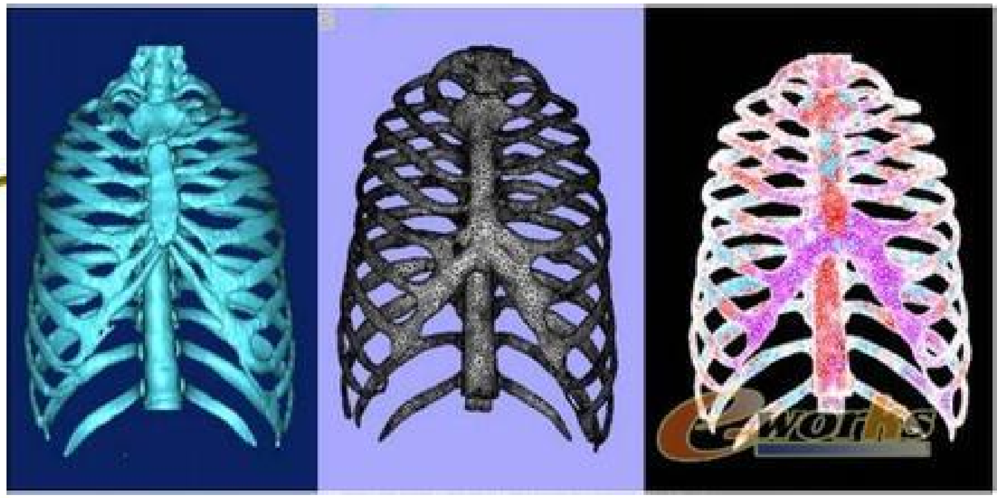
第10章 有限元法基础



胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

10.1 有限元法概要

参考书：

《传热的有限元计算方法》孔祥谦

10.1 有限元法概要

- 离散化：“分块逼近” ➔ “总体合成”
- 代数化：基于变分原理、加权余量法，将微分方程转化为代数方程
- 固体力学计算中用有限元法较多，而流体计算一般用有限容积法。流固耦合计算中，流体部分用有限容积法，而固体部分用有限元

10.2 变分原理和 Ritz 法

10.2.1 变分原理

如果存在于某个函数空间 D 中的物理状态函数 u，决定了一个依赖它的泛函 J(u)，则在一切可能的物理状态中，真实的物理状态是 D 中使泛函 J(u) 取极值的那个函数。

