$ 以及边数 $e(H) = Cnm$ 的二部图。那么对于一个给定的正整数 t , 会存在一个大小为 $|A'| \geq \frac{C^t(n+1)}{2}$ 的子集 $A' \subseteq A$ 满足 A' 中的任何点对都有至少 $Cmn^{-\frac{1}{t}}$ 个公共邻点。

证明. 我们先从 B 中均匀随机且独立地选择 t 个顶点构成集合 T , 这里我们可以允许重复选取。那么通过期望的线性性, 我们有

$$\mathbb{E}[|N(T)|] = \sum_{a \in A} \left(\frac{N_B(a)}{m} \right)^t \geq n^{1-t} \left(\sum_{a \in A} \left(\frac{N_B(a)}{m} \right) \right)^t = C^t n,$$

这里我们用到了 $f(z) = z^t$ 的凸性, 以及算两次的原理。接下去, 令 Y 表示满足公共邻点数目少于 $Cmn^{-\frac{1}{t}}$ 的点对 $(a_1, a_2) \subseteq N(T)$ 的数目, 注意到这里 Y 是一个随机变量。对于这样给定的点对 (a_1, a_2) , 它是 $N(T)$ 的子集的概率是 $\left(\frac{|N_B(a_1) \cap N_B(a_2)|}{m}\right)^t$ 。因为最多有 $\binom{n}{2}$ 个点对满足 $|N_B(a_1) \cap N_B(a_2)| < Cmn^{-\frac{1}{t}}$, 因此我们可以计算随机变量 Y 的期望

$$\mathbb{E}[Y] < \binom{n}{2} \left(\frac{|N_B(a_1) \cap N_B(a_2)|}{m} \right)^t = \frac{C^t(n-1)}{2}.$$

我们再利用一次期望的线性性, 可以得到

$$\mathbb{E}[|N(T)| - Y] \geq C^t n - \frac{C^t(n-1)}{2} = \frac{C^t(n+1)}{2}.$$

因此存在某个 T 的选择, 使得 $|N(T)| - Y \geq \frac{C^t(n+1)}{2}$ 。现在我们从每组满足公共邻点数目不超过 $Cmn^{-\frac{1}{t}}$ 的点对中删除一个点, 然后令 A' 是经过这样删除操作后剩余的点构成的子集, 很容易看出 A' 中至少有 $\frac{C^t(n+1)}{2}$ 个点, 并且每个 A' 中的点对都至少有 $Cmn^{-\frac{1}{t}}$ 个公共邻点。那么至此, 该引理证
明完毕。 \square

注记4.4. 在这个版本的相关随机选择引理中, 我们不需要 H 是一个稠密图。即 C 不必是一个常数, 例如, 我们可以选择 $C = \Theta(n^c)$, 其中 c 可以是一个负数。在这种情况下, 我们在实际应用中, 只需要保证 $\frac{C^t(n+1)}{2} \geq 2$ 以及 $Cmn^{-\frac{1}{t}} \geq 2$ 即可。

4.2.3 Vinogradov型定理

加性数论中的许多经典问题都围绕着对特定集合 A 和 B 的和集(sum set)的展开研究。例如，令 $\mathbb{N}^2 = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ 是所有平方数的集合，著名的拉格朗日四平方和定理叙述的是 $4\mathbb{N}^2 = \mathbb{N}$ ，即，每个自然数都可以表示成四个平方数的加和。再令 $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ 是所有素数的集合，闻名中外的哥德巴赫猜想叙述的是， $2\mathbb{P}$ 包含所有大于2的偶数。目前，猜想还远未解决。为了更好地理解和解决哥德巴赫猜想，有一个著名的Vinogradov定理[178]，其描述的是， $(2 \cdot \mathbb{N} + 1) \setminus 3\mathbb{P}$ 是有限的，即每个足够大的奇数都是三个素数之和。有关加法数论的更多信息，可以参考教科书[153]和[168]以及其中的参考文献。最近，使用Green在文献[91]中引入的转移原理，Matomäki、Maynard和Shao[142]证明了如下的一个Vinogradov型定理推广。

定理4.4 ([142]). 令 $\theta > \frac{11}{20}$ ，那么每个充分大的奇数 n 都可以被表示为三个素数之和 $n = p_1 + p_2 + p_3$ ，并且满足对于 $i \in \{1, 2, 3\}$ 都有 $|p_i - \frac{n}{3}| \leq n^\theta$ 。

Baker、Harman和Pintz[11]证明了在区间 $[x, x + x^{0.525}]$ 中总会存在素数，因此我们可以得到以下的推论。

推论4.3. 令 $\theta > \frac{11}{20}$ ，那么每个充分大的偶数 n 可以被表示成四个素数之和 $n = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ，并且满足对于 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 都有 $|p_i - \frac{n}{4}| \leq n^\theta$ 。

§ 4.3 寻找任意正比例数量的Hamming距离

在本节中，我们主要将完整地叙述定理4.1的证明。即在一个 \mathbb{F}_q^n 的子集中，寻找任意正比例数目的Hamming距离。如前面的分析，我们的证明将基于 $q \geq 4$ 为素数幂以及 n 趋于无穷大的假设。

4.3.1 较小的素数Hamming距离的存在性

我们首先证明当 $|I|$ 大到一定程度时，其Hamming距离集 $\Delta(I)$ 中或会包含所有不那么大的素数。为此，我们需要源于文献[10]中的一个结果。

引理4.3 ([10]). 令 p 是一个素数，再令集合 $I \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 。如果

$$|I| > \sum_{i=0}^s (q-1)^i \binom{n}{i}$$

以及 $s \geq p-1$ ，那么 $\Delta(I)$ 中会存在元素 $d \in \Delta(I)$ 使得 $d \equiv 0 \pmod{p}$ 。

接下去我们将利用该结果说明，如何在特定的区间里寻找素数距离。

引理4.4. 对于给定的实数 $0 < \alpha < 1$ 和 $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ ，我们令 I 为 \mathbb{F}_q^n 的子集，满足 $|I| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n}$ 。如果 p 是一个满足 $\frac{(1-\alpha) \cdot n}{2} < p < \gamma \cdot n$ 的素数，那么 I 的Hamming距离集 $\Delta(I)$ 中一定会包含 p 。

证明. 假设 $|I| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n}$ ，我们先估计以下关于 x 的不等式，

$$\frac{n-x}{2} < p < \gamma \cdot (n-x),$$

那么，我们有

$$n - 2p < x < n - \frac{p}{\gamma} < \left(1 - \frac{1-\alpha}{2\gamma}\right) \cdot n.$$

现在我们选择一个区间 $[n-2p, n-\frac{p}{\gamma}]$ 中的 x ，然后我们把 I 中的元素都看作 n 长的向量，我们考虑 I 中满足所有前 x 个分量都相同的元素构成的子集，我们记为 I_{n-x} 。那么容易得到

$$|I_{n-x}| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n-x}.$$

由于 $\gamma < 1$, 以及 $x < (1 - \frac{1-\alpha}{2\gamma}) \cdot n < (1 - \frac{1-\alpha}{2}) \cdot n$, 因此我们有

$$(1 - H_q(\gamma)) \cdot (n - x) > \left(\frac{(1 - H_q(\gamma))(1 - \alpha)}{2} \right) \cdot n.$$

那么,

$$q^{(1 - \frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n - x} \geq q^{H_q(\gamma) \cdot (n-x)} \geq \sum_{i=0}^{\gamma(n-x)} (q-1)^i \binom{n-x}{i}.$$

那么我们可见 $p < \gamma \cdot (n - x)$, 接着, 再由引理4.3, 会存在某个元素 $d \in \Delta(I_{n-x})$ 满足 $d \equiv 0 \pmod p$ 。由于 $p > \frac{n-x}{2}$, 因此我们有 $\Delta(I_{n-x})$ 必然会包含素数 p 。最后, 因为 $\Delta(I_{n-x}) \subseteq \Delta(I)$, 从而 $\Delta(I)$ 也会包含素数 p 。至此, 该引理证明完毕。 \square

4.3.2 寻找较小的Hamming距离

前面小节的结果保证了当集合 I 大到一定程度时, $\Delta(I)$ 中一定会存在较小的素数距离。接下来我们将结合编码理论中的常用操作和前面提到的数论结果, 来寻找 $\Delta(I)$ 中的较小的Hamming距离。

首先我们基于Hamming距离的特性, 来定义两个分别来自 $\mathbb{F}_q^{n_1}$ 和 $\mathbb{F}_q^{n_2}$ 的元素 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ 的直和。

定义4.2. 对于两个不相交的子空间 $\mathbb{F}_q^{n_1}$ 和 $\mathbb{F}_q^{n_2}$, 我们定义关于 $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{F}_q^{n_1}$ 和 $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{F}_q^{n_2}$ 的直和 $\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2$ 为 $\mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$ 中的元素。具体地说, 如果我们将 \mathbf{c}_1 和 \mathbf{c}_2 视为对应子空间上的向量, 那么 $\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2$ 的第 i 个位置的坐标为

$$(\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2)_i = \begin{cases} (\mathbf{c}_1)_i, & \text{如果 } i \in [1, n_1] \\ (\mathbf{c}_2)_i, & \text{其它。} \end{cases}$$

类似地, 我们可以定义两个子集 $I_1 \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1}$ 与 $I_2 \subseteq \mathbb{F}_q^{n_2}$ 的直和为

$$I_1 \oplus I_2 = \{\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2 : \mathbf{c}_1 \in I_1, \mathbf{c}_2 \in I_2\}.$$

下面我们要给出对于我们整个问题的证明最重要的一个引理，它为我们利用较小的距离寻找更大的距离提供了可能。

引理4.5. 对于给定正整数 n_1, n_2, d_1 和 d_2 ，令 $I_1 \in \mathbb{F}_q^{n_1}$ 与 $I_2 \in \mathbb{F}_q^{n_2}$ 为各自子空间上的子集。再令 δ_1, δ_2 和 t 为满足下列条件的数。

- 如果 $|I_1| > \delta_1 q^{n_1}$, 那么 $d_1 \in \Delta(I_1)$,
- 如果 $|I_2| > \delta_2 q^{n_2}$, 那么 $d_2 \in \Delta(I_2)$,
- $2\delta_1 \delta_2^{-t} \geq q^{n_1}$ 。

那么对于任何满足 $|I| > (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_1+n_2}$ 的子集 $I \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$, I 的Hamming距离集 $\Delta(I)$ 会包含 $d_1 + d_2$ 。

证明. 考虑给定的子集 $I \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$, 其中 $|I| > (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_1+n_2}$ 。考虑二部图 $H = (A \cup B, E)$, 其中点集 $A = \mathbb{F}_q^{n_1}$, $B = \mathbb{F}_q^{n_2}$, 对于两个顶点 $\mathbf{a} \in A$ 和 $\mathbf{b} \in B$, 如果 $a \oplus b \in I$, 那么它们在 H 中连边。容易看出, H 的边数至少为 $e(H) > (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_1+n_2}$ 。由引理4.2, 存在一个子集 $A' \subseteq A$, 其中至少有 $\delta_1(q^{n_1} + 1)$ 个顶点, 使得每组点对 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in A'$ 至少有 $(2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_2 - \frac{n_1}{t}}$ 个公共邻点。根据 δ_1 满足的性质, 存在一对 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in A'$ 使得 $d_H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = d_1$, 接着我们固定这样的一对点 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, 其公共邻点的集合 $N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 满足

$$|N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \geq (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_2 - \frac{n_1}{t}} > \delta_2 q^{n_2}.$$

因此, 存在点对 $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \subseteq N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 满足 $d_H(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = d_2$ 。这样, 我们便找到了一对元素 $(\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2) \subseteq I$ 满足 $d_H(\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2) = d_1 + d_2$ 。至此, 该引理已证明完毕。 \square

现在我们准备证明 $\Delta(I)$ 中包含在一段区间内的所有Hamming距离。这里我们考虑该距离是偶数的情况，因为偶数的情况比奇数复杂得多，并且我们证明偶数情况的办法可以平行应用至奇数情况。从推论4.3可以看出，我们可以保证一个充分大的偶数自然数可以写成四个几乎相等的素数之和。

引理4.6. 令 $\epsilon > 0$ 为充分小的实数， $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ 。那么对于给定的满足 $(\frac{1-\alpha}{2}) \cdot n \leq d \leq (\gamma - \epsilon) \cdot n$ 的正整数 d ，如果子集 $I \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|I| > q^{(1 - \frac{(1-\alpha)^4(1-H_q(\gamma))^4}{3 \cdot 2^{17}}) \cdot n}$ 那么有 $d \in \Delta(I)$ 。

证明. 由于 $(\frac{1-\alpha}{2}) \cdot n \leq d \leq (\gamma - \epsilon) \cdot n$ ，那么由推论4.3，我们可以把偶数距离 d 写成

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4,$$

其中 d_i 为素数，并且满足对每个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ，都有 $|d_i - \frac{d}{4}| \leq d^\theta$ ，这里 $\theta > \frac{11}{20}$ 。另一方面，我们可以将 n 写成

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$$

满足对于每个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ， $|n_i - \frac{n}{4}| \leq 1$ 。当然，如果我们假设 $4 \mid n$ ，那么 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ ，不过这些不影响我们的讨论。

注意到，因为我们的问题建立在 $n \rightarrow \infty$ 的假设下，因此我们可以直接得到关于每个 d_i 的界如下：

$$\begin{aligned} d_i &\geq \frac{d}{4} - d^\theta \geq \left(\frac{1-\alpha}{8}\right) \cdot n - d^\theta \geq \left(\frac{1-\alpha}{4}\right) \cdot n_i, \\ d_i &\leq \frac{d}{4} + d^\theta \leq \left(\frac{\gamma - \epsilon}{4}\right) \cdot n + d^\theta \leq \gamma \cdot n_i. \end{aligned}$$

接下去我们将大的空间 \mathbb{F}_q^n 分划成4个互不相交的子空间 $\mathbb{F}_q^{n_1}, \mathbb{F}_q^{n_2}, \mathbb{F}_q^{n_3}$ 与 $\mathbb{F}_q^{n_4}$ 。

引理4.4告诉我们, 如果 $I_i \in \mathbb{F}_q^{n_i}$ 满足 $|I_i| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n_i}$, 那么 $\Delta(I_i)$ 包含所有素数距离 $d_i \in ((\frac{1-\alpha}{2}) \cdot n_i, \gamma \cdot n_i)$, 对所有 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 都成立。

那么接下去我们要在集合 $\Delta(I_1 \oplus I_2)$ 中寻找距离 $d_1 + d_2$ 。方便起见, 我们把 $I_1 \oplus I_2$ 简写为 $I_{1,2}$ 。我们主要会利用引理4.5, 首先, 我们要验证如下条件。

- $|I_1| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n_1}$,
- $|I_2| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n_2}$,
- $2 \cdot q^{-(\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{4}) \cdot n_1} \cdot q^{(\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{4}) \cdot n_2 t_1} \geq q^{n_1}$ 。

解上述第三个不等式, 我们可以设 $t_1 := \lceil \frac{8}{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))} \rceil$ 。简单计算后, 我们可以发现如果 $|I_{1,2}| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)^2(1-H_q(\gamma))^2}{128}) \cdot (n_1+n_2)}$, 那么 $\Delta(I_{1,2})$ 会包含距离 $d_1 + d_2$ 。接着, 我们再使用引理4.5, 即, 我们需要验证如下条件。

- $|I_{1,2}| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)^2(1-H_q(\gamma))^2}{128}) \cdot (n_1+n_2)}$,
- $|I_3| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n_3}$,
- $2 \cdot q^{(1-\frac{(1-\alpha)^2(1-H_q(\gamma))^2}{128}) \cdot (n_1+n_2)} \cdot q^{(\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{4}) \cdot n_3 t_2} \geq q^{n_1+n_2}$ 。

同样, 我们可以设 $t_2 := \lceil \frac{16}{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))} \rceil$ 。我们简记 $I_{1,2,3} := I_1 \oplus I_2 \oplus I_3$, 同理我们可以得到如果 $|I_{1,2,3}| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)^3(1-H_q(\gamma))^3}{3 \cdot 2^{11}}) \cdot (n_1+n_2+n_3)}$, 那么 $\Delta(I_{1,2,3})$ 会包含距离 $d_1 + d_2 + d_3$ 。接下去, 我们将最后一次使用引理4.5, 通过确认以下条件:

- $|I_{1,2,3}| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)^3(1-H_q(\gamma))^3}{3 \cdot 2^{11}}) \cdot (n_1+n_2+n_3)}$,
- $|I_4| > q^{(1-\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{2}) \cdot n_4}$,

- $2 \cdot q^{(1 - \frac{(1-\alpha)^3(1-H_q(\gamma))^3}{3 \cdot 2^{11}}) \cdot (n_1+n_2+n_3)} \cdot q^{(\frac{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))}{4}) \cdot n_4 t_3} \geq q^{n_1+n_2+n_3}$ 。

通过简单的不等式计算，我们可以设 $t_3 := \lceil \frac{24}{(1-\alpha)(1-H_q(\gamma))} \rceil$ 。那么我们可以得到，如果 $|I| > q^{(1 - \frac{(1-\alpha)^4(1-H_q(\gamma))^4}{3 \cdot 2^{17}}) \cdot n}$ ，那么有 $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \in \Delta(I)$ 。

至此，该引理证明完毕。 \square

注记4.5. 当 d 为奇数时，我们可以通过定理4.4得到类似的结果。由于每个充分大的奇数可以分解成3个大小相差不多的素数之和，因此 d 为奇数的情况讨论起来会更容易。从量化结果的角度来看， $|I|$ 的阈值也肯定小于引理4.6中的阈值，我们这里就不再重复地细写奇数情况的证明了。

4.3.3 寻找较大的Hamming距离

为了得到任意正比例数目的Hamming距离，我们还需要寻找比较大的Hamming距离。所以最后一步，我们要尝试寻找较大的Hamming距离，具体地说，我们要证明落在区间 $[(\gamma - \epsilon) \cdot n, (\frac{1+\alpha}{2}) \cdot n]$ 的距离的存在性。这里我们回顾以下我们已经在引理4.1和引理4.6中证明的结果。

- 如果 $I \in \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|I| > q^{(1-f_1(\frac{1-\alpha}{2})) \cdot n}$ ，那么 $\Delta(I)$ 会包含某个距离 $d \in ((\frac{1+\alpha}{2}) \cdot n, n]$ ，其中 $f_1(\frac{1-\alpha}{2}) = \frac{(1-H_q(\gamma-\epsilon)) \cdot (1-\alpha)}{2}$ 。
- 如果 $I \in \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|I| > q^{(1-f_2(\frac{1-\alpha}{2})) \cdot n}$ ，那么 $\Delta(I)$ 会包含所有在区间 $[(\frac{1-\alpha}{2}) \cdot n, (\gamma - \epsilon) \cdot n]$ 中的距离，其中 $f_2(\frac{1-\alpha}{2}) = \frac{(1-\alpha)^4(1-H_q(\gamma))^4}{3 \cdot 2^{17}}$ 。

