第三讲 笛卡尔张量(2)

Lecture 2 Cartesian Tensors (2)

孙德军

主要内容

坐标系变换

- 变换矩阵 $\beta_{ji} \equiv \mathbf{e}'_j \bullet \mathbf{e}_i$
  - 新系基矢在旧系中的方向余弦
  - 下标是有次序的：新 – 旧
  - 下标不是同一坐标系的，所以并不是张量
- 基矢变换关系 $\mathbf{e}'_j = \left(\mathbf{e}'_j \bullet \mathbf{e}_i\right)\mathbf{e}_i = \beta_{ji}\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}'_j\right)\mathbf{e}'_j = \beta_{ji}\mathbf{e}'_j$$

- 矢量分量变换关系

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i = a'_i\mathbf{e}'_i = a'_i\beta_{ij}\mathbf{e}_j = a'_j\beta_{ji}\mathbf{e}_i = a_i\beta_{ji}\mathbf{e}'_j = a_j\beta_{ij}\mathbf{e}'_i$$

$$\Rightarrow a'_i = \beta_{ij}a_j \qquad a_i = \beta_{ji}a'_j$$

  - 旧表新，求和指标要靠近！（新表旧，则反之）
  - 矢量分量的变换关系与基矢的变换关系完全一致！

坐标系变换

- 本征变换

$$\because \quad \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\therefore \quad \beta_{ki}\mathbf{e}'_k \bullet \beta_{lj}\mathbf{e}'_l = \beta_{ki}\beta_{lj}\delta_{kl} = \beta_{ki}\beta_{kj} = \boxed{\beta^T_{ik}\beta_{kj} = \delta_{ij}}$$

  - 故变换矩阵是正交阵，正交变换

$$\left|\beta_{ij}\right| = \pm 1$$

  - 正号：右手系到右手系，本征变换（默认）
  - 负号：右手系到左手系，非本征变换（例：反射变换）

返回

张量的定义

- 对于上述坐标转换，可以定义：
  - 标量：
    - 3^0个函数（分量）描述，与坐标系无关

$$\phi' = \phi$$

    - 定义为零阶张量
  - 矢量：一阶张量
    - 3^1个函数（分量）描述，并且满足如下坐标变换关系

$$v_i' = \beta_{ij} v_j$$

$$\mathrm{v}_i = \beta_{ji} v_j'$$

    - 定义为一阶张量
    - 注意，如（ ρ, P, T ）组合并非一阶张量

张量的定义

- 二阶张量
  - 3^2个函数（分量）描述，坐标变换关系

$$T_{ij}' = \beta_{im}\beta_{jn}T_{mn}$$

$$T_{ij} = \beta_{mi}\beta_{nj}T_{mn}'$$

旧表新，求和指标要靠近！

- n阶张量
  - 3^n个函数（分量）描述，坐标变换关系

$$T_{r_1r_2\ldots r_n}' = \beta_{r_1s_1}\beta_{r_2s_2}\ldots\beta_{r_ns_n}T_{s_1s_2\ldots s_n}$$

$$T_{r_1r_2\ldots r_n} = \beta_{s_1r_1}\beta_{s_2r_2}\ldots\beta_{s_nr_n}T_{s_1s_2\ldots s_n}'$$

实际上定义的都是张量的分量形式！

对应有张量的实体形式！

返回

张量代数

- 零张量
  - 所有的分量为零
  - 任意坐标系为零
- 加（减）法 $c_{i_1i_2\ldots i_n} = a_{i_1i_2\ldots i_n} \pm b_{i_1i_2\ldots i_n}$
  - 同阶张量才能相加减
- 张量相等（等式）
  - 必须是同阶张量
  - 对应分量分别相等
  - 差是零张量
- 张量方程
  - 含未知量的张量等式
  - 任何坐标系中均成立！

