第五章 电磁波的辐射

内容提要

1 电场场的矢势和标势
  1.1 矢势和标势
  1.2 规范变换和规范不变性
  1.3 库仑规范与洛伦兹规范
  1.4 达朗贝尔(d' Alembert)方程
  1.5 例 求平面电磁波的势。
  1.6 小结

2 推迟势
  2.1 时变电荷的标势$\phi$
  2.2 标势$\phi$的解为发散球面波
  2.3 发散球面波解与电位的关系
  2.4 标势解的验证
  2.5 空间分布的变化电荷激发标势和矢势
  2.6 验证洛伦兹条件
  2.7 推迟势的物理意义及小结

3 电偶极辐射
  3.1 定域振荡源的辐射场
  3.2 辐射场的划分
  3.3 小区域电流电荷分布的多极展开
  3.4 电单极势
  3.5 电偶极辐射的标势与矢势
  3.6 电偶极辐射的电磁场
  3.7 电偶极辐射的偏振方向
  3.8 偶极辐射的能流以及角分布
  3.9 偶极辐射功率
  3.10 短天线的辐射
  3.11 电场场的动量密度与动量流密度
  3.12 例一求平面电磁波的动量流密度张量
  3.13 例二求平面电磁波对理想导体的辐射压强
  3.14 小结

第一篇 电磁场的矢势和标势

§ 1.1 矢势和标势

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
\[ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \]
\[ \nabla \cdot B = 0 \]
\[ \nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \]

由\( B \)的无旋性引入矢势\( A \):
\[ \nabla \cdot B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \nabla \times A \]
\[ E \quad ? = \quad -\nabla \varphi \]
时变电磁场的\( E \)不再是无旋的！

**矢势和标势（续）**

\[ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \]

由\( E + \frac{\partial A}{\partial t} \)的无旋性引入标势\( \varphi \):
\[ \nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \varphi \]

一般而言:
\[ E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \]

【讨论】

- 电场\( E \)不再是保守力场，势能，电压的概念失去原来意义；
- 时变电磁场中，磁场和电场是相互耦合的整体；矢势和标势缺一不可！
- \( E \), \( B \), \( J \), \( A \)均可分为两部分：横场（\( \nabla \cdot f_T = 0 \)）与纵场（\( \nabla \times f_L = 0 \)）

§ 1.2 规范变换和规范不变性

从\( \nabla \times A = B \)可以看出，要确定\( A \)还需要另加条件；
用矢势\( A \)与标势\( \varphi \)描述电磁场不唯一！

\[ A \rightarrow A' = A + \nabla \psi \quad \text{(1)} \]
\[ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{(2)} \]

\((A, \varphi)\)与\((A', \varphi')\)描述同一种电磁场：
\[ \nabla \times A' = \nabla \times A = B \]
\[ -\nabla \varphi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = E \]

【定义】变换(1)和(2)式称为势的规范变换；
【定义】描述相同的\( (E, B) \)的每一组\( (A, \varphi) \)称为一种规范。
规范变换和规范不变性（续）

规范：明文规定或约定俗成的标凪，一种限制；

guage：量计、标准度量；

规：有法度也。—《说文》：规者，正圆之器也。—《诗·沔水》序·笺

【定义】当势作规范变换时，所有物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为规范不变性。

【定义】规范不变性是决定相互作用形式的一条基本原理，传递这些相互作用的场称为规范场。电磁场是一种规范场。

§ 1.3 库仑规范与洛伦兹规范

规范的选择是多样的：挑选出计算方便简化，且物理意义明显的规范，有两种：库仑规范与洛伦兹规范。

库仑规范

\[ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \]

库仑规范纵横分凧：库仑场和感应场

\[ \mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T \quad , \quad \mathbf{E}_L = -\nabla \varphi \quad , \quad \mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \]

洛伦兹规范

\[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \]

库仑规范简化了一个方程，洛伦兹规范对称了一对方程。

洛伦兹规范仍有多余的自由度！

§ 1.4 达朗贝尔(d’Alembert)方程

\[ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \]

\[ \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \]

\[ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \]

\[ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \]

\[ \nabla \cdot \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3) \]

\[ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \]

\[ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4) \]
达朗贝尔(d' Alembert)方程（续一）