我们的目标是证明下列引理。

引理4.7. 令 $c, \epsilon > 0$ 为充分小的实数以及 $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ 。那么对于给定的满足 $(\gamma - \epsilon) \cdot n \leq d \leq (\frac{1+\alpha}{2}) \cdot n$ 的正整数 d ，如果 $I \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|I| > q^{(1 - \frac{(1-\alpha) \cdot f_1(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon)-c}{4}) \cdot f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c)}{32}) \cdot n}$ ，那么 $d \in \Delta(I)$ 。

证明. 我们在这里仍然假设 d 为偶数, 而当 d 为奇数时证明是类似的。我们首先将空间 \mathbb{F}_q^n 分划成两个不相交的子空间 $\mathbb{F}_q^{n_1}$ 和 $\mathbb{F}_q^{n_2}$, 其中 $n = n_1 + n_2$ 。另外, 关于 n_1 , n_2 和 d , 我们需要如下条件:

- $|n_1 + \frac{(\gamma-\epsilon) \cdot n_2}{2} - d| \leqslant 1$ 。

- $\frac{n}{4} \leqslant n_1 \leqslant \frac{(1+\alpha) \cdot n}{2}$ 。

接下去我们要证明, 存在某个距离 $\bar{d} \in [(1 - \frac{(1-\alpha) \cdot (\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot n_1, n_1]$ 。类似于引理4.5的证明, 我们考虑一个二部图 $H = (A \cup B, E)$, 其中点集 $A = \mathbb{F}_q^{n_1}$, $B = \mathbb{F}_q^{n_2}$, $\mathbf{a} \in A$ 和 $\mathbf{b} \in B$ 连边的条件是 $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \in I$ 。那么根据条件, 我们知道 $e(H) > q^{-\left(\frac{(1-\alpha) \cdot f_1(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c)}{32}\right) \cdot n} \cdot q^n$ 。利用引理4.2, 我们设 $t = \lceil \frac{4}{(1-\alpha) \cdot f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c)} \rceil$, 我们可以找到子集 $A' \subseteq A$, 其大小满足

$$\begin{aligned} |A'| &\geqslant \frac{q^{-\left(\frac{(1-\alpha) \cdot f_1(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c)}{32}\right) \cdot nt} \cdot (q^{n_1} + 1)}{2} \\ &\geqslant \frac{q^{-\frac{f_1(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot n}{8}} \cdot (q^{n_1} + 1)}{2} \\ &> q^{-\frac{f_1(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot n}{4}} \cdot q^{n_1} \\ &\geqslant q^{\left(1 - f_1\left(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}\right)\right) \cdot n_1}, \end{aligned}$$

其中, 最后一个不等式是由于 $n_1 \geqslant \frac{n}{4}$ 。利用引理4.1, 会存在某个点对 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \subseteq A'$ 满足 $d_H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \bar{d} \in [(1 - \frac{(1-\alpha) \cdot (\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot n_1, n_1]$ 。进一步地, 我们考虑点对上述 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \subseteq A'$ 在集合 $B = \mathbb{F}_q^{n_2}$ 中的公共邻点集 $N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 。利用引理4.2, 我们有

$$\begin{aligned} |N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| &\geqslant q^{-\frac{(1-\alpha) \cdot f_1(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}) \cdot f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c) \cdot n}{32} \cdot |A|^{-\frac{1}{t}} \cdot |B|} \\ &> q^{-\frac{2n_1}{t} + n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq q^{\frac{-2(1-\alpha)f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c)\cdot n_1}{4}+n_2} \\ &> q^{(1-f_2(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c))\cdot n_2}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立是由于 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1}{n-n_1} \leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} < \frac{2}{1-\alpha}$ 。那么现在我们已经证明了 $\Delta(N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))$ 包含每个区间 $[(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c) \cdot n_2, (\gamma-\epsilon) \cdot n_2]$ 中的距离了。基于我们开始的假设 $|n_1 + \frac{(\gamma-\epsilon)\cdot n_2}{2} - d| \leq 1$ ，我们可以看到 $d - \bar{d} \in [(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c) \cdot n_2, (\gamma-\epsilon) \cdot n_2]$ ，因此必然存在点对 $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \in N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 满足 $d_H(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = d - \bar{d}$ 。于是我们就顺利地找到了一对点对 $(\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2) \subseteq I$ 满足 $d_H(\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{b}_2) = d$ 。至此，该引理证明完毕。 \square

4.3.4 定理4.1的证明

基于前面三部分的讨论，现在我们将完整地可以证明定理4.1。

引理4.4，引理4.6以及引理4.7共同给出了区间 $[\frac{(1-\alpha)\cdot n}{2}, \frac{(1+\alpha)\cdot n}{2}]$ 中每个距离的存在性，作为量化的结果，我们可以将定理4.1中的参数 β 取值为

$$\min\left\{\frac{(1-\alpha)\cdot f_1\left(\frac{(1-\alpha)(\gamma-\epsilon-c)}{4}\right)\cdot f_2\left(\frac{\gamma-\epsilon}{2}-c\right)}{32}, \frac{(1-\alpha)^4 \cdot (1-H_q(\gamma))^4}{3 \cdot 2^{17}}\right\}.$$

那么至此，我们的定理4.1已证明完毕。

§ 4.4 Delsarte不等式的推广

为了证明定理4.2和定理4.3，本节中我们主要给出一个Delsarte不等式的图论版本推广。这个推广除了会对证明我们的主要结果提供帮助外，我们相信它本身也是很有意义的。我们首先回顾经典的Delsarte不等式[51, 52]。

定理4.5 ([51, 52]). 令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$, 如果集合 A 中的元素两两之间决定的不同的Hamming距离的数目至多为 s , 则有

$$|A| \leq \sum_{i=0}^s (q-1)^i \binom{n}{i}.$$

Frankl[76]首先给出了上述经典不等式的模版本的推广, 而后这个推广又被Babai、Snevily和Wilson[10]进一步强化。事实上, 我们已经在引理4.3中提起过这个结果, 在这里, 我们将其写成如下形式:

定理4.6 ([10]). 令 p 为一个素数, 再令集合 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 。如果不存在任何点对 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A$ 满足 $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{p}$, 则有

$$|A| \leq \sum_{i=0}^{p-1} (q-1)^i \binom{n}{i}.$$

Grolmusz和Sudakov[95]对上述结果进行了有趣的推广, 具体地说, 它们基于 k 个元素之间的Hamming距离, 证明了与上式类似的上界。最近, Correia、Sudakov和Tomon[150]也给出了非常有趣的推广结果。而在这里, 我们展示了上述不等式在图论层面上的一个推广。我们首先需要引入Hamming模 p 图的概念。

定义4.3 (Hamming模 p 图). 令集合 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 以及 p 为一个素数。我们定义基于集合 A 上的Hamming模 p 图, 记为 $G(A, p)$, 首先其为一个简单图, 点集 $V(G(A, p)) = A$, 两个顶点 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ 连边当且仅当 $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{p}$ 。

接下去我们要证明下列引理, 它在我们主要结果的证明中也起着重要的作用。

引理4.8. 令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$, 对于给定的素数 p 和给定的满足 $\text{ex}(n, F) \leq cn^{2-s}$ 的二部图 F , 这里常数 $c > 0$, $0 < s \leq 1$ 。如果 Hamming 模 p 图 $G(A, p)$ 不包含 F 作为子图, 则有

$$|A| \leq \left(c' \sum_{i=0}^{p-1} (q-1)^i \binom{n}{i} \right)^{\frac{1}{s}},$$

其中 $c' = \max\{4c, 2c + 1\}$ 。

证明. 对于每个元素 $a \in \mathbb{F}_q$, 我们令 $\epsilon(x, a)$ 为关于变量 x 的有理多项式, 满足对于所有 $x \in \mathbb{F}_q$,

$$\epsilon(x, a) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x = a, \\ 1, & \text{如果 } x \neq a. \end{cases}$$

注意到多项式

$$\binom{x-1}{p-1} = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)}{(p-1)!}$$

有如下性质: 对任何正整数 b , 我们有

$$\binom{b-1}{p-1} \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p}, & \text{如果 } b \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 \pmod{p}, & \text{如果 } b \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

我们可以把 \mathbb{F}_q^n 上的元素视作 n 长的向量, 那么对于 $\mathbf{a} \in A$, 我们可以定义多变量多项式

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \binom{\sum_{i=1}^n \epsilon(x_i - a_i) - 1}{p-1}.$$

注意到 $f_{\mathbf{a}}$ 为从 \mathbb{F}_q^n 映射到有理数的有理多项式, 以及 $f_{\mathbf{a}}$ 的每一项都是一个包含至多 $p-1$ 个不同变元 x_i 的单项式, 另外我们知道每个变元 x_i 上的指数至多为 $q-1$ 。因此, $f_{\mathbf{a}}$ 被包含在一个至多由 $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i} (q-1)^i$ 个单项式张成的子空间中。

观察到, $\sum_{i=1}^n \epsilon(x_i, a_i) = d_H(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, 因此我们有

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p}, & \text{if } d_H(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 \pmod{p}, & \text{if } d_H(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

现在, 我们令 I 为 $G(A, p)$ 的最大独立集, 记其大小为 $\alpha(G(A, p))$ 。由文献[94]中的结果, 我们可以用图的平均度来给出最大独立数的下界, 具体地说, 我们有 $|I| \geq \frac{|A|}{1+d_{ave}}$ 。这意味着如果 $s = 1$, 那么有 $|I| \geq \frac{|A|^s}{1+2c}$, 以及如果 $0 < s < 1$, 那么有 $|I| \geq \frac{|A|^s}{4c}$ 。因此, 对于任何独立集中的一对点对 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in I$, $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{p}$ 当且仅当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。现在我们考虑多项式子空间 $V := \text{span}\{f_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in I\}$, 一方面, $\dim(V) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i} (q-1)^i$, 另一方面, $\{f_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in I}$ 在 \mathbb{F}_p 上线性无关。因为如果 $\sum_{\mathbf{a} \in I} \lambda_{\mathbf{a}} f_{\mathbf{a}}$ 是一个零多项式, 那么, 对于任何 $\mathbf{b} \in I$, 我们有 $\sum_{\mathbf{a} \in I} \lambda_{\mathbf{a}} f_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) \equiv \lambda_{\mathbf{b}} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{p}$ 。这意味着对于所有 $\mathbf{b} \in I$, 在有限域 \mathbb{F}_p 中都有 $\lambda_{\mathbf{b}} = 0$ 。那么 $\{f_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in I}$ 在有理域上也是线性无关的, 并且 $\dim(V) = |I|$ 。综上所述, 我们有

$$|A| \leq \left(c' \sum_{i=0}^{p-1} (q-1)^i \binom{n}{i} \right)^{\frac{1}{s}},$$

其中 $c' = \max\{4c, 2c + 1\}$ 。□

§ 4.5 嵌入二部距离图

在本节中, 我们将证明定理4.2和 4.3。为了便于阅读, 我们将非常详细地证明第一个定理, 对于第二个定理, 我们会忽略一些重复的细节。以及, 我们将详细阐述两种结果的证明之间的差异。

4.5.1 嵌入距离图的思路

这里我们先简单介绍嵌入距离图的简要思路。对于给定二部图结

构 H , 其满足 $\text{ex}(n, H) = O(n)$ 。我们希望的得到阈值 $|A| > q^{(1-c)n}$, 并且 $c = c(q, H)$ 是一个合适的常数, 使得如果 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$, 那么 A 会包含很多不同的距离图 H 。第一步, 我们需要找到边的距离都是同一个素数的距离图 H 。为此, 我们将使用引理4.8来证明引理4.9。其次, 我们将在 $[n]$ 中找到一个稠密的区间 I , 然后对于每个落在该区间的整数 $d \in I$, 我们可以嵌入距离图 H 的等距副本, 并且其每条边的Hamming距离都是 d 。使用利用定理4.4或者推论4.3, 我们可以将每个整数 $d \in I$ 都划分为三个或四个几乎相等的素数, 并且我们将整个空间 \mathbb{F}_q^n 也划分成三个或四个不相交的子空间, 然后我们可以通过引理4.4和引理4.9来找到大量的“元结构”。最后, 我们使用相关随机选择, 它会像胶水一样, 把我们找到的“元结构”粘在一起, 从而获得大量我们需要的距离图 H 。我们用下图形象地表达了如何进行“粘连”的操作, 见图4.1。

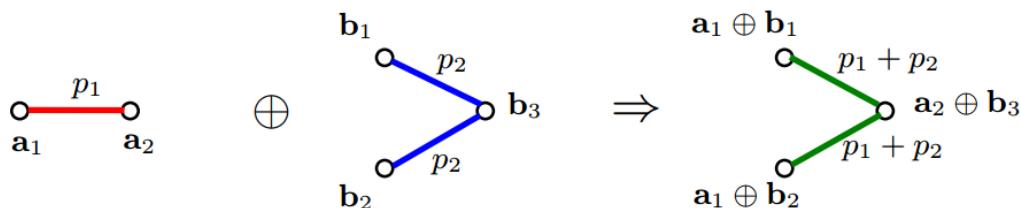


图 4.1 “粘连”的操作

4.5.2 定理4.2的证明

利用我们前面证明的引理4.8我们可以把引理4.4进行如下推广。

引理4.9. 令 H 为满足 $\text{ex}(n, H) = cn$ 的二部图, 其中 $c = c(H) > 0$ 。对于给定的实数 $0 < \beta < \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2} < \gamma < 1 - \frac{1}{q}$, 令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 为满足 $|A| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n+\epsilon}$ 的子集, 其中 $\epsilon = \log_q(1 + 2c)$ 。那么如果 p 是一个满

足 $\beta n < p < \gamma n$ 的素数，则 A 包含每条边的Hamming距离均为 p 的距离图 H 的等距副本。

证明. 令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 为满足 $|A| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n+\epsilon}$ 的一个子集，令 a 为满足

$$n - 2p < a < n - \frac{p}{\gamma} < (1 - \frac{\beta}{\gamma})n$$

的一个正整数。我们从区间 $(n - 2p, n - \frac{p}{\gamma})$ 固定某正整数 a ，把 \mathbb{F}_q 中的元素视作长度为 n 的向量，然后考虑满足前 a 个分量都相同的元素构成的子集 $A_{n-a} \subseteq A$ 。容易看出，我们有

$$|A_{n-a}| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n+\epsilon-a}.$$

由于 $\gamma < 1 - \frac{1}{q}$ 以及 $a < (1 - \frac{\beta}{\gamma})n < (1 - \beta)n$ ，我们便有

$$(1 - H_q(\gamma))(n - a) > (1 - H_q(\gamma))\beta n.$$

因此，我们可以得到

$$q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n+\epsilon-a} \geq q^{H_q(\gamma)(n-a)+\epsilon} \geq (1+2c) \sum_{i=0}^{\gamma(n-a)} (q-1)^i \binom{n-a}{i}.$$

我们知道， $p < \gamma(n - a)$ ，那么通过引理4.8， A_{n-a} 会存在一个二部的距离图 H 满足其每条边的Hamming距离都是模 p 余0的。最后，由于我们前面设定了 $p > \frac{n-a}{2}$ 为一个素数，因此我们可以确保每条边的Hamming距离恰好就一定是 p 。由于 A_{n-a} 的定义方式，我们就证明了 A 包含每条边的Hamming距离均为 p 的距离图 H 的等距副本。至此，该引理证明完毕。

□

引理4.4和引理4.9分别说明了 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 大到一定程度，那么 A 会包含大量每条边的Hamming距离都是素数的二部距离图 H ，以及 A 的距

离集会包含大量的素数距离。接下来，我们将使用相关随机选择来进行拼接。具体地说，我们需要证明如下引理，该引理可以看作是引理4.5的推广。

引理4.10. 令 $H = U \cup W$ 为一个给定的二部图。对于给定的正整数 n_1, n_2, d_1 以及 d_2 ，我们令 $A_1 \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1}, A_2 \subseteq \mathbb{F}_q^{n_2}$ 。再令 δ_1, δ_2 和 t 满足如下条件。

- 如果 $|A_1| > \delta_1 q^{n_1}$ ，那么 A_1 的 Hamming 距离集 $\Delta(A_1)$ 会包含 d_1 。
- 如果 $|A_2| > \delta_2 q^{n_2}$ ，那么 A_2 会包含一个每条边的 Hamming 距离都是 d_2 的距离图 H 的等距副本。
- $2\delta_1\delta_2^{-t} > q^{n_1}$ 。

那么对于任何满足 $|A| > (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_1+n_2}$ 的子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$ ， A 会包含一个每条边的 Hamming 距离都是 $d_1 + d_2$ 的距离图 H 的等距副本。

证明. 对于给定满足 $|A| > (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_1+n_2}$ 子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^{n_1+n_2}$ ，我们定义了一个辅助的二部图 $F = F_1 \cup F_2$ ，其中点集 $F_1 = \mathbb{F}_q^{n_1}$ ，点集 $F_2 = \mathbb{F}_q^{n_2}$ ，两个顶点 $\mathbf{a} \in F_1$ 和 $\mathbf{b} \in F_2$ 连边的条件为 $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \in A$ 。根据条件我们可以看出，辅助图 F 中边的数目至少为 $(2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_1+n_2}$ 。那么通过相关随机选择方法得到的引理4.2，会存在一个至少有 $\delta_1(q^{n_1} + 1)$ 个顶点的子集 $F'_1 \subseteq F_1$ ，使得其中的每个点对 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \subseteq F'_1$ 均至少有 $(2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_2 - \frac{n_1}{t}}$ 个公共邻点。再根据条件中 δ_1 的性质，会存在点对 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \subseteq F'_1$ ，使得 $d_H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = d_1$ 。现在我们固定这样一对点对 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ，其在点集 F_2 中的公共邻点集合 $N_{F_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 满足

$$|N_{F_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \geq (2\delta_1)^{\frac{1}{t}} q^{n_2 - \frac{n_1}{t}} > \delta_2 q^{n_2}.$$

因此集合 $N_B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 中会包含 H 的等距副本，满足这个 H 的顶点集为 $U_1 \cup W_1$ ，并且其边的Hamming距离均为 d_2 ，即，任何边 \mathbf{uw} 的Hamming距离 $d_H(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = d_2$ ，其中 $\mathbf{u} \in U_1$, $\mathbf{w} \in W_1$ 。那么现在我们可以在 A 中找到一个新的距离图 H 的等距副本如下：其顶点集是 $U \cup W$ ，其中 $U = \{\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{u} : \mathbf{u} \in U_1\}$, $W = \{\mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{w} : \mathbf{w} \in W_1\}$ 。并且很容易验证，该距离图中每条边的Hamming距离均为 $d_1 + d_2$ 。□

接下去我们将证明以下结果，这说明我们可以在集合 $[n]$ 中找到一个较为稠密的区间 $[s_1 n, s_2 n]$ ，然后对于每个该区间的整数 $d \in [s_1 n, s_2 n]$ ，当 \mathbb{F}_q^n 的子集 A 大到一定程度时， A 中将包含每条边的Hamming距离都是 d 的二部图 H 的等距副本，换句话说， A 包含正比例数目的所有可能的满足每条边的Hamming距离都是 d 的等距副本 H ，即如定理4.2所示的那样。特别地，我们将只证明 d 为偶数的情况，而 d 为奇数地情况讨论相对更容易，并且 $|A|$ 的阈值一定会比 d 为偶数的情况更小。

