第二章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量P

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 边值关系和唯一性定理

* § 2.8 电像法

§2.1 物质的电性质

1、物质的电性质（回忆与讨论）

按照电荷在物质中移动的难易程度，将物质分为：

- **导体(conductor)** 电阻率 10^{-8} -10^{-6} Ω.m
  - 导电能力极强的物体
  - 常见的导体有金属、电解质水溶液、电离气体等
  - 导体中**存在着大量的自由电子**，数密度约为 $n_e \sim 10^{22}/cm^3$
- **绝缘体**(电介质，**dielectric**) 电阻率 10^{6-18} Ω.m
  - 导电能力极弱或不能导电的物体
  - 绝缘体有固态、液态和气态。如橡胶、陶瓷、塑料等

- 固态绝缘体中又分为非晶态（如塑料）和晶态（如云母）两类

- **半导体(semiconductor)** 电阻率10^{-6}-10^{6} Ω.m
  - 导电能力介于导体和绝缘体之间；自由电子 $n_e \sim 10^{16}/cm^3$
  - 如硅、锗、硒等等，半导体的电阻率随温度不同而明显变化

- **超导体(superconductor)**

某些物质当温度降低到某一温度*Tc*时，它的电阻率会几乎突然地消失。这种现象称为超导电性，这类物质称为超导体，温度*Tc*就叫做超导体的临界温度。

不同的超导体具有不同的临界温度。迄今我们知道大约有**20**多种元素，几百种合金和金属化合物是超导体，它们的临界温度的范围从**0.12K~150K**（如钇钡铜氧化合物）。

物质导电取决于有载流子！

载流子——可以自由移动的带电物质微粒。

- 金属导体：原子最外层的价电子，自由电子
- 电解质：载流子是正、负离子
- 电离气体：载流子是电子和正、负离子
- 绝缘材料：只有微量自由电子、本征离子、杂质离子
- 半导体：载流子为
  n型半导体中的自由电子；
  p型半导体中的空穴
- 超导体：载流子为电子对，又称库珀对

2、电场对物质（电荷系统）的作用

- 物质存在**形式**：
  - 由基本粒子乃至原子、分子构成的实体存在形式
  - 以场的形式存在，如电场，具有能量，能量交换
  - 物质的**实体**与**场**是物质存在的**两种基本形式**。
- 物质（以下指实体）的**结构**：是**复杂的电荷系统**，由原子/分子/离子构成。
- 电场与物质**相互作用的过程**：

电性质差异

电场 ⇄ 物质

物质中的电荷在电场作用下重新分布

达到某种新的平衡

物质电荷分布改变反过来影响外电场

■电场对物质作用 → 电场对物质内部电荷的作用

■外场对物质作用力：

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}. \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \rho_e \boldsymbol{E} dV; \quad \boldsymbol{F} = \iint_S \sigma_e \boldsymbol{E} dS; \quad \boldsymbol{F} = \int_L \lambda_e \boldsymbol{E} dl. \quad \textbf{(2.1.2)}$$

注意！

■电场E为外场，即施力带电体产生的电场，不应包括受力带电体的电场；

■受力带电体已经不限于试探电荷，所以受力带电体对施力电荷的分布，即对施力带电体的电场存在影响；

■ E是经过受力带电体影响之后的施力带电体的电场。

- ∴ $E = E_t - E_1$ (2.1.3)
  - E_t 施力和受力带电体的总电场
  - E_1 为受力带电体产生的电场
  - E 为施力带电体的电场，即外场
- 讨论 （难点！）
  - 实际问题中，E_t常易于求得，只要求得E_1，可得E。对体电荷和面电荷受力带电体这两种情况，我们只要从E_t中分别减去体电荷元和面电荷元在自身处的贡献即可。
  - 这样做的后果是将受力带电体各部分的内力也计入到总力F之中。幸运的是，由于内力相互抵消，总力F即是所要求的力。

因为：

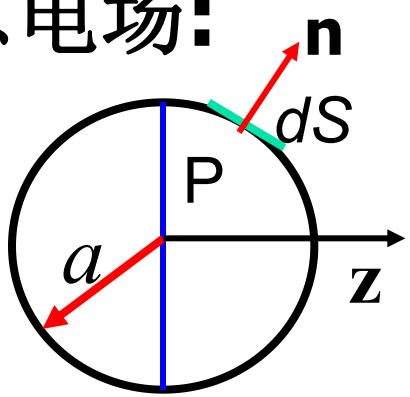
- 体电荷：$E_1(r) = \rho_e r/(3\varepsilon_0)$，$r \to 0 \Rightarrow E_1 \to 0$
- 面电荷：$E_1 = \pm\sigma_e/(2\varepsilon_0)$ （见下面例2.1）
- 线电荷：$E_1 = \lambda_e/2\pi\varepsilon_0 r$，$r \to 0 \Rightarrow E_1 \to \infty$

所以：

- 对受力带电体的情况：$E = E_t$；
- 受力带电面的：$E = E_t - E_1$；
- 对线电荷：不能利用 $E = E_t - E_1$

[例2.1] 将一带电量为Q、半径为a的均匀带电球面切成两半，求两半球面间的静电力。

[解]■ 由高斯定理求得球面两侧的总电场:



$$E_t = \begin{cases} \sigma_e / \varepsilon_0, & (r = a + 0); \\ 0, & (r = a - 0); \end{cases}$$

式中 $\sigma_e = Q/(4\pi a^2)$。

■ 由受作用面元在自身两侧产生的电场为:

$$E_1 = \begin{cases} \sigma_e/(2\varepsilon_0), & (r = a + 0); \\ -\sigma_e/(2\varepsilon_0), & (r = a - 0). \end{cases}$$

■ 电场仅有径向分量:

$$E = E_t - E_1 = \sigma_e/(2\varepsilon_0) \qquad (r = a)$$

■取球坐标，使 z 轴与切割面垂直，则有：

$$\boldsymbol{E} = \sigma_{\mathrm{e}} \hat{\boldsymbol{r}} / (2\varepsilon_0)$$

代入式（**2.1.2**）求得两半球面之间的静电力为

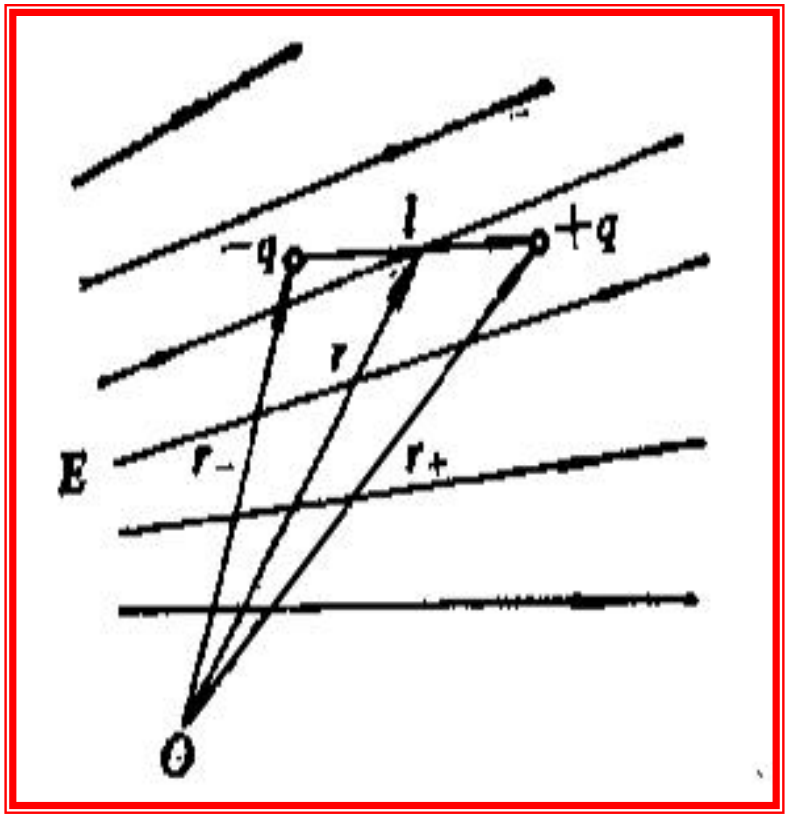
$$\mathbf{F} = \iint_s \sigma_e \mathbf{E} dS = \iint_s \frac{\sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{r}} dS$$

■由对称性分析可知，上述作用力只有 z 分量：

$$F = F_z = \frac{a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

该力为正，表明两半球间的静电力为排斥力。

[例2.2]　右下图所示的电偶极子由一对相距为l 的等量异号电荷$\pm q$ 构成，两个电荷的位置分别为$\boldsymbol{r}_{\pm}$ ，相应电偶极矩为$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}=q(\boldsymbol{r}_{+}-\boldsymbol{r}_{-})$ 。求该电偶极子在外场$\boldsymbol{E}$ 中所受的力$\boldsymbol{F}$ 及所受的力矩 $\boldsymbol{L}$ 。



[解]　设在 $\boldsymbol{r}_{-}$ 与 $\boldsymbol{r}_{+}$ 处的外电场强度分别为$\boldsymbol{E}_1$和$\boldsymbol{E}_2$，则有

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}_2-q\boldsymbol{E}_1=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{+})-q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{-}).$$

■设r为原点到电偶极子中点的矢径，且$l \ll r$，则由**泰勒展开**取头两项得（**难点!**）

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}/2) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}/2)] \approx q(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\boldsymbol{r}_+ = (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}/2) = \left(x+\Delta x/2,\quad y+\Delta y/2,\quad z+\Delta z/2\right)}$$

♦即 $$\boxed{\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

■在外电场中受的**力矩L**（以电偶极子中点为参考点）：

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r})\times q\boldsymbol{E}_2 - (\boldsymbol{r}_- - \boldsymbol{r})\times q\boldsymbol{E}_1 \approx q\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{E}$$

即 $$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}} \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

在推导中，近似取：$E_1 = E_2 = E$ (**中点处电场**).

§2.2 静电场中的导体

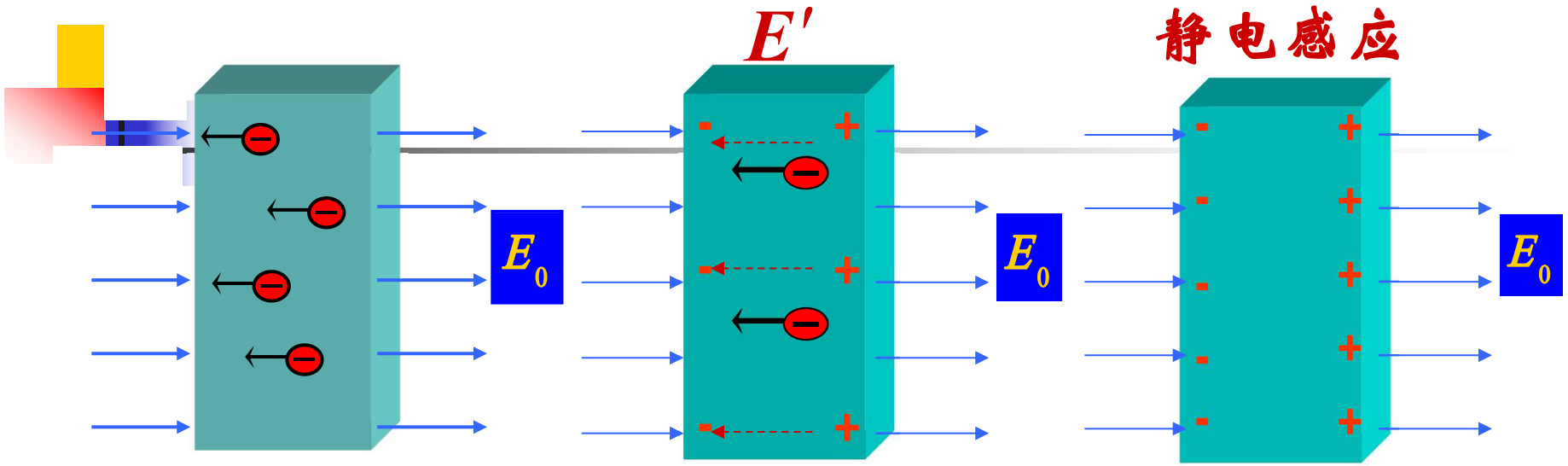
1. 导体达到静电平衡的条件

- 导体的特点是体内有自由的戴流子，静电场会改变导体内电荷的分布 → 电荷分布的改变将影响电场的分布 → 使得导体内电场强度处处为零，则自由电荷不再运动 → 我们说导体达到静电平衡。
- 这时导体内自由电荷分布以及导体内、外的电场分布不再随时间变化。 这个过程进行得很快，大约在 $10^{-8}-10^{-10}$ sec就完成了。

- 对于不存在非静电力情况下的均匀、各向同性导体，达到**静电平衡的条件**是**导体内部电场强度处处为零**。

以上所采用的是**演绎法**！即从基本定律出发，通过逻辑推理，得到**导体**达到静电平衡的条件。

导体的静电平衡条件（看演示2.1）



$F = qE = -eE$

导体内部电场

$E = E_0 + E'$

感应电场

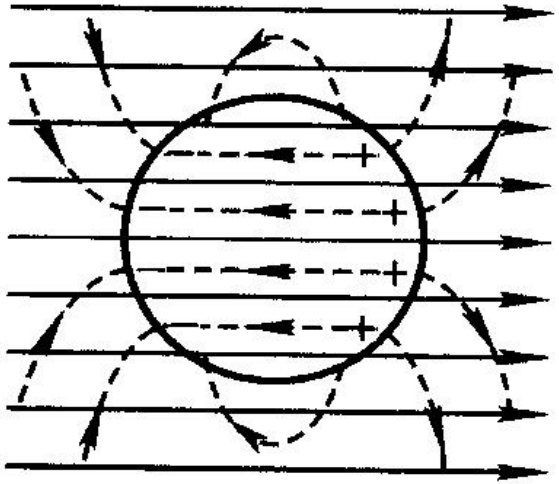
$E = 0,$

$F = 0.$

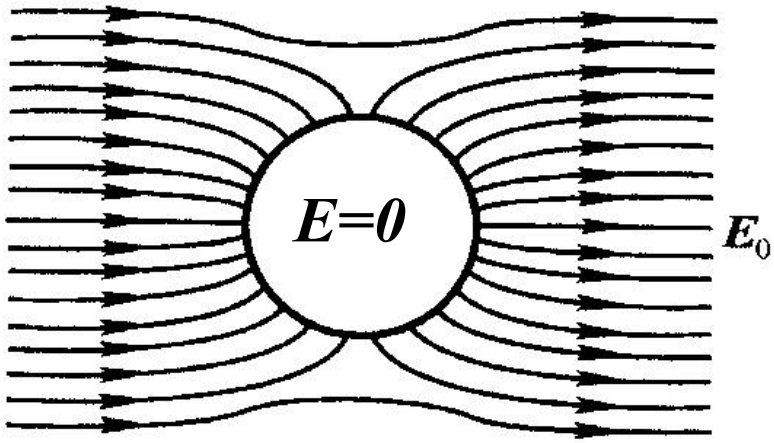
导体刚放入匀强电场中

只要E不为零，自由电子作定向运动

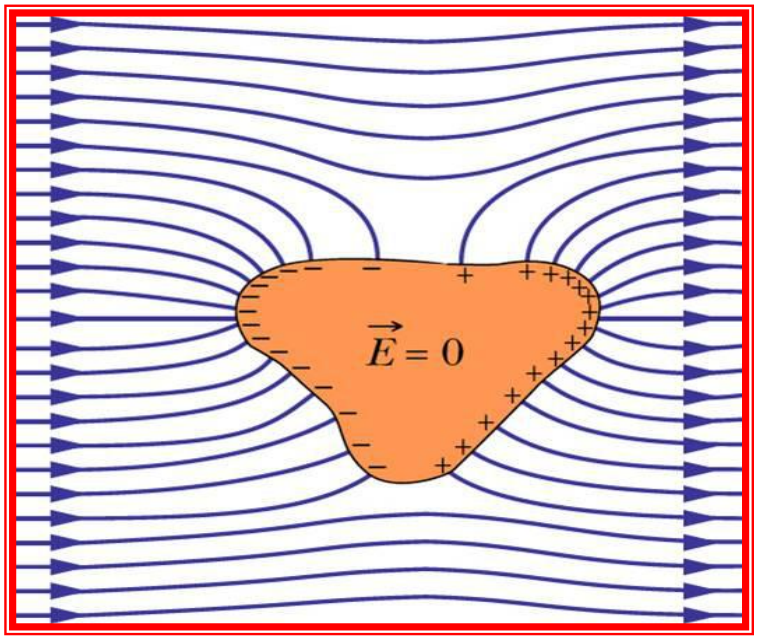
改变电荷分布，产生附加场E’



(a) 感应电荷在球内的场强与外场源在球内的场强大小相等方向相反



(b) 合电场的电场线



(c)

静电场中的导体球内部和周围的电场分布

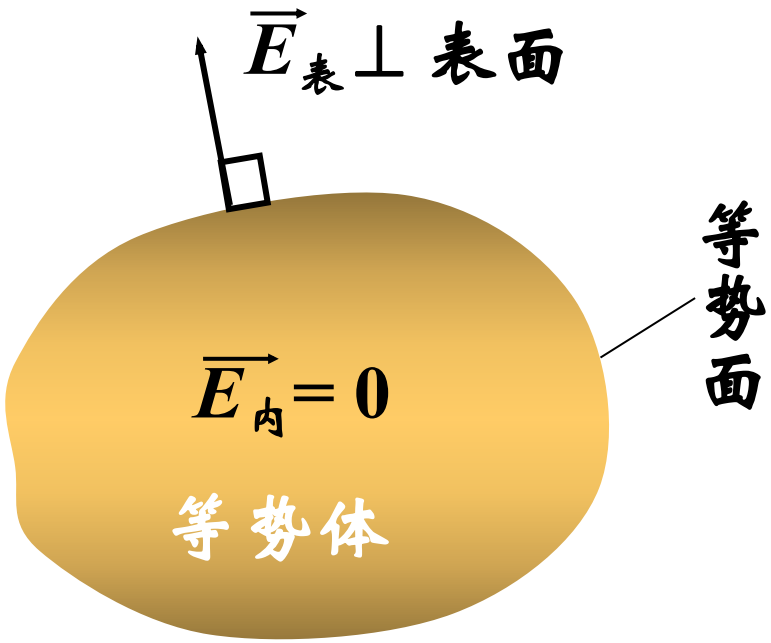
2. 处在静电平衡条件下导体的电性质

(1) 内部电场

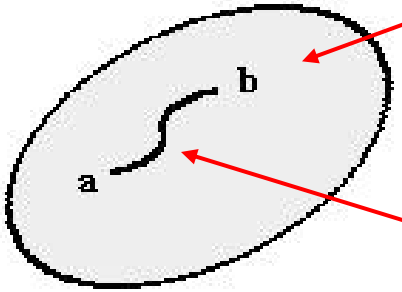
导体内部电场$E = E_0 + E' = 0$ (静电平衡条件)

(2) 电势分布

导体内部任意两点间电势差为零→各点等电势→导体为等势体 →表面为等势面



静电平衡时的导体



导体内部E=0

$$U_{ab} = \int_a^b E \bullet dl = 0$$

(3) 整体电荷分布

实心导体： ■当带电导体处于静电平衡状态时，导体内部处处没有净电荷存在，电荷密度处处为零 $\rho_e=0$。

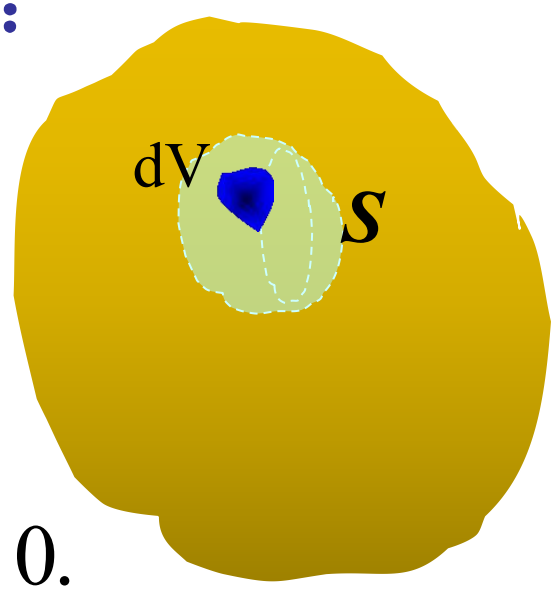
■电荷只分布在导体表面。导体表面电荷的电荷层一般只有1至2个原子的厚度。

【证明】：在导体内任取体积元dV，再取任一闭合曲面S包围它，由高斯定理：

$$\varepsilon_0 \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i q_i,$$

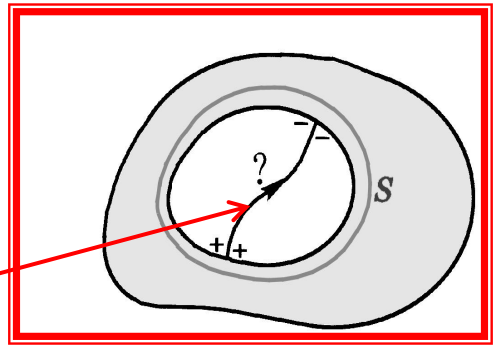
$$\because \quad \boldsymbol{E}=0, \quad \therefore \sum_i q_i = \iiint_V \rho_e \, dV = 0.$$

$\because$ 体积元dV任取，即V任取 $\quad \therefore \rho_e = 0.$



导体空腔（腔内没有带电体情况）

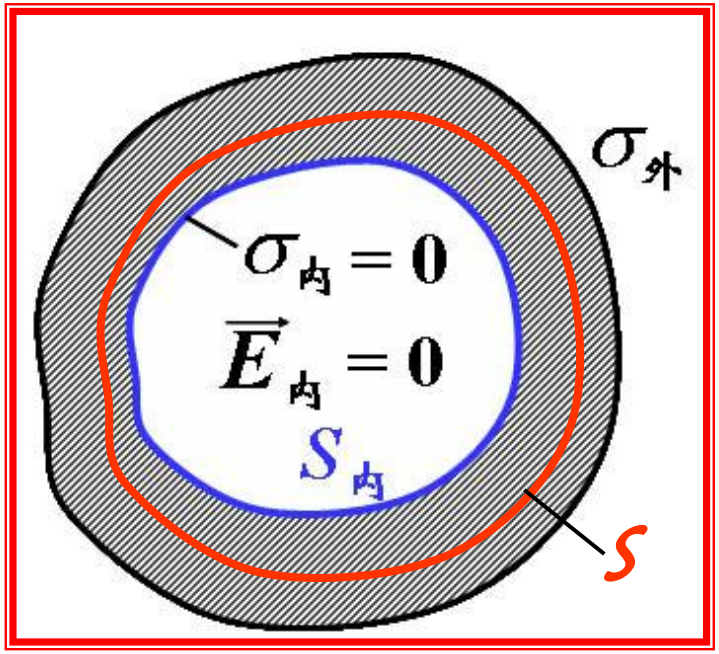
■ 包围导体空腔的导体壳内表面上处处没有电荷，电荷分布在导体外表面，空腔内处处E=0，空腔内处处电势相等。



【证明】在导体中包围空腔选取高斯面S，

则：$\because \oiint_S \cancelto{0}{\boldsymbol{E}_{导内}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0, \therefore \oiint_{S_{内}} \sigma_{内} \cdot \mathrm{d}S=0$，

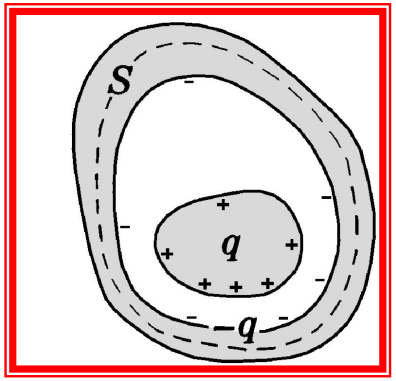
若$\sigma_{内} \neq 0$，则$\sigma_{内}$必有正负，便有E线从正电荷到负电荷，导体内表面出现了电势差。这与导体为等势体矛盾，∴只能$\sigma_{内}=0$，且腔内无E线。



$\because E_{内}=0 \rightarrow \Delta U=\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}=0.$

导体空腔（腔内有带电体 q 情况）

■ 必有 $\sigma_{内} \neq 0$，且 $q_{内表} = -q$， $\sigma_{外}$ 可不为0



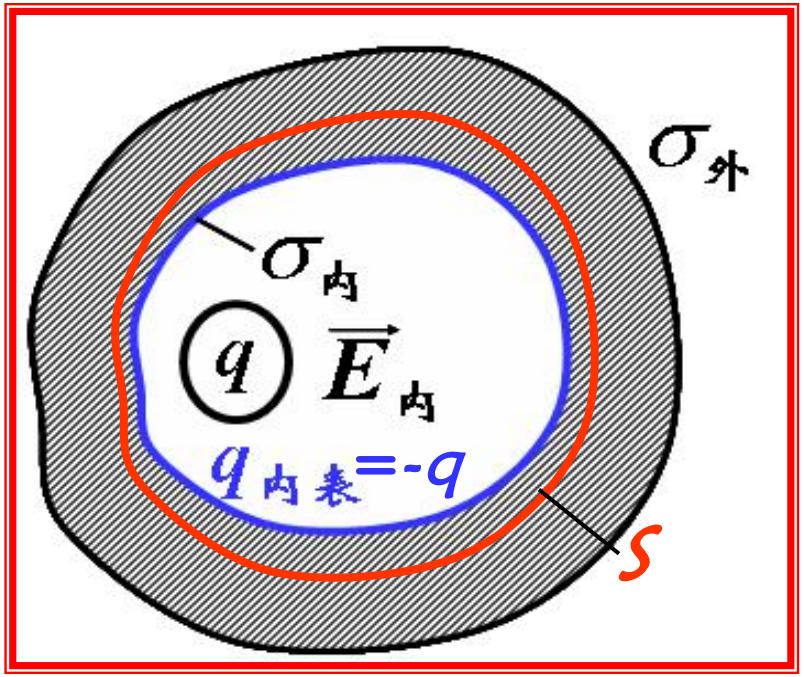
[证明] 在导体中包围空腔选取高斯面 S：

$$\oiint_S \cancelto{0}{\vec{E}_{导中}} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q_{内表})$$

$\therefore$ $q_{内表} = -q$，

$\sigma_{内} \neq 0$，

$E_{内} \neq 0$.



