

《流体力学基础》补充习题

1. (北大题集3.6(1), 3.18) 设流场为 $u = x + t$, $v = -y + t$, $w = 0$, 试以初始时刻流体质点的坐标 (ξ, η, ζ) 作为Lagrange坐标, 求
- (1) Lagrange 坐标描述的流体运动;
 - (2) Lagrange 坐标表示的速度;
 - (3) Lagrange 坐标和Euler 坐标表示的流体加速度;
 - (4) 求 $t = 0$ 时刻过空间 $(-1, 1, 0)$ 点的流线、迹线和过 $(-1, 1, 0)$ 点在 $t = 0$ 时刻的脉线。

2. 设: (1) $u = -cy$, $v = cx$, $w = 0$. (2) $u = -\frac{cy}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{cx}{x^2 + y^2}$, $w = 0$. 试分别求两种流场的应变率张量、旋转率张量和涡量。

3. (北大题集4.5) 不可压缩流体在横截面为正三角形的直管中运动, 设 x 轴沿管轴方向, 横截面顶点的 y 和 z 坐标分别为 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 和 $(1/2, \sqrt{3}/2)$, 速度分布为

$$u = az(z - \sqrt{3}y)(z + \sqrt{3}y - \sqrt{3}), \quad v = 0, \quad w = 0$$

其中 a 为常数。若流体的粘性系数为 μ , 试求:

- (1) 粘性应力张量;
 - (2) 法向与管轴成 45° 角并通过 y 轴的截面上的粘性正应力和切应力。
4. 证明教材 (3.6.21) 式。
5. (北大题集 5.25-5.26) 两同轴的半径分别为 a, b 的直立圆柱面间充满不可压缩流体, 具有自由面但深度无限。外面的圆柱不动, 里面的圆柱以角速度 ω 作等速转动, 流体密度和粘性系数均为常数, 求两柱面间流体自由面形状。当内外柱分别以 ω_1 和 ω_2 等速旋转时, 求流体自由面形状。
6. 考虑重力场作用下的有来流问题, 证明定常均质不可压缩流动的相似参数是 Reynolds 数

和 Froude 数 $Fr = \frac{U^2}{gL}$ ，并说明 Froude 数的物理意义。流动外部条件有非定常时间尺度

τ 时，证明要增加相似参数 Strouhal 数 $St = \frac{L}{U\tau}$ ，并说明其物理意义。计及表面张力时，

证明要增加无量纲相似参数 $We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$ ，其物理意义是什么？