定理4.7. 令 $H = U \cup W$ 为一个二部图，它的Turán数满足 $\text{ex}(n, H) \leq cn$ ，其中 $c > 0$ 为一个常数。令 $\lambda > 0$ 为充分小的实数， $0 < \beta < \frac{1}{2}$ 以及 $\frac{1}{2} < \gamma < 1 - \frac{1}{q}$ 。那么对于每个满足 $(\beta + \lambda)n < d < (\gamma - \lambda)n$ 的偶数 d ，如果集合 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1 - \frac{\beta^4(1 - H_q(\gamma))^4}{24})n}$ ，那么集合 A 会包含一个每条边的Hamming距离都是 d 的距离图 H 的等距副本。

证明. 由于 $(\beta + \lambda)n < d < (\gamma - \lambda)n$ ，那么由推论4.3我们可以把偶数 d 写作

$$d = p_1 + p_2 + p_3 + p_4,$$

满足 p_i 为素数，并且对于每个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ， $|p_i - \frac{d}{4}| \leq d^\theta$ ，其中 $\theta > \frac{11}{20}$ 。

同时，我们可以把 n 拆成4个大小相近的四个整数的和，即有

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$$

满足对于每个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $|n_i - \frac{n}{4}| \leq 1$ 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于每个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, 我们都有

$$\begin{aligned} p_i &\geq \frac{d}{4} - d^\theta \geq \frac{(\beta + \lambda)n}{4} - d^\theta \geq \beta n_i, \\ p_i &\leq \frac{d}{4} + d^\theta \leq \left(\frac{(\gamma - \lambda)n}{4}\right) + d^\theta \leq \gamma n_i. \end{aligned}$$

接下来我们将 \mathbb{F}_q^n 分成四个不相交的子空间 $\mathbb{F}_q^{n_1}$, $\mathbb{F}_q^{n_2}$, $\mathbb{F}_q^{n_3}$ 和 $\mathbb{F}_q^{n_4}$ 。引理4.4表明, 对于每个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, 如果 $A_i \in \mathbb{F}_q^{n_i}$ 满足 $|A_i| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n_i}$, 那么对于每个落在区间 $(\beta n_i, \gamma n_i)$ 中的素数 p_i , A_i 的Hamming距离集 $\Delta(A_i)$ 都会包含 p_i , 此外, 引理4.9表明, 如果 $A_i \in \mathbb{F}_q^{n_i}$ 满足对于 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $|A_i| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n_i+\epsilon}$, 那么当 $\epsilon = \log_q(2c+1)$, 对于每个落在区间 $(\beta n_i, \gamma n_i)$ 中的素数, A_i 包含一个每条边的Hamming距离都是 p_i 的距离图 H 的等距副本。

接下去, 我们想证明对于每个形如 $p_1 + p_2$ 的整数, 其中对于 $i \in \{1, 2\}$, $p_i \in (\beta n_i, \gamma n_i)$, 我们可以在 $A_1 \oplus A_2$ 中找到 H 的等距副本, 其每条边的Hamming距离都是 $p_1 + p_2$ 。为方便起见, 我们将 $A_1 \oplus A_2$ 简记为 $A_{1,2}$ 。那么为了使用引理4.10把小的距离粘在一起, 我们首先需要验证以下条件。

- $|A_1| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n_1+\epsilon}$,
- $|A_2| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n_2}$,
- $2 \cdot q^{((\beta(1-H_q(\gamma)))n_1-\epsilon)t_1} \cdot q^{-(\beta(1-H_q(\gamma)))n_2} > q^{n_2}$ 。

这里，我们设定 $t_1 := \lceil \frac{2}{\beta(1-H_q(\gamma))} \rceil$ 即可。经过简单的计算，我们得到，如果 $|A_{1,2}| > q^{(1-\frac{\beta^2(1-H_q(\gamma))^2}{4})(n_1+n_2)}$ ，那么我们可以在 $A_{1,2}$ 中找到 H 的等距副本，其每条边的Hamming距离都是 $p_1 + p_2$ 。接着我们再次利用引理4.10，通过设定 $t_2 := \lceil \frac{4}{(\beta(1-H_q(\gamma)))^2} \rceil$ ，我们可以确保以下条件成立

- $|A_{1,2}| > q^{(1-\frac{\beta^2(1-H_q(\gamma))^2}{4})(n_1+n_2)}$ ，
- $|A_3| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n_3}$ ，
- $2 \cdot q^{((\frac{\beta^2(1-H_q(\gamma))^2}{4})(n_1+n_2))t_2} \cdot q^{-(\beta(1-H_q(\gamma)))n_3} > q^{n_3}$ 。

我们简记 $A_{1,2,3} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ ，同理我们可以得到，如果 $|A_{1,2,3}| > q^{(1-\frac{\beta^3(1-H_q(\gamma))^3}{8})(n_1+n_2+n_3)}$ ，那么 $A_{1,2,3}$ 包含 H 的等距副本，满足其每条边的Hamming距离都是 $p_1+p_2+p_3$ 。再次利用引理4.10，令 $t_3 := \lceil \frac{6}{(\beta(1-H_q(\gamma)))^3} \rceil$ ，我们可以验证

- $|A_{1,2,3}| > q^{(1-\frac{\beta^3(1-H_q(\gamma))^3}{8})(n_1+n_2+n_3)}$ ，
- $|A_4| > q^{(1-\beta(1-H_q(\gamma)))n_4}$ ，
- $2 \cdot q^{((\frac{\beta^3(1-H_q(\gamma))^3}{8})(n_1+n_2+n_3))t_3} \cdot q^{-(\beta(1-H_q(\gamma)))n_4} > q^{n_4}$ 。

那么我们可以得到，如果 $|A| > q^{(1-\frac{\beta^4(1-H_q(\gamma))^4}{24})(n_1+n_2+n_3+n_4)}$ ，那么 A 会包含 H 的等距副本，其每条边的Hamming距离都是 $d = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ 。那么至此，该定理证明完毕。□

4.5.3 定理4.3的证明

为了证明定理4.3，我们需要用到下面的引理，它的作用和引理4.9类似。

引理4.11. 令 H 为满足 $\text{ex}(n, H) = cn^{2-s}$ 的二部图, 其中 $c = c(H) > 0$, $0 < s < 1$ 。我们令 $\eta > 0$ 为充分小的一个数, 对于给定的满足 $H_q(\gamma) < s$ 与 $0 < \beta < \gamma - \eta < 1 - \frac{1}{q}$ 的实数 γ 和 β , 我们令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 为满足 $|A| > q^{(1-\beta(1-\frac{H_q(\gamma)}{s}))n+\epsilon}$ with $\epsilon = \frac{\log_q 4c}{s}$ 的子集, $k =: \lfloor \frac{1}{\gamma} \rfloor$ 。那么如果素数 p 满足 $\frac{\beta n}{k} < p < \gamma n$, 则存在一个距离图 H , 使得它每条边的Hamming距离包含于 $\{p, 2p, \dots, kp\}$ 中。

证明. 令 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 为满足 $|A| > q^{(1-\beta(1-\frac{H_q(\gamma)}{s}))n+\epsilon}$ 的集合, a 为满足

$$n - (k+1)p < a < n - \frac{p}{\gamma} < (1 - \frac{\beta}{k\gamma})n$$

的正整数。固定某个区间 $(n - (k+1)p, n - \frac{p}{\gamma})$ 中的正整数 a 。我们考虑 A 的子集 A_{n-a} , 其满足每个 A_{n-a} 中的元素都有相同的前 a 个分量(这里我们把其中元素视为长度为 n 的向量)。容易验证, 我们有

$$|A_{n-a}| > q^{(1-\beta(1-\frac{H_q(\gamma)}{s}))n+\epsilon-a}.$$

由于 $k\gamma \leq 1$ 以及 $a < (1 - \frac{\beta}{k\gamma})n \leq (1 - \beta)n$, 因此我们有

$$(1 - \frac{H_q(\gamma)}{s})(n - a) > (1 - \frac{H_q(\gamma)}{s})\beta n.$$

从而我们有

$$q^{(1-\beta(1-\frac{H_q(\gamma)}{s}))n+\epsilon-a} \geq q^{\frac{H_q(\gamma)}{s}(n-a)+\epsilon} \geq \left(4c \sum_{i=0}^{\gamma(n-a)} (q-1)^i \binom{n-a}{i}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

我们知道, $p < \gamma(n-a)$, 因此通过引理4.8, A_{n-a} 中存在一个距离图 H , 使得它每条边的Hamming距离都模 p 余0。并且, 由于 $p > \frac{n-a}{k+1}$, 因此我们知道每条这样的距离图 H 中的边的Hamming距离均包含于 $\{p, 2p, \dots, kp\}$ 。最终, 由于 $A_{n-a} \subseteq A$, 我们的引理得证。 \square

注意到当 $0 < s < 1$ 时，如果我们要求 $H_q(\gamma) < 1$ ，那么 γ 相对来说需要非常小。通过图4.2可以对参数之间的关系有更直观的认识。接下来，我们将根据前面的讨论方法，给出定理4.3的简要证明。

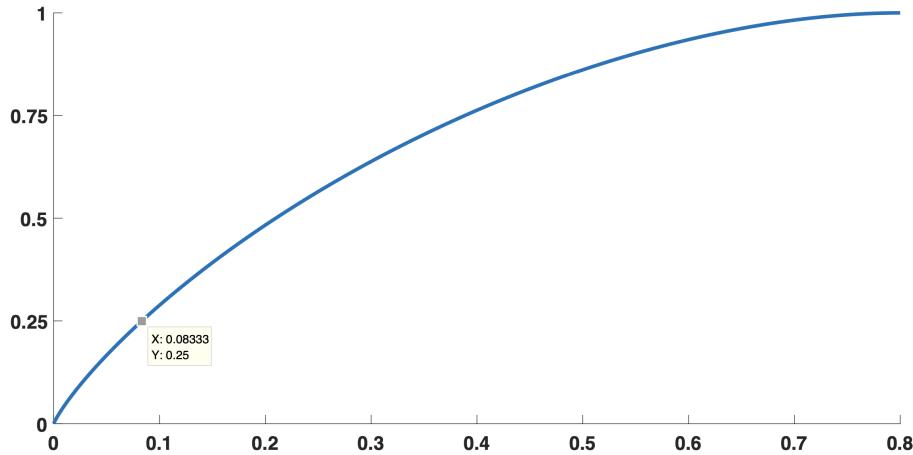


图 4.2 $H_5(x)$ with $0 < x < \frac{1}{5}$, $s = \frac{1}{4}$, $\gamma = 0.08333\cdots$

定理4.3的简要证明. 对于一个满足Turán数为 $\text{ex}(n, H) = cn^{2-s}$ 的二部图 H 和一个满足 $|A| \geq q^{(1-c_6)n}$ 的子集 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ ，我们接下去的目标是在集合 A 中嵌入大约 $\Omega(n)$ 数目的不同的距离图 H 的等距副本。引理4.11告诉我们，如果 $|A| > q^{(1-\beta(1-\frac{H_q(\gamma)}{s}))n+\epsilon}$ ，其中 $\epsilon = \frac{\log_q 4c}{s}$ 以及 $k = \lfloor \frac{1}{\gamma} \rfloor$ ，那么对于任何素数 p 满足 $p \in (\frac{\beta n}{k}, \gamma n)$ ，都会存在一个距离图 H ，满足其每条边上的Hamming距离均包含在集合 $\{p, 2p, \dots, kp\}$ 中。利用推论4.3，我们可以将每个偶数 $d \leq (\gamma - \lambda)n$ 表达成四个大小接近的素数之和，即 $d := p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ，满足 $|p_i - \frac{d}{4}| < d^\theta$ 对每个 $i = 1, 2, 3, 4$ 均成立，其中 $\theta > \frac{11}{20}$ 。不失一般性地，我们可以假设 $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$ 。进一步地，不等式 $kp_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq n$ 必然成立，因为 $d + (k-1)p_1 < n$ 。与定理4.2的证明类似，我们可以多次利用引理4.10，并且结合我们前面已经证明的辅助性引理4.4和引理4.11。对于每个满足 $\frac{(\beta+\lambda)n}{k} < d < (\gamma-\lambda)n$ 的偶

数, 我们固定一种加法表示 $d := p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, 其中 $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$ 。最终我们可以证明, 如果一个集合 $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 满足 $|A| > q^{(1-c_6)n}$, 那么 A 会包含 H 的等距副本, 其每条边的 Hamming 距离都是形如 $d + (j - 1)p_1$ 的正整数, 其中 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。这就给出了大约 $\Omega(n)$ 种不同的距离图 H 的等距副本。具体的计算过程我们就不在此赘述。 \square

§ 4.6 总结与展望

在这里, 我们简要地总结我们所做的工作, 并讨论一些也许可以继续深入研究的问题。首先, 在基于 Hamming 距离下 Erdős-Falconer 问题中, 我们在假设 q 是固定的, 且 n 趋于无穷大的情况下, 证明了对于任意的正比例 $0 < \alpha < 1$, 我们都能找到对应的 $\beta = \beta(\alpha) > 0$, 使得我们可以保证, 任何有限域的向量空间的子集 $I \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 只要满足 $|I| > q^{(1-\beta)\cdot n}$, 我们就能在其距离集中找到 αn 个不同的 Hamming 距离。其中关于 $\beta = \beta(\alpha) > 0$ 的定量结果会依赖于数论和编码理论中的几个结果。未来的研究中, 如果能够使用不同的想法去改进 $\beta(\alpha)$ 的定量结果, 这会是很有趣的事情。

对于欧式距离和 Hamming 距离下的 Erdős-Falconer 型问题, 它们之间存在一些有趣的差异。例如, 在欧式距离下, Murphy 和 Petridis[151] 证明存在一个子集 $E \subseteq \mathbb{F}_q^2$ 使得 $|E| = q^{\frac{4}{3}}$ 和 $\frac{|\Delta(E)|}{q} \leq \frac{1}{2}$, 在这里 $q \rightarrow \infty$ 。在我们的问题中, 我们没有面临 $\frac{1}{2}$ 比例的这种限制。此外, Guth 和 Katz[98] 证明了一个众所周知的结果, 他们证明了平面上的任何 n 个点的集合能够至少给出 $\Omega(\frac{n}{\log n})$ 种不同的距离。那么在 Hamming 距离下, 类似的问题可以描述为, $I \subseteq \mathbb{F}_q^n$ 的大小需要多大, 才能保证 $\Delta(I)$ 至少包含 $\Omega(\frac{n}{\log n})$ 个不同的 Hamming 距离? 引理 4.4 表明, 一个大小超过 $q^{\frac{(1+H_q(1/2))\cdot n}{2}}$ 即可, 其中这里的设定是 $n \rightarrow \infty$ 。我们认为, 改进这一问题的结果也是很有意义的。

除了欧式距离和Hamming距离之外，还有许多其他不同的距离度量在编码理论和应用中发挥着重要作用。所以我们认为，在更广泛的空间而非有限域中研究Erdős-Falconer类型问题也将会很有趣。我们列出了其中一些以供进一步研究。第一个我们希望考虑的空间是置换群，由于置换码在DNA存储和闪存等各种应用中的潜力而得到了广泛的研究。我们一般把 n 阶置换群中的置换表示成一个向量 $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ 。

1. **Hamming距离：**我们可以将置换码视为复合常重码的特例（参见文献[40, 179]）。利用这个关系，我们可以得到与定理4.1类似的结果，即如果一个子集 $\mathcal{C} \subseteq S_n$ 满足 $|\mathcal{C}| > (n!)^{1-\beta}$, 其中 $\beta = \beta(\alpha) > 0$ ，那么这个集合可以确定 $\alpha \cdot n$ 个不同的Hamming距离。如果希望改进这一结果，可能需要有不同的方法。
2. **Kendall τ -距离：**给定一个置换 $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ ，一个相邻转置是指两个相邻位置的数码 $\pi(i), \pi(i+1)$ 的位置交换。转置后的置换就变成了 $(\pi(1), \dots, \pi(i-1), \pi(i+1), \pi(i), \pi(i+2), \dots, \pi(n))$ 。那么Kendall τ -距离 $d_K(\sigma, \pi)$ 则指的是将一种置换转换为另一种置换所需的最小相邻转置数。在文献[180]中有很多关于该距离下置换码的结果，其中可以在某些条件下确定最大反码。然而，我们在本节中提到的方法在该距离下并不能得到好的结果，因为在Kendall τ -距离下，元素之间难以用直和来进行粘连。
3. **区组距离：**给定一个置换 $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ ，我们定义特征集 $A(\pi)$ 为 $A(\pi) \triangleq \{(\pi(i), \pi(i+1)) : 1 \leq i \leq n-1\}$ 。那么区组距离可以用下式表示：

$$d_B(\sigma, \pi) = |A(\pi) \setminus A(\sigma)|.$$

区组距离下，给定半径的球的体积已有明确的计算方法(可以参见文献[184])，但是我们并不了解基于该距离下的最大反码的结构特征。

我们也对Lee度量(有时也称为zig-zag度量或者 ℓ_1 范数)感兴趣，这类距离度量也在很多实际应用中发挥着巨大作用。此外，有一个著名的Golomb-Welch猜想(参见文献[103]和最近的进展[132, 188])就是基于这个度量。对于任意两个码 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ ，它们之间的Lee距离被定义为

$$d_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|.$$

然而，当我们考虑Lee度量下的Erdős-Falconer问题时，情况会更糟，因为我们只知道如何估计Lee距离下球的体积。因此我们需要更多的新思路来理解这个问题。

我们进一步研究了Erdős-Falconer问题在图论版本的推广，在我们的证明过程中我们给出Delsarte不等式在图论层面上的一个新推广，但我们只给出了这个极值问题的上界，不知道它是否是紧。此外，我们在这个推广问题中采用的方法只适用于二部图，因此对于非二部图能否获得类似的结果？这些都将是未来值得重点研究的问题。