利用库仑规范，(3)式和(4)式可改写为：
\[ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \]
\[ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \nabla \varphi = -\mu_0 \mathbf{J} \]
\[ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \]

库仑规范的特点：标势\(\varphi\)所满足的方程与静电场情形相同，其解是库仑势。

达朗贝尔(d' Alembert)方程（续二）

利用洛伦兹规范：(3)式和(4)式可改写为：
\[ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \] (5)
\[ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \] (6)
\[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \] (7)

方程(5)和(6)称为达朗贝尔方程。

- 达朗贝尔方程是自由项为电流密度和电荷密度的非齐次的波动方程；
- 尽管洛伦兹规范给出波动形式的方程，但\(\mathbf{E}\)和\(\mathbf{B}\)的波动性质是场本身的性质而和规范无关。
- 方程(5)、(6)和(7)构成电动力学基本方程组：

§ 1.5 例 求平面电磁波的势。

【解】
\[ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \]
\[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \]
\[ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp [i (k \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad , \quad \varphi = \varphi_0 \exp [i (k \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \]
\[ \varphi_0 = \frac{c^2}{\omega} k \cdot \mathbf{A}_0 = ce_k \cdot \mathbf{A}_0 \]
\[ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = ik \times \mathbf{A} \]
\[ \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -ik (ce_k \cdot \mathbf{A}) + i\omega \mathbf{A} \]
\[ = i\omega [\mathbf{A} - e_k (e_k \cdot \mathbf{A})] = i\omega [(e_k \times \mathbf{A}) \times e_k] = -ce_k \times \mathbf{B} \]
例 求平面电磁波的势（续一）

注意到平面波电磁场只依赖于矢量$\mathbf{A}$的横向分量，对$\mathbf{A}_0$加上任意纵向部分$\alpha \mathbf{e}_k$（同时对$\varphi_0$加上$\alpha \mathbf{e}_k$，$\alpha$为任意常数）都不影响电磁场值。
也即加上洛伦兹条件后，还存在剩余规范变换自由度。
最简单的选择是取$\mathbf{A}$只有横向部分，$k \cdot \mathbf{A} = 0$，因而$\varphi = 0$，用该规范时有；

$$
\mathbf{B} = i k \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = i \omega \mathbf{A} \quad , \quad k \cdot \mathbf{A} = 0
$$

如果采用库仑规范：

$$
\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 0
$$

$$
\nabla^2 \varphi = 0
$$

$$
\nabla \cdot \mathbf{A} = 0
$$

例 求平面电磁波的势（续二）

由于全空间$\rho = 0$，故此库仑场标势$\varphi$为零或常数，不失一般性可取$\varphi = 0$；代入方程可得：

$$
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0
$$

$$
\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp [i (k \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad , \quad \varphi = 0
$$

由库仑条件$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$可得$\mathbf{A}$只有横向分量，故此$\mathbf{B}$、$\mathbf{E}$可得：

$$
\mathbf{B} = i k \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = i \omega \mathbf{A} \quad , \quad k \cdot \mathbf{A} = 0
$$

两种规范求得的场一致！

库仑规范的优点：其标势$\varphi$描述库仑作用，可直接由电荷分布$\rho$求出；而其矢势只有横向分量，刚好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振！

§ 1.6 小结

- 时变电磁场可以用矢势和标势描述出来；
- 高频场中势能、电压的概念失去原来意义，磁场和电场是相互耦合的整体；矢势和标势缺一不可；
- 用矢势$\mathbf{A}$与标势$\varphi$描述电磁场并不唯—，由此引入规范条件；
- 两种常用规范—库仑规范与洛伦兹规范各有特色：
  - 库仑规范中库仑场和感应场纵横分明；
  - 库仑规范简化了一个方程，洛伦兹规范对称了一对方程；
  - 洛伦兹规范仍有多余的自由度；
- 利用洛伦兹规范给出的达朗贝尔方程具有波动的形式，是电动力学势的基本方程组。

【习题】Page 224: 1,2
第二节 推迟势

§ 2.1 时变点电荷的标势φ

【已知】 无界空间中，达朗贝尔方程为

\[ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \]  \hspace{1cm} (8)

\[ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \]

\[ \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \]

其中源项为时变的点电荷

\[ \rho(x, t) = Q(t) \delta(x) \]

【求解】 标势φ(x, t)?