导体内表面上所带电荷与腔内电荷的代数和为零。

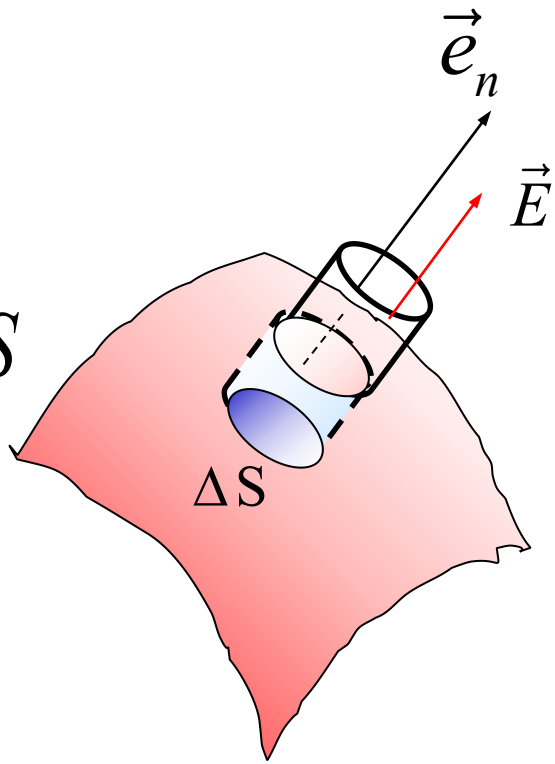
(4) 表面场强

导体表面附近的场强方向与表面垂直，大小为 σ_e/ε_0

［证明］1) 方向：如不垂直，E有切向分量，电荷受力将移动→没有达到静电平衡；2)大小：取高斯面如下图

$$\Phi_E = \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \sigma_e \Delta S/\varepsilon_0 ,$$

又 $$\iint_{上底} \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{S} + \underbrace{\iint_{下底} \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{S}}_{0} + \underbrace{\iint_{侧面} \boldsymbol{E}\bullet d\boldsymbol{S}}_{0} = E\Delta S$$

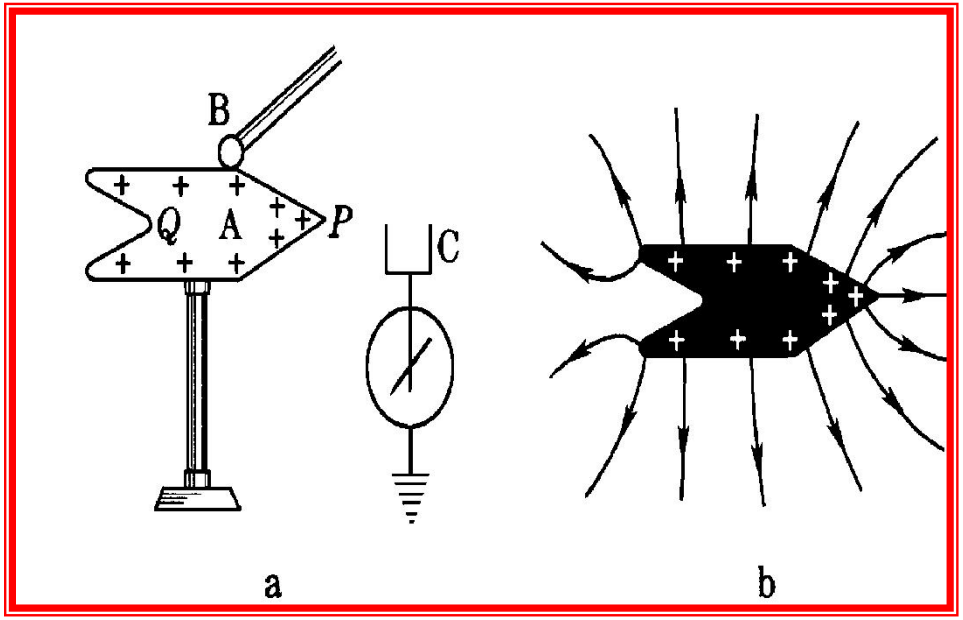


$$\therefore \quad E = \sigma_e/\varepsilon_0 , \quad \boldsymbol{E} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n} .$$

(5)表面电荷分布（回忆与讨论）

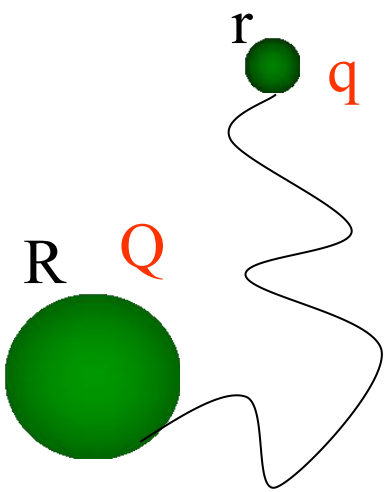
- 孤立导体表面的面电荷分布很复杂；
- 分布与外表面曲率和导体形状有关；
- 面电荷密度与曲率之间**并不存在单一的函数关系**。

- 导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大)，电荷面密度较大；
- 导体表面平坦的地方(曲率较小)，电荷面密度较小；
- 导体表面凹进去的地方(曲率为负)，电荷面密度更小。



[例]半径分别为R和r ($R>r$)导体球放置在相距无限远的两个地方，中间用细导线连接。导体球分别带电Q和q，求两球表面电荷面密度与曲率的关系。（思考题）

[解]　两个导体所组成的整体可看成是一个孤立导体系，U相等，每个球可近似的看作为孤立导体，球表面电荷分布均匀，则两球的电势为：



$$U_R = U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{4\pi R^2\sigma_R}{4\pi r^2\sigma_r} = \frac{R}{r},$$

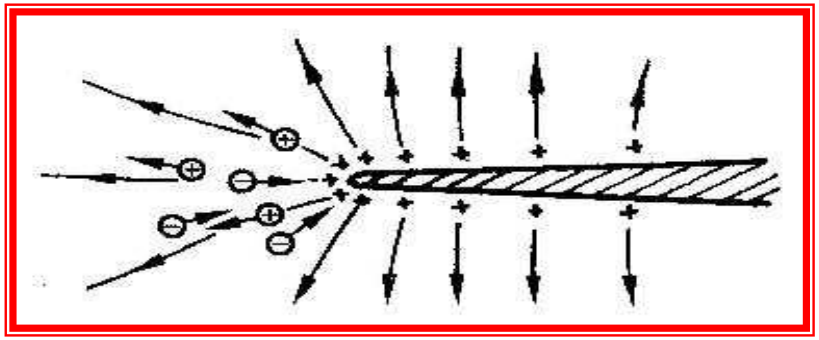
$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}.$$ 电荷面密度与半径成反比

讨论题：

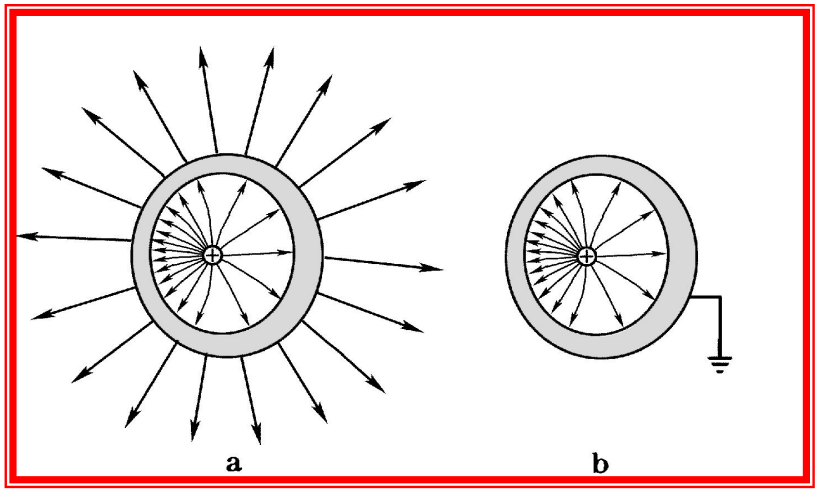
设无穷远处电势$U_\infty=0$，与仪器的外壳接地的电势$U_{地}=0$ 是否相容？

3. 导体在静电场中性质的应用（演示2.2-2.7）

- **尖端放电**　曲率大，σ_e大，$E = \sigma_e/\varepsilon_0$ 大
  - 避雷针
  - 静电复印机
  - 场致发射显微镜
  - 范德格拉夫起电机



- **静电屏蔽**　空腔导体可以保护腔内空间不受腔外带电体的影响
  - 屏蔽室
  - 带电作业
  - 范德格拉夫起电机



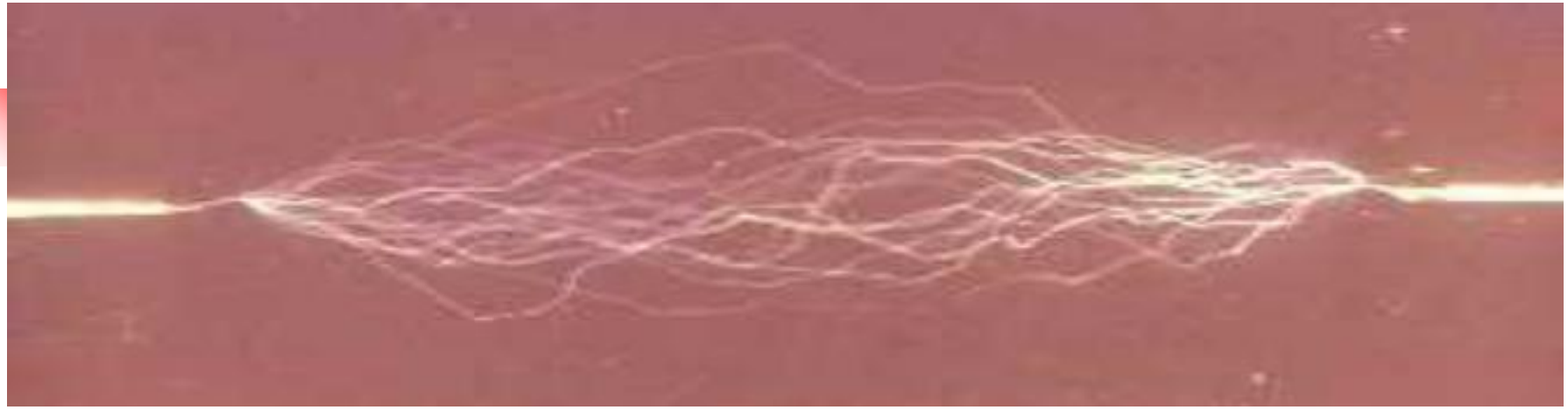
- **库仑定律的精确验证**

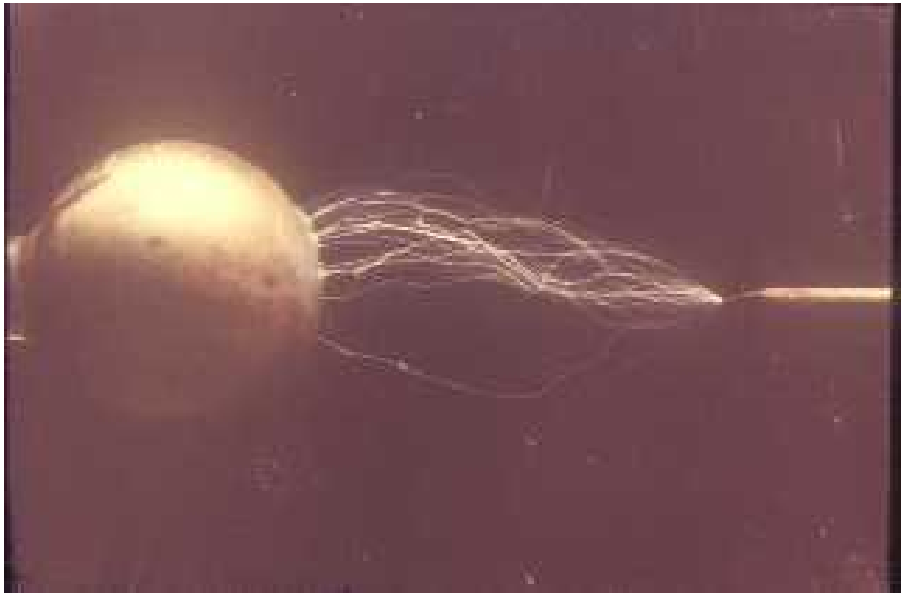
◆ 尖端放电及其应用

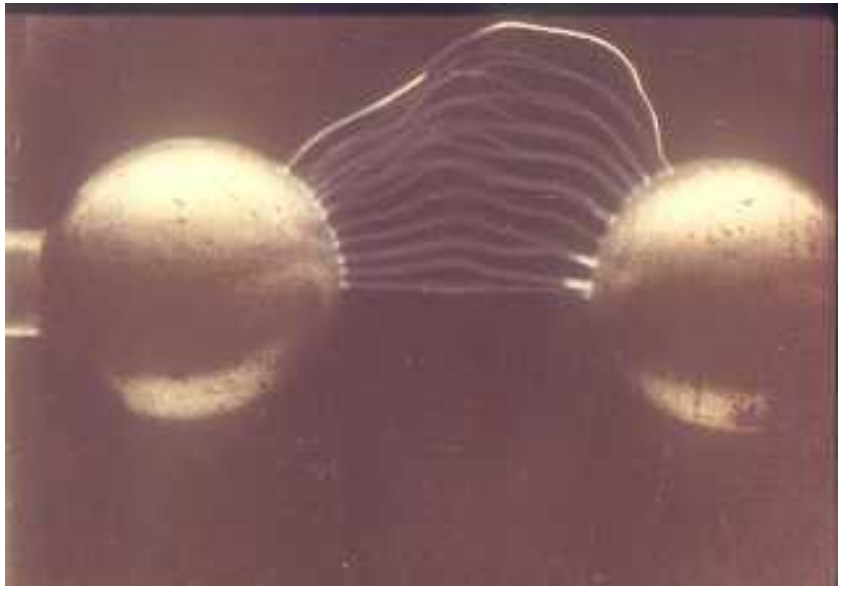
- 危害：
  - 雷击对地面上突出物体（顶端）的破坏性最大；
  - 高压设备尖端放电漏电等。
- 应用实例：
  - 避雷针（演示实验）
  - 高压输电中，把电极做成光滑球状
  - 范德格拉夫起电机起电原理就是利用尖端放电使起电机起电
  - 场离子显微镜（FIM）、场致发射显微镜(FEM)乃至扫描隧道显微镜(STM)等
  - 静电复印机

云层和大地间的闪电

空气中的直流高压放电图片





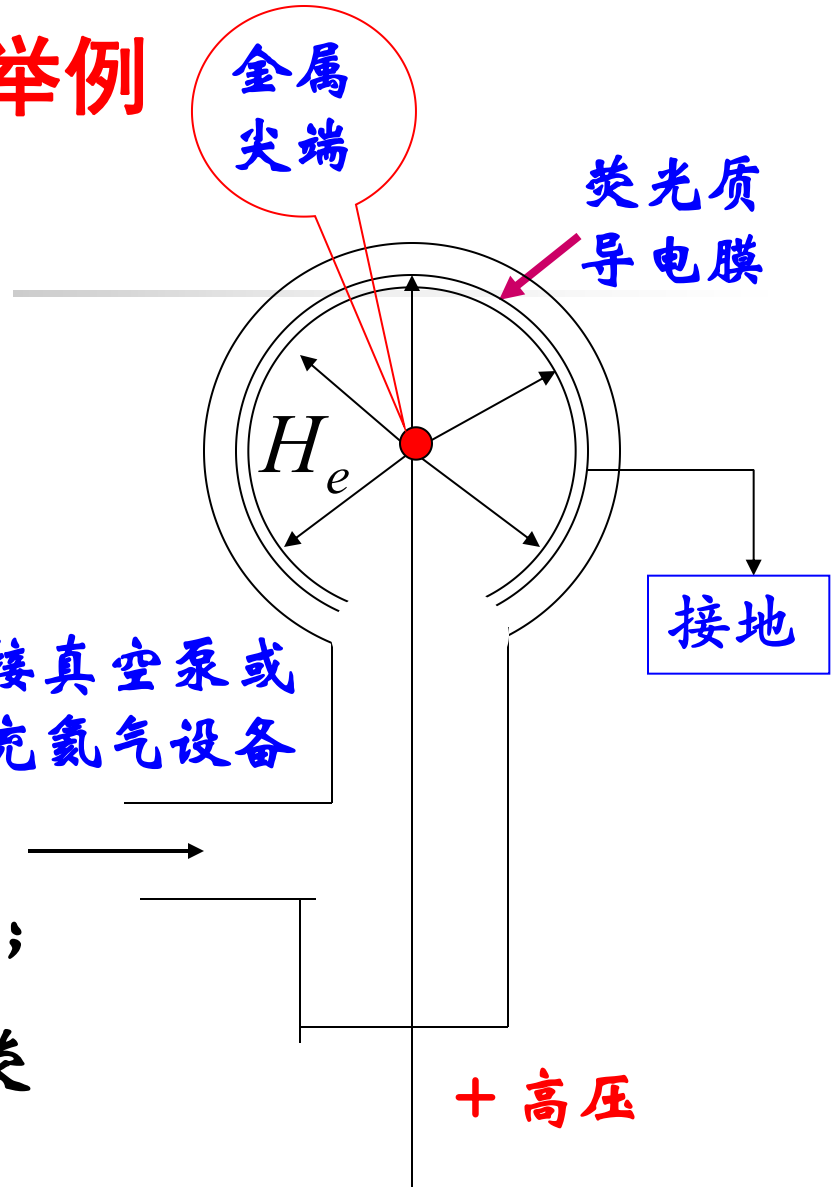


金属尖端的强电场的应用举例

场离子显微镜(FIM)

原理：

- 样品制成针尖形状；
- 针尖与荧光膜之间加高压；
- 样品附近有极强的电场；
- E使吸附在样品的氦原子电离；
- 氦离子沿电力线运动，撞击荧光膜引起发光
- 从而获得样品表面的图象



200万倍放大率

范德格喇夫起电机

- 金属球壳的**高压电极**由绝缘支柱支撑着，绝缘材料制成的**输电带**在两个转轴间不停地运动。
- **喷电针排**连接在喷电电源上，通过针尖在气体中的电晕放电，使周围与针尖极性相同的离子在电场作用下从针尖喷向输电带，使输电带充电。
- 随着输电带的运动，带上的电荷进入高压电极。极内**刮电针排**同高压电极相连和输电带之间所形成的电场，同样使气体电晕放电，从而使电荷转移到高压电极上去。
- 随着不停传送电荷，高压电极的电压很快地升高。