Chapter 5 多个奇圈与完全图的多染色Ramsey数

§ 5.1 简介

对于给定的图 H 和一个正整数 k , 多染色Ramsey数 $R_k(H; K_m)$ 指得是最小的数 N , 使得用 $k+1$ 种颜色对 K_N 的每条边染色后, K_N 要么会包含有颜色全是某个 $1 \leq i \leq k$ 的单色 H , 要么会包含颜色全是 $k+1$ 的单色 K_m 。本节我们主要研究当 H 是奇圈 $C_{2\ell+1}$ 且 $m \rightarrow \infty$ 时, $R_k(H; K_m)$ 的下界。对于 $k=1$, Erdős、Faudree、Rousseau和Schelp[61]证明了上界 $R_1(C_\ell; K_m) = O(m^{1+\frac{1}{t}})$, 其中 $t = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil - 1$ 。当 $t=1$ 时, Ajtai、Komlós和Szemerédi[5]给出了改进的上界 $R_1(C_3, K_m) = O(\frac{m^2}{\log m})$ 。该上界后来被Sudakov[165]以及Li和Zang[134]分别推广, 他们证明了 $R_1(C_{2\ell+1}; K_m) = O(\frac{m^{1+\frac{1}{\ell}}}{\log^{1/\ell} m})$ 。关于匹配的下界结果, $R_1(C_3, K_m) = \Omega(\frac{m^2}{\log m})$ 在文献[124]中被证明。此外, 通过图上随机过程方法, Bohman和Keevash[19]证明了 $R_1(C_\ell; K_m) = \Omega(\frac{m^{(\ell-1)/(\ell-2)}}{\log m})$ 。对于 $\ell \in \{5, 6, 7, 10\}$, Mubayi和Verstraëte[149]通过不同的方法给出了 $R_1(C_\ell; K_m)$ 目前最好的下界。当 $k \geq 2$, Alon和Rödl在文献[7]中证明了 $R_k(C_3; K_m) = \Theta(m^{k+1} \text{poly log } m)$ 以及一般的上界 $R_k(C_{2\ell+1}; K_m) = \Omega(m^{1+\frac{k}{2\ell-1}} / (\log m)^{k+\frac{2k}{2\ell-1}})$ 。对于较大的 ℓ , Keevash、Long和Skokan[122]最近证明了当 $m \geq 3$, $\ell \geq C \frac{\log m}{\log \log m}$, 其中 $C \geq 1$ 时, $R_1(C_\ell, K_m) = (\ell-1)(m-1) + 1$ 。有关Ramsey问题的更多结果, 我们建议读者参考综述[46, 157]和其中的参考文献。受最近的

文献[182]中的随机同态方法的启发，我们改进了当 H 分别为 C_5 或 C_7 时， $R_k(H; K_m)$ 的下界结果，其中我们的构造想法也受文献[149]中构造的启发。

定理5.1. 对于给定的正整数 k ，以及 $m \rightarrow \infty$ ，

$$R_k(C_5; K_m) = \Omega\left(\left(\frac{m}{\log m}\right)^{\frac{3k}{8}+1}\right),$$

与

$$R_k(C_7; K_m) = \Omega\left(\left(\frac{m}{\log m}\right)^{\frac{2k}{9}+1}\right).$$

我们的结果改进了之前的下界 $R_k(C_5; K_m) = \Omega(m^{\frac{k}{3}+1} \text{poly log } m)$ 和 $R_k(C_7; K_m) = \Omega(m^{\frac{k}{5}+1} \text{poly log } m)$ 。当 $k = 1$ 时，Mubayi和Verstraëte [149]证明了 $R_1(C_5; K_m) = \Omega(m^{\frac{11}{8}})$ 和 $R_k(C_7; K_m) = \Omega(m^{\frac{11}{9}})$ 。

§ 5.2 定理5.1的证明

我们的第一步是构建一个既不包含 C_5 也不包含较大独立集的图。该构造基于Mubayi和Verstraëte最近的工作[149]。通过 (q, q^3) 阶广义六边形的存在性（参见文献[50, 88, 174]）可以给出，存在一个二部图 $G = A \cup B$ ，点集的大小为 $|A| = (q+1)(q^8 + q^4 + 1)$ 和 $|B| = (q^3 + 1)(q^8 + q^4 + 1)$ ，使得 A 中的每个顶点的度数均为 $q^3 + 1$ ， B 中每个顶点的度数为 $q+1$ ，其中 q 是素数幂，并且 G 的围长(Girth)至少为12，即， G 中不存在长度小于12的圈。对于一个顶点 $a \in A$ ，我们可以将其邻点集合 $N_G(a)$ 均匀随机地划分为两部分 S_a 和 T_a ，然后我们在 S_a 和 T_a 之间构造一个完全二部图。我们对 A 中的所有顶点进行上述操作，这样的话，我们最后会在顶点集 B 上得到一个新图 F ，其中 $V(F) = B$ 。注意到，新图 F 中没有多重边，这是因为 G 是中不包含 C_4 。此外， F 中也不包含 C_5 ，否则的话，根据图 F 的定义， F 中的 C_5 会

诱导出 G 中产生 C_{10} 的副本，这就会和图 G 的围长条件相矛盾。同理， F 中也不包含三角形 K_3 。接下来，我们断言，不存在大小为 $t = (1 + o(1))q^8$ 的独立集这一事件的发生概率是正的。我们要证明这个断言，首先令 I 是 F 的子集，满足 $|I| = t$ 。对于点 $a \in A$ ，我们设 $t_a = |I \cap N_G(a)|$ ，很容易看出 $I \cap N_G(a)$ 是一个 F 中的独立集的概率为

$$\mathbb{P}[e(I \cap N_G(a)) = 0] = 2^{1-t_a}.$$

又因为 G 不包含 C_4 ，因此对于每个点 $a \in A$ 来说，前面提到的分划都是独立的。注意到，每个 B 中的点的度数都是 $q + 1$ ，因此我们有 $\sum_{a \in A} t_a = (q + 1)t$ ，综上， I 在 F 中构成独立集的概率为

$$\mathbb{P}[e(I) = 0] = \prod_{a \in A} 2^{1-t_a} = 2^{|A| - \sum_{a \in A} t_a} = 2^{|A| - (q+1)t}.$$

令 X 为 F 中大小为 t 的独立集的数量。由于子集 I 一共有 $\binom{|F|}{t}$ 个不同的选择，那么根据期望的线性性， F 中大小为 t 的独立集的数目的期望为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \binom{|F|}{t} \mathbb{P}[e(I) = 0] = \binom{|F|}{t} \prod_{a \in A} 2^{|A| - (q+1)t} \\ &\leq 2^{t \log_2 |F| + |A| - (q+1)t} = 2^{|A| - (q+o(q))t} < 1. \end{aligned}$$

现在我们固定一个图 F' ，满足 F' 不包含 C_3 和 C_5 ，并且不包含大小为 $t = (1 + o(1))q^8$ 的独立集，注意到，上述讨论已经证实了这样的 F' 的存在性。接下来，我们称 F' 是图 F 的 r -膨胀，如果 F' 是通过将 F 的每个顶点替换为大小为 r 的独立集，以及将 F 的每条边替换为完全二部图 $K_{r,r}$ 来获得的。我们断言，在 F' 中大小为 m 的独立集的数量最多为 $t \binom{|F|}{t} \binom{rt}{m}$ 。为了说明这一点，我们发现，由于在 F 中没有大小为 t 的独立集，因此最多只有 $\sum_{t' \leq t} \binom{|F|}{t'}$ 个不同的区块包含 F' 中的独立集。此外， F' 中大小为 m 的独立集的每个顶

点都是从这些区块中的 rt' 个点中产生的，这是因为每个区块正好包含 r 个顶点。由于对于足够大的 q ，我们有 $\sum_{t' \leq t} \binom{|F'|}{t'} \binom{rt'}{m} \leq t \binom{|F'|}{t} \binom{rt}{m}$ ，因此该断言成立。

然后我们证明在顶点集 $V(F')$ 上存在 $k+1$ 个图 $F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}$ ，使得当 $1 \leq i \leq k$ 时 F_i 与 F' 同构，并且 F_{k+1} 是点集为 $V(F')$ ，边集由所有不属于任何图 F_i 的边构成，其实可以将其看作补图。此外， F_{k+1} 不包含 K_m 。为了证明这一点，我们在 $V(F')$ 上独立地选择 F' 的 k 个随机副本 F_1, F_2, \dots, F_k ，这里每个随机副本 F_i 是通过随机排列 F' 的顶点得到的图。那么图 F_{k+1} 由以上规则确定，即 F_{k+1} 是 $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ 的补。对于 $V(F')$ 中 $|M| = m$ 的固定子集 M ， M 在任何 F_i 中形成独立集的概率最多为 $\frac{t}{\binom{|F'|}{t}} \binom{|F'|}{m}$ ，故 M 在 F_{k+1} 中构成一个团的概率至多为 $\left(\frac{t \binom{|F'|}{t} \binom{rt}{m}}{\binom{|F'|}{m}}\right)^k$ 。因此，我们只需要证明 F_{k+1} 中 K_m 的数目的期望至多为

$$\binom{|F'|}{m} \left(\frac{t \binom{|F'|}{t} \binom{rt}{m}}{\binom{|F'|}{m}} \right)^k < 1.$$

那么我们只需要证明

$$t^k \cdot \binom{|F'|}{t}^k < \frac{\binom{r|F'|}{m}^{k-1}}{\binom{rt}{m}^k}.$$

我们设定 $r := c_k \left(\frac{|F'|}{t}\right)^{k-1} = (1 + o(1))c_k q^{3(k-1)}$ ， $m := t \log t = d_k q^8 \log q$ ，其中 $c_k, d_k > 0$ 为适当的常数。那么当 t 充分大， $c > 0$ 为固定的常数时，利用估计 $(\frac{n}{x})^x < \binom{n}{x} < (\frac{en}{x})^x$ 以及 $t^{ct} < (\log t)^{t \log t}$ ，我们有

$$t^k \cdot \binom{|F'|}{t}^k < t^{(1+o(1))\frac{(13t+8)k}{8}} < \frac{(t \log t)^{t \log t}}{t^{t \log t}} < \frac{m^m}{t^m e^{mk} c_k^{mk}} < \frac{\binom{r|F'|}{m}^{k-1}}{\binom{rt}{m}^k}.$$

因此， $\binom{|F'|}{m} \left(\frac{t \binom{|F'|}{t} \binom{rt}{m}}{\binom{|F'|}{m}} \right)^k < 1$ 成立。因此，满足我们要求的 F_{k+1} 存在的概率是正的。

最后，我们固定了所需的一串图序列 F_1, F_2, \dots, F_{k+1} ，如上所述。令 $N := |F'| = r|F|$ ，对于每条边，我们考虑它所在的 F_i 中最小的那个数 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ，并将这条边染成第 i 种颜色。此外，如果不存在这样的 i ，我们用颜色 $k + 1$ 给这条边染色。通过上面的分析，我们可以看到对于 $1 \leq i \leq k$ ， K_N 种不会包含颜色为 i 的单色 C_5 ，因为 F 是既不包含 C_3 也不包含 C_5 。而且 K_N 也不包含颜色为 $k + 1$ 的单色 K_m 。最后，通过代入 $N = r|F| = \Omega(q^{3k+8})$ 和 $m = d_k q^8 \log q$ 进行简单的计算，我们有 $R_k(C_5; K_m) = \Omega\left(\left(\frac{m}{\log m}\right)^{\frac{3k}{8}+1}\right)$ 。至此，我们就证明完关于奇圈 C_5 的结果。

通过类似的分析，我们也可以得到 $R_k(C_7; K_m)$ 的下界。其中，我们在证明中所需的围长至少为 16 的图可以从 Ree-Tits 的八边形构造中得到（关于该构造可以参见文献[50, 88, 174]），由于证明非常类似，我们再次不赘述具体的细节。至此，该定理已证明完毕。

§ 5.3 总结与展望

在文献[182]中，Wigderson 指出随机诱导子图方法和随机膨胀方法密切相关，都是更一般的随机同态方法框架的具体形式。我们同意这一观点，并且在某种意义上我们可以将随机诱导子图和随机膨胀视为同一个对象进行数学层面上的处理。在我们新结果的证明中，我们更偏好使用随机膨胀方法，实际上，我们也可以通过随机同态方法来获得相同的渐近下界。在这里，我们需要指出的是，随机膨胀方法有一定的局限性，例如，当图 H 是二部图时，我们这里用到的随机膨胀方法就不能奏效了，除非选择其他方式来定义这里所谓的“膨胀”。

另外，似乎想要获得 $R_k(C_{2\ell+1}; K_m)$ 紧的渐近结果是一件极为困难

的事情，即使对于最简单的情况 $R_1(C_5; K_m)$ 也是如此。目前已知最好的上界 $R_1(C_5; K_m) = O(\frac{m^{3/2}}{\sqrt{\log m}})$ 可以参见文献[38]。对于多色情况，我们猜测 $R_k(C_5; K_m) = O(m^{\frac{k}{2}+1} \text{poly log } m)$ ，尽管我们现在还无法证明，但我们相信这个上界是成立的，因此这将是一个值得继续考虑的问题。

Chapter 6 区组度量下的置换码

§ 6.1 简介

令 S_n 为所有长度为 n 的置换构成的集合。置换码指是 S_n 的具有某些特定约束条件子集。在[184]中，Yang、Schoeny和Dolecek引入了区组度量下的置换码，该度量计算起来非常方便，并且与广义Cayley度量具有相同的阶数。通过度量嵌入方法，他们将广义Cayley度量中的编码构造问题转换为区组度量下置换码的构造问题。利用一些计数方法和编码理论的基本思想，他们还获得了一些关于置换码中码字最大数目的理论界，例如Gilbert-Varshamov型下界和球填充型上界，同时，他们也给出了若干基于区组度量下的置换码的构造。

在本节中，我们将进一步考虑区组度量下 S_n 中的置换码问题。首先，我们回顾一些基于区组度量下的置换码的定义和一些基本情况。

令 $[n]$ 表示 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 。 $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ 是在 $[n]$ 上的一个置换，我们一般称之为置换的向量表示法。符号 \circ 表示置换的复合。具体来说，对于两个置换 σ 和 τ ，它们的复合，记为 $\sigma \circ \tau$ ，即对所有 $i \in [n]$ ，有 $\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$ 。此操作下的所有置换形成非交换群 S_n ，且满足 $|S_n| = n!$ 。另外，对于一个置换 σ 中从 i 到 j 的子序列写为 $\sigma[i : j] \triangleq (\sigma(i), \sigma(i + 1), \dots, \sigma(j))$ 。

定义6.1. 一个置换 $\pi \in S_n$ 被称为极小的，当且仅当没有 π 中的连续元素，

在单位置换 $e = (1, 2, \dots, n)$ 中也是连续的。即，对于所有的 $1 \leq i \leq n-1$ ，我们都有 $\pi(i+1) \neq \pi(i) + 1$ 。另外，我们记所有 S_n 中的极小的置换构成的集合为 \mathcal{D}_n 。

接下去我们要给出置换码的区组度量的定义。

定义6.2. 我们称两个置换 $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ 的区组距离 $d_B(\pi_1, \pi_2)$ 等于 d ，如果 d 为满足

$$\pi_1 = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{d+1}), \pi_2 = (\psi_{\sigma(1)}, \psi_{\sigma(2)}, \dots, \psi_{\sigma(d+1)}),$$

的正整数，其中 $\sigma \in \mathcal{D}_{d+1}$ ，以及对于 $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_d < i_{d+1} = n$ 和 $1 \leq k \leq d+1$ ，有 $\psi_k = \pi_1[i_{k-1} + 1 : i_k]$ 。

上述定义表明，为了将 π_1 变成 π_2 ，一种方法是首先将 π_1 分成 $d+1$ 段，即有 $\pi_1 = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{d+1})$ ，然后根据置换 $\sigma \in \mathcal{D}_{d+1}$ 进行区组层面上的操作。再利用 σ 中的约束来说明 $d_B(\pi_1, \pi_2) = d$ 当且仅当 $d+1$ 是 π_1 需要的最小操作次数。当然，我们同样会感觉到，这个定义在也不够直观，因此Yang、Schoeny和 Dolecek在文献 [184]中找到了另一种表达方式，即我们可以通过置换的特征集(*characteristic set*)来非常显式地表示两个置换之间的区组距离。

定义6.3. 一个置换 $\pi \in S_n$ 的特征集 $A(\pi)$ 可以被定义为 π 中所有连续对组成的集合，即有

$$A(\pi) \triangleq \{(\pi(i), \pi(i+1)) \mid 1 \leq i < n\}.$$

注意到，置换的特征集等价于通过在 n 个顶点上的有向哈密顿路径来表示置换，即， π 对应的哈密顿路径是 $\{(x, y) \mid x, y \in [n], (x, y) \in A(\pi)\}$ 。

下面的想法将在我们的证明中经常使用。给定 $A(\pi)$ 的一个子集，对应于该子集的有向边会构成多个有向路径的不交并（孤立的顶点 v 也将被视为以 v 开始和结束的路径）。然后可以通过将这些有向路径连接成有向哈密顿路径来获得 π ，反之，我们可以判断出哪些点对构成的集合无法作为一个特征集的子集。

令 \mathcal{P}_n 为集合 $\{(i, j) \mid i \neq j, i \in [n], j \in [n]\}$ 。那么有 $|\mathcal{P}_n| = n(n - 1)$ 。对于每个置换 $\pi \in S_n$ ，其对应的特征集 $A(\pi)$ 为 \mathcal{P}_n 的大小为 $|A(\pi)| = n - 1$ 的子集。区组度量可以通过特征集来表征，然后可以导出该度量的一些基本属性。这些结论在文献[184]中已给出。

引理6.1. 对于置换 $\pi_1, \pi_2 \in S_n$,

$$d_B(\pi_1, \pi_2) = |A(\pi_1) \setminus A(\pi_2)|。$$

引理6.2. 对于 $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_n$ ，区组距离 d_B 满足以下几个性质：

1. (对称性) $d_B(\pi_1, \pi_2) = d_B(\pi_2, \pi_1)$ 。
2. (左平移不变性) $d_B(\pi_3 \circ \pi_1, \pi_3 \circ \pi_2) = d_B(\pi_1, \pi_2)$ 。
3. (三角不等式) $d_B(\pi_1, \pi_3) \leq d_B(\pi_1, \pi_2) + d_B(\pi_2, \pi_3)$ 。

我们在这里给出以下示例，这将展示如何按照上述两种不同方式计算两个置换之间的区组距离。

例6.1. 令 $\pi_1 = (4, 8, 3, 2, 6, 7, 5, 1, 9)$, $\pi_2 = (6, 7, 8, 3, 2, 5, 1, 9, 4)$ 。那么他们的特征集分别是

$$A(\pi_1) = \{(4, 8), (8, 3), (3, 2), (2, 6), (6, 7), (7, 5), (5, 1), (1, 9)\},$$

$$A(\pi_2) = \{(6, 7), (7, 8), (8, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 1), (1, 9), (9, 4)\}。$$

因此我们可以得到

$$d_B(\pi_1, \pi_2) = |A(\pi_1) \setminus A(\pi_2)| = |\{(4, 8), (2, 6), (7, 5)\}| = 3.$$

而假如我们利用定义6.2来计算 $d_B(\pi_1, \pi_2)$, 那么首先, 我们得先寻找 ψ_i , 其中 $1 \leq i \leq 4$, 以及一个辅助置换 $\sigma \in \mathcal{D}_4$ 如下:

$$\psi_1 = (4), \psi_2 = (8, 3, 2), \psi_3 = (6, 7), \psi_4 = (5, 1, 9), \sigma = (3, 2, 4, 1).$$

由此我们可以得到

$$\pi_1 = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4),$$

$$\pi_2 = (\psi_{\sigma(1)}, \psi_{\sigma(2)}, \psi_{\sigma(3)}, \psi_{\sigma(4)}),$$