§ 2.2 标势φ的解为发散球面波

【解】 由球对称性设φ(x, t) = φ(r, t)，

\[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t) \delta(r) \]  \hspace{1cm} (9)

\[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \hspace{0.5cm}, \hspace{0.5cm} (r \neq 0) \]  \hspace{1cm} (10)

式(10)的解为球面波。设\( \varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r} \)并作代换；

\[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \]

\[ u(r, t) = f(t - \frac{r}{c}) + g(t + \frac{r}{c}) \]

\[ \varphi(r, t) = \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t + \frac{r}{c})}{r} \]

考虑到研究的是辐射问题，故仅取发散球面波而令g = 0：

\[ \varphi(r, t) = \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r} \]

§ 2.3 发散球面波解与电量的关系

【回顾】 静电场下点电荷激发的电势：\( \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r} \)

【推想】 时变点电荷的标势为：

\[ \varphi(r, t) = \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi \varepsilon_0 r} \]  \hspace{1cm} (11)

【验证】 式(11)是满足方程(9)的解。
当$r \neq 0$时，由前所述可知：式(11)的确是波动方程(10)的解；
现在可证明当$r = 0$时，式(11)满足方程(9)：
- 当$r = 0$时式(11)致使$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \to \infty$
- 以$r = 0$为圆心、小量$\eta$为半径的球作体积分，积分结果应为$-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$。

§ 2.4 标势解的验证

$$
\int \int \int dV \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi \varepsilon_0 r}
$$

$$
= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty r^2 dr \nabla^2 \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{r} - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty r dr \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(t - \frac{r}{c})
$$

$$
= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty r^2 dr \left[ Q \nabla^2 \frac{1}{r} + 2
\nabla Q \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \nabla^2 Q \right]
$$

$$
\approx \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty r^2 dr Q \nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}
$$

即：当$r \to 0$时在半径为$\eta$的小球内$Q(t - \frac{r}{c}) \to Q(t)$，故

$$
\int \int \int \nabla^2 \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi \varepsilon_0 r} dV \to \frac{Q(t)}{4\pi \varepsilon_0} \int \int \int \nabla^2 \frac{1}{r} dV = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}
$$

§ 2.5 空间分布的变化电荷激发标势和矢势

位于原点的时变点电荷激发标势为：

$$
\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t) \delta(r)
$$

$$
\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{r}
$$

位于$\mathbf{x}'$处的时变点电荷$Q(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$产生标势（设$r = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$）：

$$
\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r}
$$

空间分布的变化电荷激发标势：

$$
\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \int \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'
$$

空间分布的变化电荷激发矢势：

$$
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'
$$
§ 2.6 验证\(\phi\)和\(A\)满足洛伦兹条件

\[
\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0
\]

设

\[
t' = t - \frac{r_c}{c}, \quad \nabla = -\nabla'
\]

复合函数的微分运算

\[
\nabla \cdot f(r, \psi(r)) = \frac{\partial f_x(r, \psi(r))}{\partial x} + \frac{\partial f_y(r, \psi(r))}{\partial y} + \frac{\partial f_z(r, \psi(r))}{\partial z}
\]

\[
= \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)
\]

\[
= \nabla_r \cdot f + \nabla \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi}
\]

验证\(\phi\)和\(A\)满足洛伦兹条件（续一）

\[
\nabla \cdot A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla \cdot \frac{J(x', t'(r))}{r} \, dV'
\]

\[
= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[ \nabla_r \cdot \frac{J(x', t')}{r} + \nabla t'(r) \cdot \frac{\partial J(x', t')}{\partial t'} \right] \, dV'
\]

\[
= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[ -J(x', t') \left( \nabla_r \cdot \frac{1}{r} \right) - \nabla t' \cdot \frac{\partial J(x', t')}{\partial t'} \right] \, dV'
\]

\[
= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[ - \left( \nabla_r \cdot \frac{1}{r} \right) - \nabla t' \cdot \frac{\partial J(x', t')}{\partial t'} \right] \, dV'
\]

\[
= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \nabla_r \cdot J(x', t') - \nabla' \cdot \frac{J(x', t'(r))}{r} \, dV'
\]

\[
= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \nabla_r \cdot J(x', t') \, dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{J(x', t')}{r} \cdot dS'
\]