张量代数

- 张量乘法
  - 数乘 $c_{i_1i_2\ldots i_n} = \alpha T_{i_1i_2\ldots i_n}$
  - 外积 $c_{i_1i_2\ldots i_n j_1j_2\ldots j_m} = a_{i_1i_2\ldots i_n} b_{j_1j_2\ldots j_m}$
    - 矢量的外积称为并矢(dyad)， c=ab
    - 阶数为两张量的相加
    - 不服从交换律
    - 满足结合律
  - 缩并 contraction

$$a_{ijkk} = b_{ij}$$

  - 内积（点积）inner product： 外积+缩并， c=a·b

$$c_i = a_{ij} b_j$$

    - 双点积：并联、串联

返回

张量识别定理（商法则）

- 设A是由3^m个函数组成的函数组，B是*n*阶张量，

$$C_{i_1i_2\dots i_m j_1j_2\dots j_n} = A_{i_1i_2\dots i_m} B_{j_1j_2\dots j_n}$$

C经*k*次缩并后得*m+n-2k*阶张量，则A必为*m*阶张量

- *k*=0 (外积) $c_{ij} = a_i b_j \Longleftrightarrow$ **c = ab**
  - c为二阶张量，b为矢量，a有3个函数表达，则a必为矢量
- *k* ≠0 (内积) $c_i = a_{ij} b_j \Longleftrightarrow$ **c = a • b**
  - c为矢量，b为矢量，a有9个函数表达，则a必为二阶张量
- δ_{ij} ε_{ijk}

返回

张量导数

- 笛卡尔张量分量对空间坐标求n次偏导后（如果偏导存在）仍是张量分量，张量的阶数提高n阶
  - 用定义证明 $T_i' = \beta_{ik} T_k$ $x_l = \beta_{jl} x_j'$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_i'}{\partial x_j'} = \beta_{ik} \frac{\partial T_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} = \beta_{jl} \beta_{ik} \frac{\partial T_k}{\partial x_l}$$

  - 梯度：提高一阶

$$\nabla \phi \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad (\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

  - 散度：上述基础上再缩并，降低一阶

$$\nabla \bullet \mathbf{u} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad (\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{\sigma}})_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$

  - 旋度：阶数不变 $\nabla \times \mathbf{u} \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{u})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

返回

各向同性张量(Isotropic tensors)

- 分量经任意正交变换后均保持不变
  - 零张量是各向同性的
  - 零阶张量（标量）是各向同性的
  - 一阶张量（矢量）只有零矢量是各向同性的
  - 二阶各向同性张量

$$A_{ij} = p\delta_{ij}$$

  - 三阶各向同性张量（本征变换集合内）

$$A_{ijk} = \sigma \varepsilon_{ijk}$$

  - 四阶各向同性张量

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

返回

- **Homework:**
  - **1.11, 1.12**
- 下讲内容:
  - § 1.3 应力张量

谢谢！

附：热力学基础

教材§1.4主要部分。

一、运动流体的热力学描述

二、热力学第一定律：能量守恒；内能、焓、比热

三、热力学第二定律，熵增原理

四、热力学基本方程和Maxwell关系

五、(热)完全气体和量热完全气体（补充）

六、流体的可压缩性

一、运动流体的热力学描述

1. 准平衡态假设

- 经典热力学：平衡态（体系的热力学特性达到均匀状态）可逆过程热力学（指状态变化的过程可以反向且不改变环境）。
- 运动流体：一般不是平衡态（热力学特性是时、空函数）；伴随摩擦、导热等不可逆过程。
- 准平衡态假设：微元体系的空间尺度、松弛时间分别远小于状态量发生显著改变的空间和时间尺度。

2. 热力学特性

- 强度量：压强(pressure) p，温度(temperature) T
- 广延量：体积(volume) V；内能(internal energy) E，焓(enthalpy) H，熵(entropy) S
- 单位质量："比"(specific)内能等：v或ρ, ε, h, s