因此, 我们可以看出 $d_B(\pi_1, \pi_2) = 3$ 。

但是我们需要注意, 通常情况下, 找这样的 ψ_i 和 σ 来计算两个置换之间的区组距离是非常困难的, 但是表达两个特征集之间的差异显然会容易得多。接下来我们介绍区组度量下的置换码。

定义6.4. 对于正整数 n 和 d , 称 $\mathcal{C} \subseteq S_n$ 为一个基于区组距离下的 (n, d) -置换码, 如果对于任何两个集合 \mathcal{C} 中的不同的置换 $\sigma, \pi \in \mathcal{C}$, 我们都有 $d_B(\sigma, \pi) \geq d$ 。另外, 我们记 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 为一个 (n, d) -置换码能包含的最大码字数目。

编码理论中最基本的问题就是研究一个给定条件的编码能包含的最大码字数目, 因此研究 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的理论结果是非常重要的。 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的经典上界和下界已在文献[184]中提出, 即经典的球填充上界和Gilbert-Varshamov型下界。我们知道, 这两类经典的理论界都会以基于区块距离下相对应的球的体积估计得到。因此我们要介绍这方面的基本情况。

定义6.5. 对于给定的整数 n 、 t 和给定的球心 $\pi \in S_n$, 以 π 为球心的 t -区组球被定义为所有满足 $d_B(\pi, \sigma) \leq t$ 的置换 $\sigma \in S_n$ 形成的集合。我们将以 π 为球心的 t -区组球表示为 $b_B(n, t, \pi)$ 。

注意到, 根据区组度量的左平移不变性, $b_B(n, t, \pi)$ 的大小与球心 π 的选取无关, 因此我们可以将这样的球的体积表示为 $|b_B(n, t)|$ 。对于该体积, 目前已有如下估计:

引理6.3. [184] 对于正整数 n 和 t , 当 $t \leq n - \sqrt{n} - 1$,

$$\prod_{i=1}^t (n - i) \leq |b_B(n, t)| \leq \prod_{i=0}^t (n - i).$$

因此, 对应的球填充上界和Gilbert-Varshamov型下界就可以由此给出:

引理6.4. [184] 对于正整数 n 和 t , 我们令 $d = 2t + 1$, 那么我们可以给出关于 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的如下理论界。

$$\frac{n!}{|b_B(n, 2t)|} \leq \mathcal{C}_B(n, d) \leq \frac{n!}{|b_B(n, t)|}.$$

在文献[184]中, 作者提出了几种 (n, d) -置换码的构造, 其中 $d = 2t + 1$, 码字个数为 $\frac{n!}{q^{2d-3}}$, 其中 $n(n - 1) \leq q \leq 2n(n - 1)$ 是一个素数。此外[184]中还给出了一些明确的系统性编码构造和解码算法。

在这个主题中, 我们得到了若干改进的理论界限和编码的构造。首先, 我们在渐近意义下, 改进了经典 Gilbert-Varshamov 型下界, 改进的幅度大概为 $\Omega(\log n)$ 倍。具体的定理如下。

定理6.1. 当 $d \geq 3$ 为给定的正整数, 令 $n \rightarrow \infty$, 那么会存在一个基于区块度量的 (n, d) -置换码, 其码字个数至少为

$$\mathcal{C}_B(n, d) = \alpha(\mathcal{G}_{n,d}) \geq \frac{n!}{10\Delta} (\log_2 \Delta - \frac{1}{2} \log_2 (\frac{P(n, d)}{3})) = \Omega(\frac{n! \log n}{n^{d-1}}).$$

在渐近意义上，其为经典的*Gilbert-Varshamov*型下界的 $\Omega(\log n)$ 倍。

其次，我们在§ 6.4会提出了一种新的置换码构造，它将[184]中给出的编码构造的码字个数提高了 $\Theta(n^{2d-4})$ 倍。

第三，我们给出了一个新的类型的上界结果，这个上界在 d 较大时，会优于经典的球填充界，我们在后面会给出一些具体的对比。

定理6.2. 对于正整数 n 和 d ,

$$\mathcal{C}_B(n, d) \leq \frac{\binom{n}{d} \binom{n}{d} (n-d)!}{\binom{n-1}{n-d}}.$$

本节的其余部分如下。在§ 6.2中，我们将介绍了一些极值图论相关的理论和结果，而后我们将建立了置换码和某个特定的图的独立集之间的对应关系。*Gilbert-Varshamov*型下界的渐近改进将在§ 6.3 中进行介绍。在§ 6.4中，我们主要介绍受二元常重码启发所得到的新的编码构造方案。§ 6.5中我们将证明定理6.2。最后，我们将在§ 6.6对我们的结果进行总结。

§ 6.2 图论模型

我们在这里简要的介绍若干图论相关的内容。一个简单图 G 一般由顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 组成。每条边有一对顶点构成。顶点 v 的邻点集合在这里记为 $\Gamma(v)$ 。 v 的邻点图是由 $\Gamma(v)$ 诱导的子图。 $|\Gamma(v)|$ 的大小称为顶点 v 的度数。这里我们同样记 $\Delta(G)$ 为图 G 的最大顶点度数。图的独立集是图的顶点集的一个子集，且满足其中每个顶点对都不连边。 G 中最大独立集的大小称为独立数，我们记为 $\alpha(G)$ 。

在本节中，我们将引入置换码和对应的图的独立集之间的关系。我们首先将所有候选码字的集合作为图的顶点集（例如，当我们考虑长度

为 n 的二元码时, 顶点集可以是 $\{0, 1\}^n$, 以及当我们考虑置换码时, 该顶点集就是 S_n)。两个顶点连边, 当且仅当在对应的度量下, 他们之间的距离小于 d 。然后我们可以将该图的任何独立集作为满足极小距离条件的编码, 因为每两个不同的码字的距离不小于 d 。因此, 我们在图的独立集和极小距离为 d 的编码之间建立了联系。于是, 研究编码的码字个数, 就可以通过分析对应图的独立集的大小。这种方法已经在研究多种编码问题中发挥了重要的作用。比如在Hamming距离下的置换码。Gao、Yang和Ge [82] 考虑了当极小距离 d 给定且 n 趋于无穷大时, 将Gilbert-Varshamov型下界改进了 $\Omega(\log n)$ 倍。Tail、Vardy和Verstraëte[167]在 $\frac{d}{n}$ 固定且 n 趋于无穷大, 将Gilbert-Varshamov型下界提高可 $\Omega(n)$ 倍。最近, Wang、Zhang和Ge [180]利用染色方法分析了最大独立集数, 证明了当极小距离 d 固定且 n 趋于无穷大时, 也可以将Gilbert-Varshamov型下界提高了 $\Omega(n)$ 倍。

这里我们介绍一些关于局部稀疏图的最大独立集数的结果。我们可以观察到, 当一个图的每个顶点的邻点集都是独立集时, 那么该图是不包含三角形 K_3 的。Ajtai、Komlós和Szemerédi[5]给出了不包含三角形的图中, 最大独立集数的下界。这是一个非常经典的结果, 其方法也是引起了Ramsey理论的蓬勃发展。

引理6.5. 令 G 是一个最大度数为 Δ 的图。如果 G 不包含三角形 K_3 作为子图, 则有

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{8\Delta} \log_2 \Delta.$$

注意到, 上面的引理中, 不包含三角形这个条件相对比较强, 我们可以适当放宽一下条件, 比如说, 如果一个图包含的三角形总数目不那么多, 我们也可以得到相对较好的最大独立集数的下界估计, 这个结果

的证明可以参见教材[20]。

引理6.6. 令 G 是一个最大度数为 Δ 的图。如果 G 包含至多 T 个三角形 K_3 , 则有

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{10\Delta} \left(\log_2 \Delta - \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{T}{|V(G)|} \right) \right).$$

注意到, 当顶点的邻点集诱导的子图比较稀疏时, 一个图中的三角形数目就会相对较少。Jiang和Vardy[117]将上述结果推广如下。

引理6.7. 令 G 是一个最大度数为 Δ 的图。如果对任何一个 G 中的顶点 $v \in V(G)$, 由它的邻点集诱导的子图至多只包含 P 条边, 则有

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{10\Delta} \left(\log_2 \Delta - \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P}{3} \right) \right).$$

§ 6.3 漐近下界的改进

在我们证明我们的主要漐近结果之前, 我们发现, 在一些特殊参数情况下, 我们可以完全确定 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的值。

定理6.3. 对于正整数 n , 下列结果成立。

- $\mathcal{C}_B(n, 1) = n!$ 。
- $\mathcal{C}_B(n, 2) = (n - 1)!$ 。
- $\mathcal{C}_B(n, n - 1) \leq n$, 其中等式成立当且仅到 $n \notin \{3, 5\}$ 。

证明. 1. 第一个是平凡的, 只要选取所有 S_n 中的元素即可, 因此我们有 $\mathcal{C}_B(n, 1) = n!$ 。

2. 很容易验证的是，对于任何两个置换 π 和 σ , $d_B(\pi, \sigma) = 1$ 当且仅当 σ 是 π 的循环移位。换句话说，如果 $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ 且 $d_B(\pi, \sigma) = 1$, 则 σ 就会形如 $\sigma = (\pi(t), \dots, \pi(n), \pi(1), \dots, \pi(t-1))$, 其中 t 为某个满足 $2 \leq t \leq n$ 的正整数。在循环移位的操作下, S_n 被划分为 $(n-1)!$ 个等价类，每个类可被称为循环置换。通过从每个等价类中选择一个任意置换，我们就得到了一个码字个数为 $(n-1)!$ 的 $(n, 2)$ -置换码。
3. 对于 $(n, n-1)$ -置换码中的任意两个不同置换 π 和 σ , 根据引理6.1, 它们的特征集是不相交的。由于每个特征集都是 \mathcal{P}_n 的 $(n-1)$ -元子集, 而 $|\mathcal{P}_n| = n(n-1)$, 因此码字的数量最多为 n 。我们再考虑取到等号的情况，我们将分如下几类情况进行讨论。
- (a) 假设 n 是偶数, 记 $n = 2p$ 。当 $1 \leq i \leq p$, 定义 $a_{2i-1} := 2i - 1$, 以及当 $1 \leq i \leq p-1$, 定义 $a_{2i} := 2p - 2i$ 。即, $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) := (1, 2p-2, 3, 2p-4, \dots, p, \dots, 4, 2p-3, 2, 2p-1)$ 。那么对于每个 $1 \leq i \leq n$, 第*i*个码字为 $(i, i + a_1, i + a_1 + a_2, \dots, i + \sum_{j=1}^{n-1} a_j, \dots, i + \sum_{j=1}^{n-1} a_j)$, 其中每个数目都取除以 n 后的余数 (这里我们会使用 n , 而不是0)。容易验证, 对于 $1 \leq i \leq p-1$, 我们有 $\sum_{j=1}^{2i} a_j \equiv -i \pmod{n}$, 以及对于 $1 \leq i \leq p$, 我们有 $\sum_{j=1}^{2i-1} a_j \equiv i \pmod{n}$ 。因此对于 $1 \leq k \leq n$, $\sum_{j=1}^k a_j$ 在模 n 意义下是各不相同的。所以上面定义的这些 n 个置换便是 S_n 中的码字。对于满足 $d - c \equiv a_k \pmod{n}$ 的每对 (c, d) , 它只出现一次, 在第*i*个码字中, 其中 $c \equiv i + \sum_{j=1}^{k-1} a_j$, $d \equiv i + \sum_{j=1}^k a_j$ 。
- (b) 假设 n 是奇数。那么为了构造大小为 n 的 $(n, n-1)$ -置换码, 我们考

虑在 $n+1$ 个顶点 $[n] \cup \{\infty\}$ 构成的完全有向图。对于每个 π , 其特征集 $A(\pi)$ 也代表 n 个顶点构成的有向哈密顿路径。进一步地, 我们将边 $(\infty, \pi(1))$ 和 $(\pi(n), \infty)$ 添加到 $A(\pi)$ 中。然后每个置换对应于一个在 $[n] \cup \{\infty\}$ 中的有向哈密顿圈。因此, 大小为 n 的 $(n, n - 1)$ -置换码的存在性等价于在 $[n] \cup \{\infty\}$ 上的完全有向图中的哈密顿圈分解。哈密顿圈分解是一个很著名的研究主题, 在文献[170]中。作者已经证明, 对于奇数 $n \geq 7$, $n + 1$ 个顶点的完全有向图上的边可以划分为 n 个有向哈密顿圈。

因此, 我们证明了 $\mathcal{C}_B(n, n - 1) \leq n$, 其中等式成立当且仅到 $n \notin \{3, 5\}$ 。另外, 也非常容易验证, $\mathcal{C}_B(3, 2) = 2$ 以及 $\mathcal{C}_B(5, 4) = 4$, 详见例6.2中给出的构造。

□

例6.2 ((3, 2)-置换码和(5, 4)-置换码).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

注记6.4. 当 $n + 1$ 是素数时, 我们还可以给出大小为 n 的 $(n, n - 1)$ -置换码的另一种构造, 与上面证明中的不同。考虑置换码 $\{(i, 2i, \dots, (n - 1)i, ni) : 1 \leq i \leq n\}$, 每个数码就取模 $n + 1$ 后的数。很容易验证, 每对 (a, b) 恰好出现一次 (出现在第 i 个码字中, 其中 $i \equiv (b - a) \pmod{n + 1}$)。

在解决了上述这些特殊情况之后, 我们接下来将致力于改进 $\mathcal{C}_B(n, d)$

的渐近下界，其中 $d \geq 3$ 是一个固定常数，而 n 会趋于无穷大。我们的思路是分析对应局部稀疏图的最大独立集数。我们先给出以下图的定义，我们已经在前一节中大概解释过如此定义的用意。

定义6.6. 对于给定的正整数 n 和 $d \geq 3$ ，我们定义 (n, d) -区组置换图 $\mathcal{G}_{n,d}$ 为具有顶点集 S_n 以及边集 $\{(\pi, \sigma) : \pi \neq \sigma, d_B(\pi, \sigma) < d\}$ 。

我们可以把区组度量下的 (n, d) -置换码的码字看作 $\mathcal{G}_{n,d}$ 中独立集的顶点。相反， $\mathcal{G}_{n,d}$ 中的任何独立集也都是 (n, d) -置换码。为了通过使用引理6.7的图论方法得到 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的下界，我们需要深入研究 $\mathcal{G}_{n,d}$ 的一些参数。

令 $\mathcal{H}_{n,d}$ 为由单位置换 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 的邻点集诱导的子图，令 $R(n, k)$ 是 S_n 中的所有满足与单位置换的区组距离恰好为 k ，即为

$$R(n, k) = \{\sigma \in S_n : d_B(\sigma, id) = k\}.$$

那么诱导子图 $\mathcal{H}_{n,d}$ 具有顶点集 $V(\mathcal{H}_{n,d}) = \bigcup_{k=1}^{d-1} R(n, k)$ 。我们发现， $R(n, k)$ 的大小已经在文献[152]中被深入研究了，这里，我们引用其中的如下结果。

引理6.8. [152] 对于整数 $1 \leq k \leq n - 1$ ，

$$|R(n, k)| = k! \binom{n-1}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \frac{(i+1)}{(k-i)!}.$$

当 a 为固定正整数，而 n 趋于无穷大时，我们有 $\binom{n}{a} = \Theta(n^a)$ ，因此，对于 $1 \leq k \leq d - 1$ ，我们有 $|R(n, k)| = \Theta(n^k)$ 。所以，渐近意义上我们有 $|R(n, d - 1)| = \sum_{k=0}^{d-1} |R(n, k)| = \Theta(n^{d-1})$ ，这里我们依旧设定 d 为固定正整数，而 n 会趋于无穷大。

接下去我们需要应用引理6.7, 我们已经有 $|V(\mathcal{G}_{n,d})| = n!$ 并且 $\mathcal{G}_{n,d}$ 是一个正则图, 且其度数均为 $\Delta = b_B(n, d-1) - 1 = \Theta(n^{d-1})$ 。现在我们要计算的 $P(n, d)$, 即诱导子图 $\mathcal{H}_{n,d}$ 中的边数。具体地说, 我们需要得到一个合理的上界。

引理6.9. 对于固定的 $d \geq 3$, 当 n 趋于无穷大时, $P(n, d) = O(n^{2d-3})$ 。

证明. $R(n, k)$ 中的顶点个数的渐近阶为 $\Theta(n^k)$ 。因此总体来说, 一旦 $k_1 + k_2 \leq 2d - 3$, 那么形如 $\pi \in R(n, k_1)$ 和 $\sigma \in R(n, k_2)$ 这样两个点连成的边的总数至多是 $\Theta(n^{k_1+k_2}) = O(n^{2d-3})$, 因此, 为了证明引理, 我们只需要关注形如 $\pi \in R(n, d-1)$ 和 $\sigma \in R(n, d-1)$ 这样两个点连成的边即可。

进一步考虑这样的 π 和 σ 的特征集, 我们有 $|A(id) \setminus A(\pi)| = |A(id) \setminus A(\sigma)| = d-1$ 。令 $x(\pi, \sigma)$ 为 $A(id)$ 中既不包含在 $A(\pi)$ 、也不包含在 $A(\sigma)$ 中的连续对的数目, 即,

$$x(\pi, \sigma) = |(A(id) \setminus A(\pi)) \cap (A(id) \setminus A(\sigma))|.$$

对于固定的 $\pi \in R(n, d-1)$, 满足 $x(\pi, \sigma) = x$ 的置换 $\sigma \in R(n, d-1)$ 的数目最多为 $\Theta\left(\binom{d-1}{x} \binom{n-d}{d-1-x}\right) = \Theta(n^{d-1-x})$ 。这是因为 $A(id) \setminus A(\sigma)$ 恰好包含 $A(id) \setminus A(\pi)$ 中的 x 对, 以及 $A(id) \cap A(\pi)$ 中的 $d-1-x$ 对, 并且 $A(id) \setminus A(\sigma)$ 的每一个适当的选择只能诱导常数数量的置换 σ 。又因为 $|R(n, d-1)| = \Theta(n^{d-1})$ 以及落在 $R(n, d-1)$ 的点 $\pi, \sigma \in R(n, d-1)$ 之间的边数最多为 $\Theta(n^{2d-3})$, 其中 $1 \leq x(\pi, \sigma) \leq d-1$ 。因此, 为了证明引理, 我们只需要关注连接 $\pi \in R(n, d-1)$ 和 $\sigma \in R(n, d-1)$ 的边, 并且满足 $x(\pi, \sigma) = 0$ 。现在我们断言, 实际上这样的边并不存在。

因为 $x(\pi, \sigma) = 0$, 则有 $(A(id) \setminus A(\sigma)) \subset (A(\pi) \setminus A(\sigma))$, 因此我们会有 $d_B(\pi, \sigma) \geq d-1$ 。这时如果 π 和 σ 连边, 那么必然有 $d_B(\pi, \sigma) = d-1$,