验证\(\phi\)和\(A\)满足洛伦兹条件（续二）

\[
\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', t - \frac{r}{c})}{r} \, dV'
\]
\[ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial t} \frac{1}{r} \, dV' \]
\[ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t'} \rho(x', t') \, dV' \]

\[ \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0 \]

\[ \varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', t' - \frac{\zeta}{c})}{r} \, dV' \quad , \quad A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x', t' - \frac{\zeta}{c})}{r} \, dV' \]

\[ B = \nabla \times A \quad , \quad E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \]

\section*{2.7 推迟势的物理意义及小结}

\begin{itemize}
  \item 空间各点处的矢势与标势，是由电荷电流分布激发的；
  \item 空间某点\(x\)在某时刻的场值并不是依赖于同一时刻的电荷电流分布，而是决定于较早时刻\(t - \frac{\zeta}{c}\)的电荷电流分布——**推迟势**；
  \item 推迟的时间\(\zeta\)受两个因素的制约：传播速度与距离：
    \begin{itemize}
      \item 电磁相互作用以有限的速度传播；
      \item 不仅仅电磁相互作用，其实任何相互作用都满足以上规律；
      \item 只有**非超距作用**，才会有传播速度的概念；
      \item 从速度有限可知：相互作用传播速度存在某个最大值：**光速**！这正是相对论时空观的基础；
    \end{itemize}
  \item 从推迟的时间受距离影响可知：点\(x\)处\(t\)时刻测量到的电磁场是由不同位置不同时刻的电荷电流激发叠加而来。
\end{itemize}
### 习题 5.5

设 $A$ 和 $\varphi$ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势，

1. 引入一矢量函数 $Z(x, t)$ （赫兹矢量），若令 $A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial t}$，证明：

$$\varphi = -\nabla \cdot Z$$

2. 若令 $J = \frac{\partial P}{\partial t}$ 证明 $Z$ 满足方程

$$\nabla^2 Z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial t} = -c^2 \mu_0 P$$

并写出在真空中的推导解。

3. 证明 $E$ 和 $B$ 可通过 $Z$ 用下列公式表示。

$$E = \nabla \times (\nabla \times Z) - c^2 \mu_0 P, \quad B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times Z$$

【习题】Page 225: 3, 4, 5

### 第三节 电偶极极辐射

#### 3.1 定域振幅流的辐射场

$$J(x', t) = J(x') e^{-i\omega t}, \quad \rho(x', t) = \rho(x') e^{-i\omega t}$$

$$A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x', t - \frac{r}{c})}{r} \, dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x') e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \, dV'$$

$$= e^{-i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x') e^{ikr}}{r} \, dV' = A(x) e^{-i\omega t}$$

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x')}{r} \, dV'$$

其中 $e^{ikr}$ 为推导作用因子，$k = \omega/c$ 为波数

定域振幅流的辐射场（续）

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', t - \frac{r}{c})}{r} \, dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x') e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \, dV'$$

$$= e^{-i\omega t} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x')}{r} e^{ikr} \, dV' = \varphi(x) e^{-i\omega t}$$

10
\[
\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \rho(x') e^{ikr} \frac{1}{r} \ dv' \\
B = \nabla \times A, \quad E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}
\]

源外 \((J = 0)\) 区域：

\[
B = \nabla \times A, \quad E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}
\]

\[\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{ic}{k} \nabla \times B\]

§ 3.2 辐射场的划分

描述辐射场的三种特征长度：
电流源的区域线度 \(l = \max|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2|\)、电磁波长 \(\lambda = \frac{2\pi}{k}\)、电荷到场点的距离 \(r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\)。本节研究小区域内电流产生的辐射：\(l \ll \lambda\) and \(l \ll r\)。依 \(\lambda\) 与 \(r\) 的关系划分三种不同的区域

