



第十章 湍流



Contents

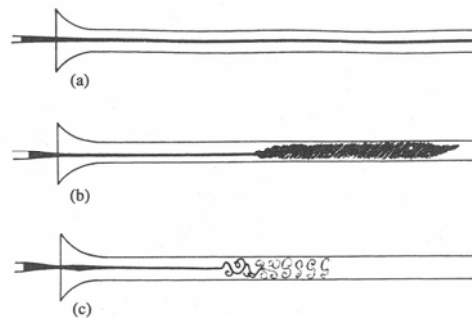
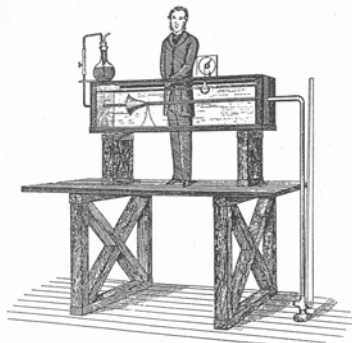
- ◆ 什么是湍流？
 - 引言
- ◆ 湍流是怎么发生的？
 - 流动的稳定性
 - 从层流向湍流的转捩
- ◆ 湍流的数学模型？
 - Reynolds平均
 - Reynolds方程
 - Reynolds应力与湍流方程的封闭性
 - 湍流的计算：湍流模式、大涡模拟、直接数值模拟（思想）



引言

◆ 什么是湍流?

- O. Reynolds管实验(1883): 首次实验观察
 - 层流(laminar flow), 湍流(turbulent flow)
- 确切的定义并不好下。



Autumn 2008

Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

3



引言

◆ 湍流的定义

- O. Reynolds:
 - 蜿蜒曲折、起伏不定的流体运动(sinuous motion)
- G. I. Taylor & von Karman:
 - 流体流过固体表面或剪切流动中出现的不规则流动
- J. O. Hinze: in *Turbulence*
 - 不规则流体运动, 物理量随时间、空间呈随机变化
 - wall turbulence, free turbulence
- 1960年代以来的重要发现
 - “拟序结构”或称“相关结构”(coherent structure)
- “Shall I refuse my dinner because I do not fully understand the process of digestion”

Autumn 2008

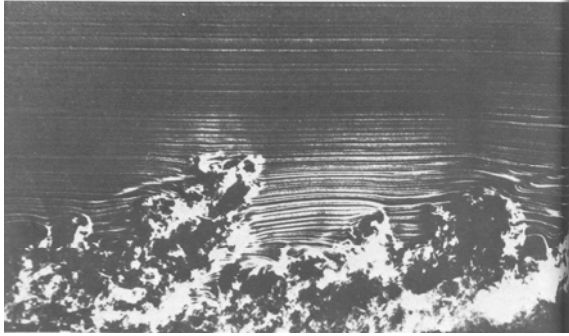
Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

4



引言

- ◆ Wall turbulence
- ◆ Free turbulence



Autumn 2008

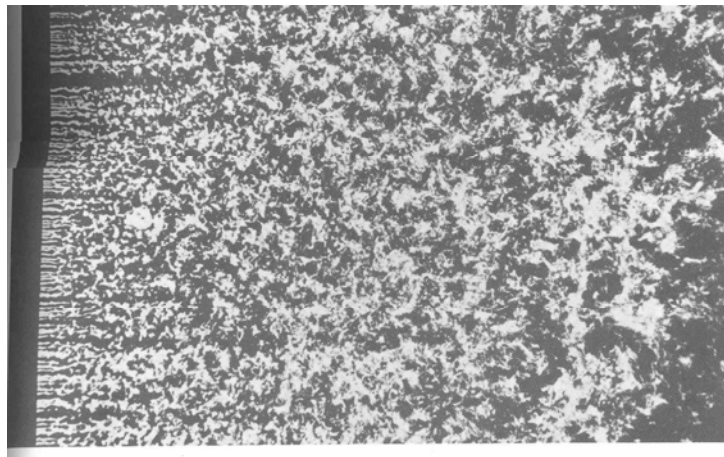
Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

5



引言

- ◆ Isotropic turbulence



Autumn 2008

Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

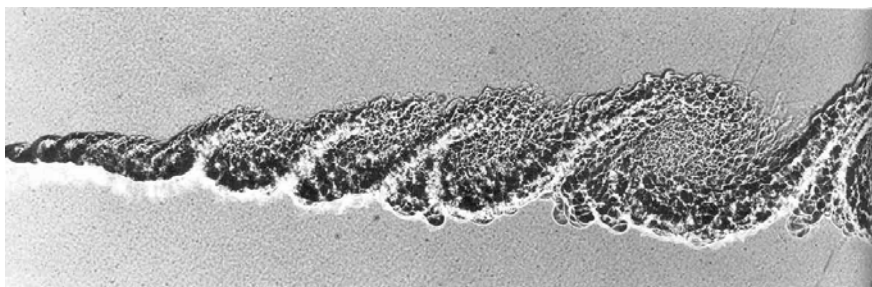
6



引言

◆ Coherent structure

- The small vortical structures are random motions while the large vortical structure in turbulence are fairly well organized.