以及

$$A(id) \setminus A(\sigma) = A(\pi) \setminus A(\sigma),$$

同时还有

$$A(id) \setminus A(\pi) = A(\sigma) \setminus A(\pi).$$

到目前为止，基于这两个公式，我们可以观察到 π 、 σ 和单位置换能够诱导出了三条不同的哈密顿路径，并且没有一条弧只包含在一条路径中（例如，如果只有一条弧出现在 $A(\pi)$ 中，则违反了 $A(id) \setminus A(\sigma) = A(\pi) \setminus A(\sigma)$ 的条件）。那么我们剩下的任务是证明，这样的三个不同的哈密顿路径是不可能存在的。

现在考虑 $A(\pi) \cap A(\sigma)$ 中的 $n - d$ 对元素。在点集为 $[n]$ 的图中，标记所有有向边 (x, y) ，其中 $(x, y) \in A(\pi) \cap A(\sigma)$ ，并将此图记为 \mathcal{G} 。注意到， $A(\pi) \cap A(\sigma)$ 和 $A(id) \setminus A(\sigma)$ 的并集是 $A(\pi)$ ，其对应于 π 的有向哈密顿路径。因此 \mathcal{G} 是 d 个不相交的有向路径的并集（这里可能存在孤立顶点，为了方便起见，每个孤立顶点也被认为是一条有向路径），其中第 j 条路径记为 $P_j = (x_j \rightarrow \dots \rightarrow y_j)$ ，表示以 x_j 开头，以 y_j 结尾，其中 $1 \leq j \leq d$ 。和置换 π 对应的有向哈密顿路径可以看作是这些路径的串联，不失一般性地，我们可以将其写成 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_d$ 。对于 $1 \leq j \leq d - 1$ ，由于连接 P_j 的边来自 $A(id) \setminus A(\sigma)$ ，这就意味着 $x_{j+1} = y_j + 1$ 。

至此，由于 σ 对应的有向哈密顿路径也是通过 $A(id) \setminus A(\pi)$ 中的 $d - 1$ 条边连接 P_j 形成的，那么只有两种情况。第一种情况是当 $x_1 \neq y_d + 1$ 时，只有一种特殊的方式通过对应于连续对的边连接 P_j ，即 $\sigma = \pi$ 。另一种情况是当 $x_1 = y_d + 1$ ，并且对应于 σ 的有向哈密顿路径的形式为 $P_t \rightarrow P_{t+1} \rightarrow \dots \rightarrow P_d \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{t-1}$ 。然而，由于 $d \geq 3$ ，那么 σ 和 π 将共

享 $d-2$ 条边 $\{(y_j, x_{j+1}) | j \neq t-1, 1 \leq j \leq d-1\}$, 这显然与 $x(\pi, \sigma) = 0$ 矛盾。

因此, 我们证明了, 我们关注的最后一类边, 即, 形如连接 $\pi \in R(n, d-1)$ 和 $\sigma \in R(n, d-1)$ 、且满足 $x(\pi, \sigma) = 0$ 的边并不会不存在, 因此图 $\mathcal{H}_{n,d}$ 中的边总数为 $P(n, d) = O(n^{2d-3})$ 。至此, 该引理已证明完毕。 \square

那么现在我们就可以利用引理6.7来得到关于 $\mathcal{C}_B(n, d)$ 的新的下界了。

定理6.1的证明. 利用图论的观点, 经典的Gilbert-Varshamov型下界为

$$A_{GV}(n, d) := \frac{n!}{1 + \Delta(n, d)} = \Theta\left(\frac{n!}{n^{d-1}}\right).$$

利用引理6.7和引理6.9, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\mathcal{G}_{n,d})}{A_{GV}(n, d)} &\geq \frac{\frac{n!}{10\Delta(n,d)}(\log_2 \Delta(n, d) - \frac{1}{2} \log_2(\frac{P(n,d)}{3}))}{\frac{n!}{1+\Delta(n,d)}} \\ &\geq \frac{1}{10} \log_2\left(\frac{\Delta(n, d)}{\sqrt{\frac{P(n,d)}{3}}}\right) \geq \frac{1}{10} \log_2\left(\frac{c_b n^{d-1}}{c_s n^{d-\frac{3}{2}}}\right) = c \log(n). \end{aligned}$$

因此我们有

$$\frac{\alpha(\mathcal{G}_{n,d})}{A_{GV}(n, d)} = \Omega(\log(n)),$$

其中 c_b, c_s 和 c 均为与 n 无关的常数。至此, 该定理已证明完毕。 \square

§ 6.4 基于多项式的置换码构造

在本节中, 我们给出一种基于多项式的置换码构造, 这个构造受文献[90]中经典的二元常重码构造的启发。我们已知 $\mathcal{P}_n = \{(x, y) : x \neq y, x, y \in [n]\}$ 以及 $|\mathcal{P}_n| = n(n-1)$ 。根据Bertrand假设, 总会存在一个素

数满足 $\frac{n(n-1)}{2} \leq q \leq n(n-1)$, 这里我们就设 $q \geq \frac{n(n-1)}{2}$ 为这样的一个素数。

令 $\mathcal{V} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{F}_q$ 为从 \mathcal{P} 到有限域 \mathbb{F}_q 的一个映射, 满足对于不同的对 (x, y) 和 (x', y') , $\mathcal{V}(x, y) = \mathcal{V}(x', y')$ 当且仅当 $x' = y$ 且 $y' = x$ 。那么 \mathcal{V} 会跑遍 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个变量, 且这样的映射是存在的, 因为我们假设了有限域的阶满足 $q \geq \frac{n(n-1)}{2}$ 。

那么对于一个置换 $\pi \in S_n$, 我们令 \mathcal{V} 将特征集 $A(\pi) = \{(\pi(i), \pi(i+1)) \mid 1 \leq i < n\}$ 映射到集合 $\{\mathcal{V}((\pi(i), \pi(i+1)) \mid 1 \leq i < n\}$, 注意到, 后者是 \mathbb{F}_q 的 $(n-1)$ 元子集构成的集合。我们记这 $n-1$ 个元素为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ 。

现在我们定义一个从 S_n 到 \mathbb{F}_q^{d-1} 的映射 F 如下:

$$F(\pi) = (F_1(\pi), F_2(\pi), \dots, F_{d-1}(\pi)),$$

其中

$$\begin{aligned} F_1(\pi) &= \sum_{1 \leq i \leq n-1} \gamma_i, \\ F_2(\pi) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \gamma_i \gamma_j, \\ F_3(\pi) &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} \gamma_i \gamma_j \gamma_k, \\ &\dots \end{aligned}$$

下面关于该映射的定理对我们的构造非常关键。

定理6.5. 对于任何两个不同的置换 $\pi, \sigma \in S_n$, 如果 $F(\pi) = F(\sigma)$, 则 $d_B(\pi, \sigma) \geq d$ 。

证明. 我们利用反证法, 假设存在两个不同的置换 $\pi, \sigma \in S_n$, 使得 $F(\pi) = F(\sigma)$ 以及 $d_B(\pi, \sigma) = \delta < d$ 。由于 $d_B(\pi, \sigma) = |A(\pi) \setminus A(\sigma)| = |A(\sigma) \setminus A(\pi)|$, 因此 \mathcal{V} 将集合 $A(\pi) \setminus A(\sigma)$ 映射到一个子集 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\delta\}$, 类似地, \mathcal{V} 将集合 $A(\sigma) \setminus A(\pi)$ 映射到一个子集 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\delta\}$ 。

由 $F(\pi) = F(\sigma)$, 我们可以得到如下方程组

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \sum_{1 \leq i \leq \delta} \alpha_i = \sum_{1 \leq i \leq \delta} \beta_i, \\ \zeta_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq \delta} \alpha_i \alpha_j = \sum_{1 \leq i < j \leq \delta} \beta_i \beta_j, \\ &\dots \\ \zeta_{d-1} &= \sum_{i_1 < \dots < i_{d-1}} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{d-1}} = \sum_{i_1 < \dots < i_{d-1}} \beta_{i_1} \dots \beta_{i_{d-1}}.\end{aligned}$$

考虑多项式 $x^\delta - \zeta_1 x^{\delta-1} + \zeta_2 x^{\delta-2} - \dots + (-1)^{\delta+1} \zeta_\delta = \prod_{1 \leq i \leq \delta} (x - \alpha_i) = \prod_{1 \leq i \leq \delta} (x - \beta_i)$ 。那么 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\delta\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\delta\}$ 中的元素均为该多项式的零点, 那么由于不同的零点至多只能由 δ 个, 因此, 这两个集合就会相同。

考虑顶点在 $[n]$ 上的有向完全图, 其中每个置换对应于由其特征集给出的有向哈密顿路径。现在 π 代表的路径和 σ 代表的路径会共享 $A(\pi) \cap A(\sigma)$ 中的 $n - 1 - \delta$ 有向边。由于映射 \mathcal{V} 的性质, 我们可以得到, 边集 \mathcal{E} 对应的 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\delta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\delta\}$ 是唯一确定的。因此, 给定 $A(\pi) \cap A(\sigma)$ 里边的方向, 那么只有唯一的一种选法来选择 \mathcal{E} 中边的方向, 用以获得哈密顿路径。因此 π 会与 σ 相同, 这与 π 与 σ 不相同的假设相矛盾。□

综上讨论, 我们就可以得到一个关于 (n, d) -置换码的多项式构造。

定理6.6. 对于每个元素 $\mathbf{f} \in \mathbb{F}_q^{d-1}$, $C_{\mathbf{f}}(n, d) := \{\pi | \pi \in S_n, F(\pi) = \mathbf{f}\}$ 为一个基于区组度量下的 (n, d) 置换码。

考虑所有向量 $\mathbf{f} \in \mathbb{F}_q^{d-1}$, 然后 $\{C_{\mathbf{f}}(n, d) : \mathbf{f} \in \mathbb{F}_q^{d-1}\}$ 是 S_n 的一个划分, 其中每个部分 $C_{\mathbf{f}}(n, d)$ 都是区组度量下的 (n, d) -置换码。我们可以假设 $C_{\mathbf{f}_{\max}}(n, d)$ 是其中的最大码字个数, 那么根据鸽巢原理, 我们可以得到 $|C_{\mathbf{f}_{\max}}(n, d)| \geq \frac{n!}{|\mathbb{F}_q^{d-1}|} = \frac{n!}{q^{d-1}} = \Theta\left(\frac{n!}{n^{2d-2}}\right)$ 。在[184]中, Yang、Schoeny 和 Dolecek 构造了一个大小为 $\frac{n!}{q^{2d-3}} = \Theta\left(\frac{n!}{n^{4d-6}}\right)$ 的, 而我们的构造将置换码的码字个数提升了 $\Theta(n^{2d-4})$ 倍。

§ 6.5 一种新型的上界

在本节中, 我们将通过分析码字的特征集来获得一类新的上界。对于每个置换 $\pi \in S_n$, 它的特征集 $A(\pi) = \{(\pi(i), \pi(i+1)) | 1 \leq i < n\}$ 是 \mathcal{P}_n 的一个 $n - 1$ 元子集。记 $I(\pi_1, \pi_2) = |A(\pi_1) \cap A(\pi_2)|$, 则我们有

引理6.10. 对于每个 $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, $d_B(\pi_1, \pi_2) \geq d$ 当且仅当 $I(\pi_1, \pi_2) \leq n - d - 1$ 。

上述引理是显然的。给定一个 (n, d) -置换码 \mathcal{C} , 令 \mathcal{F} 是码字的所有特征集 $A(\pi)$ 构成的集合, 即, $\mathcal{F} := \{A(\pi) | \pi \in \mathcal{C}\}$ 。我们将码字数目的上界问题转化为以下极值集合问题: 求 \mathcal{P}_n 的 $(n - 1)$ 元子集构成的子集族 \mathcal{F} 的子集数目极大值, 其中满足集族中每对子集的交集至多为 $n - d - 1$ 。然后我们准备证明定理6.2。

定理6.2的证明. 令 $T(n, d)$ 是对于特征集 $A(\pi)$ 的所有可能的 $(n - d)$ 元子集构成的的集族。每个 $A(\pi) \in \mathcal{F}$ 包含 $\binom{n-1}{n-d}$ 这样的子集。那么根据引理6.10, 我们可以知道, $T(n, d)$ 中的任何 $(n - d)$ 元子集都包含在最多一个码字的

特征集中。因此 $|\mathcal{F}| \binom{n-1}{n-d} \leq |T(n, d)|$ 。那么我们只需要估计 $|T(n, d)|$ 的上界即可。我们对每个集合 $A \in T(n, d)$, 考虑一个 $n \times n$ 矩阵 $M = (m_{i,j})$, 其中

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{如果点对 } (i, j) \in A, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

由于 A 是某个 $A(\pi)$ 的 $(n-d)$ 元子集, 因此矩阵应该正好包含 $n-d$ 个“1”。以及每行、每列的重量都至多为1。然后, 不同的 A 的数量上界可以被从 $n-d$ 行、 $n-d$ 列中选取子矩阵来构造置换矩阵的方式的选择数所控制。因此, 我们有 $T(n, d) \leq \binom{n}{n-d} \binom{n}{n-d} (n-d)!$ 。从而我们有 $|\mathcal{F}| \leq \frac{\binom{n}{d} \binom{n}{d} (n-d)!}{\binom{n-1}{n-d}}$ 。至此, 该定理证明完毕。

□

通过引理6.3和引理6.4, 我们知道, 如果 $t \leq n - \sqrt{n} - 1$, 那么我们记经典的球填充界为 $A_{SP}(n, 2t + 1)$, 满足

$$\frac{n!}{\prod_{i=0}^t (n-i)} \leq A_{SP}(n, 2t + 1) \leq \frac{n!}{\prod_{i=1}^t (n-i)}.$$

把我们从上述定理中得到的上界 $\frac{\binom{n}{d} \binom{n}{d} (n-d)!}{\binom{n-1}{n-d}}$ 记为 $A_{new}(n, d)$ 。

推论6.1. 给定 n 个 $d = 2t + 1$, 如果 $t \leq n - \sqrt{n} - 1$, $n \cdot \prod_{i=0}^t (n-i) \leq d \cdot d!$ 以及 $d \leq n - 1$, 则有 $A_{new}(n, d) \leq A_{SP}(n, d)$ 。

在表6.1中, 我们列出了一些小参数的情况便于提供直观的认识, 以表明定理6.2中给出的新类型上界, 在 d 相对接近 n 时, 会好于经典的球填充上界。特别值得注意的是, 此表中的球填充界如果显示的是某个值 x , 那么实际的球填充界不小于表中显示的值。(例如, (13,9) 码的大小上界

为 x , 其中 $x \geq 40320$ 。这并不一定表明(13,9)码的大小为上限为40320。我们的新结果表明(13,9) 码的大小上限为24787, 这确实是对球填充界的改进。)

表 6.1 新型上界与球填充界的比较

| n | d | 球填充界 | 定理6.2 | n | d | 球填充界 | 定理6.2 |
|----|----|-----------------|-----------------|----|----|-------------------|-------------------|
| 13 | 9 | ≥ 40320 | 24787 | 18 | 11 | ≥ 479001600 | 262461363 |
| 15 | 11 | ≥ 362880 | 44672 | 18 | 13 | ≥ 39916800 | 1423607 |
| 16 | 11 | ≥ 3628800 | 762415 | 19 | 11 | ≥ 6227020800 | 5263805324 |
| 17 | 11 | ≥ 39916800 | 13771113 | 19 | 13 | ≥ 479001600 | 28551213 |
| 17 | 13 | ≥ 3628800 | 74696 | 20 | 13 | ≥ 6227020800 | 601078154 |

§ 6.6 总结与展望

在这一部分中, 我们建立了置换码与区组置换图的独立集之间的对应关系。使用这种方法, 当极小距离 d 固定且 n 趋于无穷大时, 我们将Gilbert-Varshamov界在渐近意义下提高了 $\Omega(\log n)$ 倍。对于上界, 我们阐明了置换的区组距离与其特征的交集之间的关系, 利用这一关系, 结合一些计数的想法, 我们推导出了关于码字大小的一个新类型的上界, 当 d 相对接近 n 时, 新的上界会由于经典的球填充上界。此外, 我们给出了一个基于多项式的置换码的构造, 它将已知构造中关于码字数目的结果提高了 $\Theta(n^{2d-4})$ 倍。关于区组距离下的置换码, 仍有大量值得探索的问题, 我们特别关心其中两个问题:

- 在渐近意义下, 即当极小距离 d 固定且 n 趋于无穷大时, 能否得到提高经典的Gilbert-Varshamov界 $\Omega(n)$ 倍的下界?

- 能否得到更好的显式编码构造, 以及给出相应的解码方案?

