第一章 引论

- 流体和流体力学 (§1.1)
- 连续介质假设(§1.2)
- 笛卡尔张量 (附录1)
- 应力张量 (§1.3)
- 热力学基础 （ §1.4 ）

第二讲 连续介质假设·笛卡尔张量(1)

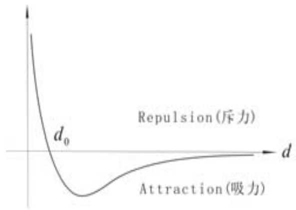
Lecture 2 The Continuum Hypothesis, Cartesian Tensors (1)

孙德军

§1.2 物质结构和连续介质假设

分子作用力与物质形态的微观背景

- 任何物质微观上并不连续！
- 分子作用力（右图）
  - ◆简单分子：$d_0 \approx 0.3 \sim 0.4\text{nm}$
- 物质形态的微观背景
  - ◆气体：$d >> d_0$，弱吸引力，易流动
  - ◆固体：$d \sim d_0$，低于熔点，不易流动
  - ◆液体：$d \sim d_0$，但超过熔点，空穴增多导致易流动



连续介质假设

- 为什么要引入连续介质假设?
  - ◆分子动力学（**molecular dynamics**）
    - 研究宏观流动是不可能的
    - 也不必要
  - ◆分子动理论（**kinetic theory of gas**）
    - 加入了统计方法
    - 仍只能处理某些简单气体流动问题
      - 如稀薄气体流动、微尺度流动等

非连续介质的方法还不能处理大多数的宏观流动问题!

连续介质假设

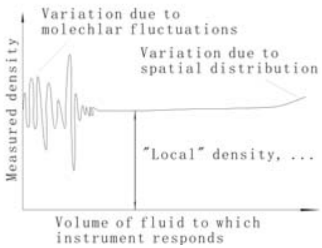
- 什么是连续介质假设?
  - ◆连续介质模型是一种力学模型，它假设:
    - 物质连续分布于所占有的空间;
    - 宏观物理量是空间和时间的连续函数（场函数）。
      - 便于数学分析
  - ◆只需考虑宏观特性，不计及微观分子结构
  - ◆热力学采用了连续介质假设
  - ◆连续介质力学：流体力学、固体力学

连续介质假设

- 如何正确规定连续体物理量的分布（场函数）?
  - ◆与**sensitive volume**、**sensitive time**有关，例

$$\bar{\rho} = \frac{\delta M}{\delta V}, \cdots$$

  - 流体微团的尺度要合适（如图）
  - 取极限称为流体质点
    - 物理极限:
      宏观充分小，微观充分大!
    - 数学极限再统计平均



连续介质假设

- 连续介质假设适用的条件
  - ◆气体：**Knudsen**数 $Kn = l/L \ll 1$ 时连续介质假设成立
  - ◆存在这样的物理极限尺度 $l \ll$ 物理极限尺度 $\ll L$
  - ◆两种连续介质假设不成立的例子
    - 稀薄气体流动，例
      - 飞行器在高层稀薄大气层飞行
    - 微尺度流动，例
      - 激波内部结构
      - 微管道流动（**MEMS**中的流动）

附录1　笛卡尔(Cartesian)张量

主要内容

指标表示与求和约定

- 两种表示
  - 实体表示 (Symbolic or Gibbs' notation) $\mathbf{a}$
    - 坐标系无关(Independent of coordinate system)
  - 指标表示(Index notation)
    - 坐标系分量: a_i , $i=1,2,3$
  - 对于同一表达式中的各项，其表达方式应该一致！
- 求和约定(Einstein's summation convention)

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i \longrightarrow \mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i=a_j\mathbf{e}_j$$

哑标 dummy index

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=d\mathbf{x}\bullet\nabla f \qquad C=A\times B \Leftrightarrow C_{ij}=A_{ik}B_{kj}$$

自由标 free index

Kronecker符号和置换符号

- Kronecker delta
  - 定义

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad i,j=1,2,3; \qquad \{\delta_{ij}\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

  - 性质

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \quad \text{（对称性）}$$

$$\boxed{A_i\delta_{ij}=A_j} \quad \text{（最重要）} \Rightarrow \delta_{ij}\delta_{kj}=\delta_{ik}=\delta_{ki} \qquad \delta_{ii}=3$$

$$\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=(a_i\mathbf{e}_i)\bullet(b_j\mathbf{e}_j)=a_ib_j(\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j)=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i$$

Kronecker符号和置换符号

- **Permutation symbol**
  - ◆定义

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{if any two indices are equal} \\ 1 & \text{if } ijk = 123, 231, \text{ or } 312 \\ -1 & \text{if } ijk = 321, 132, \text{ or } 213 \end{cases}$$

  - ◆性质
    - (1) 由定义：$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}, \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \dots \quad \varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$
    - (2) $\varepsilon \sim \delta$关系：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}}$$

（直接验证可证）

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 2\delta_{kn}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

Kronecker符号和置换符号

- **Permutation symbol**
  - ◆性质（续）
    - (3) 行列式 $|a_{ij}| = \varepsilon_{rst}a_{r1}a_{s2}a_{t3} = \varepsilon_{rst}a_{1r}a_{2s}a_{3t}$ ⇒

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \mathbf{e}_i \Leftrightarrow c_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}A_j A_k = 0 \qquad \mathrm{c} = \nabla\times\mathbf{a} \Leftrightarrow c_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

坐标系变换

- 几点说明：
  - ◆指同一物理参考系内的坐标系变换。
  - ◆张量实体与坐标系无关
  - ◆不同坐标系的分量存在变换关系！
  - ◆笛卡尔张量即直角坐标系中的张量分量。
  - ◆仅考虑笛卡尔坐标系的旋转、反射
    - 平移时基矢不变，不考虑

- **Homework:**
  - ◆1.9, 1.10
- 下讲内容：
  - ◆附录1：笛卡尔张量（续）

谢谢！