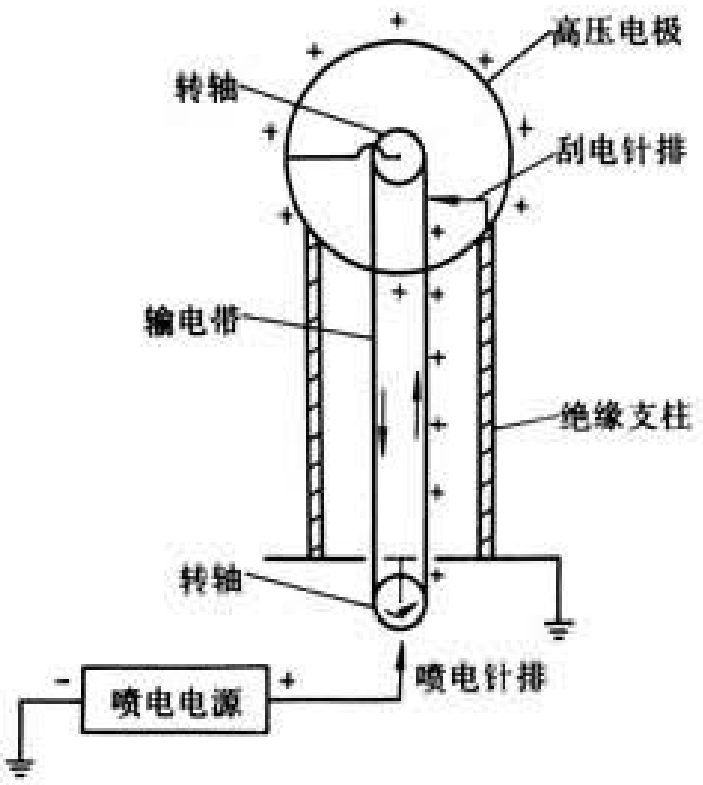
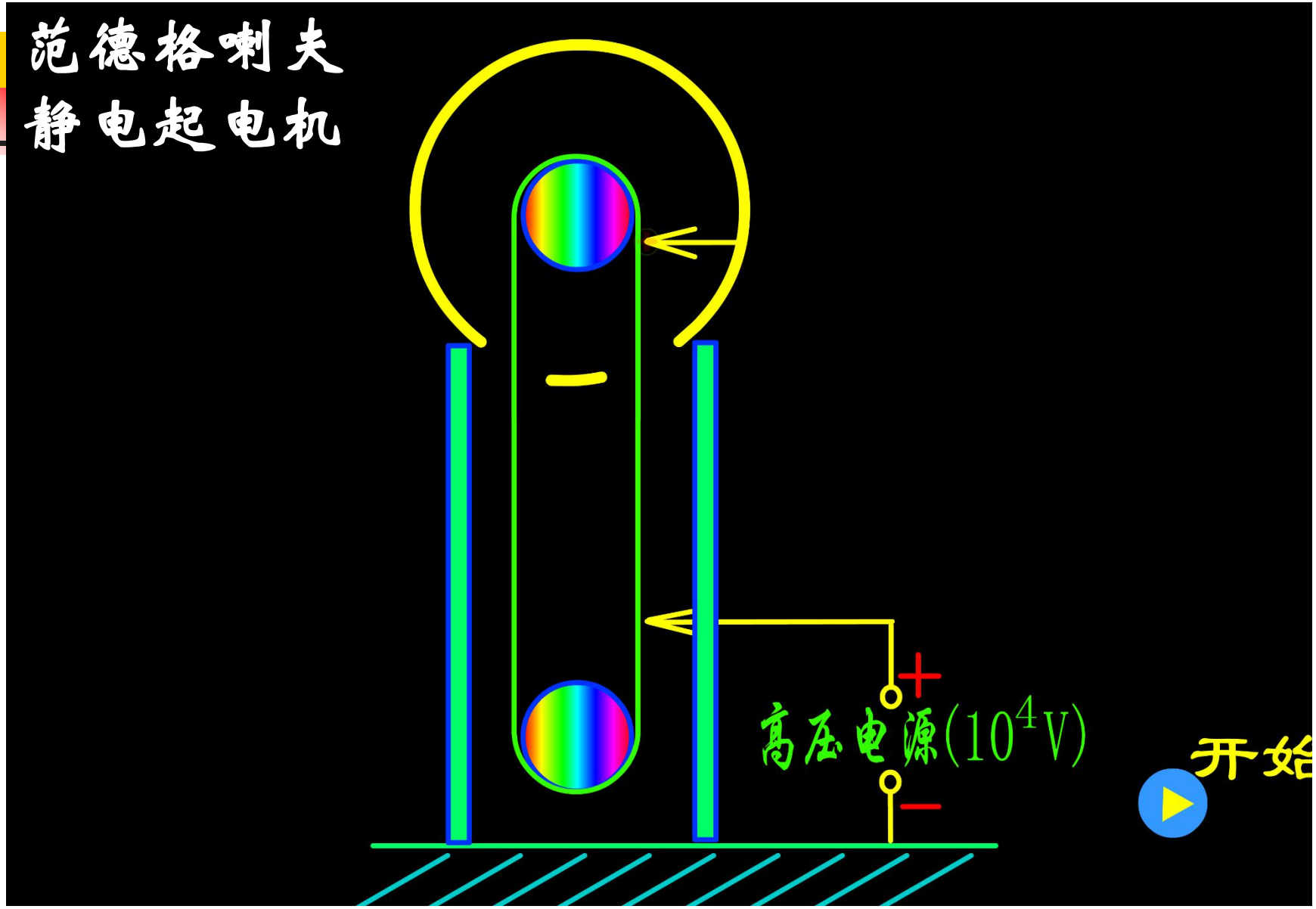
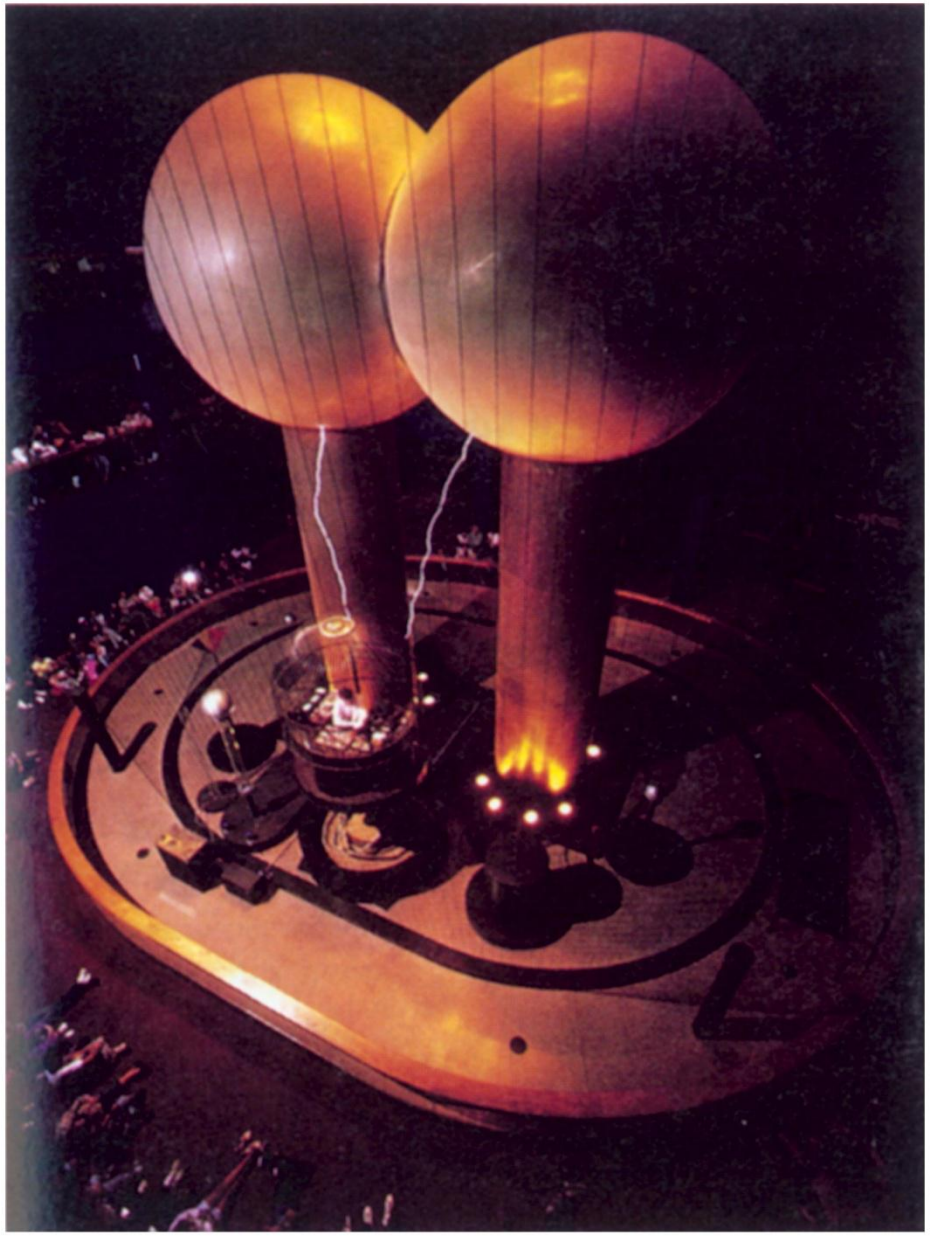


图 1　动带型静电高压发生器工作原理图

范德格喇夫静电起电机

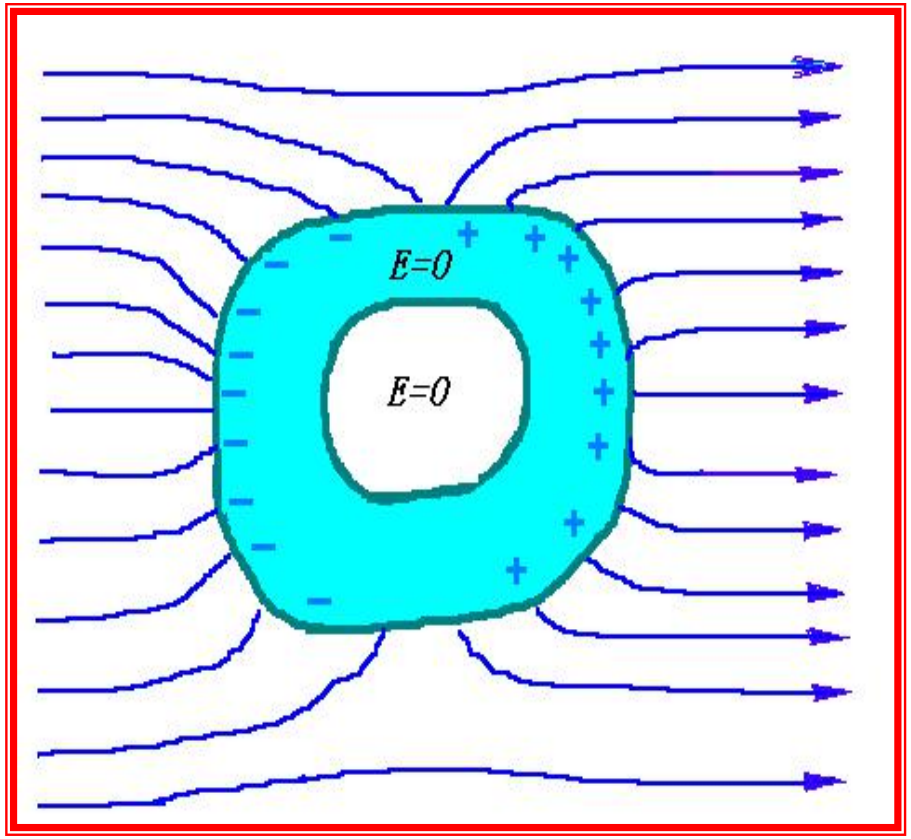




范德格拉夫起电机

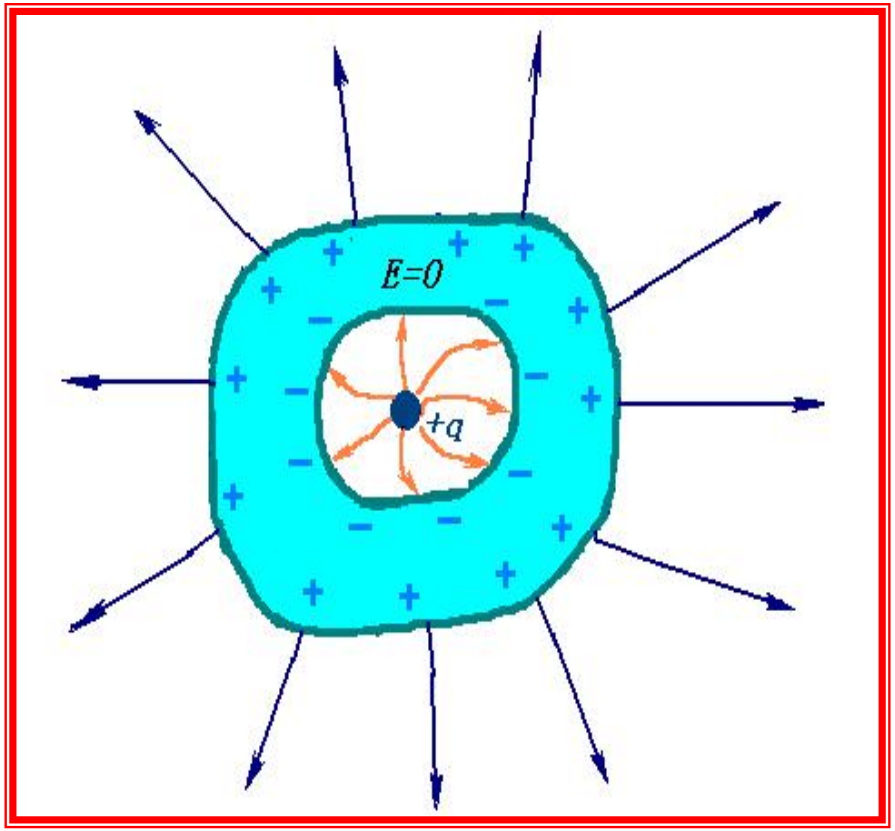
◆静电屏蔽

（1）空腔**不接地**，腔外不影响腔内



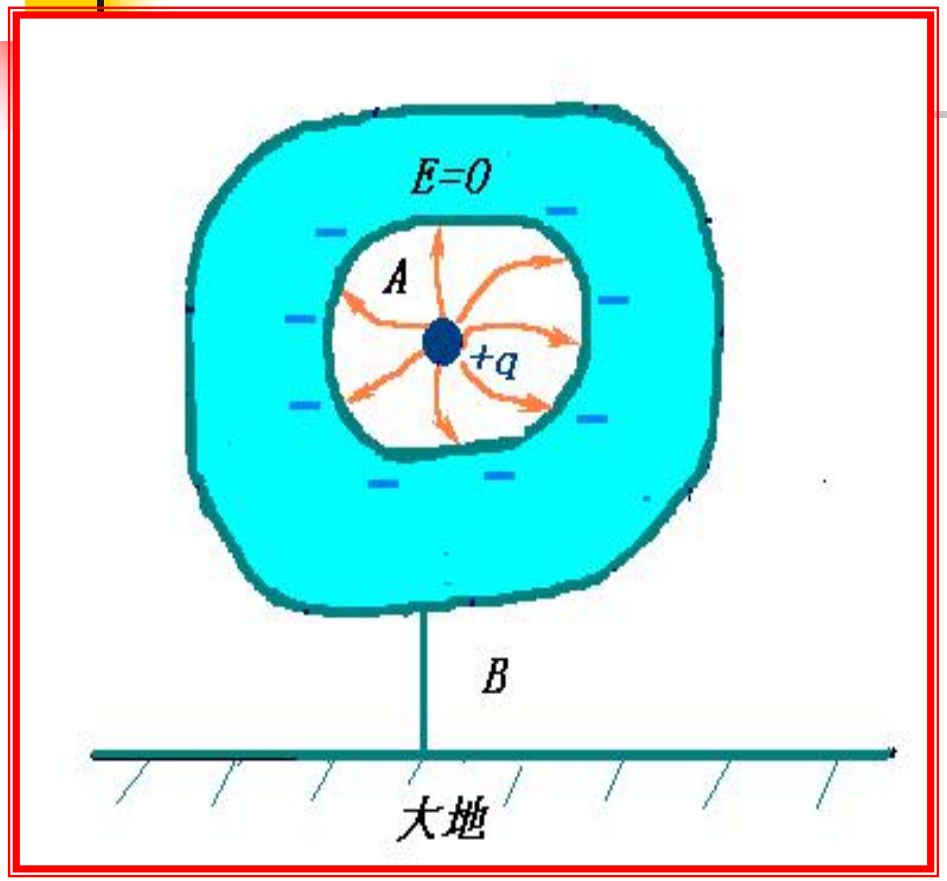
腔内无电荷

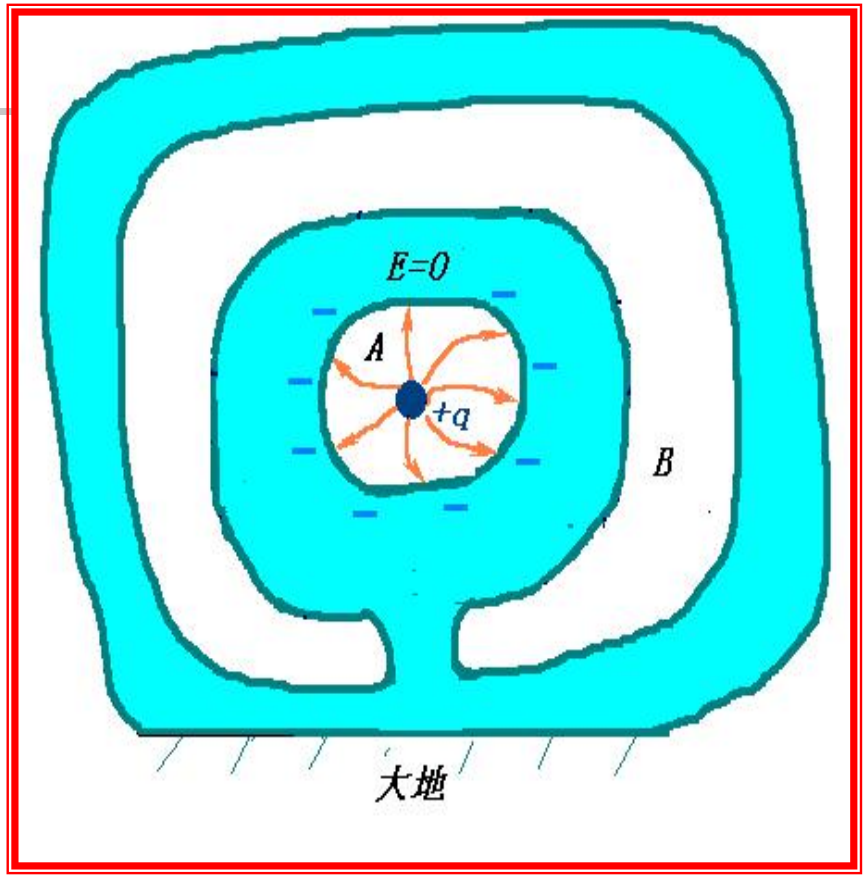
（2）空腔**不接地**，腔内却影响腔外



腔内有电荷

（3）空腔接地，腔内腔外互不影响

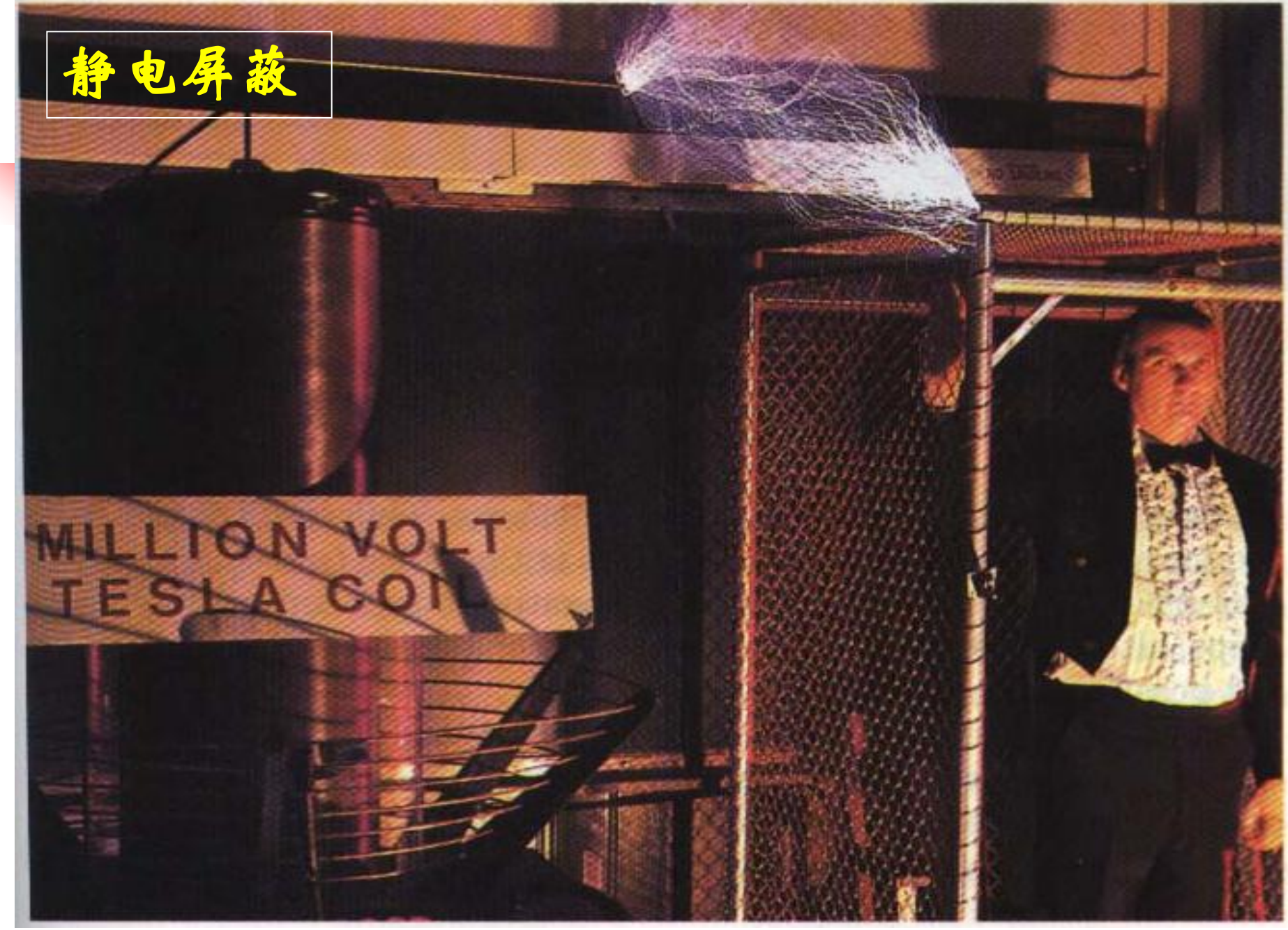




腔内有电荷，导体腔接地

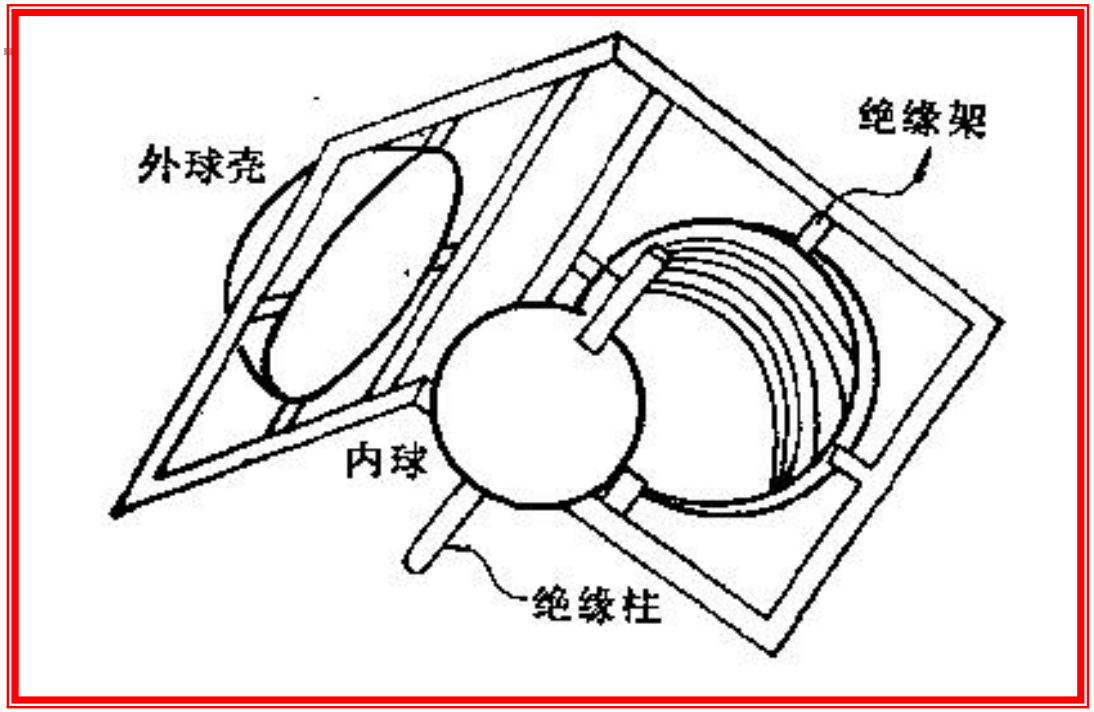
等效图

静电屏蔽



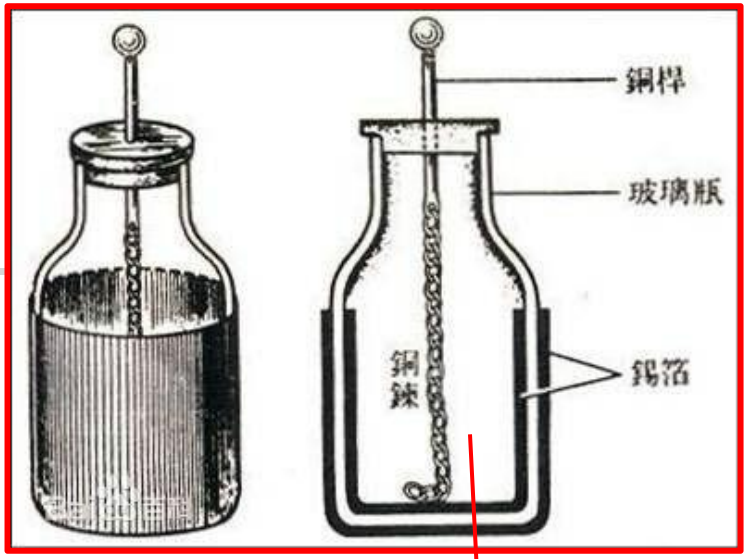
高斯定理和库仑定律的精确验证

导体内球固定在绝缘支柱上，导体外球壳为两个半球壳拼接而成。实验时，先使内球带电，然后用导线将内球与外球壳连接，使球壳带电，再抽走导线。在上述操作之后，将两半球壳打开，用精确的验电器检测内球上的电量。（参看陈秉乾等《电磁学专题研究》P10-14）