Autumn 2008

Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

7



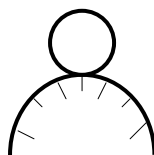
流动的稳定性

- ◆ 层流失稳是湍流产生的必要条件！

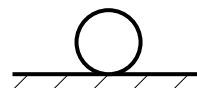
◆ 稳定性的概念



稳定平衡



不稳定平衡



随遇平衡
中性稳定

Autumn 2008

Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

8



流动的稳定性的稳定性

◆ 流动稳定性的概论

- 基本流动（平衡状态）+ 小扰动
 - 扰动衰减，基本流动能恢复：稳定
 - 扰动放大，变为另外一种流动：不稳定
 - 扰动幅度仍在原来的范围：中性稳定
- 基本流动的力的平衡状态被打破而不能恢复
- 可根据引起不稳定的力的不同进行分类
 - 惯性力——Kelvin-Helmholtz不稳定性，离心不稳定性
 - 浮力——Rayleigh-Taylor不稳定性，热不稳定性
 - 表面张力不稳定性
 - 其它如电磁力等等

Autumn 2008

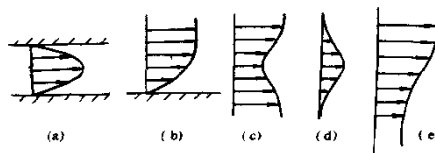
Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

9



流动的稳定性的稳定性

◆ 平行剪切流的不稳定性



– 线性理论

- 平行基本流假设，满足Navier-Stokes方程
- 扰动后的流动也满足Navier-Stokes方程
- 两者相减，得到扰动量满足的方程
- 小扰动线化：略去扰动方程中的非线性高阶小量
 - 得到小扰动线化N-S方程，例如二维流函数形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi' - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi'$$

Autumn 2008

Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

10



流动的稳定性

◆ 平行剪切流的不稳定性

– 线性理论：正则模方法

$$\psi'(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

- 时间模式： α 为实数， ω 为复数，幅值 $\propto e^{\omega_i t}$
- 空间模式： α 为复数， ω 为实数，幅值 $\propto e^{-\alpha_i x}$
- 时空模式： α 和 ω 均为复数，复杂，从略

$$\Rightarrow (U - c)(D^2 - \alpha^2)\varphi - U''\varphi = \frac{1}{i\alpha \text{Re}}(D^2 - \alpha^2)^2 \varphi, \quad c = \omega / \alpha$$

二维Orr-Sommerfeld 方程

结合边界条件，形成特征值问题

Squire定理：二维扰动更不稳定



流动的稳定性

◆ 平行剪切流的不稳定性

– 无粘流Rayleigh拐点定理

- 不稳定必要条件是基本流速度场必须具有拐点，即 U 的二阶导数改变符号
- 一阶导是负涡量，速度场拐点是涡量的极值点！

– 无粘流Fjørtoft定理

- 不稳定必要条件是(比Rayleigh拐点定理条件更强)