- 近（静态）区：\(l \ll r \ll \lambda\) \(\Rightarrow kr \ll 1\), \(e^{ikr} \rightarrow 1\) \(B\) 存在纵向分量、场分布精确依赖于源分布、具有静态特征；
- 中间（感应）区：\(l \ll r \sim \lambda\) \(\Rightarrow\) 过渡区域
- 远（辐射）区：\(l \ll \lambda \ll r\) \(\Rightarrow kr \gg 1\), \(e^{ikr}\) 波动效应显著、场与径向垂直、场正比于 \(r^{-1}\)、典型辐射场；

辐射阻抗、天线设计、发射系统：近场、感应场、远场；

接受电磁波、辐射功率、辐射角分布：远场

§ 3.3 小区域电流电荷分布的多达展开

\[
f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \left( \frac{h}{\partial x} + \frac{k}{\partial y} + \frac{l}{\partial z} \right)^m f(x_0, y_0, z_0) \bigg|_{r=r_0}
\]

\[
f(x - x') \approx f(x) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} (-\mathbf{x}' \cdot \nabla)^m f(x) \bigg|_{x'=0}
\]

选取坐标原点在电荷分布区域内，由 小区域 \(l \ll \lambda\) 且 \(l \ll r\)，故：

\[
r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx |\mathbf{x}| - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}' = r_0 - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}'
\]

\[
\rho(x') e^{ikr} = \frac{\rho(x') e^{ikr}}{r} \bigg|_{r=r_0} - (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{\rho(x') e^{ikr}}{r} \bigg|_{r=r_0}
\]

\[
+ \frac{1}{2} \mathbf{x}' \cdot \nabla \nabla \frac{\rho(x') e^{ikr}}{r} \bigg|_{r=r_0} + \cdots
\]
小区域电流电荷分布的多极展开（续）

用$[\rho]$表示$\rho(x') e^{ikr}$，$[J]$表示$J(x') e^{ikr}$

$$
\varphi(x) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \left\{ \frac{[\rho]_0}{r_0} - x' \cdot \nabla \frac{[\rho]_0}{r_0} + \frac{1}{2} x' x' : \nabla \nabla \frac{[\rho]_0}{r_0} + \cdots \right\} dV'
$$

$$
A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{[J]_0}{r_0} - x' \cdot \nabla \frac{[J]_0}{r_0} + \frac{1}{2} x' x' : \nabla \nabla \frac{[J]_0}{r_0} + \cdots \right\} dV'
$$

§ 3.4 电单极势

标势$\varphi$展开中的第一项为电单极势：

$$
\varphi^{(0)}(x) e^{-i\omega t} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \frac{[\rho]_0}{r_0} e^{-i\omega t} dV' = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', t - \frac{r_0}{c})}{r_0} dV'
$$

$$
= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r_0}
$$

由于电荷守恒，故电单极势是静态的；
电单极势无法写成$e^{-i\omega t}$的形式；
随时间谐振的场中不存在单极子项

§ 3.5 电偶极辐射的标势与矢势

标势$\varphi$展开中的第二项为电偶极势：

$$
\varphi^{(1)}(x) = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint x' \cdot \nabla \frac{[\rho]_0}{r_0} dV' = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint \nabla \frac{x' [\rho]_0}{r_0} dV'
$$

$$
= -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \nabla \cdot \left( \frac{1}{r_0} \iiint x' [\rho]_0 dV' \right) = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \nabla \frac{|p|}{r_0}
$$

其中$[p] = \iiint x' [\rho]_0 dV'$，对应着系统的电偶极矩；
矢势$A$展开中的第一项描述了系统电偶极矩随时间的变化激发的矢势：

$$
A^{(0)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[J]_0}{r_0} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \iiint [J]_0 dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \frac{dp}{dt}
$$

$$
= \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \frac{d[p]}{dt}
$$

回顾静磁场多极矩展开中利用了$\nabla' \cdot J = 0$，才致使$A^{(0)}(x) = 0$。

$$
\nabla' \cdot (J x') = (\nabla' \cdot J) x' + (J \cdot \nabla') x' = J
$$
§ 3.6 电偶极辐射的电磁场

\[
\varphi^{(1)}(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \frac{[p]}{r_0}, \quad A^{(0)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} [\dot{p}]
\]

\[
B = \nabla \times A = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\dot{p}]}{r_0}
\]

\[
E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \nabla \nabla \cdot \frac{[\dot{p}]}{r_0} - \frac{1}{c^2} \frac{[\dot{p}]}{r_0} \right)
\]