卡文迪许的实验装置

§2.3　电容和电容器



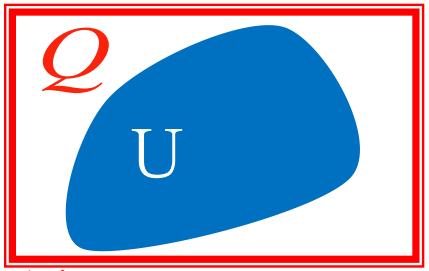
1746年，荷兰莱顿大学的教授穆森布罗克（**PieterVon Musschenbrock**，**1692~1761**）在做电学实验时，无意中把一个带了电的钉子掉进玻璃瓶里，他以为要不了多久，铁钉上所带的电就会很容易跑掉的，过了一会，他想把钉子取出来，可当他一只手拿起桌上的瓶子，另一只手刚碰到钉子时，突然感到有一种电击式的振动。他又重复了好几次，而结果都一样。于是他得出结论：把带电的物体放在玻璃瓶子里，电就不会跑掉，这样就可把电储存起来，从而发明了莱顿瓶。

一、孤立导体的电容(capacity)

- **孤立导体：** 空间只有一个导体，在其附近没有其它导体和带电体，可以储存电荷Q。

- **电容定义：**
  - 一个带有电荷为Q的孤立导体,其电势为U(无穷远处为电势零点)则有：

$$C = Q/U$$

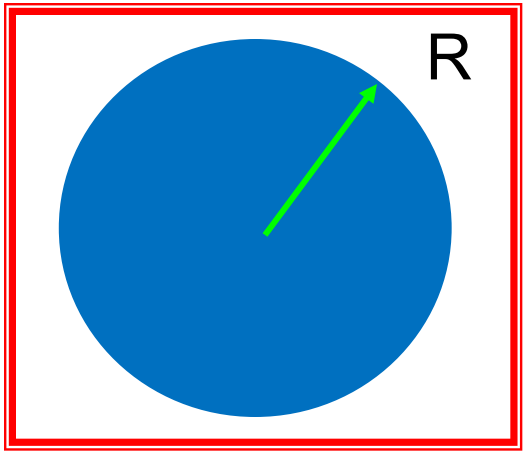


- **物理意义：**
  - 电容表征使导体每升高单位电势所需的电量，是描述导体或导体系容纳电荷的性能的物理量；
  - C由导体的形状、大小及周围的环境决定(介质)；
  - C的值与导体所带电量多少和电势U的大小无关。

- 电容的单位:
  - C=Q/U
  - 单位：库仑/伏特，简称法拉，记作F
  - 1μF(微法拉）＝10^{-6}F，1pF(微微法拉）=10^{-12}F

[例]：求孤立导体球的电容，设半径为R。

[解]：关键是求U！



$$U = \int_R^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

注：

- 孤立导体的电容越大，U一定时储存的Q越多
- 孤立导体的半径越大，电容越大

思考：用孤立导体球要得到**1F** 的电容，球半径为多大？

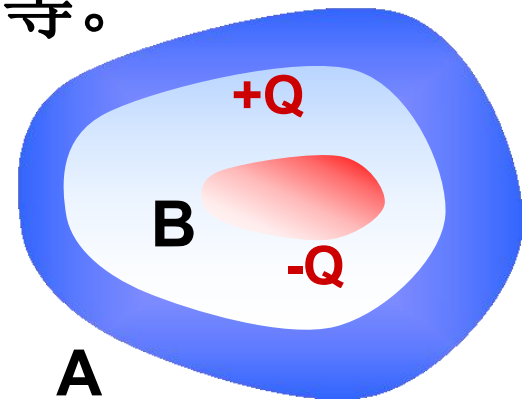
$C = 1\text{F}$ 时，$R = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9(\text{m}) \approx 1.4\times10^3 R_E$

$\text{R} = R_E$时，$C = 4\pi\varepsilon_0 R_E = 7\times10^{-4}F$，$(R_E = 6.4\times10^6 m)$

- 孤立导体的电容一般很小，不能满足使用的需求
- 实际的电容附近存在其他导体，孤立导体近似难满足
- 导体的电势，与周围的电荷、导体及介质有关

二、电容器（capacitor）

- **构成：**
  - 两个彼此绝缘而又互相靠近的导体组成的系统；
  - 导体可以是金属板，金属薄膜等；
  - 两个导体带有等量异号的电荷，$\pm Q$；
  - 夹层绝缘物质可以是空气、纸、云母片、塑料、不导电的液体等等。



$$C=\frac{Q}{|U_A-U_B|}=\frac{Q}{U_{AB}}$$

- **特点：**
  - 增大电容值；
  - 静电屏蔽。

导体壳内部的场只由腔内的电量和几何条件及介质的性质决定。

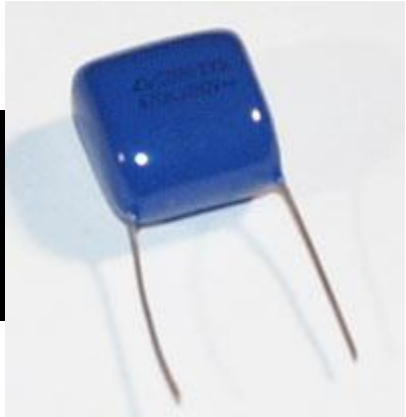
70 厘米

高压电容器(20kV 5~21μF)
(提高功率因数)

12 厘米

聚丙烯电容器
(单相电机起动和连续运转)

2.5 厘米



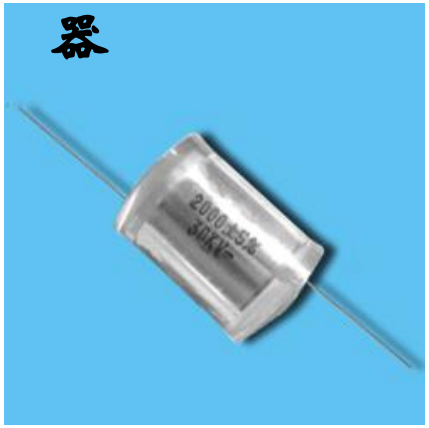
涤纶电容
(250V0.47μF)

陶瓷电容器
(20000V1000pF)

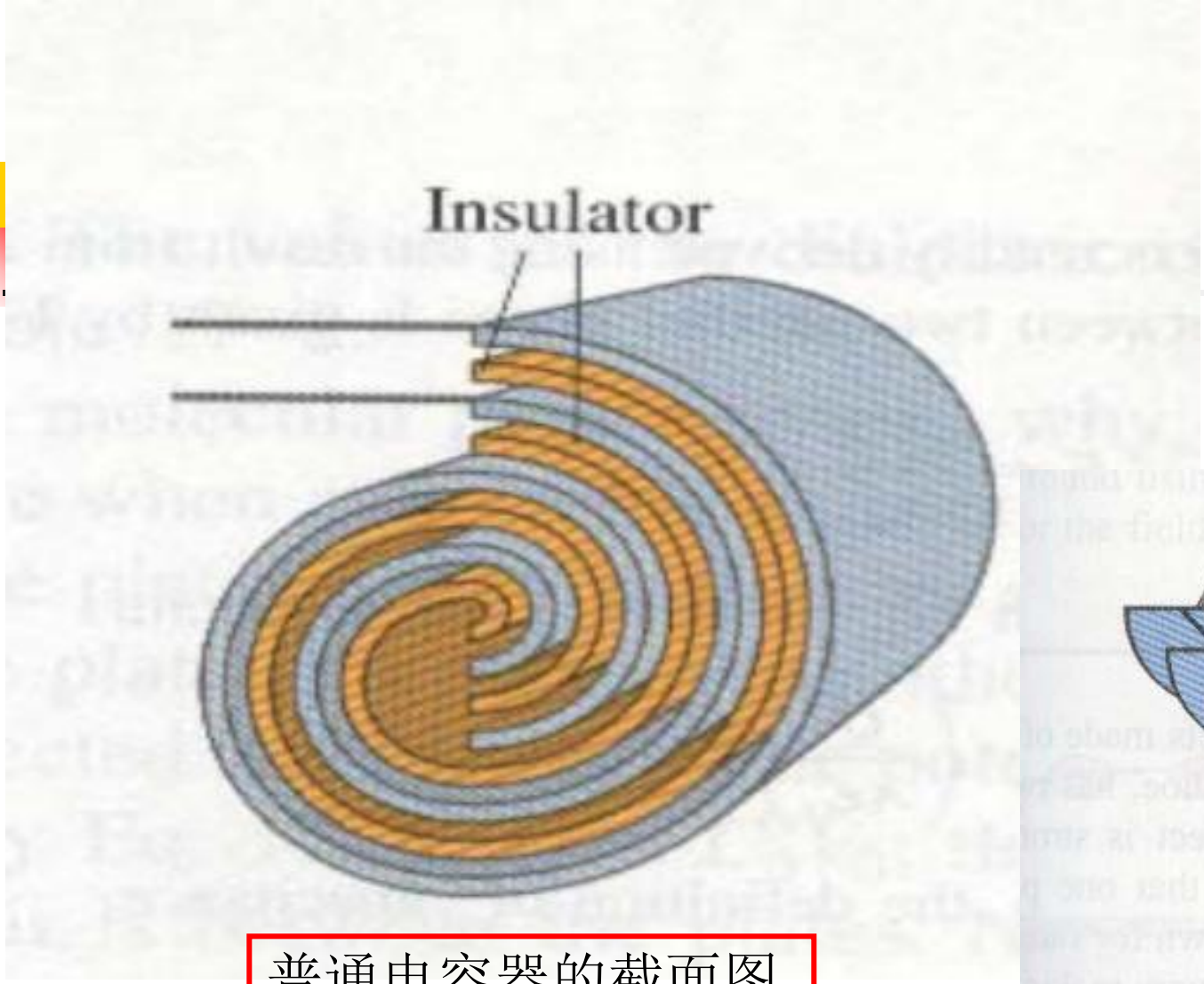
2.5 厘米

电解电容器
(160V470 μ F)

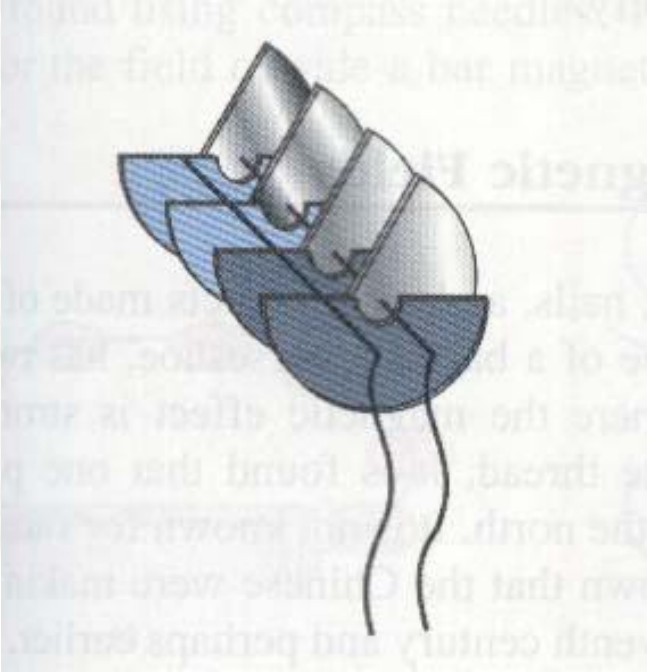
陶器电容器



薄膜电容



普通电容器的截面图



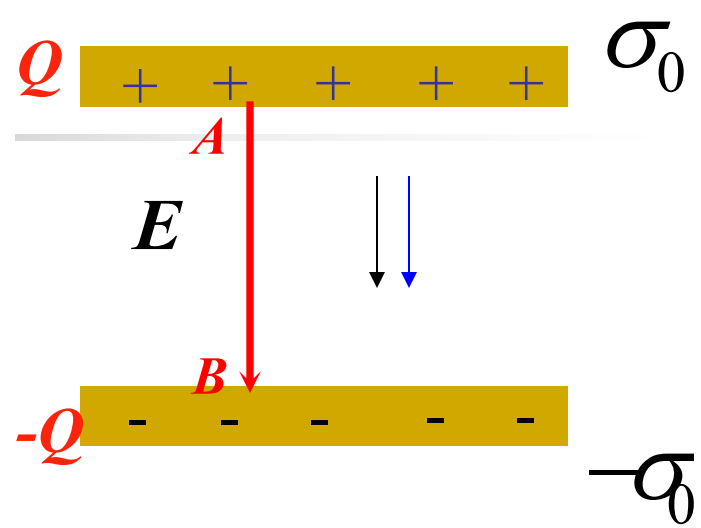
可变的空气电容器

- 分类
  - 按**结构**：固定电容器、可变电容器和半可调电容器
  - 按**介质**：无机介质、有机介质、电解电容器、液体介质
  - 按**用途**：高频旁路、低频旁路、滤波、调谐、高频耦合、低频耦合、小型电容器。

- 作用：阻直流、通交流
  - 隔直流、让交流通过。常**用于电路中的**：**旁路**：为交流电路中某些并联的元件提供低阻抗通路；**滤波**：将整流的锯齿波变为平滑的脉动波；**整流**：在预定的时间开启或者关闭半导体开关元件。
  - **调频**：**用于各种电磁波发射、接收装置中。**
  - **储能**：储存电能，用于必须要的时候释放。（演示）

几种常见的电容计算

■平板电容器，两极板面积 S，两极间距d，($S>>d^2$)，求电容。



[解] 令两极板分别带电量±Q，则：

极间电场强度：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

两级间电势差：$\Delta U=Ed=\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

电容器的电容：$C=\dfrac{Q}{\Delta U}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$C\propto S$，S 为有效面积，即两极板相对之面积；

$C\propto 1/d$，对其它形状电容器也适用；C 还与极板间介质有关。

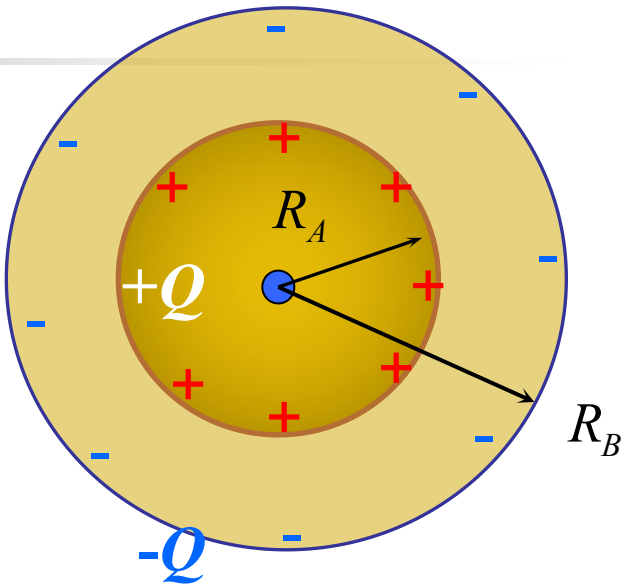
■同心导体球壳

设内球面半径R_A，外球面半径R_B，带电量为Q，求电容。

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$



$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

●当R_A，$R_B >> R_B - R_A$ 时，可令$R_B - R_A = d$，$R_B R_A = R^2$，则同平板电容器

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R^2/d = \varepsilon_0 S/d$$

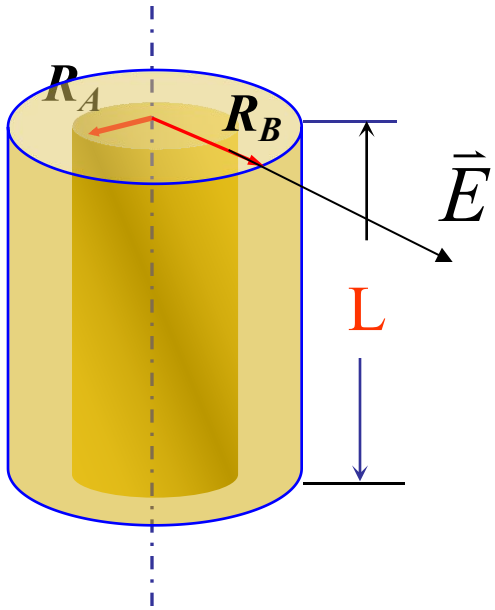
●当$R_B >> R_A$ 时，同孤立导体球的电容 $C = 4\pi\varepsilon_0 R_A$

■同轴柱形导体壳

设长为L，带电量为Q，内半径为R_A，外半径为R_B，且 $L >> R_B - R_A$，求其电容。

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\because \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \lambda = \frac{Q}{L}$$



$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

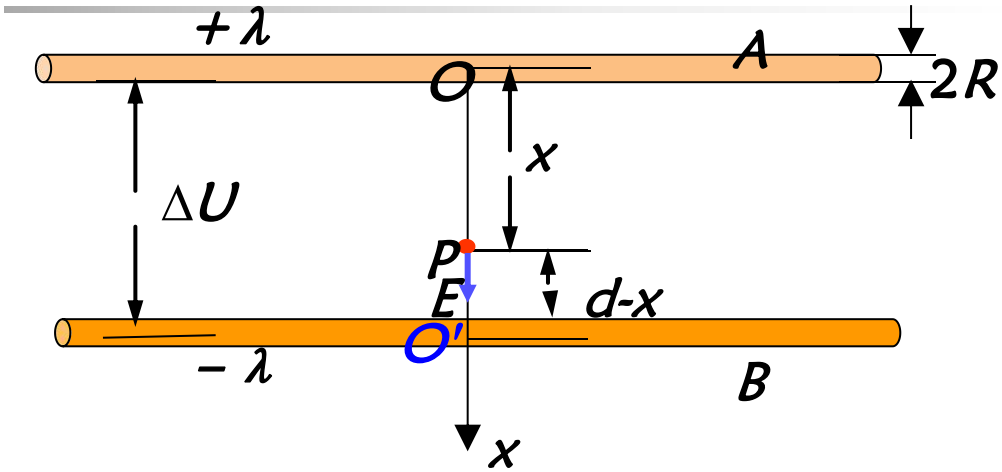
$$C = Q / U_{AB}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_B / R_A)}$$

■常见的电路中的分布电容

设有两个半径都为R的平行直导线,它们之间的距离为d，且d>>R, 求单位长度的电容c

解:根据场强叠加原理： +λ在x处的电场和 -λ在(d-x)处的电场相加,E的方向沿x轴的正方向,



$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{x}+\frac{\lambda}{d-x}\right)$$

$$\Delta U=\int_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_R^{d-R} E\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{d-R}\left(\frac{\lambda}{x}+\frac{\lambda}{d-x}\right)dx$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-R}{R}\approx\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{R}$$

$$c=\frac{\lambda}{\Delta U}\approx\pi\varepsilon_0/\ln(d/R)$$

小结

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$C = \varepsilon_0 S / d$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}$$

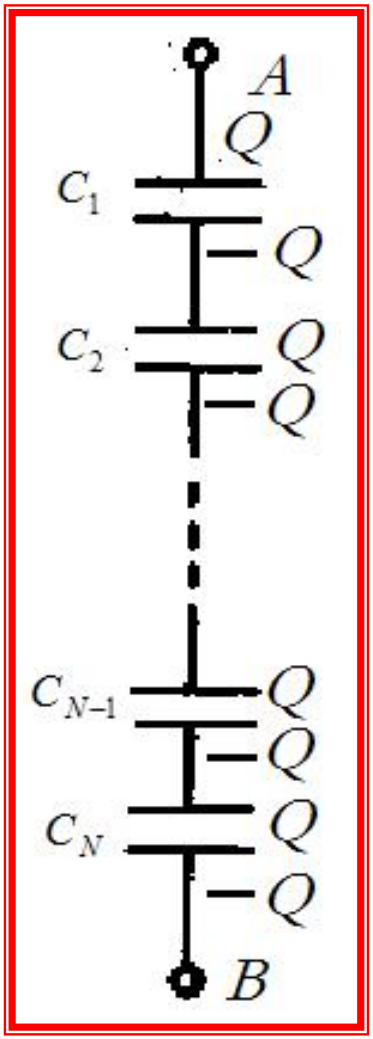
- **计算电容的一般方法：**
  - 先假设电容器的两极板带等量异号电荷
  - 关键是求出极板之间的电场强度 E
  - 由E再求出极板之间的电势差 U
  - 代入定义式$C=Q/U$求出电容

三、电容器的连接

电容器的基本联接方式有两种：串联与并联。

1. 电容器串联

右图给出N个电容器串联的情况。由静电感应原理知，每一个电容器上带电量大小都是Q



$$\begin{cases} Q = C_1U_1 = C_2U_2 = \cdots = C_{N-1}U_{N-1} = C_NU_N, \\ U_{AB} = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = \sum_{i=1}^{N} U_i = Q\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}, \end{cases}$$

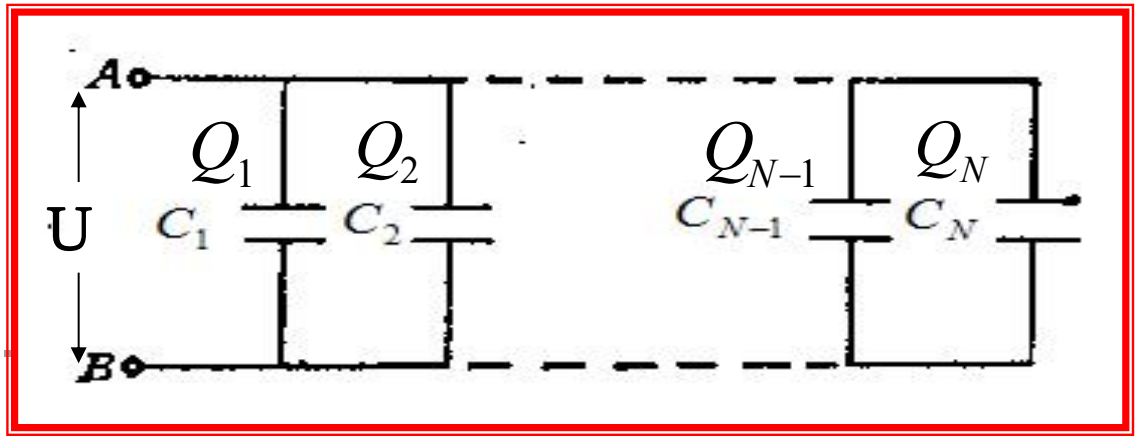
得

$$\frac{U_{AB}}{Q} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}$$

故有

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}}$$

2. 电容器并联



右图给出N个电容器并联的情况。A、B两端**电势差为U**，**总电量大小为Q**，则

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{N-1} + Q_N$$
$$= C_1U + C_2U + \cdots + C_{N-1}U + C_NU.$$

总电容为C，则有：

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_{N-1} + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i.$$

并联可增加系统的电容值。相反，串联会减小电容值，但可提高整个电容器的耐压性能。

§2.4 电介质

电介质 (Dielectric)

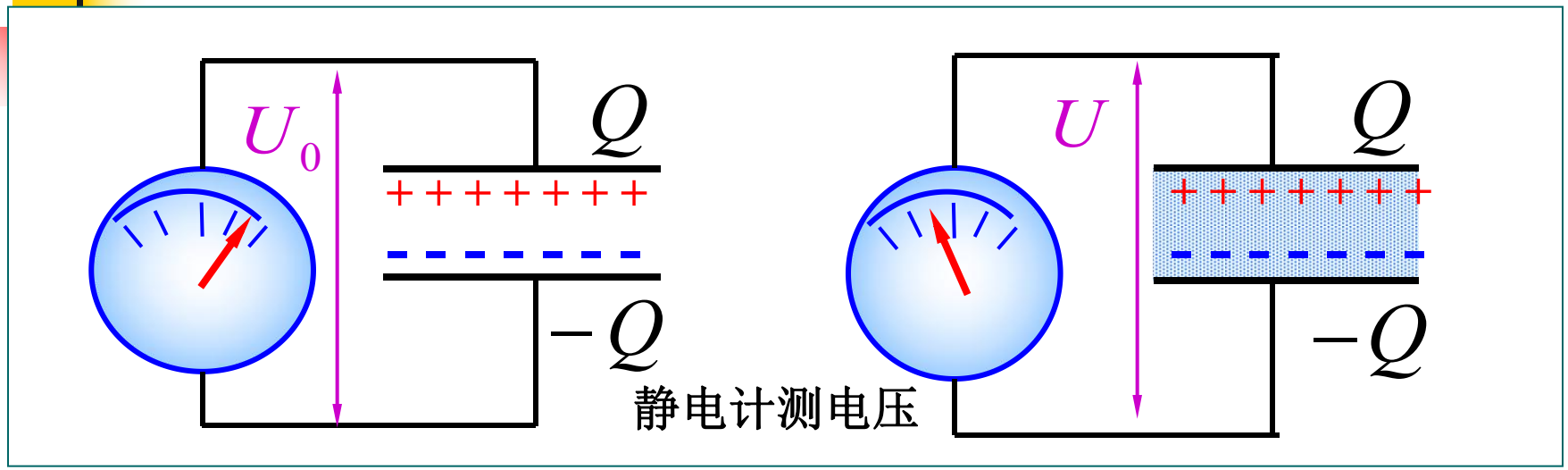
- 是电的绝缘体，**内部没有自由电荷，不能导电**
- 由大量电中性的分子组成，分子中电子被原子核束缚得很紧
- 紧束缚的正、负电荷在外场中是否发生变化?