$$U''(U - U_s) < 0, \quad U_s'' = 0$$

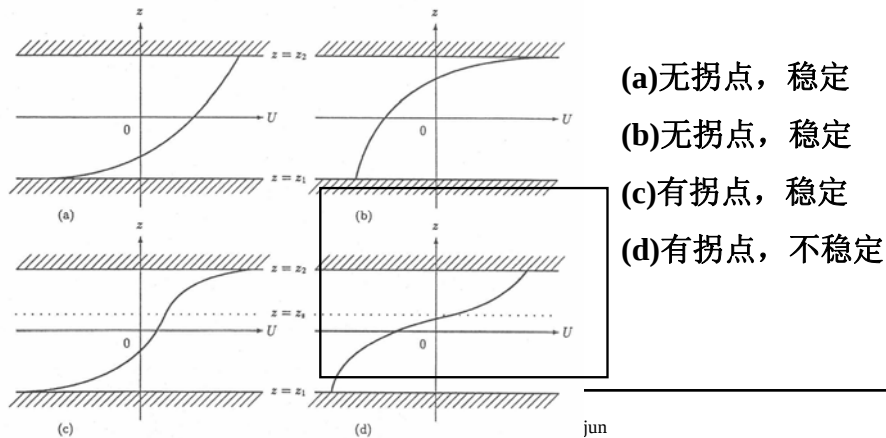
– 均是必要条件，而不是充分条件



流动的稳定性的稳定性

◆ 平行剪切流的不稳定性

- 无粘稳定性必要条件示例
- Fjørtoft定理要求涡量大小具有极大值—最强剪切



Au

jun

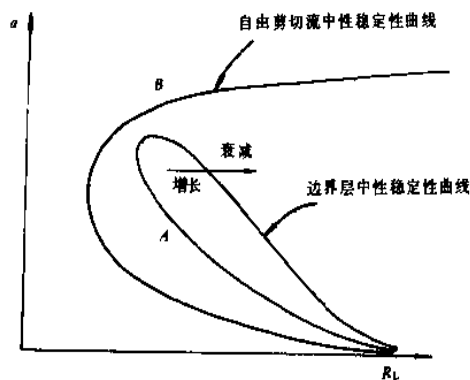
13



流动的稳定性的稳定性

◆ 平行剪切流的稳定性: 中性稳定曲线

- 两类。A: 无拐点; B: 有拐点



粘性作用的两重性

平面剪切层: $Re_c = 0$

Blasius边界层, $Re_c = 520$

平面Poiseuille流, $Re_c = 5772.22$

平面Couette流, $Re_c = \infty$

Hagen-Poiseuille流, $Re_c = \infty$

Autumn 2008

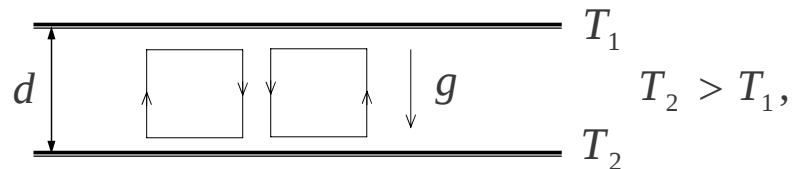
Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

14



流动的稳定性

◆ 热不稳定性



- 不考虑粘性，则热胀冷缩导致不稳定
- **Bernard convection**

$$\text{Rayleigh Number } Ra = \frac{g\alpha(T_2 - T_1)d^3}{\nu\kappa}$$

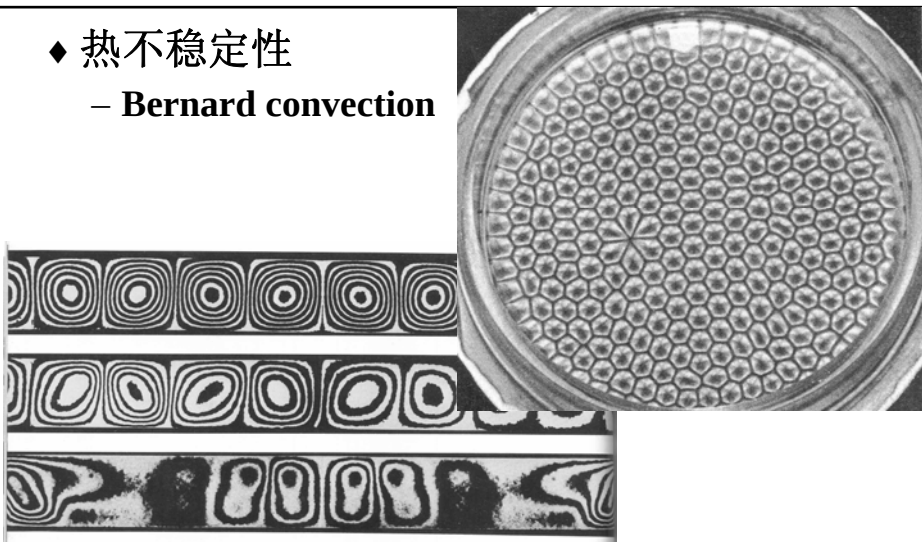
$$Ra_{Cr} \approx 1708$$



流动的稳定性

◆ 热不稳定性

- **Bernard convection**

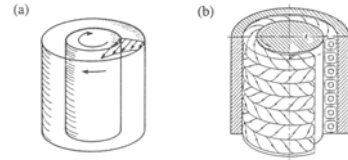




流动的稳定性

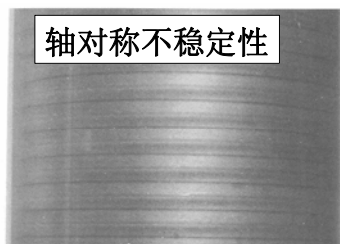
◆ 旋转Couette流的不稳定性

- 二维轴对称旋转基本流
- 无粘Rayleigh判别准则



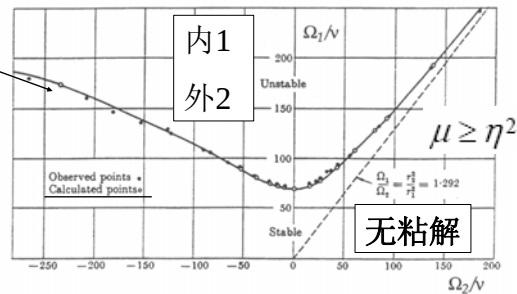
$$\frac{d}{dr}(\Gamma^2) > 0, \text{ stable}$$