在源外区域:

\[
E = \frac{ic}{k} \nabla \times B
\]

在辐射区 \((l \ll \lambda \ll r)\) 可以写出电偶极辐射的场为:

\[
A^{(0)}(x) = \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0} \dot{p}
\]

电偶极辐射的电磁场（续一）

\[
B = \nabla \times A = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( e^{ikr_0} \frac{\dot{p}}{r_0} \right)
\]

\[
= \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi} \left( \nabla \frac{1}{r_0} \times \dot{p} + \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \nabla e^{ikr_0} \times \dot{p} \right)
\]

\[
= \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0} \left( -\frac{e_r}{r_0^2} \times \dot{p} + \frac{\mu_0}{4\pi r_0} i ke^{ikr_0} e_r \times \dot{p} \right)
\]

\[
= \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0} \left( e_r \times \dot{p} \right) \left( -\frac{1}{r_0} + \frac{2\pi}{\lambda} \right) + \frac{1}{r_0} \ll \frac{2\pi}{\lambda}
\]

\[
\approx \frac{\mu_0 k}{4\pi r_0} e^{ikr_0} (e_r \times \dot{p})
\]

\[
e^{ikr_0} \Rightarrow \nabla \rightarrow ike_r, \quad e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad ik = \frac{\omega}{c} \rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}
\]

电偶极辐射的电磁场（续二）

\[
A^{(0)}(x) = \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0} \dot{p}
\]

\[
B = \frac{\mu_0 k}{4\pi r_0} e^{ikr_0} (e_r \times \dot{p}) = \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r_0} (\ddot{p} \times e_r)
\]

\[
E = \frac{ic}{k} \nabla \times B = cB \times e_r = \frac{\mu_0 c}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r_0} (\ddot{p} \times e_r) \times e_r
\]

13
§ 3.7 电偶极辐射的偏振方向

选取坐标原点在电荷分布区域内，并以**p**方向为极轴:

\[ B = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r_0} |\vec{p}| \sin \theta \, e_\phi \]

\[ E = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_0} |\vec{p}| \sin \theta \, e_\theta \]

- **B**沿纬线振荡；**E**沿经线振荡；
- 磁感应线是围绕极轴的圆周，**B**总保持横向；
- 电场线是经面上的闭合曲线(\( \nabla \cdot E = 0 \))，**E**近似为横向；
- 电偶极辐射是空间中的TM波；
- 在**r**很大时，球面波可看作平面波，此时的偏振为TEM波；

§ 3.8 偶极辐射的能流以及角分布

辐射平均能流密度：

\[ \bar{S} = \frac{1}{2} \text{Re} (E^* \times H) = \frac{c}{2\mu_0} \text{Re} [B^* \times e_r] \times B] \]

\[ = \frac{c}{2\mu_0} |B|^2 e_r = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r_0^2} |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta \, e_r. \]

电偶极辐射的角分布（方向性）：**S** \( \propto \sin^2 \theta \, e_r \)

在\( \theta = \frac{\pi}{2} \)的平面上辐射最强；
沿电偶极偶轴线方向\( \theta = 0, \pi \)时没有辐射。

§ 3.9 偶极辐射功率

总辐射功率**P**

\[ P = \oint \bar{S} \cdot d\sigma = \oint |\bar{S}| r_0^2 \cdot d\Omega \]

\[ = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} |\vec{p}|^2 \oint \sin^2 \theta d\Omega = \frac{1}{12\pi \varepsilon_0 c^3} |\vec{p}|^2 \]

由通量守恒可知：只有场强正比于**r**^{-1}的项，才能辐射出去！
静电、磁的多极矩展开正比于**r**^{-n}，注意相互区别！

\[ \varphi^{(0)} \propto \frac{1}{r_0}, \quad \varphi^{(1)} \propto \frac{1}{r_0^2}, \quad \varphi^{(2)} \propto \frac{1}{r_0^3} \]

\[ A^{(1)} \propto \frac{1}{r_0^2}, \quad \varphi^{(1)} \propto \frac{1}{r_0^2} \]