电场 ⟷ 电介质

相互作用?

由实验来回答！

一、法拉第实验：电介质对电场的影响



- 充电的电容器两板连接到静电计
- 静电计指针显示两板间的电势差
- 保持一切条件不变，插入电介质
- 静电计指示两极板间电势差减小

（演示实验）

→ 介质与外电场发生相互作用

一、法拉第实验：电介质对电场的影响

- 物理原因（逻辑推理）

$$U_0 > U$$

$$U = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{E}_0 > \boldsymbol{E}$$

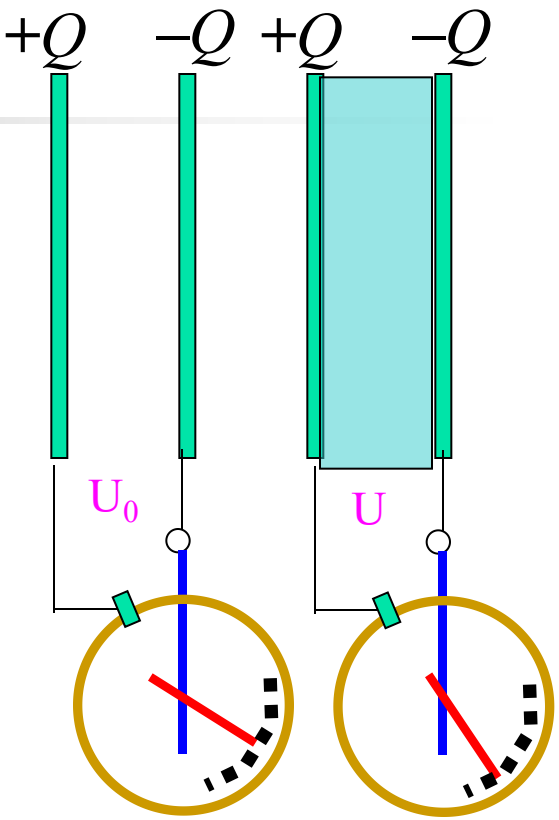
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$$

$$\therefore \boldsymbol{E}' < 0$$

$\boldsymbol{E}'$标志电介质的影响，由此可知它与外场$\boldsymbol{E}_0$方向相反。

$$\because \boldsymbol{E} \neq 0,$$

$$\therefore E' \neq E_0.$$



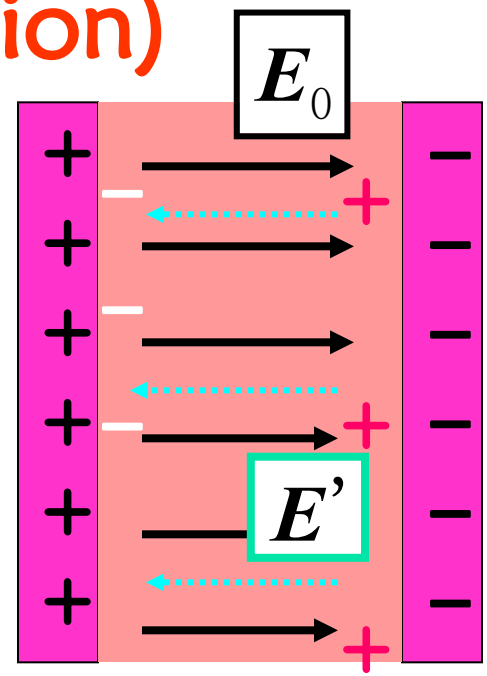
静电计测电压

二、介质极化 (polarization)

E'与E_0反向

只有电荷才能产生电场

电介质的表面出现了与极板电荷异号的电荷



极化电荷：电介质表面出现的这种电荷只能在分子范围内移动，与电介质是不可分离的，称为**极化电荷**，它是一种**束缚电荷**。

电介质在外电场作用下，其表面甚至内部出现极化电荷的现象，叫做**电介质的极化**。

电介质中的总电场为两个电场之和：$E = E_0 + E' \neq 0$

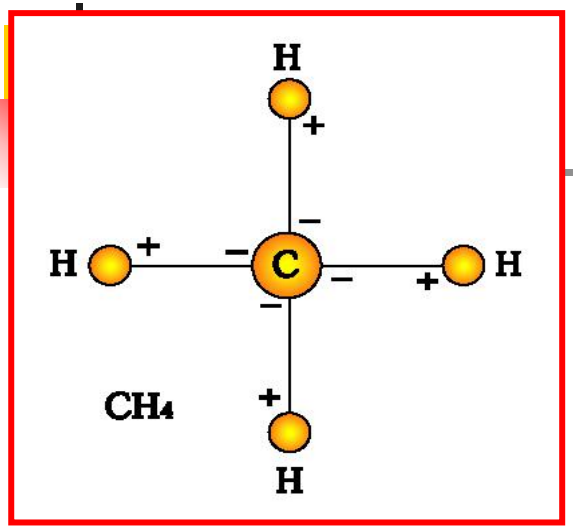
三、介质微观结构（模型方法）

- **重心模型：**
  - 在分子中，将所有正电荷和所有负电荷等效为分别集中于两个几何点上，此点称为正、负电荷的重心。
  - 电荷分布和其重心都是对“时间”的一种平均。

- **介质分类：** 进一步的实验发现，

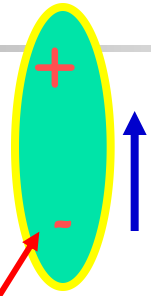
  电介质分子可分为无极和有极两类：
  - **无极分子**：分子电荷的正、负“重心”重合，在无外场作用下整个分子无固有电偶极矩。如：
    He, Ne, O_2, N_2, CH_4 …
  - **有极分子**：分子电荷的正、负“重心”分开，在无外场作用下整个分子有固有电偶极矩，如：
    水, HCl, NH_3, CH_3OH(甲醇) …

无极分子



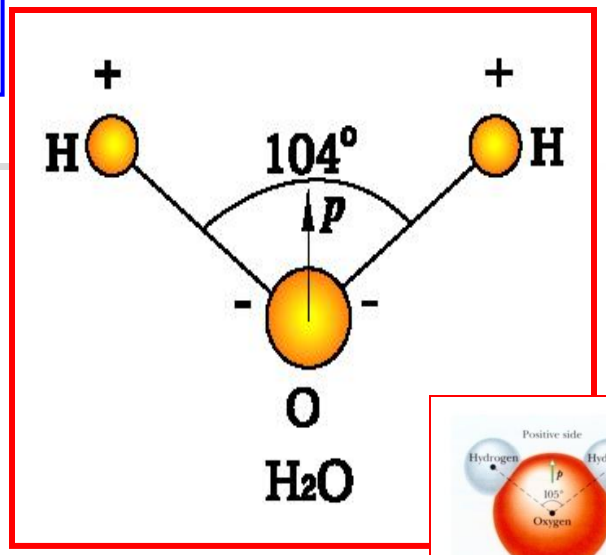
±

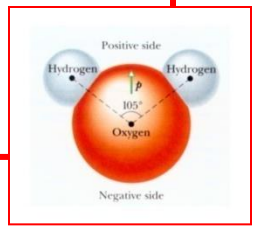
$$p = qL$$



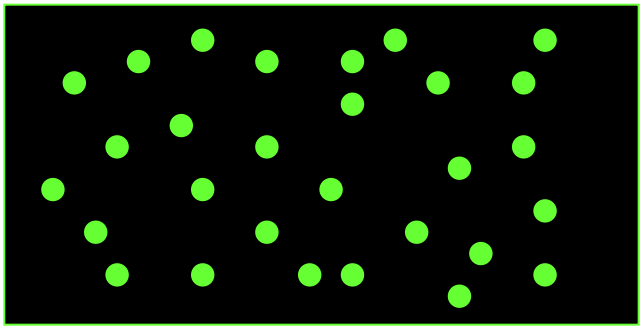
电子云的负电重心

有极分子



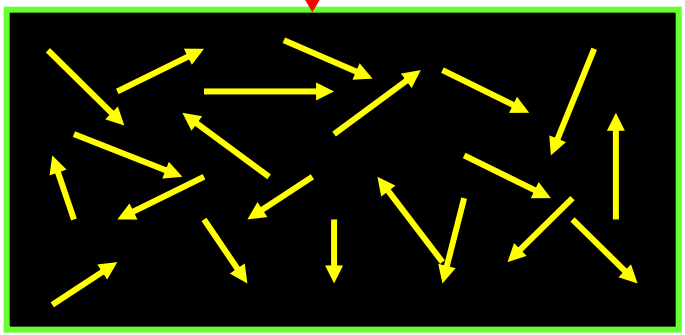


无外场时(热运动)



无外场时整体对外不显电性

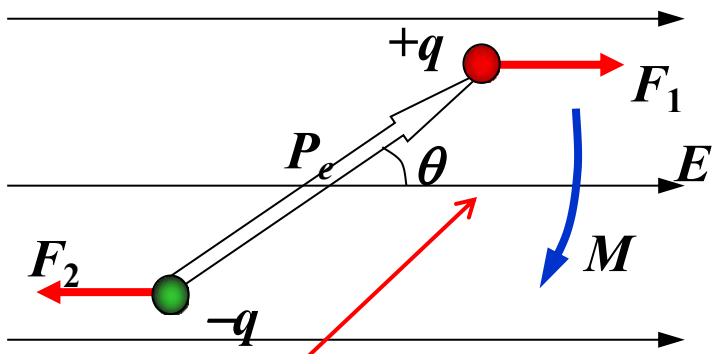
无序排列对外不呈现电性！

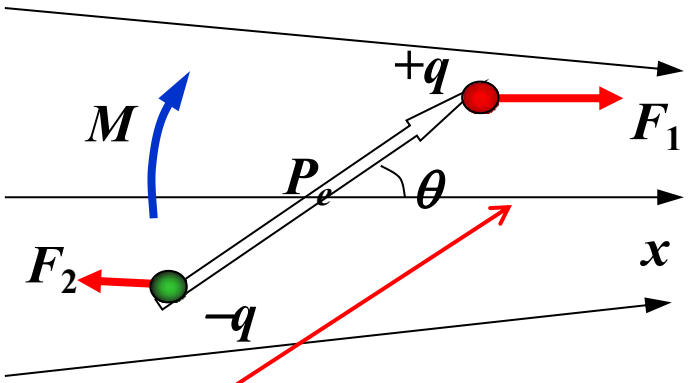


回顾：

电偶极子在E中的受力　　电偶极子在E中受的力矩

$$\mathbf{F}=(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{L}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$$





$\Sigma\mathbf{F}=0$（均匀电场）；$\Sigma\mathbf{F}\neq 0$（非均匀电场）

均匀外场中电偶极子不受力，但受力矩；在外电场力矩作用下，p总是朝向E一致的方向偏转。

在非均匀外场中电偶极子既受力，又受力矩作用。

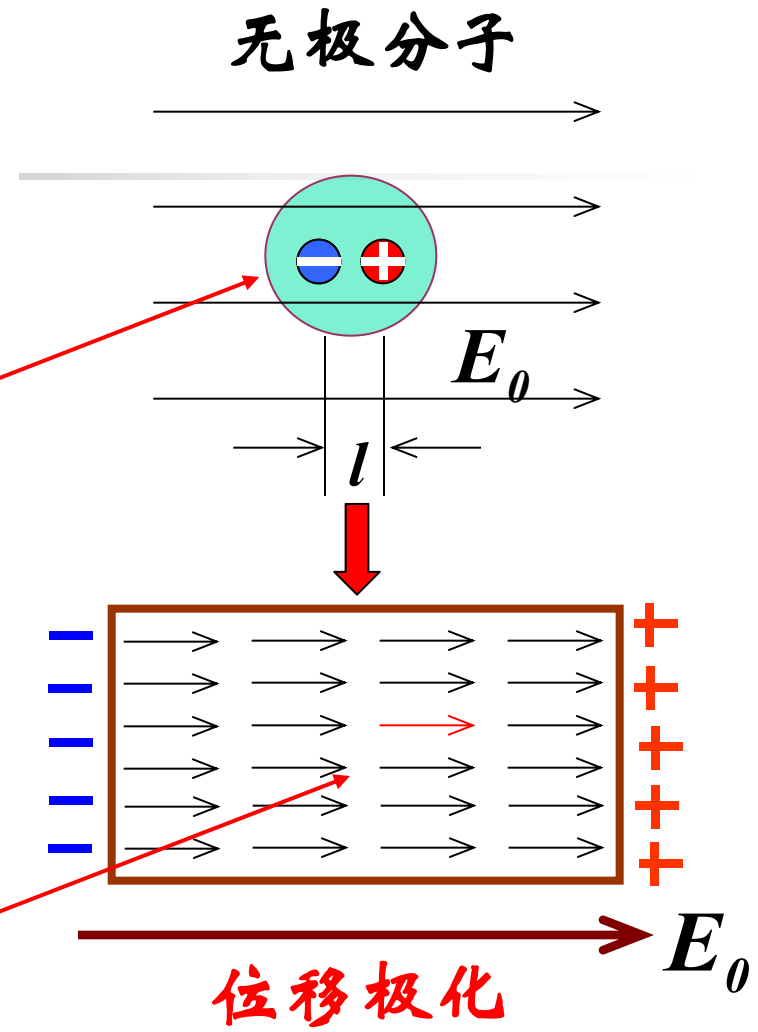
四、极化微观模型

(1) 无极分子的极化

- 在进入外电场前，无极分子的正、负电荷重心重合，没有电偶极矩。

$$\mathbf{p}_{分子} = 0 \qquad \sum \mathbf{p}_{分子} = 0$$

- 进入外场后，在电场的作用下，正、负电荷的重心发生位移，不再重合，形成电偶极子，表面出现束缚电荷。
- 这时极化是电荷重心相对位移的结果，称为位移极化。



$$p_{分子} \neq 0; \qquad \sum p_{分子} \neq 0$$

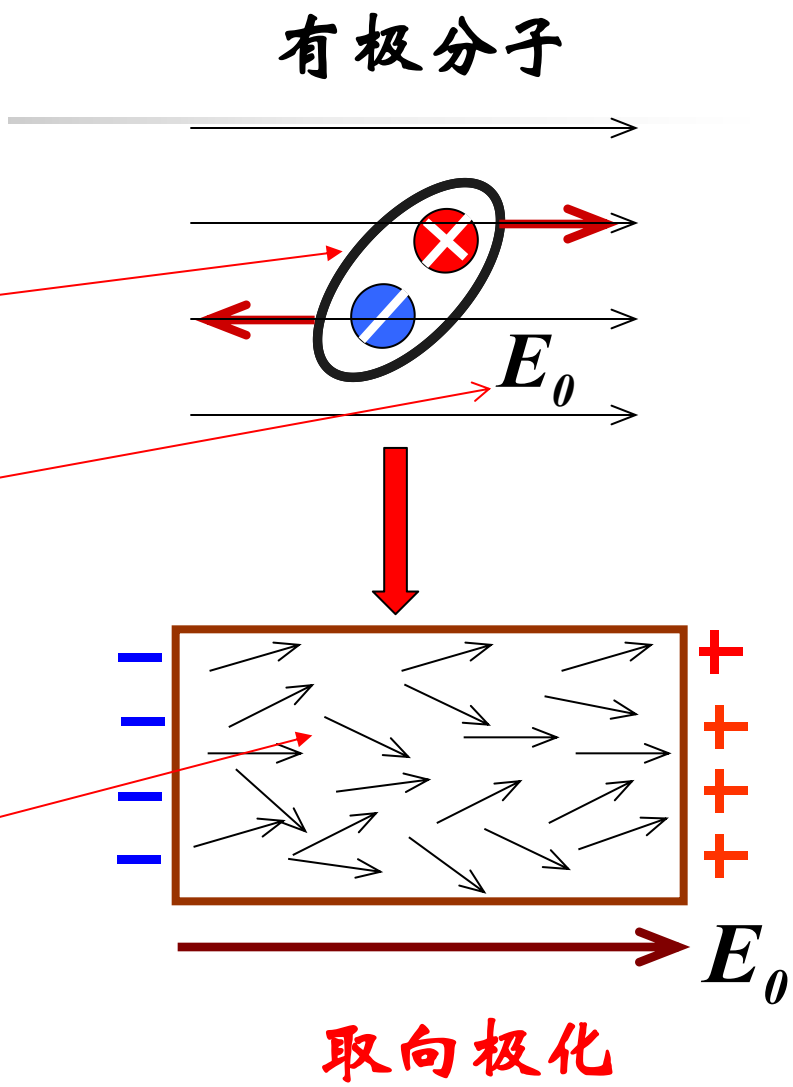
(2) 有极分子的极化

- 进入外场前有极分子就相当一个电偶极子，只是由于热运动而排列无序。

$$\mathbf{p}_{分子} \neq 0 \quad 但是 \quad \sum \mathbf{p}_{分子} = 0$$

- 进入外场后，分子受到力矩的作用而发生偏转，电偶极矩转向外场方向。所以，这种极化称为取向极化。

$$\sum \mathbf{p}_{分子} \neq 0$$



几点说明：

- 无外场下，有极分子所具有的电偶极矩称为固有电偶极矩；有外电场时，分子产生的电偶极矩称感应电偶极矩（后者约是前者的10^{-5}）。
- 在外电场中，均匀介质内部各处仍呈电中性，只在介质表面出现极化电荷。
- 介质极化：无电荷宏观移动，只有微观迁移，对应束缚电荷的变化；

  静电感应：有自由电荷的宏观移动，出现感应电荷。
- 无极分子只有位移极化，感生电矩的方向沿外场方向；有极分子有前述两种极化机制，但是取向极化远强于位移极化（约大一个量级）。
- 极化电荷不能离开电介质到其它带电体，也不能在电介质内部自由移动，它不象导体中的自由电荷能用传导方法将其引走，是一种束缚电荷。
- 极化电荷的电场称为退极化场使介质中实际电场减弱。

电介质与导体的区别

	电介质	导体
导电性	不导电	导电
在静电场中	出现极化，电子和原子核在电场力作用下在原子范围内作微观的相对位移	出现静电感应，自由电子在电场力作用下脱离所属原子作宏观移动
静电平衡时	内部场强 $E\neq0$	内部场强 $E=0$

§2.5 极化强度矢量P(定量表达)

一、极化强度矢量P

二、P与极化电荷的关系

三、P与E的关系

一、极化强度矢量P (electric polarization)

- 引入：电介质极化后，在其内部任意一宏观体积元ΔV内$\sum \boldsymbol{p}_{分子} \neq 0$ →如何定量描述介质的极化？

- 定义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和：

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum \boldsymbol{p}_{分子}}{\Delta V} \qquad or \qquad \boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}_{分子}}{\Delta V}$$

  - 描述介质在外电场作用下被极化程度和方向的量；
  - 单位：库仑/米^2， $C \cdot m^{-2}$。

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}_{分子}}{\Delta V}$$

微观量

介质中一点的P(宏观量)

介质的体积元，宏观小微观大(包含大量分子)

- 极化强度是一个宏观矢量的点函数，其微观值无意义。
- 电介质中每一个点有唯一的极化强度。如果各处的P值相同，则称电介质在电场中均匀极化。
- P反映分子电矩 $\boldsymbol{p}_{分子}$的大小和空间有序化程度。

- 极化电荷
  - 从原来处处电中性变成出现了**宏观的极化电荷**
  - 可能出现在介质表面 (均匀介质),面分布
  - 可能出现在整个介质中(非均匀介质),体分布

$$q'(\sigma', \rho')$$

- 退极化场
  - **极化电荷会产生电场**——附加场(**退极化场**)
  - 极化过程中：极化电荷与外场相互影响、相互制约，过程复杂——达到平衡(不讨论过程)
  - 平衡时**总场**决定了介质的极化程度

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$$

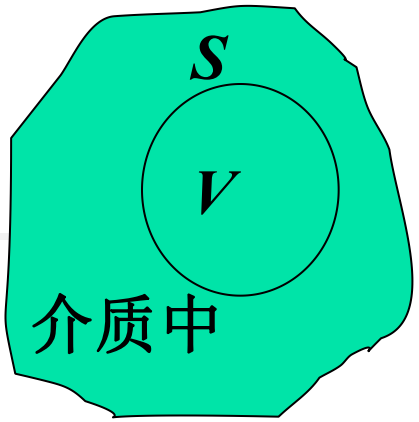
极化的后果

$$\left.\begin{cases} \boldsymbol{P} \\ q'(\sigma', \rho') \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' \end{cases}\right\} \text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象—介质极化。
- 它们间必有联系，这些关系—电介质极化遵循的规律。