3. 状态方程

- 热状态方程(Thermal Equation of State) $f(\rho, p, T)=0$；
- 量热状态方程(Caloric Equation of State) $\varepsilon=\varepsilon(\rho,T)$或$h=h(p,T)$等。

二、热力学第一定律：能量守恒；内能、焓、比热

- $dE = \delta Q + \delta W$，可逆过程：$dE = \delta Q - pdV$
- $d\varepsilon = \delta q - pdv$ （单位质量）
- 定容比热 $c_v = \lim\limits_{\delta T\to 0}\left(\frac{\delta q}{\delta T}\right)_v = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_v$
- 比焓 $h = \varepsilon + pv = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$，等压过程 $dh = d\varepsilon + pdv = \delta q$
- 定压比热 $c_p = \lim\limits_{\delta T\to 0}\left(\frac{\delta q}{\delta T}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$

三、热力学第二定律，熵增原理

1. 热力学第二定律的两种等价的表述形式：

(1) Clausius 表述（1850）：不可能把热量从低温物体传到高温物体而不对外界产生其它影响。

(2) Kelvin 表述（1851）：不可能从单一热源吸热使之完全变成有用功而不对外界产生其它影响。即第二类永动机是不可能实现的。

反向过程可以，表明摩擦生热、热传导(conduction)是不可逆过程。

2. 三个推论

(1) 两个热源间的可逆热机效率最高，且只取决于热源温度；

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \le 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

(2) 借助可逆热机可以建立绝对温标（与理想气体温标一致），且绝对零度是不可能达到的。

(3) Clausius 不等式：对任意热力学循环（等号只对可逆循环成立）

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0 \quad \text{从热源吸热为正}$$

3. 热力学第二定律的数学表述

对可逆过程，可定义态函数**熵**（单位质量的熵称为**比熵** s）

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R$$

对系统的一般热力学过程（等号只对可逆过程成立）

$$dS \ge \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R$$

$$S_2 - S_1 \ge \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_a$$

4. 熵增原理：可逆绝热过程等熵；不可逆绝热过程熵增。

四、热力学基本方程和 Maxwell 关系

1. 封闭均匀系统可逆过程的热力学基本方程

$d\varepsilon = Tds - pdv$, $dh = Tds + vdp$, $df = -sdT - pdv$, $dg = -sdT + vdp$

(1) 只有一个独立。其中，$f = \varepsilon - Ts$, $g = h - Ts$。Helmholtz 自由能，Gibbs 自由焓。流体力学中基本不用。

(2) **结论对不可逆过程也成立！** 因只涉及态函数变化，可理解为任意假想的可逆过程进行。

2. Maxwell 关系

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v, \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T, \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

五、(热)完全气体和量热完全气体（补充）

- (热)完全气体(即理想气体) ((thermally) perfect gas)：忽略分子作用力
  - 理想气体状态方程：$p = \rho RT$；
  - 理想气体量热状态方程：$\varepsilon = \varepsilon(T)$ 或 $h = h(T)$ 等；则 $d\varepsilon = c_v dT$ 或 $dh = c_p dT$，c_v, c_p 也仅是 T 的函数；
- 量热完全气体(calorically perfect gas)：比热是常数的完全气体

流体的可压缩性

- 定义：外压作用下体积改变的特性称为体积弹性即可压缩性
- 流体可压缩性大小的度量：
  - 体积弹性模量 $K = -\left(\frac{\partial p}{\partial \upsilon / \upsilon}\right)_s = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \rho c^2, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$
    - 绝热条件下产生单位体积相对变化所需施加的额外压强
  - （等熵）压缩性系数 $\beta = \frac{1}{K} = \frac{1}{\rho c^2}$
- 注意：
  - 流体是可以承受法向力而保持静止的(与定义比较)
  - 流体的可压缩性与流动的可压缩性
    - 流体的可压缩性是物性
    - 流动的可压缩性（第4章讨论）是流动性质，是一定流动条件下可压缩性对流动的影响