14
§ 3.10 短天线的辐射
【已知】 中心馈电的短天线(l ≪ λ)，在馈点处载有电流最大值I_0，天线两端电流为零，设：

\[ \mathbf{J}(r', t) = I(z') \delta(x') \delta(y') e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z \]

\[ I(z') = I_0 \left( 1 - \frac{2}{l} |z'| \right) , \quad |z'| \leq \frac{l}{2} \]

【求解】 辐射场与辐射阻力。
【解】 l ≪ λ时即为电偶极辐射：

\[ \mathbf{p} = \int \int \mathbf{J}(x', t) \, dV' = \frac{1}{2} I_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z \]

\[ \mathbf{p} = -i \frac{\omega}{2} I_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z \]

短天线的辐射（续）

\[ P = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0 c^3} |\mathbf{p}|^2 = \frac{I_0^2 \omega^2 l^2}{48\pi\varepsilon_0 c^3} \]

\[ = \frac{I_0^2 l^2}{48\pi\varepsilon_0 c^3} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \epsilon^2 = \frac{\pi I_0^2}{12\varepsilon_0 c} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \]

短天线的辐射功率正比于I_0、(\frac{1}{\lambda})^2：

\[ P = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{6\varepsilon_0 c} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] I_0^2 = \frac{1}{2} R_r I_0^2 \]

\[ R_r = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 , \quad (l \ll \lambda) \]

天线的辐射电阻越大，即输入电流I_0给定的辐射功率P越大——表征了天线辐射能力。

辐射电阻正比于(\frac{1}{\lambda})^2——要提高辐射能力就必须加大l——半波天线l = \frac{\lambda}{2}

§ 3.11 电磁场的动量密度与动量流密度

电磁场动量密度g为

\[ g = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \]

电磁场动量密度与能流密度间的关係:

\[ g = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \]

电磁场动量流密度T为

15
电磁场动量守恒的积分形式
\[
\frac{d}{dt} \iiint g \, dV = - \iiint f \, dV - \oint \sigma \cdot T
\]

§ 3.12 例一求平面电磁波的动量流密度张量。

平面电磁波 \( E, B, k \) 构成正交坐标，故按张力张量如下：

\[
E \cdot T = E \cdot \left[ -\varepsilon_0 E E - \frac{1}{\mu_0} BB + \frac{1}{2} I (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \right]
\]

\[
= -\varepsilon_0 E^2 E - \frac{1}{\mu_0} (E \cdot B) B + \frac{1}{2} E (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)
\]

\[
= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 E + \frac{1}{2\mu_0} B^2 E = 0
\]

\[
B \cdot T = 0 \quad , \quad T \cdot E = T \cdot B = 0
\]

\[
k \cdot T = T \cdot k = \frac{1}{2} k (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) = \omega k
\]

故此：

\[
T = \omega e_k e_k = c e_k e_k
\]

§ 3.13 例二求平面电磁波对理想导体的辐射压强。

【定义】由电磁波具有动量，致使入射于物体上时会对其施加一定的压力，这种压力称为辐射压力。

【解】入射电磁波切线分量动量不产生辐射压强；电磁波法向分量平均动量为：

\[
\bar{g} c \cos \theta = \bar{\omega} c \cos \theta
\]

每秒入射于导体表面单位面积的法向分量动量为（面积为 \( \frac{1}{\cos \theta} \)）

\[
\bar{g} c \cos \theta = \bar{\omega} c \cos^2 \theta
\]

由于电磁波被反射回去，故此导体表面所受辐射压强为：

\[
P = 2 \bar{\omega} c \cos^2 \theta
\]

在导体外部，总电场为入射波电场 \( E_i \) 加反射波电场 \( E_r \)：

16
例二（续）

\[ E = E_i + E_r \quad , \quad E^2 = E_i^2 + E_r^2 + 2 \text{Re}(E_i^* \cdot E_r) \]