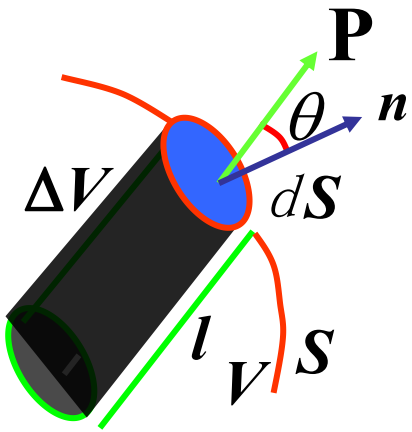
二、P与极化电荷的关系

1) P与ρ_e'关系： 以位移极化为模型讨论



$$\boldsymbol{p}_{分子} = q\boldsymbol{l}, \qquad \mathbf{P} = n\boldsymbol{p}_{分子} = nq\boldsymbol{l}$$

- 在介质中取一长l、底面积$d\boldsymbol{S}$斜柱体；
- 其中 l 是平均分子正, 负电荷中心距；
- 设l矢量穿过$d\boldsymbol{S}$，每个分子对dV内电量贡献为$-q$；
- dV内电量可记为dq'，分子数密度n：



$$dq' = -nqdV = -nq(ldS\cos\theta)$$

$$= -nq\boldsymbol{l}\cdot d\mathbf{S} = -\mathbf{P}\cdot d\mathbf{S},$$

又 $dq' = \rho'_e dV$，两右边相等，

故：$$\boxed{\oiint_S \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{S} = -\iiint_V \rho'_e dV}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'_e}$$

$$\oiint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho'_e\, dV = -Q';$$

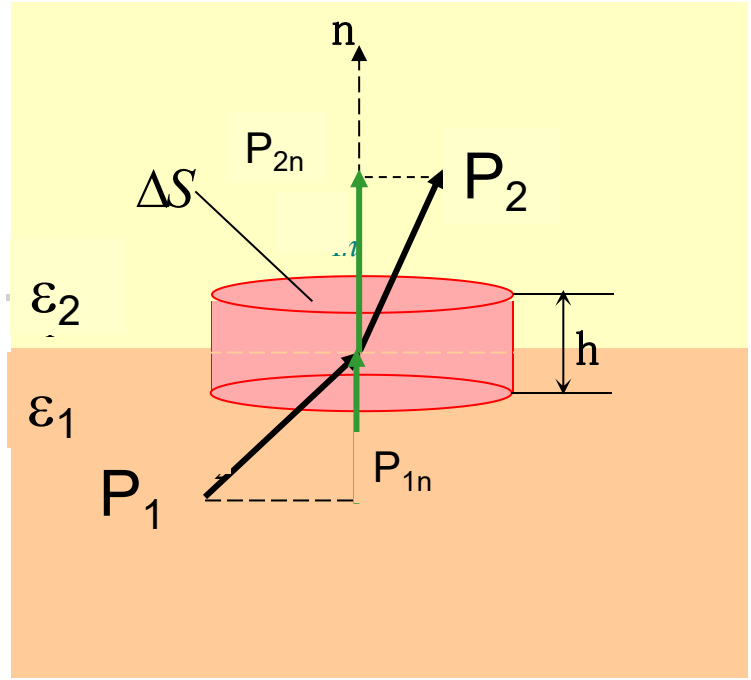
$$\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'_e$$

- **均匀介质**，均匀极化：**P**是常矢量，ρ’=0
- **非均匀介质**：非均匀极化， **P**是空间位置矢量，ρ’ ≠0

请将上面的积分公式与*E*的高斯定理比较！

2) P与σ_e' 的关系

- 在介质分界面取一面元 ΔS
- 过ΔS作扁盒型高斯面，h小



$$\because \quad Q' = -\oiint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}, \quad \mathbf{S}\text{向外为正}$$

$$\therefore \quad \sigma'_e\, dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot \mathbf{n}\, dS,$$

n的方向是由介质1指向介质2

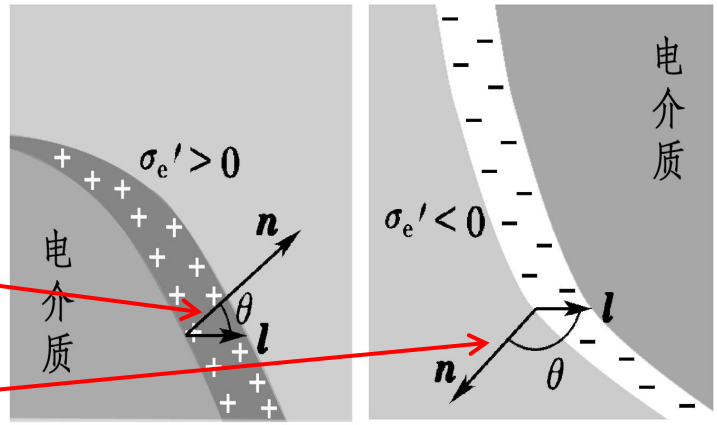
$$\sigma'_e = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot \mathbf{n}$$

电介质2为真空时

$$\sigma'_e = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} \quad (\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}, \mathbf{P}_2 = 0)$$

$$\theta < 90^\circ, \sigma'_e = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n > 0$$

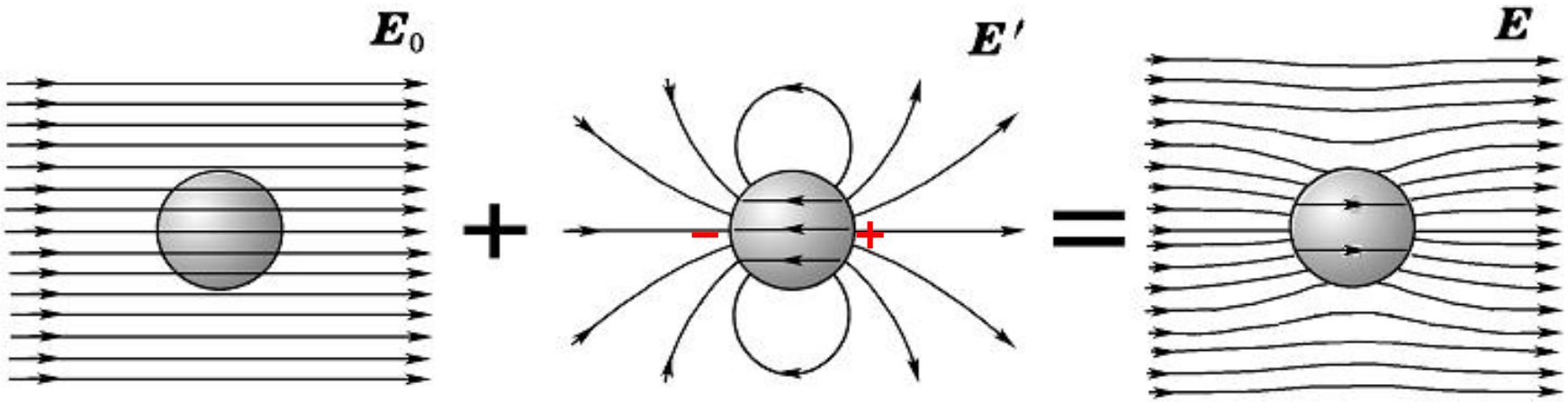
$$\theta > 90^\circ, \sigma'_e = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n < 0$$



退极化场 E’

有介质时的电场 $E = E_0 + E'$

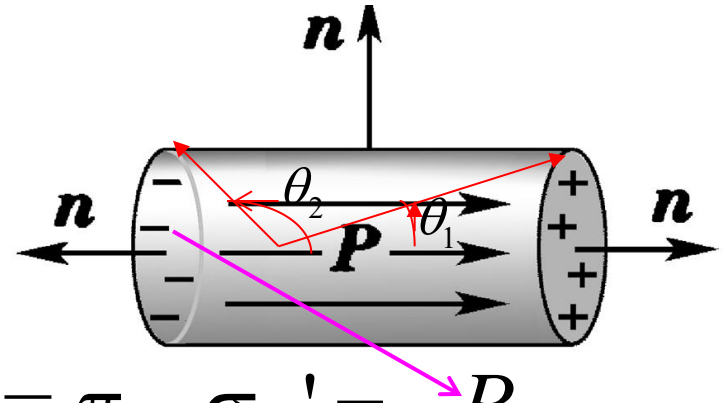
$$E_0 \longrightarrow \text{均匀介质极化} \longrightarrow q'(\sigma'_e) \longrightarrow E'$$



- 在电介质内部：E’是由极化电荷产生的附加场，与外场E_0方向相反，起着减弱极化的作用，称作退极化场
- 在电介质外部：附加场大部分与外电场方向相同，加强

[例2.3] 沿轴均匀极化的电介质圆棒；棒长$2l$，半径R，极化强度矢量$\boldsymbol{P}$。求极化电荷的分布和体内轴线上的E'。

[解]



1) P是常数 $\rho'_e = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = 0$

2) $\because \sigma_e' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ ； $\therefore$ 左面 $\theta = \pi$, $\sigma_e' = -P$

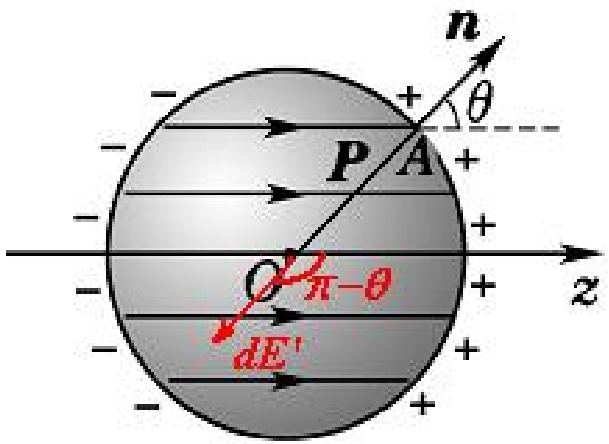
侧面 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\sigma_e' = 0$ ；右面 $\theta = 0$, $\sigma_e' = P$

3) 退极化场等效于两圆盘产生的电场, 由[例1. 10]可推出：

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{\boldsymbol{P}}{2\varepsilon_0}\left(2 - \cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

[例2.4] 均匀极化的电介质球，半径为R，极化强度矢量$\mathbf{P}$, 求表面上极化电荷分布和球心处的退极化场

[解]（1）$\rho'_e = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = 0$； 球关于z轴旋转对称,其表面任意一点的$\sigma_e'$只与$\theta$有关,则有:



$$\sigma_e' = P\cos\theta \begin{cases} \text{右半球，} \quad \theta<90^\circ, \sigma'_e>0 \\ \text{左半球，} \quad \theta>90^\circ, \sigma'_e<0 \\ \theta=\dfrac{\pi}{2}, \ \sigma'_e=0\text{；} \quad \text{当}\ \theta=0、\pi, \ |\sigma'_e|\text{最大} \end{cases}$$

（2）球心退极化场：(取球面小面元$d\boldsymbol{S}$,极化电荷为dq')

$$dq' = \sigma_e' dS = P\cos\theta dS = P\cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\boldsymbol{E}' = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'}{R^3}\boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{E}' = E_Z\hat{Z} = \hat{Z}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta dE' = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

三、P与E的关系

- 极化规律：$P \propto E$
  - 电介质内任一点的P是由在该点的总电场E决定的。
  - 不同的电介质极化规律不同，由实验来测定。

- 介质分类：

  根据介质极化规律的不同，可将介质分为:
  - 均匀线性各向同性电介质
  - 各向异性电介质
  - 铁电体
  - 永电体

- **各向同性电介质**
  - **P和E方向相同**，且有简单的正比关系

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}}$$

  - 电极化率 $\chi_e \geq 0$ ，如果与空间位置无关，为**均匀介质**
  - 当场强不是很大是， χ_e与E无关，为**线性介质**
  - 当场强很大时，χ_e与E有关，为非线性介质

- **各向异性电介质**
  - **P与E不平行**，关系较为复杂；
  - χ_e常表示为**张量形式**，称做极化率张量；
  - 对线性介质，极化率张量与E无关，且为对称张量：

$$\begin{cases} P_x = (\chi_e)_{xx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{xy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{xz}\varepsilon_0 E_z, \\ P_y = (\chi_e)_{yx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{yy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{yz}\varepsilon_0 E_z, \\ P_z = (\chi_e)_{zx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{zy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{zz}\varepsilon_0 E_z. \end{cases}$$

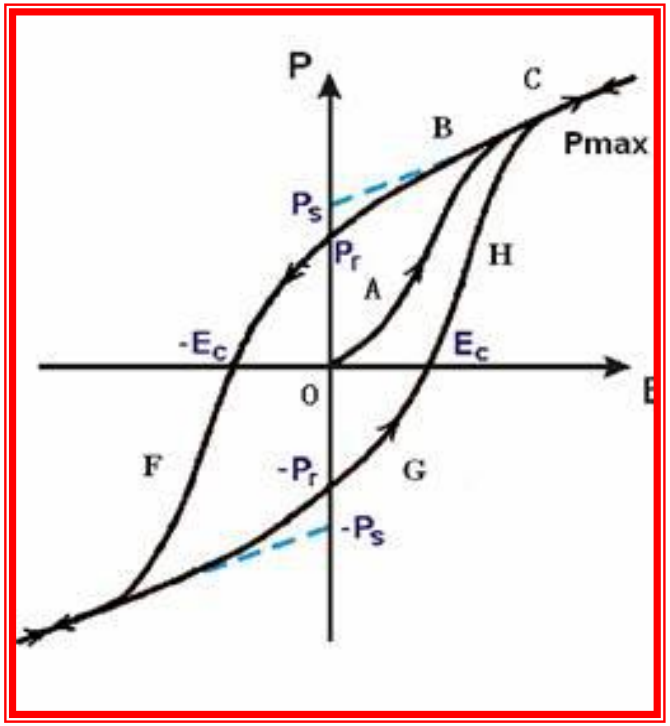
对称张量，即 $(\chi_e)_{xy} = (\chi_e)_{yx}$，$(\chi_e)_{xz} = (\chi_e)_{zx}$，

$(\chi_e)_{yz} = (\chi_e)_{zy}$。

铁电体

- 极化状态**不仅**决定于电场，**还与极化历史有关**；
- 铁电体极化过程中极化强度矢量P随外场的变化曲线是**非线性的**，出现**电滞回线**，有剩余极化强度；
- 极化强度P和电场强度E有复杂的非线性关系，χ_e**不是常量**，它随E变，最大可达**几千**；
- 当温度超过某一温度时，铁电性消失，这一温度叫做**居里温度**；
- 铁电体同时也是**压电体**，但压电体不一定是铁电体；
- 典型的铁电体有酒石酸钾钠单晶、钛酸钡陶瓷等。

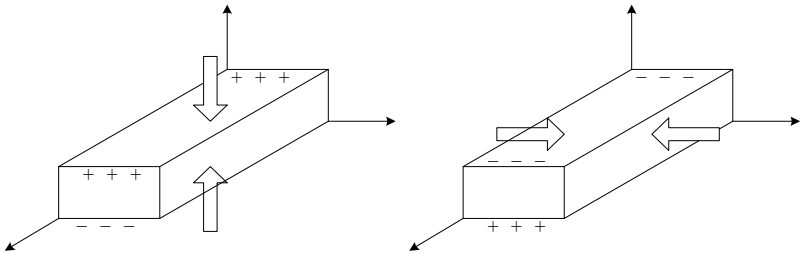
电滞回线



C：饱和点

P_r：剩余极化强度

- 正压电效应
  - 当晶体受到某固定方向外力的作用时，内部就产生电极化现象，同时在某两个表面上产生符号相反的电荷；
  - 当外力撤去后，晶体又恢复到不带电的状态
  - 当外力作用方向改变时，电荷的极性也随之改变；晶体受力所产生的电荷量与外力的大小成正比。



- 逆压电效应
  - 对晶体施加交变电场引起晶体机械变形的现象，又称电致伸缩效应。可应用于石英钟表、耳机、激发超声波等。

- 驻极体（永电体）
  - 一种具有持久性极化的固体电介质。
  - 驻极体可以在周围空间产生电场，因此可以类比于**永磁体**的一种带电体。
  - 如当蜡和松香的混合物在外加的强电场中从融熔态固化后，再除去外电场时，混合物固体会长期保持极化状态
  - 室温下驻极体的极化状态可以长期保存，但在高温下则衰减得很快。
  - 驻极体可作为静电场的源，如在电容式声电换能器中，可用驻极体代替电容的一个极板，从而省去了直流偏压。

小结：

- P与E 是否成正比(线性与非线性)
  - 凡χ_e不含E的介质——线性介质
  - 凡χ_e含E的介质——非线性介质
- 介质性质是否随空间坐标变 （空间均匀性）
  - χ_e—与空间坐标无关：均匀介质；
  - χ_e—坐标的函数：非均匀介质
- 介质性质是否随空间方位变（方向均匀性）
  - χ_e—标量：各向同性介质；
  - χ_e—张量：各向异性介质
- 以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质
  - 空气：各向同性、线性、一般是非均匀介质
  - 水晶：各向异性、线性介质
  - 酒石酸钾钠、钛酸钡：各向同性非线性介质——铁电体

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

电极化率

[例2.5]平行板电容器间充满极化率为χ_e的均匀线性各向同性介质，极板自由电荷面密度为σ_{e0}，板的面积为S，板间距为d，求介质的σ'_e、P、E 和电容C。

[解] 关键是求E ,注意: $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}'$和$\mathbf{E}$均与极板垂直

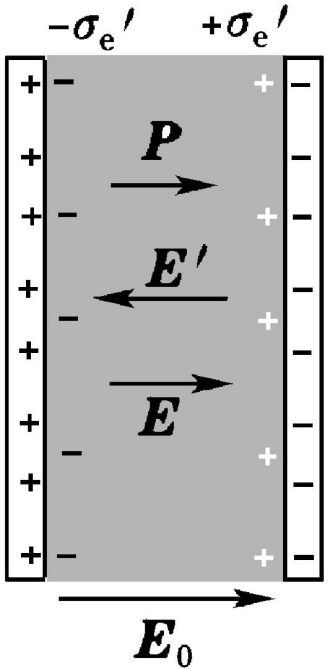
$$E = E_0 + E', \quad E_0 = \sigma_{e0}/\varepsilon_0, \quad E' = -\sigma'_e/\varepsilon_0 = -P/\varepsilon_0 = -\chi_e E$$

$$\therefore \quad E = E_0/(1+\chi_e) = \sigma_{e0}/[(1+\chi_e)\varepsilon_0],$$

$$\sigma'_e = P = \chi_e \varepsilon_0 E = \frac{\chi_e \sigma_{e0}}{1+\chi_e}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_{e0} S}{Ed} = \frac{(1+\chi_e)\varepsilon_0 S}{d} = (1+\chi_e)C_0 = \varepsilon_r C_0$$

令 $\varepsilon_r \equiv (1+\chi_e)$，称相对介电常数



说明：束缚电荷 $\xrightarrow{?}$ 极化电荷　否！

- 用摩擦等方法使绝缘体带电：
  - 绝缘体上的电荷——束缚电荷，但不是极化电荷！
  - 实际上它是一种束缚在绝缘体上的自由电荷；
  - 并非起源于极化，因而可以转移与自由电荷中和。
- 介质在随时间变化的电场作用下：
  - 由极化产生的极化电荷 $\longrightarrow$ 束缚电荷(约束在原子范围内)，
  - 不可能转移与自由电荷中和
  - 但它能变化并产生电流 $\longrightarrow$ 极化电流，由$\partial P/\partial t$决定
- 自由、束缚是指电荷所处的状态；
- 感应、极化或摩擦起电是指产生电荷的原因。

§2.6 电介质中静电场的基本定理

- 高斯定理
- 环路定理
- 举例应用

真空中静电场的基本定理

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q,$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

电荷

- 电介质在外场中会被极化，出现极化电荷；
- 自由电荷与束缚电荷同样遵守库仑平方反比定律；

电场

- 不但自由电荷要激发电场 E_0，电介质中的束缚电荷同样也要在它周围空间激发电场 E' (无论电介质内部或外部)；

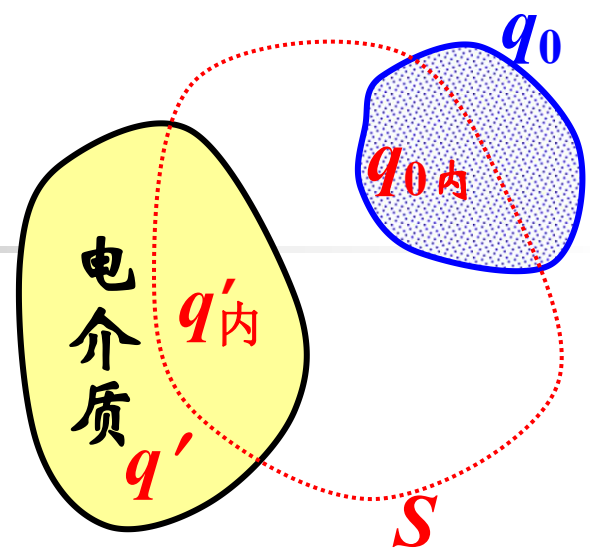
电场强度叠加原理

- 在有电介质时，某点的总电场强度：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

一、高斯定理

逻辑、合理的推广：



$$\left.\begin{array}{l} q_0 \rightarrow \mathbf{E}_0 \\ q' \rightarrow \mathbf{E}' \end{array}\right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right)$$

库仑定律的结果

又 $Q' = \sum q'_{内} = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{0内} - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \quad \oiint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0内}$$

令 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 称D为电位移矢量

单位是C/m² (库仑每平方米)

于是有：

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0内} = Q_0$$

电介质中的高斯定理

对线性各向同性介质： $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$

$$\therefore \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$$

ε 为绝对介电常数，

ε_r 为相对介电常数。

如果是带电体，令ρ_{e0}为自由电荷密度，ρ'_e为极化电荷密度，ρ_e为总电荷密度：

$$\rho_e = \rho_{e0} + \rho'_e$$

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V (\rho_{e0} + \rho'_e) dV$$

由前结果 $\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_{e0} dV = Q_0$

可得电介质中高斯定理微分表达式：

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{e0} + \rho'_e), \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{e0}}$$

二、环路定理

- 电介质的存在，只增加了一些新的场源(极化电荷)
- 电介质的存在，并没有改变电场的基本性质
- 静电平衡时，自由电荷和极化电荷满足库仑定律，产生的电场都是静电场
- 总电场的保守场性质不变，所以仍满足环路定理：

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = 0$$

其中$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$

介质中静电场仍然是一个无旋的保守场。

三、举例（第四种求E的方法，先求D）

[例2-6-1]证明均匀线性各向同性介质内$\rho_0=0$处必有$\rho'=0$。

[解] $\because \Delta q'_{内} = -\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$

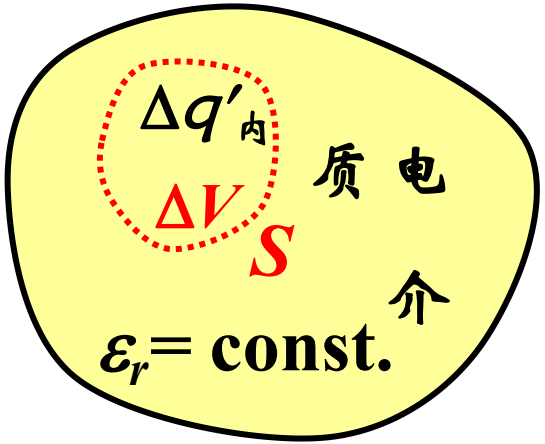
又 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = (1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}$

$$\Delta q'_{内} = -\iint_S (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\iint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\cdot \Delta q_{0内}$$

$$\rho' = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q'_{内}}{\Delta V} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\cdot \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q_{0内}}{\Delta V}$$

$$= (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\rho_0$$

$$\therefore \rho_0 = 0 \to \rho' = 0。$$



[例2-6-2]求相对介电常数为 ε_r的无限大均匀线性各向同性电介质中点电荷 q的场分布。

[解]：已知介质性质、自由电荷分布，q的场是球对称场，可以先求D，以电荷为球心，作球形高斯面：

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$$

$$D\cdot 4\pi r^2 = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q\varepsilon_0}{\varepsilon 4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$U = U_0/\varepsilon_r \xrightarrow{\text{孤立导体球}} C = \varepsilon_r C_0$$

$$D = \varepsilon_0 E_0$$

介质内场强削弱到$1/\varepsilon_r$；电容增加为 ε_r 倍，所以ε_r又称为电容率。

[例2-6-3] 导体球R_1带电量Q_0和均匀线性各向同性介质球壳R_2、电容率为ε_r. 求E、介质内表面的σ'_e、导体球的U

[解] 已知介质性质、自由电荷分布，一维对称问题：

1) 利用高斯定理：$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = D\cdot 4\pi r^2 = Q_0$，分三个区分别讨论：