$$\mu = \Omega_2 / \Omega_1, \quad \eta = R_1 / R_2 < 1$$



轴对称不稳定性

粘性解



Autumn 2000

Elementary fluid Mechanics, by Sun Dejun

17

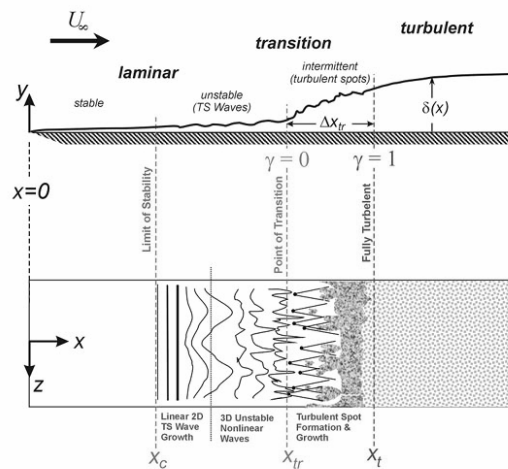


层流向湍流转捩(transition)



Physics

Laminar-to-Turbulent BL Transition



WUVC Annual ILUR Program Review, 20 Nov 01

- 5 -

Autumn 2008

Elementary Fluid Mechanics, by Sun Dejun

18



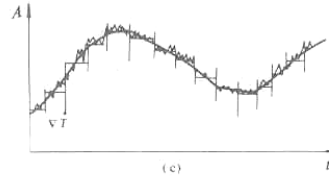
Reynolds平均

◆ 如何平均?

- 时间平均
- 空间平均
- 系综平均

$$\begin{aligned} u_i &= U_i + u_i' \\ p &= P + p' \end{aligned}$$

各态历经假设!



$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(\bar{x}, t) dt$$

T : Time Period, $T_1 \ll T \ll T_2$

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} A(\bar{x}, t) dv$$

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_j(\bar{x}, t)$$



Reynolds平均

◆ 平均法则

$$1. \quad \overline{\bar{A}} = \bar{A};$$

$$2. \quad \overline{A'} = 0;$$

$$3. \quad \overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B};$$

$$4. \quad \overline{\bar{A}B'} = 0;$$

$$5. \quad \overline{\bar{A}B} = \bar{A} \cdot \bar{B};$$

$$6. \quad \overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{A'B'};$$

$$\begin{aligned} \overline{ABC} &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \overline{B'C'} + \bar{B} \cdot \overline{A'C'} \\ &\quad + \bar{C} \cdot \overline{A'B'} + \overline{A'B'C'}; \end{aligned}$$

$$7. \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial A'}{\partial x_j} = 0;$$

$$8. \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t};$$

$$9. \quad \overline{\int A ds} = \int \bar{A} ds$$



Reynolds方程

◆ Navier-Stokes方程依然是湍流的控制方程

◆ Reynolds方程：湍流平均量满足的方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$u_i = U_i + u_i'$$

$$p = P + p'$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

$$\begin{aligned} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \overline{u_j} \cdot \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \\ &= U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_j'}) \end{aligned}$$



Reynolds方程

◆ Reynolds方程组是不封闭的！世纪难题！

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'} \right)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

◆ Reynolds应力(湍流应力) $-\rho \overline{u_i' u_j'}$

- 二阶张量
- 导致的“粘性力”一般比分子粘性力大
- 出现的原因：非线性项平均带来



湍流的计算

- ◆ 直接从N-S方程出发行不行?
 - 直接数值模拟(DNS)
 - 网格密, 计算量大, 少量科学问题可行
- ◆ 如何求Reynolds平均方程组(RANS)?
 - 湍流模式
 - 建立Reynolds应力与平均量之间的模型关系
 - 仍是工程计算的主流
 - 例如: 涡粘性模型设(仿应力张量)
$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$
 - 再模化湍流粘性系数
 - 最大的问题是模型的通用性不强
- ◆ 另辟蹊径?
 - 大涡模拟: 介于两者之间的方法, 有前途
 - 滤波, 分成大尺度涡+小尺度涡
 - 大尺度涡用直接数值模拟; 小尺度模化(通用性增强)



Thanks!