Chapter 7 其它在研问题

在本节中，将简要介绍本人在攻读博士期间的在研课题与进展。限于篇幅和研究进展，我将只对这些课题进行简要介绍。

关于广义theta图的Turán问题

在最近的一项关于Turán问题的工作中[135]，Liu和Yang引入了广义theta图的概念，其具体的定义如下。

定义7.1 (广义theta图). 令 k_1, k_2, \dots, k_ℓ 为奇偶性相同的正整数，且1至多出现一次。我们定义广义theta图 $\Theta_{k_1, k_2, \dots, k_\ell}$ 为固定的两个点和 ℓ 条连接两个固定的点、互不相交且长度分别为 k_1, k_2, \dots, k_ℓ 的路径共同组成的图。

在文献[135]中，Liu和Yang证明了如下上界结果。

定理7.1. 令 k_1, k_2, \dots, k_ℓ 为奇偶性相同的正整数，且1至多出现一次，则有

$$\text{ex}(n, \Theta_{k_1, k_2, \dots, k_\ell}) = O(n^{1 + \frac{1}{k^*}}),$$

其中 $k^* = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq \ell} (k_i + k_j)$ 。

一个很自然的问题是，上述上界在什么情况下是紧的，即对于哪些参数 k_1, k_2, \dots, k_ℓ ，我们能够得到 $\text{ex}(n, \Theta_{k_1, k_2, \dots, k_\ell}) = \Theta(n^{1 + \frac{1}{k^*}})$? 目前我们得到了若干参数类型下，渐近意义上紧的结果。

染色同构的有理指数猜想

近日，我们提的猜想3.1有了一些新的进展。在文献[136]中，作者证明了对于平衡树型图(rooted balanced tree)的幂图的如下结果。

定理7.2. 令 T 是 r 个根节点， a 个非根顶点， b 条边的平衡树型图，其密度为 $\rho_T = \frac{b}{a}$ ，再记其 k 次幂图为 T^k 。假设 $2a \geq b$ ，那么存在正整数 K_0 ，使得

$$f_2(n, T^{K_0}) = O(n^{\frac{2a}{b}})。$$

那么接下去的问题是，上述上界在什么情况下是紧的。在同一篇文献中，作者证明了完全二部图的1次剖分图 $K'_{s,t}$ 可以提供紧的渐近下界，即有， $f_2(n, K'_{s,t}) = \Theta(n^{1+\frac{1}{s}})$ 。

我们目前得到若干特定的平衡树形图 H 的幂图 H^ℓ ，关于 $f_2(n, H^\ell)$ 渐近意义下紧的下界结果。

基于染色问题框架下的编码缓存系统设计

无线网络的缓存(Caching)问题描述的是，一个存储 N 个文件的服务器，文件大小设定为单位1，通过无噪声的广播信道与 K 个用户相关联。每个用户各自的缓存设备的容量为 M 。我们的缓存方案分为两个阶段：一是数据的放置阶段(Placement phase)，在数据需求量较小的空闲时段，利用有余力的通信资源，向每个用户的缓存设备中放置大小不超过 M 的数据；二是数据的分发阶段(Delivery phase)，假定在数据需求高峰期，每个用户随机向服务器请求一个完整的文件，服务器综合考虑这些需求，通过广播的形式传输大小为 R 的数据，以满足所有用户的需要。一个简单的模型可以见下图。最平凡的思路是，各用户分别缓存每个文件的 $\frac{M}{N}$ 比

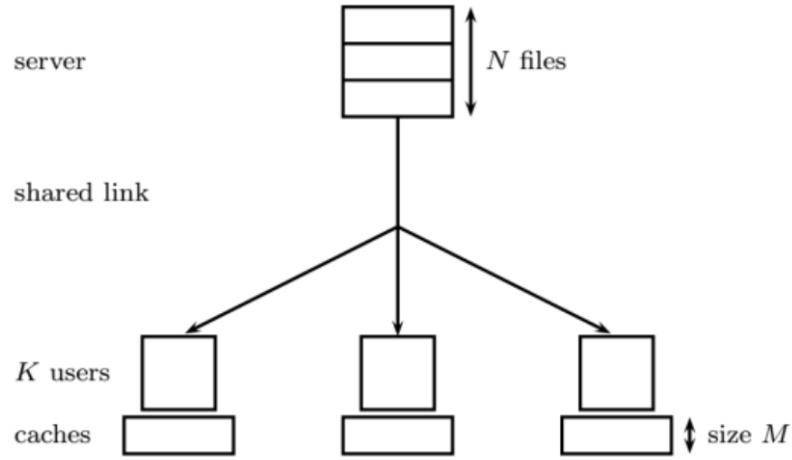


图 7.1 编码缓存系统简图

例的数据，在数据分发阶段服务器再将各用户所缺失的各自 $(1 - \frac{M}{N})$ 部分的数据逐个发放，此时 $R = K \cdot (1 - \frac{M}{N})$ 。为提高传输效率，2014年，贝尔实验室的Ali和Niesen[138]利用网络编码的思想，创造性地提出了编码缓存方案。在放置阶段，各用户的缓存按一定编码规律存储，获得局部缓存增益；在分发阶段，利用已有的缓存信息之间的关系，设计所需广播内容的一定的编码组合，使得多个用户可以同时从单次的信息中译码得到所需的部分信息，从而得到全局缓存增益，但是其局限在于，要将每个文件等分为一个随着用户数量 K 而呈指数增长的参数，众所周知，指级别的分划，在算法上是难以实现的。因此，研究几个重要参数之间的约束关系，以及设计合理的编码缓存系统在应用领域是十分重要的问题。

我们利用文献[154]中提出的新型染色问题，给出了一个系统地刻画编码缓存系统的框架。在我们框架下，我们可以将缓存系统的设计问题转化为特定空间的染色问题。在我们的框架下，我们可以非常灵活地根据需要选择不同的空间去进行设计系统。目前，这部分工作仍在整理中。

References

- [1] S. D. Adhikari, A. Mukhopadhyay, and M. Ram Murty. The analog of the Erdős distance problem in finite fields. *Int. J. Number Theory*, 13(9):2319–2333, 2017.
- [2] M. Ajtai, J. Komlós, M. Simonovits, and E. Szemerédi. On the approximative solution of the Erdős-Sós conjecture on trees. *manuscript*.
- [3] M. Ajtai, J. Komlós, M. Simonovits, and E. Szemerédi. The solution of the Erdős-Sós conjecture for large trees. *manuscript*.
- [4] M. Ajtai, J. Komlós, M. Simonovits, and E. Szemerédi. Some elementary lemmas on the Erdős-Sós conjecture for trees. *manuscript*.
- [5] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi. A note on Ramsey numbers. *J. Combin. Theory Ser. A*, 29(3):354–360, 1980.
- [6] N. Alon, M. Krivelevich, and B. Sudakov. Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions. volume 12, pages 477–494. 2003. Special issue on Ramsey theory.
- [7] N. Alon and V. Rödl. Sharp bounds for some multicolor Ramsey numbers. *Combinatorica*, 25(2):125–141, 2005.
- [8] N. Alon, L. Rónyai, and T. Szabó. Norm-graphs: variations and applications. *J. Combin. Theory Ser. B*, 76(2):280–290, 1999.
- [9] N. Alon and C. Shikhelman. Many T copies in H -free graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 121:146–172, 2016.

-
- [10] L. Babai, H. Snevily, and R. M. Wilson. A new proof of several inequalities on codes and sets. *J. Combin. Theory Ser. A*, 71(1):146–153, 1995.
 - [11] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz. The difference between consecutive primes. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(3):532–562, 2001.
 - [12] M. Bennett, J. Chapman, D. Covert, D. Hart, A. Iosevich, and J. Pakianathan. Long paths in the distance graph over large subsets of vector spaces over finite fields. *J. Korean Math. Soc.*, 53(1):115–126, 2016.
 - [13] M. Bennett, D. Hart, A. Iosevich, J. Pakianathan, and M. Rudnev. Group actions and geometric combinatorics in \mathbb{F}_q^d . *Forum Math.*, 29(1):91–110, 2017.
 - [14] M. Bennett, A. Iosevich, and K. Taylor. Finite chains inside thin subsets of \mathbb{R}^d . *Anal. PDE*, 9(3):597–614, 2016.
 - [15] P. Bennett, S. English, and M. Talanda-Fisher. Weighted Turán problems with applications. *Discrete Math.*, 342(8):2165–2172, 2019.
 - [16] C. T. Benson. Minimal regular graphs of girths eight and twelve. *Canadian J. Math.*, 18:1091–1094, 1966.
 - [17] C. Berge. Nombres de coloration de l’hypergraphe h -parti complet. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 103:3–9, 1975.
 - [18] P. V. M. Blagojević, B. Bukh, and R. Karasev. Turán numbers for $K_{s,t}$ -free graphs: topological obstructions and algebraic constructions. *Israel J. Math.*, 197(1):199–214, 2013.
 - [19] T. Bohman and P. Keevash. The early evolution of the H -free process. *Invent. Math.*, 181(2):291–336, 2010.
 - [20] B. Bollobás. *Random graphs*. Academic Press, London, 1985.
 - [21] B. Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

- [22] B. Bollobás and E. Győri. Pentagons vs. triangles. *Discrete Math.*, 308(19):4332–4336, 2008.
- [23] B. Bollobás and A. D. Scott. A proof of a conjecture of Bondy concerning paths in weighted digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 66(2):283–292, 1996.
- [24] J. A. Bondy, H. Broersma, J. van den Heuvel, and H. Veldman. Heavy cycles in weighted graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 22(1):7–15, 2002. Conference on Graph Theory (Elgersburg, 2000).
- [25] J. A. Bondy and G. Fan. Optimal paths and cycles in weighted graphs. In *Graph theory in memory of G. A. Dirac (Sandbjerg, 1985)*, volume 41 of *Ann. Discrete Math.*, pages 53–69. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [26] J. A. Bondy and G. Fan. Cycles in weighted graphs. *Combinatorica*, 11(3):191–205, 1991.
- [27] J. A. Bondy and M. Simonovits. Cycles of even length in graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 16:97–105, 1974.
- [28] J. A. Bondy and Z. Tuza. A weighted generalization of Turán’s theorem. *J. Graph Theory*, 25(4):267–275, 1997.
- [29] J. Bourgain. Hausdorff dimension and distance sets. *Israel J. Math.*, 87(1–3):193–201, 1994.
- [30] D. Bradač, L. Gishboliner, O. Janzer, and B. Sudakov. Asymptotics of the hypergraph bipartite Turán problem. *arXiv preprint*, arXiv: 2203.05497, 2022.
- [31] W. G. Brown. On graphs that do not contain a thomsen graph. *Canadian mathematical bulletin = Bulletin canadien de mathématiques*, 9(3), 1966.
- [32] W. G. Brown, P. Erdős, and V. T. Sós. Some extremal problems on r -graphs. In *New directions in the theory of graphs (Proc. Third Ann Arbor Conf., Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich, 1971)*, pages 53–63. Academic Press, New York, 1973.

-
- [33] B. Bukh. Random algebraic construction of extremal graphs. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(6):939–945, 2015.
 - [34] B. Bukh and D. Conlon. Rational exponents in extremal graph theory. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(7):1747–1757, 2018.
 - [35] B. Bukh and Z. Jiang. A bound on the number of edges in graphs without an even cycle. *Combin. Probab. Comput.*, 26(1):1–15, 2017.
 - [36] B. Bukh and M. Tait. Turán numbers of theta graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 29(4):495–507, 2020.
 - [37] S. Buzaglo, E. Yaakobi, T. Etzion, and J. Bruck. Systematic error-correcting codes for permutations and multi-permutations. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(6):3113–3124, 2016.
 - [38] Y. Caro, Y. Li, C. C. Rousseau, and Y. Zhang. Asymptotic bounds for some bipartite graph: complete graph Ramsey numbers. *Discrete Math.*, 220(1-3):51–56, 2000.
 - [39] J. Chapman, M. B. Erdogan, D. Hart, A. Iosevich, and D. Koh. Pinned distance sets, k -simplices, Wolff’s exponent in finite fields and sum-product estimates. *Math. Z.*, 271(1-2):63–93, 2012.
 - [40] Y. M. Chee, Z. Cherif, J.-L. Danger, S. Guille, H. M. Kiah, J.-L. Kim, P. Sole, and X. Zhang. Multiply constant-weight codes and the reliability of loop physically unclonable functions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 60(11):7026–7034, 2014.
 - [41] Y. M. Chee and V. K. Vu. Breakpoint analysis and permutation codes in generalized Kendall tau and Cayley metrics. In *2014 IEEE International Symposium on Information Theory, Honolulu, HI, USA, June 29 - July 4, 2014*, pages 2959–2963, 2014.

- [42] D. Conlon. A new upper bound for diagonal Ramsey numbers. *Ann. of Math.* (2), 170(2):941–960, 2009.
- [43] D. Conlon. Graphs with few paths of prescribed length between any two vertices. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 51(6):1015–1021, 2019.
- [44] D. Conlon. Extremal numbers of cycles revisited. *Amer. Math. Monthly*, 128(5):464–466, 2021.
- [45] D. Conlon and A. Ferber. Lower bounds for multicolor Ramsey numbers. *Adv. Math.*, 378:Paper No. 107528, 5, 2021.
- [46] D. Conlon, J. Fox, and B. Sudakov. Recent developments in graph Ramsey theory. In *Surveys in combinatorics 2015*, volume 424 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 49–118. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.
- [47] D. Conlon, O. Janzer, and J. Lee. More on the extremal number of subdivisions. *Combinatorica*, 41(4):465–494, 2021.
- [48] D. Conlon and J. Lee. On the extremal number of subdivisions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (12):9122–9145, 2021.
- [49] D. Conlon and M. Tyomkyn. Repeated patterns in proper colorings. *SIAM J. Discrete Math.*, 35(3):2249–2264, 2021.
- [50] B. De Bruyn. *An introduction to incidence geometry*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.
- [51] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. *Philips Res. Rep. Suppl.*, (10):vi+97, 1973.
- [52] P. Delsarte. The association schemes of coding theory. In *Combinatorics (Proc. NATO Advanced Study Inst., Breukelen, 1974), Part 1: Theory of designs, finite geometry and coding theory*, pages 139–157. Math. Centre Tracts, No. 55, 1974.

-
- [53] R. Diestel. *Graph Theory, 4th Edition*, volume 173 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2012.
 - [54] X. Du, L. Guth, Y. Ou, H. Wang, B. Wilson, and R. Zhang. Weighted restriction estimates and application to Falconer distance set problem. *Amer. J. Math.*, 143(1):175–211, 2021.
 - [55] X. Du and R. Zhang. Sharp L^2 estimates of the Schrödinger maximal function in higher dimensions. *Ann. of Math. (2)*, 189(3):837–861, 2019.
 - [56] S. Ehard, S. Glock, and F. Joos. A rainbow blow-up lemma for almost optimally bounded edge-colourings. *Forum Math. Sigma*, 8:Paper No. e37, 32, 2020.
 - [57] P. Erdős. On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. *Izvestia Nauchno-Issl. Inst. Mat. i Meh. Tomsk*, 2:74–82, 1938.
 - [58] P. Erdős. Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:292–294, 1947.
 - [59] P. Erdős. On extremal problems of graphs and generalized graphs. *Israel J. Math.*, 2:183–190, 1964.
 - [60] P. Erdős. On the combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica*, 1(1):25–42, 1981.
 - [61] P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp. On cycle-complete graph Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 2(1):53–64, 1978.
 - [62] P. Erdős and T. Gallai. On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 10:337–356 (unbound insert), 1959.
 - [63] P. Erdős and D. J. Kleitman. On coloring graphs to maximize the proportion of multicolored k -edges. *J. Combin. Theory*, 5:164–169, 1968.

- [64] P. Erdős, A. Rényi, and V. T. Sós. On a problem of graph theory. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1:215–235, 1966.
- [65] P. Erdős and M. Simonovits. A limit theorem in graph theory. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1:51–57, 1966.
- [66] P. Erdős and A. H. Stone. On the structure of linear graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:1087–1091, 1946.
- [67] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [68] M. B. Erdogan. A bilinear Fourier extension theorem and applications to the distance set problem. *Int. Math. Res. Not.*, (23):1411–1425, 2005.
- [69] B. Ergemlidze, T. Jiang, and A. Methuku. New bounds for a hypergraph bipartite Turán problem. *J. Combin. Theory Ser. A*, 176:105299, 18, 2020.
- [70] B. Ergemlidze, A. Methuku, N. Salia, and E. Győri. A note on the maximum number of triangles in a C_5 -free graph. *J. Graph Theory*, 90(3):227–230, 2019.
- [71] T. Etzion, M. Schwartz, and A. Vardy. Optimal tristance anticodecs in certain graphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113(2):189–224, 2006.
- [72] K. J. Falconer. On the Hausdorff dimensions of distance sets. *Mathematika*, 32(2):206–212 (1986), 1985.
- [73] F. Farnoud, V. Skachek, and O. Milenkovic. Error-correction in flash memories via codes in the Ulam metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 59(5):3003–3020, 2013.
- [74] R. J. Faudree and M. Simonovits. On a class of degenerate extremal graph problems. *Combinatorica*, 3(1):83–93, 1983.
- [75] J. Fox and B. Sudakov. Dependent random choice. *Random Structures Algorithms*, 38(1-2):68–99, 2011.

-
- [76] P. Frankl. Orthogonal vectors in the n -dimensional cube and codes with missing distances. *Combinatorica*, 6(3):279–285, 1986.
 - [77] P. Frankl and N. Tokushige. The Erdős-Ko-Rado theorem for integer sequences. *Combinatorica*, 19(1):55–63, 1999.
 - [78] P. A. Fuhrmann. *A polynomial approach to linear algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2012.
 - [79] J. Fujisawa. Weighted degrees and heavy cycles in weighted graphs. *Discrete Math.*, 309(23-24):6483–6495, 2009.
 - [80] Z. Füredi. Turán type problems. In *Surveys in combinatorics, 1991 (Guildford, 1991)*, volume 166 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 253–300. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
 - [81] Z. Füredi and M. Simonovits. The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems. In *Erdős centennial*, volume 25 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 169–264. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2013.
 - [82] F. Gao, Y. Yang, and G. Ge. An improvement on the Gilbert-Varshamov bound for permutation codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 59(5):3059–3063, 2013.
 - [83] D. Gerbner, E. Győri, A. Methuku, and M. Vizer. Generalized Turán problems for even cycles. *J. Combin. Theory Ser. B*, 145:169–213, 2020.
 - [84] D. Gerbner, A. Methuku, and C. Palmer. General lemmas for Berge-Turán hypergraph problems. *European J. Combin.*, 86:103082, 15, 2020.
 - [85] D. Gerbner, A. Methuku, and M. Vizer. Asymptotics for the Turán number of Berge- $K_{2,t}$. *J. Combin. Theory Ser. B*, 137:264–290, 2019.
 - [86] D. Gerbner and C. Palmer. Extremal results for Berge hypergraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 31(4):2314–2327, 2017.

- [87] D. Gerbner and C. Palmer. Counting copies of a fixed subgraph in F -free graphs. *European J. Combin.*, 82:103001, 15, 2019.
- [88] E. Govaert and H. Van Maldeghem. Some combinatorial and geometric characterizations of the finite dual classical generalized hexagons. *J. Geom.*, 68(1-2):87–95, 2000.
- [89] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi’s theorem for arithmetic progressions of length four. *Geom. Funct. Anal.*, 8(3):529–551, 1998.
- [90] R. L. Graham and N. J. A. Sloane. Lower bounds for constant weight codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 26(1):37–43, 1980.
- [91] B. Green. Roth’s theorem in the primes. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1609–1636, 2005.
- [92] A. Greenleaf, A. Iosevich, B. Liu, and E. Palsson. A group-theoretic viewpoint on Erdos-Falconer problems and the Mattila integral. *Rev. Mat. Iberoam.*, 31(3):799–810, 2015.
- [93] A. Greenleaf, A. Iosevich, and M. Pramanik. On necklaces inside thin subsets of \mathbb{R}^d . *Math. Res. Lett.*, 24(2):347–362, 2017.
- [94] J. R. Griggs. Lower bounds on the independence number in terms of the degrees. *J. Combin. Theory Ser. B*, 34(1):22–39, 1983.
- [95] V. Grolmusz and B. Sudakov. On k -wise set-intersections and k -wise Hamming-distances. *J. Combin. Theory Ser. A*, 99(1):180–190, 2002.
- [96] D. Grósz, A. Methuku, and C. Tompkins. Uniformity thresholds for the asymptotic size of extremal Berge- F -free hypergraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 61:527–533, 2017.
- [97] L. Guth, A. Iosevich, Y. Ou, and H. Wang. On Falconer’s distance set problem in the plane. *Invent. Math.*, 219(3):779–830, 2020.