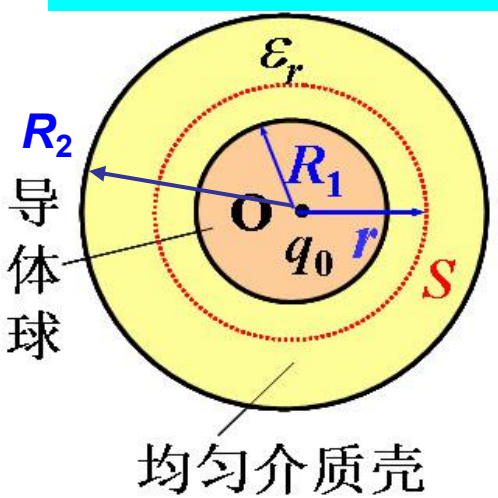
$$\boldsymbol{D} = 0 \qquad \boldsymbol{E}_I = 0 \qquad (r < R_1)$$

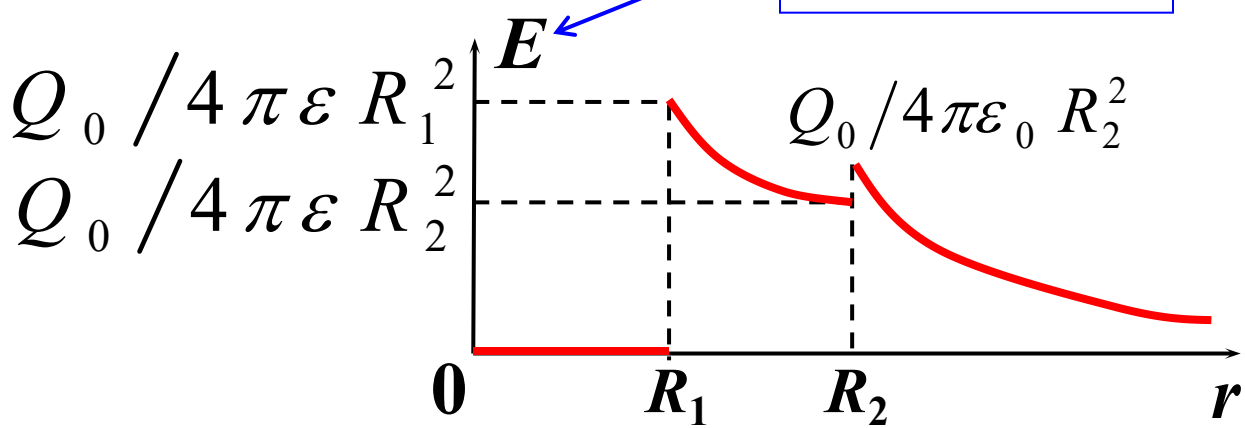
$$\boldsymbol{D} = \frac{Q_0 \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \qquad \boldsymbol{E}_{II} = \frac{Q_0 \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3} \qquad (R_1 \le r \le R_2)$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q_0 \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \qquad \boldsymbol{E}_{III} = \frac{Q_0 \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r > R_2)$$

思考

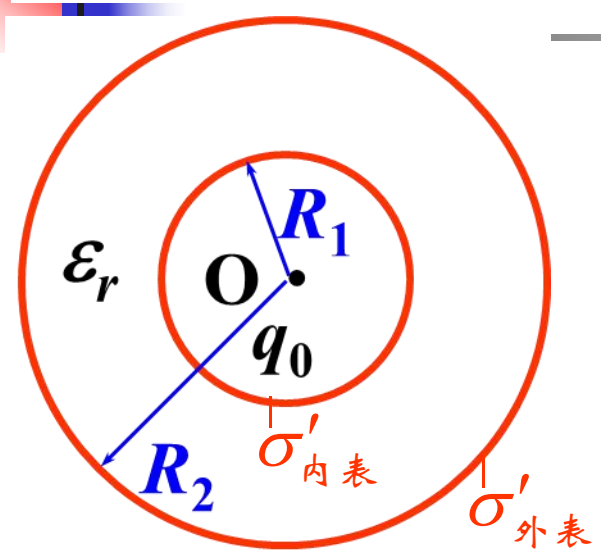
为什么E的曲线不连续？





2) 下面求极化电荷q'的分布：

在介质内部：$\varepsilon_r =$ 常数，$\rho_0 = 0 \Rightarrow \rho_e' = 0$



$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{II} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 \boldsymbol{r} / 4\pi\varepsilon r^3$$

$$\sigma'_{内表} = P_n \big|_{r=R_1} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi\varepsilon R_1^2$$

$$\sigma'_{外表} = P_n \big|_{r=R_2} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi\varepsilon R_2^2$$

即 $\sigma'_{内表} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\sigma_{e0} / \varepsilon$

3) 导体球的电势：

$$U = \int_{R_1}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}_{II} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{R_2}^{\infty} \boldsymbol{E}_{III} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

小结：

真空	有介质
$\oiint_S \boldsymbol{E} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q$	$\oiint_S \boldsymbol{D} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{S内} q_0$
$\oint_L \boldsymbol{E} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$	$\oint_L \boldsymbol{E} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$
总电荷(自由、极化)	自由电荷

- 各向同性、线性介质中**D** 正比于 **E**;
- 普遍情况下,两者关系不简单，不一定成正比关系。

§2.7 边值关系和唯一性定理

一、边值关系

电场强度　电位移矢量　电势

二、唯一性定理

三、应用举例

一、边值关系

- 电场内存在多种介质→介质间的交界面→极化电荷
- 介质未充满电场空间→导体和介质的交界面→极化和自由电荷

- 交界面的存在会影响整个空间的电场分布
  →研究电场在交界处的行为十分重要

- 将电场的基本定理用到交界面上，研究界面两边电场改变的一般规律，即“边值关系”。

（1）电场强度

在介质交界面取一较小的矩形环路用环路定理：

$$\oint_{矩形} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_1\cdot(-\Delta l\cdot \boldsymbol{e}_t) + \boldsymbol{E}_2\cdot(\Delta l\cdot \boldsymbol{e}_t)$$

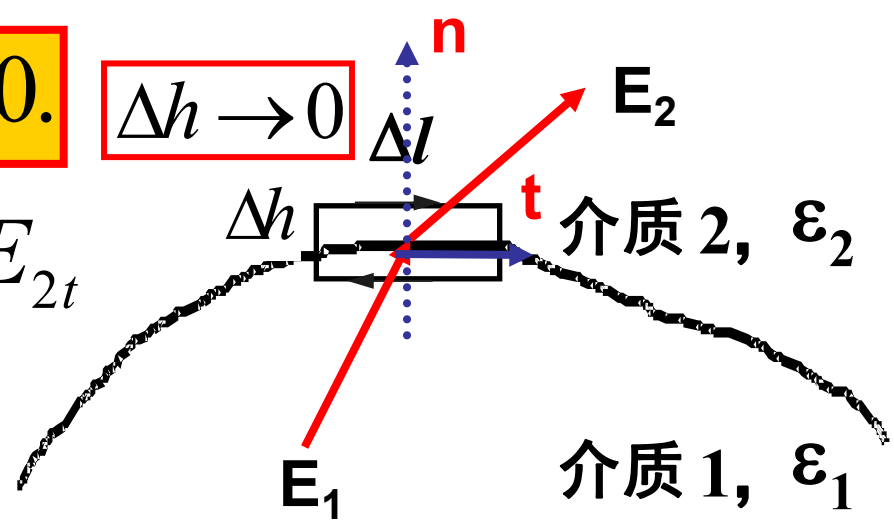
$$= (E_{2t} - E_{1t})\Delta l \equiv 0 \Rightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

界面两边电场强度的切向分量总是相等。

$$\boxed{\text{或写成}\quad \mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.}$$

$$\because D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t};\quad D_{2t} = \varepsilon_2 E_{2t}$$

$$\boxed{D_{1t}/D_{2t} = \varepsilon_1/\varepsilon_2}$$



（2）电位移矢量

利用高斯定理，跨界面作柱形高斯面：

$$\oiint_{\text{柱面}} \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{D}_2\cdot(\Delta S\cdot \mathbf{n}) + \mathbf{D}_1\cdot[\Delta S\cdot(-\mathbf{n})]$$

$\mathbf{n}: 1 \rightarrow 2$

$$= (D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_0 \Delta S \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0}$$

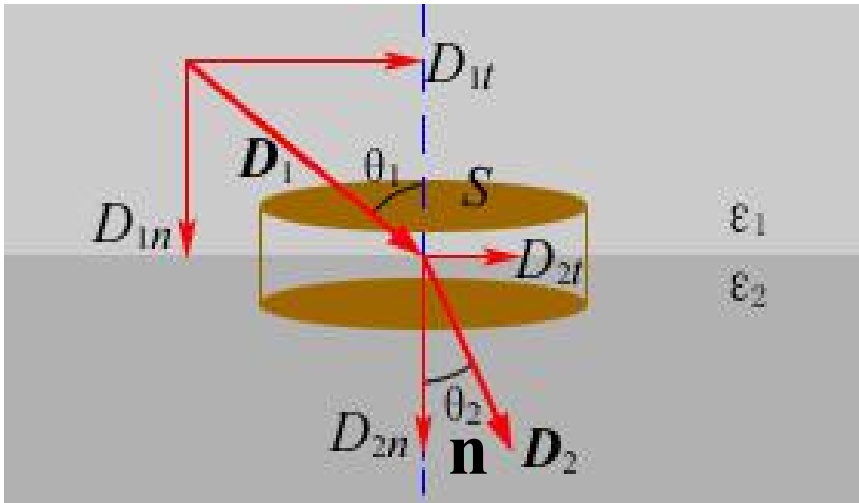
■如在电介质界面上，一般$\sigma_0=0$，即无自由电荷，所以：

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n} \quad \text{或} \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0}$$

$$\because -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)\cdot \boldsymbol{n} = \sigma'_e \ (+)$$

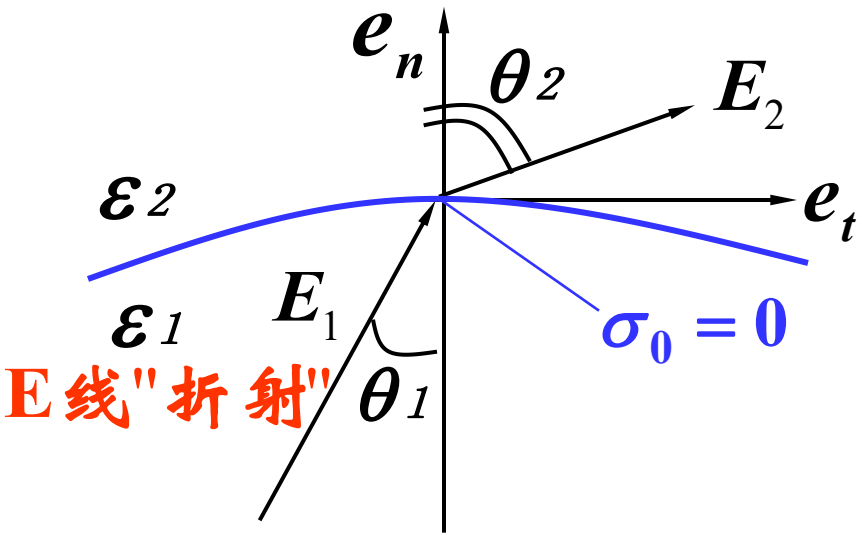
$$\therefore (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{n} = \sigma_e / \varepsilon_0$$

σ_e为总面电荷密度



电场线在介质界面上的“折射”

$\because \sigma_0 = 0$， $\therefore$ 则 $D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$



又 $E_{1t} = E_{2t}$

$$\therefore \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\mathrm{tg}\,\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

电场线在穿过介质界面时会产生类似光线折射的现象

若 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，则 $\theta_1 < \theta_2$

（3）电势

- 在介质界面两侧取距界面为h的 1，2 两点

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{L}$$

$$= E_{1n} h + E_{2n} h$$

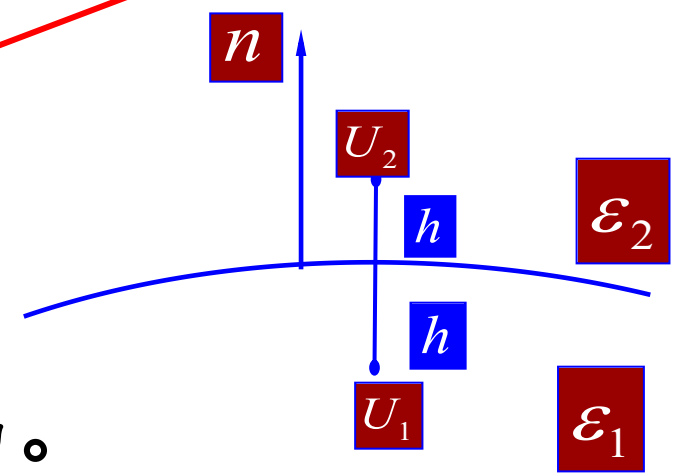
$$= E_{1n} h \left(1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2\right)$$

- 其连线平行法线，两点的电势分别为U_1和U_2

$$\xrightarrow{h \to 0} U_1 - U_2 = 0$$

- 当$h \to 0$ 时，两点的电势差为0 ，即：

$$\boxed{U_1 = U_2}$$



介质界面两侧电势总是连续的。

小结（界面两边一定满足下面条件）

1、E 的切向分量总是连续的

- 界面一点上的法线方向只有一个，而该点的切线方向却有无数多个，结论对任一切线方向成立

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ \dfrac{D_{1t}}{D_{2t}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

2、对无自由电荷的界面，D的法向分量连续

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \dfrac{E_{1n}}{E_{2n}} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{cases}$$

3、介质界面两侧的电势总是连续的

$$U_1 = U_2$$

4、极化强度矢量和极化面电荷

$$\sigma'_e = P_{1n} - P_{2n}$$

二、唯一性定理

- 求解静电场问题
  - 给定空间电荷的分布,如何知道空间各处的电场?
  - 原则:库仑定律+叠加原理→空间各点电场强度E

- 实际情况：有导体时
  - 要知道每个导体表面的面电荷分布很困难；
  - 即使知道σ_e，但E是矢量，使得计算极为繁杂；
  - 容易确定的是每个导体的电势或者总电量。

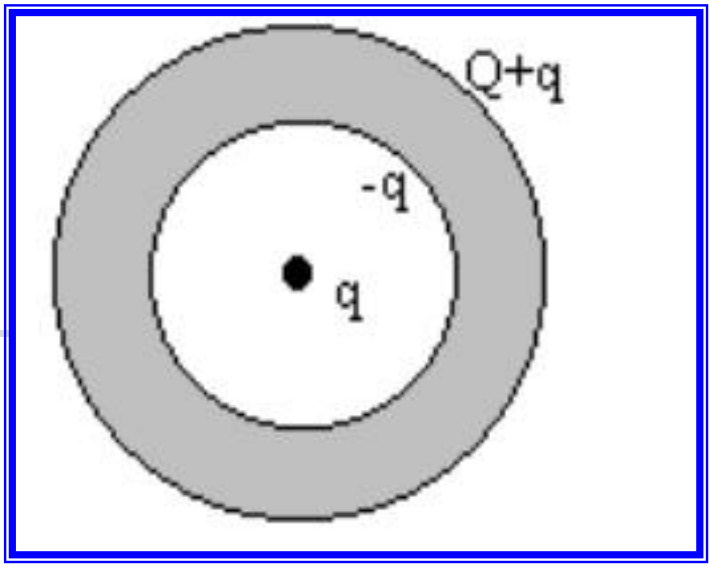
- 求解思路: 先求得U, 再利用$\mathbf{E}=-\nabla U$得E

演绎得基本方程：

$$\because \quad \nabla\cdot\mathbf{E}=\rho_e/\varepsilon_0, \qquad \mathbf{E}=-\nabla U.$$

$$\therefore \quad \nabla^2 U=-\rho_e/\varepsilon_0 \rightarrow \text{泊松方程}$$

$$\text{如果} \quad \nabla^2 U=0 \rightarrow \text{拉普拉斯方程}$$



- 将问题转换为求解一个标量函数的二阶偏微分方程；
- 已知仅有此方程不能确定空间U分布，还需边界条件。

典型的静电场问题：即在给定一定边界条件下，求解泊松方程的问题。

对于静电场，给定什么样的条件，空间存在确定的电场解？——唯一性定理

（一）带电导体系—唯一性定理

- 当给定电场的边界条件，**即给定**包围电场空间的**边界面S上的电势U_S**，**给定**S内各导体的形状、大小及各导体之间的相对位置，当然有限个点电荷分布要已知，**同时再给定**下列两条件之一：

  (1) S面内每个导体的电势U_i

  (2) S面内每个导体上的总电量q_i

  （其中$i=1,2,\ldots\ldots$为导体的编号）

- 则在以S为边界面的空间内由高斯定理和环路定理确定的**静电场解是唯一的**。

（二）含电介质体系—唯一性定理

- 当**给定**空间**边界面**S**上的电势**U_S，**给定**S面内**各均匀介质**按区域分布的情况和各电介质的介电常数ε_i，**给定**S内各**导体**的形状、大小及各导体之间的相对位置，当然有限个点电荷分布要已知，**同时再给定**下列两条件之一：

  (1) S面内每个导体的电势U_i

  (2) S面内每个导体上的总电量q_i

  （其中$i=1,2,\ldots\ldots$为导体的编号）

- 则边界面S所包围的空间内**静电场解是唯一的**。

唯一性定理的含意

满足一定的条件和边界条件的、存在于空间的电场分布应该是唯一的,即给定这些条件后,不可能存在不同的静电场分布。

- 证明:
  - 利用反证法论证见书中**P56**
  - 理论证明在电动力学中给出

几点说明

- 唯一性定理提出了**定解的充分必要条件**。
  - 求解时，**判断问题**的条件、边界条件是否足够？如果足够，则可断定解是唯一的。
  - 不同的方法得到的解在形式上可能不同，但等价。

- 唯一性定理对于**解决实际问题**有着重要的意义。
  - 对于许多实际问题，往往需要根据给定的条件作一定的分析，**提出尝试解**。
  - 如果所提出的**尝试解**满足唯一性定理所要求的条件，它就是该问题的唯一正确的解。

*三、应用举例（第五种求E的方法）

研究分区均匀线形各向同性介质的电场求解问题（由边值关系猜解）：

- 介质界面与电场线重合的情况
- 介质界面与等势面重合的情况
- 其他情况：电动力学方法处理

介质界面与电场线重合

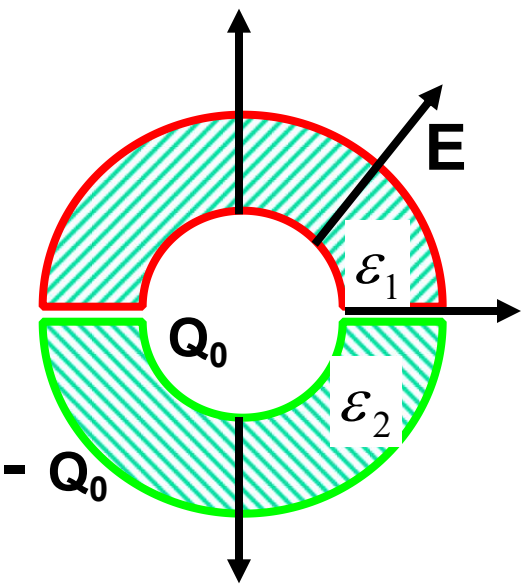
- 见右下图，带电量为Q_0的球形电容器。E与介质界面重合，则P在界面上没有法向分量，则两种介质分界面上极化面电荷为0。
- σ'$_e$只可能存在于介质和导体的边界面上。
- 而导体静电平衡要求导体内的E恒为0，所以导体表面的自由电荷会自动调整，从而维持总电荷面密度分布形式不变；

∵ 介质界面两边E切向分量应相等。

∴ 可设介质中 $\boxed{E = \alpha E_0}$ ，其中α 是个常数。

$$\because \boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$\because \sigma'_e = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)\cdot \boldsymbol{n}$$



- 为确定α因子，我们要用到高斯定理：

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i \alpha \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E}_0 \cdot d\boldsymbol{S} = Q_0$$

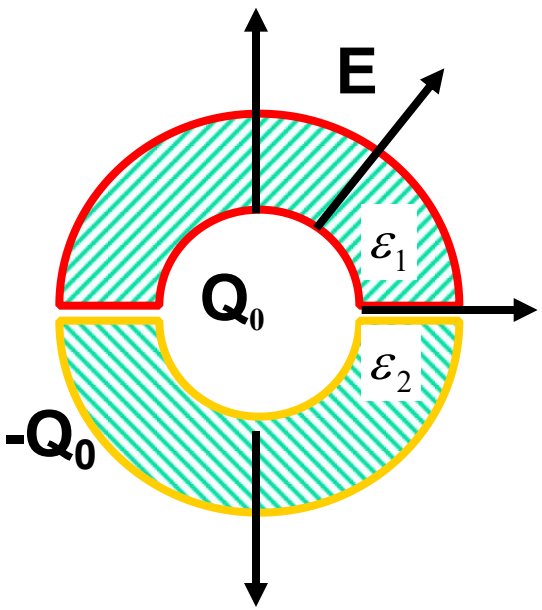
$$\alpha \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E}_0 \cdot d\boldsymbol{S} = Q_0$$

式中S为包含某导体面的高斯面，S_i是S的一部分，它位于第i种介质之中；Q_0为该导体所带的自由电荷量，在真空中所产生的电场为E_0。

■ 对E_0一维对称性问题，则E也有一维对称性，不必引入α，使得问题简化。这时可利用高斯定理直接计算电场强度E。

[例2-7-1]球形电容器带电量Q_0，极板间充满介电常数分别为ε_1和ε_2的两种介质，求介质中的D和E。

[解]介质界面与电场线重合，E是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：



$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi r^2(D_1+D_2)$$

$$= E(2\pi r^2\varepsilon_1 + 2\pi r^2\varepsilon_2) = Q_0,$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{Q_0\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_1\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_1 Q_0\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3},$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_2 Q_0\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}.$$

[例2-7-2]平行板电容器，带电Q_0，板间距d，长度a，宽度$b=b_1+b_2$。介电常数为ε_1和ε_2。求C和极板上自由电荷σ_e

[解]介质界面与电场线重合，且$\boldsymbol{E}$是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：