当全反射时有： \( \bar{\omega} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_r = 2 \bar{\omega}_i \)

\[ P = \bar{\omega} \cos^2 \theta \]

\[ \bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\omega} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{2\bar{\omega}}{3} \]

【另解】对于s偏振电磁波入射在导体表面：

\[ E = E_r + E_i = 0 \quad , \quad B = 2B_i \cos \theta \, e_x \]

\[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \left( \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{2}{\mu_0} B_i^2 \cos^2 \theta \mathbf{n} = 2 \bar{\omega}_i \cos^2 \theta \mathbf{n} \]

\[ P = 2\bar{\omega}_i \cos^2 \theta \]

§ 3.14 小结

- 已知定域振荡源，即可求出其辐射场： \( \mathbf{A}(x) = \frac{n_0}{4\pi} \iiint \frac{J(x') e^{ikr}}{r} dV' \)，其中 \( e^{ikr} \) 为推迟作用因子；
- 依辐射场的三种特征长度 \((l, \lambda, r)\) 可将空间划分为：近（静态）区，中间（感应）区，远（辐射）区；
- 对小区域电流电荷分布作多极展开，可求其辐射区的电磁场；
- 由于电荷守恒，故电单极势是静态的；
- 辐射区磁场 \( \mathbf{E} \), \( \mathbf{B} \), \( \mathbf{A} \) 正比于 \( r_0^{-1} \)，辐射区能流 \( \mathbf{S} \) 正比于 \( r_0^{-2} \)；
- 辐射总功率 \( P \) 与 \( r_0 \) 无关；符合能流通量守恒；
- 电、磁偶极辐射能流 \( \mathbf{S} \) 及功率 \( P \) 正比于 \( \omega^4 \)，电四极辐射正比于 \( \omega^6 \)；
- 电偶极辐射能流 \( \mathbf{S} \) 及功率 \( P \) 正比于 \( (\frac{1}{\lambda})^2 \)，磁偶极、电四极辐射正比于 \( (\frac{1}{\lambda})^4 \)；
- 必须有 \( \mathbf{p} \neq 0 \) 才会存在电偶极辐射；
- 电磁波具有动量，会对照射物体产生辐射压力；

【习题】Page 225: 7, 11
附：静电、静磁偶极产生的 \( E \) 与 \( B \)

\[
E = -\nabla \varphi^{(1)} = -\nabla \left( \frac{p \cdot r_0}{4\pi \varepsilon_0 r_0^3} \right) = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[ p \times (\nabla \times \frac{r_0}{r_0^3}) + (p \cdot \nabla) \frac{r_0}{r_0^3} \right]
\]

\[
= -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[ -p \times (\nabla \times \frac{1}{r}) + (p \cdot \nabla) \frac{1}{r_0^3} \right]
\]

\[
= -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{1}{r_0^3} (p \cdot \nabla) r_0 + r_0 \cdot (p \cdot \nabla) \frac{1}{r_0^3} \right]
\]

\[
= -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{p}{r_0^3} - 3 \left( \frac{p \cdot e_r}{r_0^3} \right) e_r \right]
\]

\[
B = -\mu_0 \frac{4\pi}{r_0^3} (m \cdot \nabla) r_0 = \mu_0 \frac{4\pi}{r_0^3} \left[ m - 3 \left( \frac{m \cdot e_r}{r_0^3} \right) e_r \right]
\]

附：证明

\[
\frac{dp}{dt} = \dot{p} = \iiint J(x', t) \, dV'
\]

【证】

\[
p(t) = \iiint \rho(x', t) x' \, dV'
\]

\[
\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint \rho(x', t) x' \, dV' = \iiint \left\{ \frac{\partial \rho(x', t)}{\partial t} x' + \nabla' \cdot \left[ \rho(x', t) v x' \right] \right\} \, dV'
\]

\[
= \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial t} x' + \nabla' \cdot (\rho v) x' + (\rho v \cdot \nabla') x' \right\} \, dV'
\]

\[
= \iiint \left\{ x' \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nabla' \cdot (\rho v) \right) + (\rho v \cdot \nabla') x' \right\} \, dV'
\]

\[
= \iiint \rho v \, dV' = \iiint J \, dV'
\]