-
- [98] L. Guth and N. H. Katz. On the Erdős distinct distances problem in the plane. *Ann. of Math. (2)*, 181(1):155–190, 2015.
 - [99] E. Győri. Triangle-free hypergraphs. *Combin. Probab. Comput.*, 15(1-2):185–191, 2006.
 - [100] E. Győri and N. Lemons. Hypergraphs with no cycle of a given length. *Combin. Probab. Comput.*, 21(1-2):193–201, 2012.
 - [101] F. F. Hassanzadeh and O. Milenkovic. Multipermutation codes in the ulam metric for nonvolatile memories. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 32(5):919–932, 2014.
 - [102] Z. He and M. Tait. Hypergraphs with few Berge paths of fixed length between vertices. *SIAM J. Discrete Math.*, 33(3):1472–1481, 2019.
 - [103] P. Horak and D. Kim. 50 years of the Golomb-Welch conjecture. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 64(4):3048–3061, 2018.
 - [104] A. Iosevich. What is Falconer’s conjecture? *Notices Amer. Math. Soc.*, 66(4):552–555, 2019.
 - [105] A. Iosevich and D. Koh. The Erdős-Falconer distance problem, exponential sums, and Fourier analytic approach to incidence theorems in vector spaces over finite fields. *SIAM J. Discrete Math.*, 23(1):123–135, 2008/09.
 - [106] A. Iosevich and B. Liu. Equilateral triangles in subsets of \mathbb{R}^d of large Hausdorff dimension. *Israel J. Math.*, 231(1):123–137, 2019.
 - [107] A. Iosevich and E. Palsson. An improved dimensional threshold for the angle problem. *arXiv preprint*, arXiv: 1807.05465, 2018.
 - [108] A. Iosevich and H. Parshall. Embedding distance graphs in finite field vector spaces. *J. Korean Math. Soc.*, 56(6):1515–1528, 2019.

- [109] A. Iosevich and M. Rudnev. Erdős distance problem in vector spaces over finite fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(12):6127–6142, 2007.
- [110] O. Janzer. Improved bounds for the extremal number of subdivisions. *Electron. J. Combin.*, 26(3):Paper 3.3, 6, 2019.
- [111] O. Janzer. Rainbow Turán number of even cycles, repeated patterns and blow-ups of cycles. *Israel J. Math. to appear*, arXiv: 2006.01062, 2020.
- [112] T. Jiang, Z. Jiang, and J. Ma. Negligible obstructions and Turán exponents. *arXiv preprint*, arXiv: 2007.02975, 2020.
- [113] T. Jiang and J. Ma. Cycles of given lengths in hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 133:54–77, 2018.
- [114] T. Jiang, J. Ma, and L. Yepremyan. On Turán exponents of bipartite graphs. *arXiv preprint*, arXiv: 1806.02838, 2018.
- [115] T. Jiang and Y. Qiu. Many Turán exponents via subdivisions. *arXiv preprint*, arXiv: 1908.02385, 2019.
- [116] T. Jiang and R. Seiver. Turán numbers of subdivided graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 26(3):1238–1255, 2012.
- [117] T. Jiang and A. Vardy. Asymptotic improvement of the Gilbert-Varshamov bound on the size of binary codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 50(8):1655–1664, 2004.
- [118] Y. Jing, S. Roy, and C.-M. Tran. o-Minimal method and generalized sum-product phenomena. *arXiv preprint*, arXiv: 1910.04904, 2019.
- [119] D. Y. Kang, J. Kim, and H. Liu. On the rational Turán exponents conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 148:149–172, 2021.
- [120] N. H. Katz, E. Krop, and M. Maggioni. Remarks on the box problem. *Math. Res. Lett.*, 9(4):515–519, 2002.

-
- [121] P. Keevash. Hypergraph Turán problems. *Surveys in Combinatorics, Cambridge University Press*, 2011, 83–140.
 - [122] P. Keevash, E. Long, and J. Skokan. Cycle-complete Ramsey numbers. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1):277–302, 2021.
 - [123] M. Kendall and J. D. Gibbons. *Rank correlation methods*. A Charles Griffin Title. Edward Arnold, London, fifth edition, 1990.
 - [124] J. H. Kim. The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2 / \log t$. *Random Structures Algorithms*, 7(3):173–207, 1995.
 - [125] D. Koh and C.-Y. Shen. The generalized Erdős-Falconer distance problems in vector spaces over finite fields. *J. Number Theory*, 132(11):2455–2473, 2012.
 - [126] J. Kollár, L. Rónyai, and T. Szabó. Norm-graphs and bipartite Turán numbers. *Combinatorica*, 16(3):399–406, 1996.
 - [127] J. Komlós and M. Simonovits. Szemerédi’s regularity lemma and its applications in graph theory. In *Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993)*, volume 2 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 295–352. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.
 - [128] T. Kövári, V. T. Sós, and P. Turán. On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium Math.*, 3:50–57, 1954.
 - [129] S. Lang and A. Weil. Number of points of varieties in finite fields. *Amer. J. Math.*, 76:819–827, 1954.
 - [130] F. Lazebnik and V. A. Ustimenko. Explicit construction of graphs with an arbitrary large girth and of large size. volume 60, pages 275–284. 1995. ARIDAM VI and VII (New Brunswick, NJ, 1991/1992).
 - [131] F. Lazebnik, V. A. Ustimenko, and A. J. Woldar. A new series of dense graphs of high girth. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 32(1):73–79, 1995.

- [132] K. H. Leung and Y. Zhou. No lattice tiling of \mathbb{Z}^n by Lee sphere of radius 2. *J. Combin. Theory Ser. A*, 171:105157, 20, 2020.
- [133] B. Li and S. Zhang. On extremal weighted digraphs with no heavy paths. *Discrete Math.*, 310(10-11):1640–1644, 2010.
- [134] Y. Li and W. Zang. The independence number of graphs with a forbidden cycle and Ramsey numbers. *J. Comb. Optim.*, 7(4):353–359, 2003.
- [135] X. Liu and X. Yang. On Turán number for generalized theta graph. *arXiv preprint*, arXiv: 2103.10200, 2021.
- [136] X. Liu and X. Yang. On color isomorphic pairs proper edge colouring of complete graphs. *arXiv preprint*, arXiv: 2201.00838, 2022.
- [137] J. Ma, X. Yuan, and M. Zhang. Some extremal results on complete degenerate hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 154:598–609, 2018.
- [138] M. A. Maddah-Ali and U. Niesen. Fundamental limits of caching. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 60(5):2856–2867, 2014.
- [139] W. Mantel. Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.
- [140] W. J. Martin and X. J. Zhu. Anticodes for the Grassmann and bilinear forms graphs. *Des. Codes Cryptogr.*, 6(1):73–79, 1995.
- [141] S. Mathew and M. S. Sunitha. A generalization of Menger’s theorem. *Appl. Math. Lett.*, 24(12):2059–2063, 2011.
- [142] K. Matomäki, J. Maynard, and X. Shao. Vinogradov’s theorem with almost equal summands. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 115(2):323–347, 2017.
- [143] K. E. Mellinger and D. Mubayi. Constructions of bipartite graphs from finite geometries. *J. Graph Theory*, 49(1):1–10, 2005.
- [144] R. Montgomery, A. Pokrovskiy, and B. Sudakov. Decompositions into spanning rainbow structures. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 119(4):899–959, 2019.

- [145] R. Montgomery, A. Pokrovskiy, and B. Sudakov. Embedding rainbow trees with applications to graph labelling and decomposition. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 22(10):3101–3132, 2020.
- [146] R. Montgomery, A. Pokrovskiy, and B. Sudakov. A proof of Ringel’s conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 31(3):663–720, 2021.
- [147] D. Mubayi. Some exact results and new asymptotics for hypergraph Turán numbers. *Combin. Probab. Comput.*, 11(3):299–309, 2002.
- [148] D. Mubayi and J. Verstraëte. A hypergraph extension of the bipartite Turán problem. *J. Combin. Theory Ser. A*, 106(2):237–253, 2004.
- [149] D. Mubayi and J. Verstraëte. A note on pseudorandom Ramsey graphs. *arXiv preprint*, arXiv: 1909.01461, 2019.
- [150] D. Munhá Correia, B. Sudakov, and I. Tomon. Flattening rank and its combinatorial applications. *Linear Algebra Appl.*, 625:113–125, 2021.
- [151] B. Murphy and G. Petridis. An example related to the Erdős-Falconer question over arbitrary finite fields. *Bull. Hellenic Math. Soc.*, 63:38–39, 2019.
- [152] A. Myers. Counting permutations by their rigid patterns. *J. Combin. Theory Ser. A*, 99(2):345–357, 2002.
- [153] M. B. Nathanson. *Additive number theory*, volume 164 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996. The classical bases.
- [154] J. Pach and I. Tomon. Colorings with only rainbow arithmetic progressions. *Acta Math. Hungar.*, 161(2):507–515, 2020.
- [155] C. Pohoata and D. Zakharov. Norm hypergraphs. *arXiv*, arXiv:2101.00715, 2021.
- [156] A. Pokrovskiy and B. Sudakov. Linearly many rainbow trees in properly edge-coloured complete graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 132:134–156, 2018.

- [157] S. P. Radziszowski. Small Ramsey numbers. *Electron. J. Combin.*, 1:Dynamic Survey 1, 30, 1994.
- [158] F. P. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 30(4):264–286, 1929.
- [159] A. Sah. Diagonal Ramsey via effective quasirandomness. *arXiv preprint*, arXiv: 2005.09251, 2020.
- [160] W. Sawin. An improved lower bound for multicolor Ramsey numbers and a problem of Erdős. *J. Combin. Theory Ser. A*, 188:Paper No. 105579, 2022.
- [161] M. Schwartz and T. Etzion. Codes and anticodecs in the Grassmann graph. *J. Combin. Theory Ser. A*, 97(1):27–42, 2002.
- [162] M. Schwartz and I. Tamo. Optimal permutation anticodecs with the infinity norm via permanents of $(0, 1)$ -matrices. *J. Combin. Theory Ser. A*, 118(6):1761–1774, 2011.
- [163] R. Singleton. On minimal graphs of maximum even girth. *J. Combinatorial Theory*, 1:306–332, 1966.
- [164] J. Spencer. Ramsey’s theorem—a new lower bound. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 18:108–115, 1975.
- [165] B. Sudakov. A note on odd cycle-complete graph Ramsey numbers. *Electron. J. Combin.*, 9(1):Note 1, 4, 2002.
- [166] B. Sudakov and I. Tomon. Turán number of bipartite graphs with no $K_{t,t}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(7):2811–2818, 2020.
- [167] M. Tait, A. Vardy, and J. Verstraëte. Asymptotic improvement of the Gilbert-Varshamov bound on the size of permutation codes. *CoRR*, abs/1311.4925, 2013.

- [168] T. Tao and V. Vu. *Additive combinatorics*, volume 105 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [169] T. A. Terlep and J. Williford. Graphs from generalized Kac-Moody algebras. *SIAM J. Discrete Math.*, 26(3):1112–1120, 2012.
- [170] T. W. Tillson. A Hamiltonian decomposition of K_{2m}^* , $2m \geq 8$. *J. Combin. Theory Ser. B*, 29(1):68–74, 1980.
- [171] P. Turán. Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie. *Fiz Lapok*, pages 436–452, 1941.
- [172] P. Turán. Research problems. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 6:417–423, 1961.
- [173] J. H. van Lint. *Introduction to coding theory*, volume 86 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [174] H. Van Maldeghem. *Generalized polygons*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1998. [2011 reprint of the 1998 original] [MR1725957].
- [175] J. Verstraëte. Extremal problems for cycles in graphs. In *Recent trends in combinatorics*, volume 159 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 83–116. Springer, [Cham], 2016.
- [176] J. Verstraëte and J. Williford. Graphs without theta subgraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 134:76–87, 2019.
- [177] L. A. Vinh. On kaleidoscopic pseudo-randomness of finite Euclidean graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 32(2):279–287, 2012.
- [178] I. M. Vinogradov. The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. *Trav. Inst. Math. Stekloff*, 23:109, 1947.

- [179] X. Wang, H. Wei, C. Shangguan, and G. Ge. New bounds and constructions for multiply constant-weight codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(11):6315–6327, 2016.
- [180] X. Wang, Y. Zhang, Y. Yang, and G. Ge. New bounds of permutation codes under Hamming metric and Kendall’s τ -metric. *Des. Codes Cryptogr.*, 85(3):533–545, 2017.
- [181] R. Wenger. Extremal graphs with no C^4 ’s, C^6 ’s, or C^{10} ’s. *J. Combin. Theory Ser. B*, 52(1):113–116, 1991.
- [182] Y. Wigderson. An improved lower bound on multicolor Ramsey numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149(6):2371–2374, 2021.
- [183] T. Wolff. Decay of circular means of Fourier transforms of measures. *Internat. Math. Res. Notices*, (10):547–567, 1999.
- [184] S. Yang, C. Schoeny, and L. Dolecek. Theoretical bounds and constructions of codes in the generalized Cayley metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 65(8):4746–4763, 2019.
- [185] E. A. Yazici. Hamming distances in vector spaces over finite fields. *arXiv preprint*, arXiv: 1910.05557, 2019.
- [186] S. Zhang, X. Li, and H. Broersma. Heavy paths and cycles in weighted graphs. *Discrete Math.*, 223(1-3):327–336, 2000.
- [187] T. Zhang, Z. Xu, and G. Ge. A polynomial resultant approach to algebraic construction of extremal graphs. *arXiv:2109.15148*.
- [188] T. Zhang and Y. Zhou. On the nonexistence of lattice tilings of \mathbb{Z}^n by Lee spheres. *J. Combin. Theory Ser. A*, 165:225–257, 2019.
- [189] Y. Zhang and G. Ge. Snake-in-the-box codes for rank modulation under Kendall’s τ -metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(1):151–158, 2016.

致谢

六年的研究生生涯即将结束，这六年里，世界格局匆匆变化，人生旅途也是高低起伏。但不得不说，我是幸福且幸运的，我想在此表达我最真挚的感谢。

首先我要特别感谢我的导师葛根年教授。葛老师对待学术态度严谨，知识广博，且具有极为广阔的视野，这些优秀的品质对我的整个学习科研产生了巨大的影响。葛老师时常鼓励我们在夯实数学基础的同时，要开拓视野，独立思考，要学会用不同的观点看待问题。葛老师也一直鼓励我们尝试新的问题，注重学科之间的交叉与联系。在生活中，葛老师为我们提供了非常好的科研环境与各项支持，并且非常高频地与我们一起探讨问题。由于我的个人能力有限，至今也没能在一些领域中做出什么成果，但葛老师始终支持我们树立长远的目标，盼我们能更上一层楼。我希望未来我能持续地朝着这样的目标前进。

我还要感谢在这六年的学习中给予过我指导的专家学者们。特别是韩国基础科学研究院的刘鸿老师，刘老师在这两年开展了许多线上的课程，极大地丰富了我对于极值组合学的认知，并且感谢他能够给我提供继续追寻学术理想的机会。同时我要感谢新加坡国立大学的黄皓老师，亚利桑那州立大学的姜子麟老师，北京理工大学的韩杰老师、国防科技大学的周悦老师，中国科学技术大学的马杰老师，中国科学技术大学的张先得老师，山东大学的王光辉老师等杰出的学者，我从他们的学术讲座中学到的很多新的知识，并且我很荣幸能有机会与他们展开对于具体问题的探讨，从中我也得以开拓视野，并且体会到了很多乐趣。在此也感谢他们对我的建议与鼓励。

感谢这六年时光里朝夕相处的同门及团队成员们：张一炜、汪馨、上官冲、张韬、马景学、丁报昆、钱昺辰、孔祥梁、戚立波、李伟聪、奚元霄、韩雪姣、何智文、陶然、余文俊、叶左、周靖坤、陈婷婷、石飞、谢城

飞、兰昭君、徐民、李好阳、魏歆、孙钰博、刘欣、马鋆、于泉勇等。特别地，我要感谢张韬师兄一直以来的密切交流与指导，让我近距离地体会到了潜心钻研问题的学者风范。同时我要感谢张一炜师兄与我们合作，一起完成了我在科研中的第一步。我也要感谢上官冲师兄一直以来对我的鼓励与支持。

我很荣幸认识了很多年纪相仿、志趣相投的同行伙伴，如荆一凡博士，徐文强博士，常帆博士，姚天博士，叶智恺博士等曾经讨论过学术问题的同学们。从他们身上我学到了很多学习的方法和思考问题的方式。

虽说独在异乡为异客，但在北京的六年里我在生活上却得到了故乡亲友们的很多照顾。我要特别感谢在北京的叔叔一家人对我的照顾，尤其是在2017年初我生病住院那段漫长且艰难的时光。我也要特别感谢舅舅一家人让我北京感受到了家的温暖。

从十八岁离开家上大学，至今已过去十年。十年间家乡变化巨大，颇有物是人非之感。古人云三十而立，不过可以预见，三十岁的我仍难以立身立业，但我在家乡诸暨的亲友们，还是对我充满了支持与期望。我非常感谢每一位在我成长过程中帮助过我的长辈亲友们。

我要特别感谢我的妻子李思颖，感谢这么多年来对我的支持与理解！路遥知马力，三千里的距离，两千日的时光，见证着这一切。漫漫人生路，知己长相守。同时我也要感谢我的岳父岳母一直以来对我的宽容与支持。女儿徐念之的出生，以及这一年的成长经历，让我对人生有了更多的感悟。

最后，我要感谢我的父母！他们始终支持着我在人生路上的每一次选择，并且始终教育我如何成为一个更好的人。父兮生我，母兮鞠我。拊我畜我，长我育我。顾我复我，出入腹我。欲报之德，昊天罔极。

由于作者水平有限，加之时间与篇幅所限，文中难免有谬误与不详之处，敬请各位专家学者不吝批评指正！

攻读博士期间的学术成果

1. Z. Xu and G. Ge. A note on multicolor Ramsey number of small odd cycles versus a large clique. *Discrete Math.*, 345, no. 6, Paper No. 112823, 4 pp, 2022.
2. Z. Xu and G. Ge. On color isomorphic subdivisions. *Discrete Math.*, 345, no. 5, Paper No. 101997, 6 pp, 2022.
3. Z. Xu, T. Zhang, and G. Ge. Some extremal results on hypergraph Turán problems. *Sci China Math.*, to appear.
4. Z. Xu, Y. Jing, and G. Ge. On vertex-induced weighted Turán problems *Discrete Math.*, 345, no. 1, Paper No. 112628, 8 pp, 2022.
5. Z. Xu and G. Ge. Erdős-Falconer distance problem under Hamming metric in vector spaces over finite fields. *SIAM J. Discrete Math.*, 34(4):2208–2220, 2020.
6. G. Ge, Y. Jing, Z. Xu, and T. Zhang. Color isomorphic even cycles and a related Ramsey problem. *SIAM J. Discrete Math.*, 34(3):1999–2008, 2020.
7. Z. Xu, T. Zhang, and G. Ge. Some tight lower bounds for Turán problems via constructions of multi-hypergraphs. *European J. Combin.*, 89:103161, 11, 2020.
8. Z. Xu, Y. Zhang, and G. Ge. New theoretical bounds and constructions of permutation codes under block permutation metric. *Des. Codes Cryptogr.*, 87(11):2625–2637, 2019.
9. Z. Xu, W. Yu, and G. Ge. Embedding bipartite distance graphs under Hamming metric in finite fields. submitted.
10. T. Zhang, Z. Xu and G. Ge. A polynomial resultant approach to algebraic construction of extremal graphs. submitted.
11. T. Zhang, Z. Xu and G. Ge. On lower bounds for Turán number of generalized theta graphs. In preparation.

12. C. Xie, Z. Xu and G. Ge. Repeated rooted balanced trees in proper edge colorings. In preparation.
13. Z. Xu, Y. Xi, B. Qian and G. Ge. A rainbow framework of centralized coded caching schemes. In preparation.