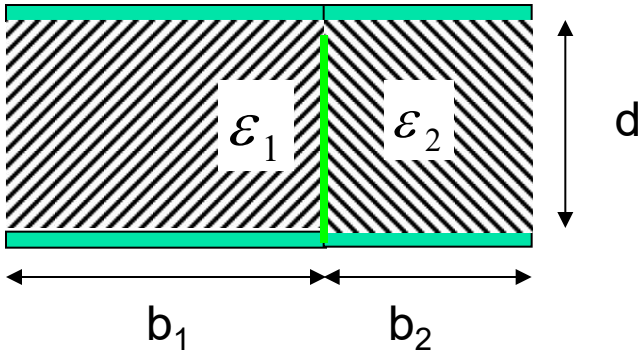
$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = E(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a = Q_0 \qquad \Rightarrow E = \frac{Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a},$$

$$C = \frac{Q_0}{Ed} = \frac{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}{d}, \qquad \sigma_{e1} = D_{n1} = \varepsilon_1 E = \frac{\varepsilon_1 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a},$$

$$\sigma_{e2} = D_{n2} = \varepsilon_2 E = \frac{\varepsilon_2 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}.$$

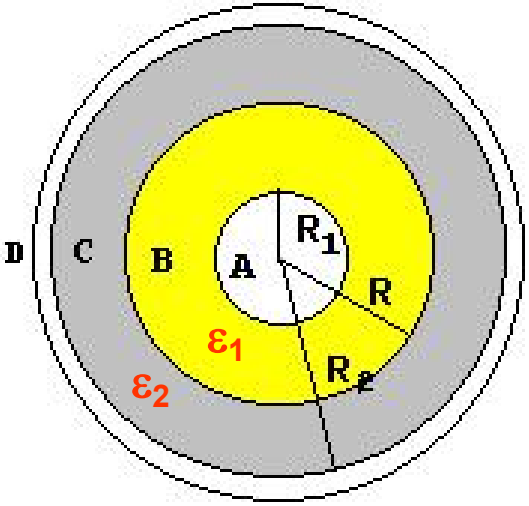
自由电荷 $\sigma_{e1} \neq \sigma_{e2}$

自由电荷在极板上分布是不均匀的，但这种不均匀性正好由极化电荷所补偿，可以计算总面电荷密度是均匀分布的。电容器内电场仍是均匀分布的。

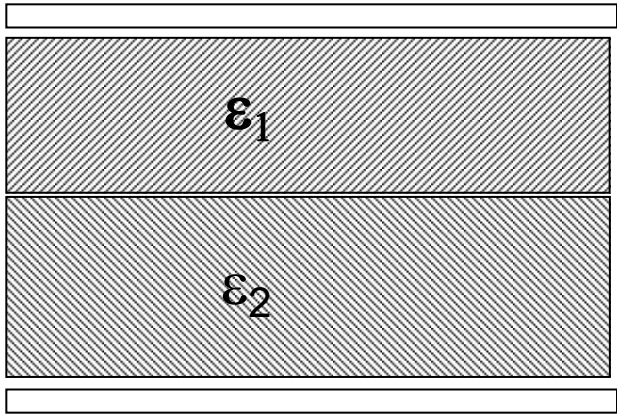


介质界面与等势面重合

- 介质界面与等势面重合 ⟷ 介质界面与电场线垂直，见右两图问题
- 由D的法向分量连续，猜介质中
- $\boxed{D=\varepsilon_0 E_0}$，可证明$D$ 和 $\varepsilon_0 E_0$ 同时满足高斯定理和环路定理，见P59。
- E_0为自由电荷的电场，其计算完全等同于真空中的静电场。
- 处理步骤：
  - 首先去掉介质，计算自由电荷产生的电场$\mathbf{E}_0$，或由已知关系算$\mathbf{E}_0$
  - 利用 $\mathbf{E}_i=\mathbf{D}/\varepsilon_i=\varepsilon_0\mathbf{E}_0/\varepsilon_i$求出$\mathbf{E}_i$



球型电容器



平行板电容器

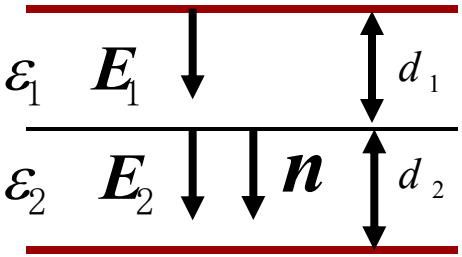
[例2-7-3]平行板电容器，两板间充满厚度分别为d_1、d_2，介电常数为ε_1，ε_2的两层介质；板间电压为U。求：1）两板间的电场；2）介质分界面处的总面电荷密度；3）介质分界面处的自由面电荷密度？

[解] 介质界面与电场线垂直，$\mathbf{E}_i = \mathbf{D}/\varepsilon_i = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0/\varepsilon_i$

1) 已知：$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \varepsilon_0 E_0 d_1/\varepsilon_1 + \varepsilon_0 E_0 d_2/\varepsilon_2$，

$$\therefore \quad E_0 = \frac{U}{\varepsilon_0(d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2)} \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_2}.$$

2) $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = \sigma_t/\varepsilon_0$， $\sigma_t = \varepsilon_0(E_2 - E_1)$

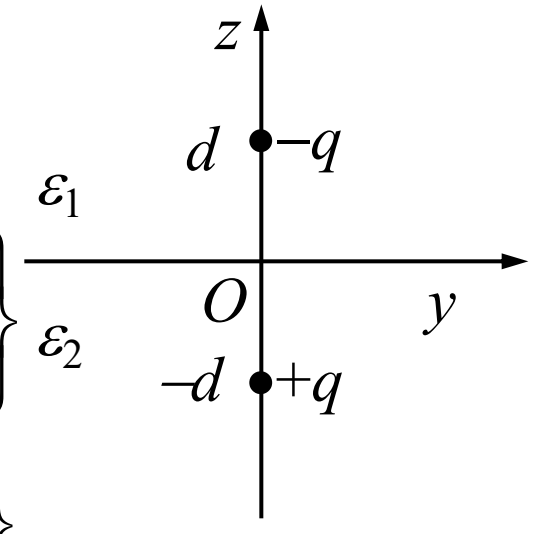


3) $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma_0$，

$\because \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$，$\therefore \quad \sigma_0 = 0.$

[例2 .7.4]如右下图所示，一无限大平面（z = 0）将介电常量分别为ε_1和ε_2的介质隔开，在 z 轴上$z=\pm d$的位置分别放置点电荷$\mp q$，求空间电场分布。

[解] 当去掉介质，xoy平面恰好为两点电荷的电场的等势面；又$\mathbf{E}_0$、P、E方向相同，因此，本题属于介质界面与等势面重合的情况。先求：



$$E_{0x}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_{0y}=\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_{0z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z+d}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}-\frac{z-d}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\}$$

$\because \mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}_0$

$\therefore \mathbf{E}=\mathbf{D}/\varepsilon_1=(\varepsilon_0/\varepsilon_1)\mathbf{E}_0$（z > 0），$\mathbf{E}=\mathbf{D}/\varepsilon_2=(\varepsilon_0/\varepsilon_2)\mathbf{E}_0$（z < 0）

其他情况

- 介质界面与电场线和等势面都不重合，一般用：电动力学方法处理

- 对于某些具有特定几何形状的介质面的问题，可以利用电像法求解

§2.8 电像法（第六种求E的方法）

定义：

- 求解静电场问题的特殊方法，由W.汤姆孙于1848年提出。用于计算一定形状导体面附近的电荷所产生的静电场。

原因：

- 在电荷的附近出现导体面(或介质分界面)时，这些面(有感应电荷或极化电荷)对电场有影响，求解困难。

解决方法：

- 电像法就是利用已经熟悉的静电学知识，通过在这些面的另一侧适当位置，设置电量适当的假想电荷(称为像电荷)，保证场的边界条件得到满足，等效地代替实际导体或电介质界面上的感应电荷与极化电荷求解。

物理根据：

- 根据静电唯一性定理，在求解区域中，源电荷与像电荷产生的电场满足边界条件，它就是实际存在的电场。

一、范围步骤

基本思路

- 用假想的、求解区域外的像电荷代替边界上的感应电荷与束缚电荷；
- 保持求解区域中场方程和边界条件的不变。

使用范围

- 区域内只有一个或者几个点电荷。点电荷个数有限；
- 区域的边界是导体或者介质。界面几何形状较规范。

解题步骤

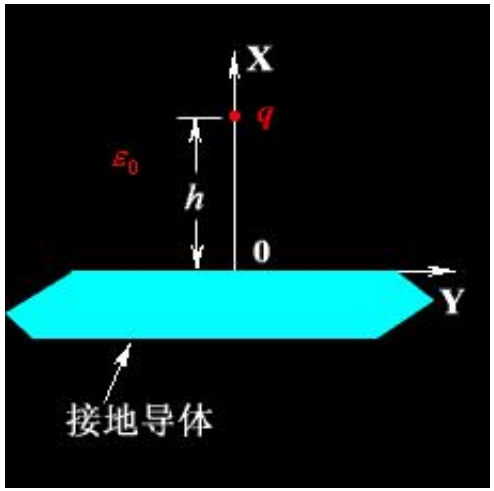
- 先确定像电荷的大小和位置，利用满足原边界条件；
- 去掉界面，按原电荷和像电荷求所要求区域的电场；
- 再求边界上的感应电荷与束缚电荷；
- 最后求电场力。

二、应用举例

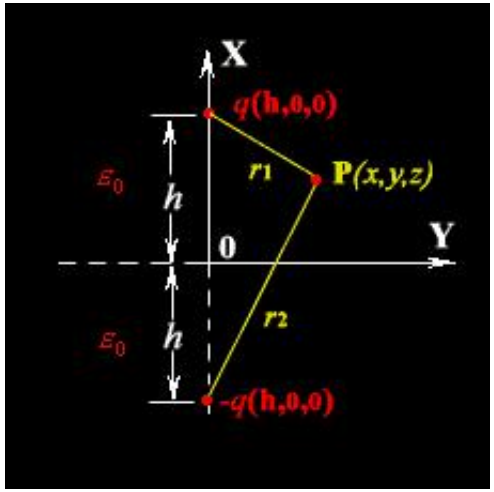
[例2-8-1]距无限大接地导体板为h处有一点电荷q。求：点电荷一侧场的分布，板上的电荷分布以及电荷q所受的力。

分析：边界条件是YOZ面为零电位面。根据已有的知识，用位于导体平面下方h处的镜像电荷$-q$代替导体平面上的感应电荷，可满足给定的边界条件。

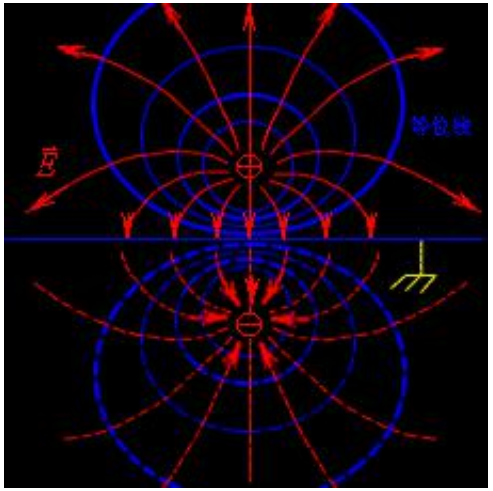
解题：去掉导体面，用原电荷和像电荷求解导体上方区域场。



接地导体面上方有点电荷q



镜像电荷$-q$



点电荷的平面镜像

于是可得上半空间电位：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+(x-h)^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+(x+h)^2}}\right]$$

电场强度：$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x},E_y=-\frac{\partial U}{\partial y},E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$；当$x=0$，即面板上：

$$E_y\big|_{x=0}=0,E_z\big|_{x=0}=0,E_x\big|_{x=0}=-qh/2\pi\varepsilon_0(h^2+R^2)^{3/2}$$

感应电荷：$\sigma_e=\varepsilon_0 E_x\big|_{x=0}=-qh/2\pi(h^2+R^2)^{3/2}$ $\boxed{R^2=y^2+z^2}$

$$Q=\iint_S\sigma_e dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{-qh}{2\pi(h^2+R^2)^{3/2}}RdRd\varphi=\frac{qh}{(h^2+R^2)^{1/2}}\Big|_0^{\infty}=-q=q'$$

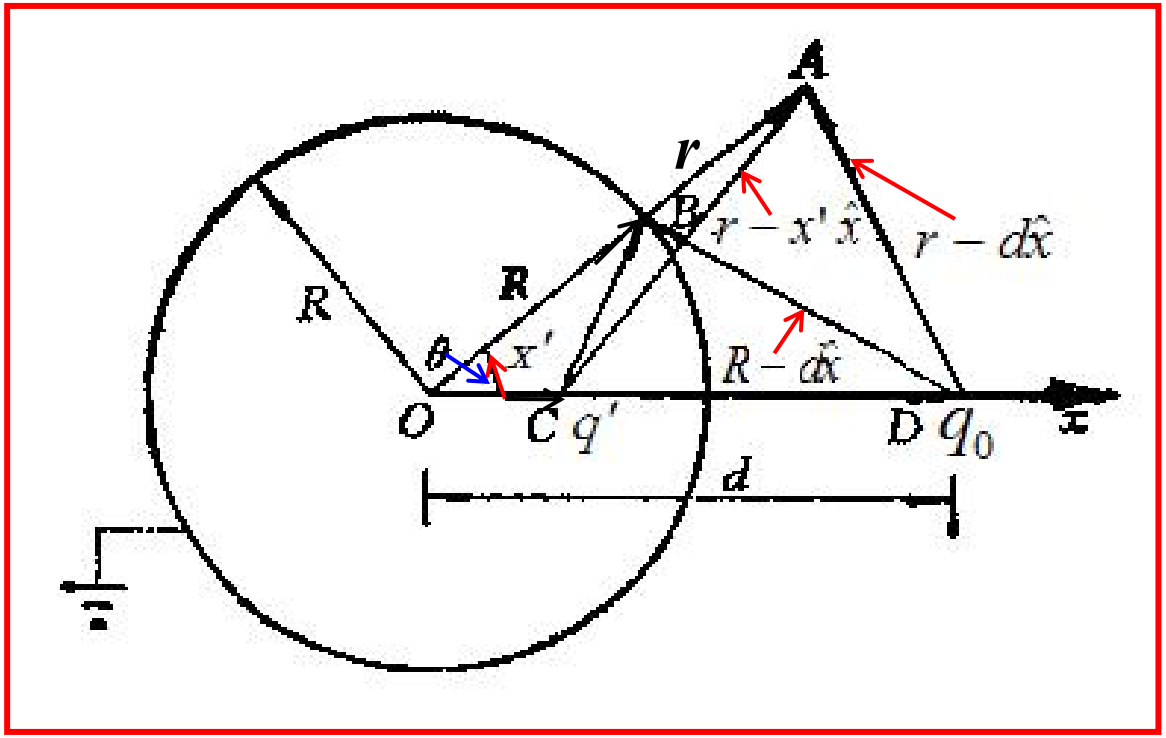
电场力：　像电荷－q在点电荷q产生的电场：

$$E_y\big|_{x=h}=0,\quad E_z\big|_{x=h}=0,\quad E_x\big|_{x=h}=-q/16\pi\varepsilon_0 h^2,$$

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}=qE_x\big|_{x=h}\hat{\boldsymbol{x}}=-q^2/16\pi\varepsilon_0 h^2\hat{\boldsymbol{x}}.$$

*[例2-8-2]真空中有一半径为R 接地导体球壳，距球心为d $(d>R)$ 处有点电荷q_0,求空间各点电场、球壳σ_e和q_0受力

- [分析]：对称性分析，设导体球内距离球心O为x‘ 的C点处，置一像电荷q‘来代替导体球上的感应电荷，维持导体球面电位为零。
- [解题]：去掉导体球，用原电荷和像电荷求解导体球外区域场，注意！不能用原电荷和像电荷求解导体球内区域场！步骤为：
  - 求解像电荷的大小和位置；
  - 求解电位、电场强度、感应电荷



■求解镜像电荷的大小和位置：将原导体球移去，q_0及像电荷 q' 在原球面上任一点B处产生的电位应为零，即：

在A点处：
$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-d\hat{\boldsymbol{x}}|}+\frac{q'}{|\boldsymbol{r}-x'\hat{\boldsymbol{x}}|}\right)$$

利用边界条件
$$U|_{r=R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{|\boldsymbol{R}-d\hat{\boldsymbol{x}}|}+\frac{q'}{|\boldsymbol{R}-x'\hat{\boldsymbol{x}}|}\right)=0$$

由上式导出：
$$\frac{q_0/R}{\left|\hat{\boldsymbol{r}}-\frac{d}{R}\hat{\boldsymbol{x}}\right|}=-\frac{q'/x'}{\left|\frac{R}{x'}\hat{\boldsymbol{r}}-\hat{\boldsymbol{x}}\right|},$$

该式成立的充分必要条件是分子、分母分别相等，亦即：

$$\frac{q_0}{R}=-\frac{q'}{x'},\qquad \left|\hat{\boldsymbol{r}}-\frac{d}{R}\hat{\boldsymbol{x}}\right|=\left|\frac{R}{x'}\hat{\boldsymbol{r}}-\hat{\boldsymbol{x}}\right|$$

其中第二个等式**利用余弦定理**化为：

$$1-\frac{2d}{R}(\hat{\boldsymbol{r}}\bullet\hat{\boldsymbol{x}})+\left(\frac{d}{R}\right)^2=1-\frac{2R}{x'}(\hat{\boldsymbol{r}}\bullet\hat{\boldsymbol{x}})+\left(\frac{R}{x'}\right)^2$$

从中解得 $d/R=R/x'$，将其代入第一个等式，求得像电荷的位置和电量，结果为：

$$x'=\frac{R^2}{d},\qquad q'=-\frac{R}{d}q_0$$

- 于是，求得球壳外（ $r\geq R$ ）的**电势**和**电场**表达式如下：

$$U=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{1/2}}-\frac{R}{(r^2d^2+R^4-2rdR^2\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

$$E_r=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r-d\cos\theta}{(r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{3/2}}-\frac{Rd\quad(rd-R^2\cos\theta)}{(r^2d^2+R^4-2rdR^2\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

$$E_\theta = \frac{q_0 d\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r^2+d^2-2dr\cos\theta)^{3/2}} - \frac{R^3}{(r^2d^2+R^4-2rdR^2\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

■不难验证 $E_\theta|_{r=R}=0$，即导体壳表面电场切向分量为零。

导体表面的**面电荷密度**为：

$$\sigma_e(R,\theta)=\varepsilon_0 E_n=\varepsilon_0 E_r(R,\theta)=-\frac{q_0(d^2-R^2)}{4\pi R(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}.$$

■导体壳上的**总电量**为：

$$q_i=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_e(R,\theta)\cdot R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$=-\frac{q_0(d^2-R^2)R}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}=-\frac{R}{d}q_0,$$

即$q_i=q'$，导体壳上的**总电量**与**像电荷的电量相等**。

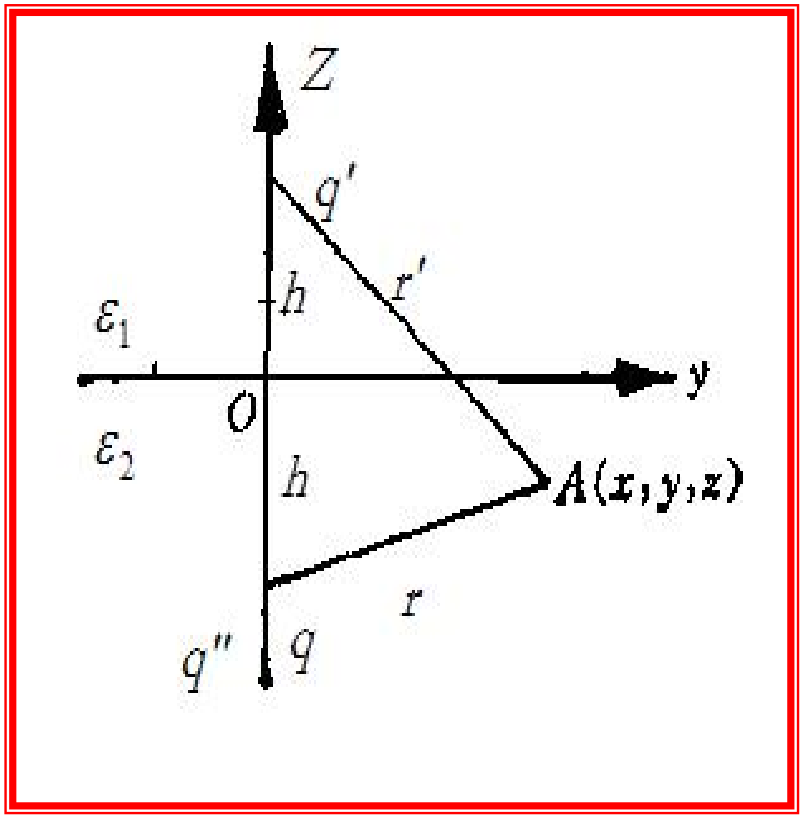
■作用到q_0上的**力**，也就是像电荷q' 对它的库仑力，即：

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_0q'\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0(d-x')^2}=-\frac{q_0^2(R/d)\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0[d-(R^2/d)]^2}=-\frac{Rdq_0^2\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0(d^2-R^2)^2}$$

*[例2-8-3]如右下图所示，介电常量分别为 ε_1 和 ε_2 半无限介质的界面为一无限平面，在介质2中置入点电荷 q，它与界面的垂直距离为 h，求界面极化电荷的分布。

[解]　我们尝试用电像法来解，即用像电荷来代表界面上极化电荷对电场的贡献。

如右图所示：



■ 设对 ε_2 区($z<0$)，这一贡献可用像电荷 q' 代表；

■而对 ε_1 区($z\geq 0$)，可用像电荷 q'' 代表。

求得两区域电势的表达式为：

$$U_1 = \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{q}{\varepsilon_2} + \frac{q''}{\varepsilon_0}\right), \qquad (z \geq 0),$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q}{\varepsilon_2 r} + \frac{q'}{\varepsilon_0 r'}\right), \qquad (z \leq 0)$$

注意上述表达式中，源电荷的贡献应被所在介质中的介电常量除，这相当于计入了源电荷周围的极化电荷的贡献；而像电荷已代替了介质的贡献，所以采用真空中的电势计算公式。

上述电场应满足如下边值关系：

D 的法向分量相等

$$\boxed{U_1|_{z=0} = U_2|_{z=0}, \qquad \varepsilon_1 \left.\frac{\partial U_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \varepsilon_2 \left.\frac{\partial U_2}{\partial z}\right|_{z=0}}$$

将U_1和U_2的表达式代入上面两式分别求得：

$$q'' = q', \qquad \varepsilon_1\left(\frac{q}{\varepsilon_2}+\frac{q''}{\varepsilon_0}\right)=\varepsilon_2\left(\frac{q}{\varepsilon_2}-\frac{q'}{\varepsilon_0}\right)$$

可解出：

$$q' = q'' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}q$$

束缚面电荷密度：

$$\sigma_e' = (P_{2z}-P_{1z})_{z=0} = [(\varepsilon_2-\varepsilon_0)E_{2z}-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E_{1z}]_{z=0}$$

$$= \varepsilon_0(E_{1z}-E_{2z})_{z=0} = \frac{q'h}{2\pi r^3} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)hq}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}.$$

讨论：当取 $\varepsilon_1 \to \infty$，$\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ 时，我们得到如下结果：

$$q' = q'' = -q, \qquad U_1 = 0, \qquad U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$$

上述结果和 例2-8-1的结果一致。因此，在静电学范围内，导体可当作介电常量趋于无穷的电介质的极限。

电像法小结

- 理论根据：　唯一性定理。
- 基本思想：
  - 在域外放置适当的像电荷，等效导体边界上未知的感应或束缚电荷对域内电场的影响。
- 适用的对象：
  - 边界简单(球、无穷长圆柱、无穷大面)域内电荷简单(线、点)。
- 原则：　满足给定的边界条件；

  还要满足原边值关系。