- 泛函：函数的函数，以函数为自变量
- 变分问题：求泛函极值的问题

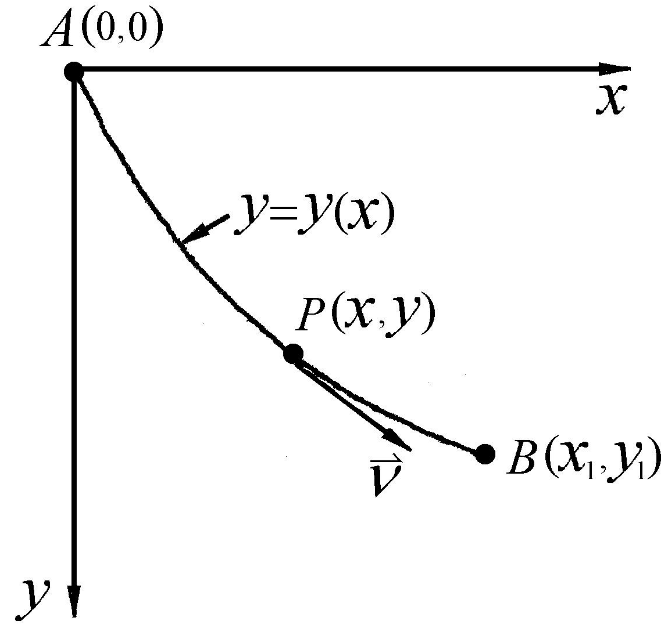
变分问题

- 光线沿着用时最短的路径传播 - 费马原理
- Lagrange 最小作用量原理
- Hamilton原理、最小势能原理
- 最速下降线问题

例1 最速下降线问题

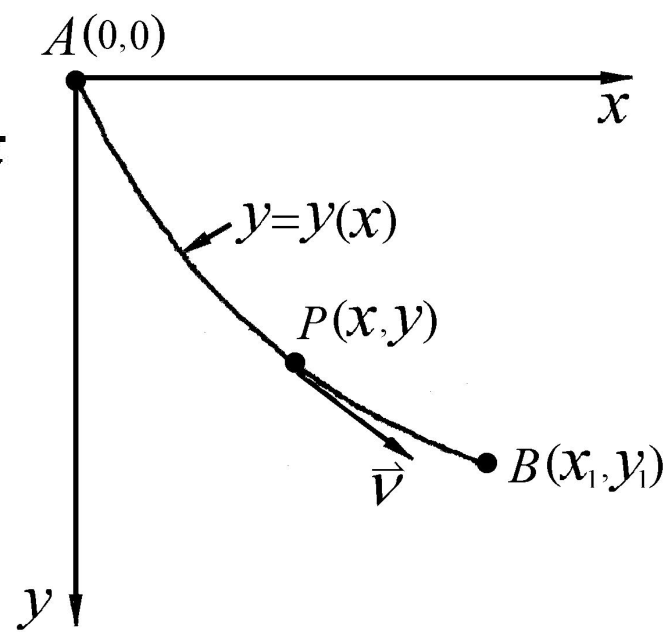
- A、B两点之间可以画许多条曲线，质点沿着哪条曲线运动所需的时间最短？

- 显然不是直线段！！！



最速降线问题的数学描述

- 曲线： $y = y(x)$
- 速度： $v = \sqrt{2gy} = \dfrac{ds}{dt}$
- 弧长： $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$
- 时间： $dt = \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{2gy}}\,dx$

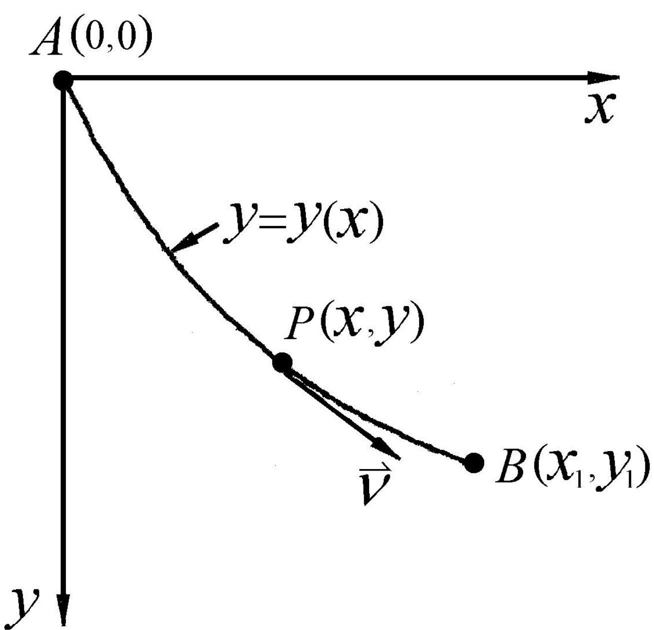


- 总时间：

$$t=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$$

- 端点条件：

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1$$



函数与泛函

- 函数：对于自变量 x，有一个值与其对应

$$y = y(x)$$

- 泛函：对于自变量 y(x)，有一个值与其对应

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\, dx$$

微分 与 变分

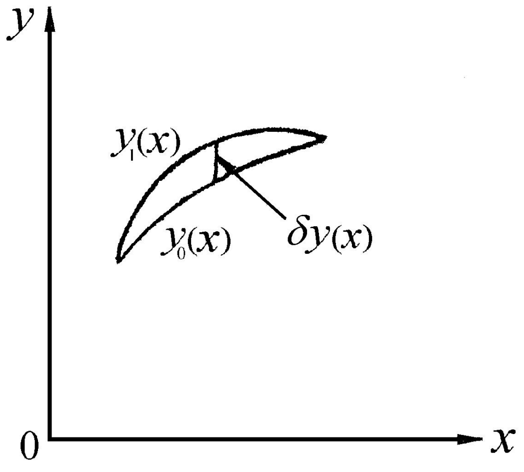
- 函数微分：让自变量 x 略微变动一点，看函数 y(x) 相应地变化多少。

- 泛函变分：让自变量 y(x) 略微变动一点，看泛函 J(y) 相应地变化多少

泛函 与 变分

- 自变量的变分：

$$\delta y = y(x) - y_0(x) = \varepsilon\eta(x)$$



- 泛函的变分：

$$\Delta J = J(y+\delta y,\ y^{'}+\delta y^{'}) - J(y, y^{'})$$

泛函变分

$$J(y+\delta y,\ y^{'}+\delta y^{'})=J(y,y^{'})+\frac{\partial J}{\partial y}\delta y+\frac{\partial J}{\partial y^{'}}\delta y^{'}+\cdots$$

$$\Delta J=\frac{\partial J}{\partial y}\delta y+\frac{\partial J}{\partial y^{'}}\delta y^{'}+\cdots$$

$$\delta J=\frac{\partial J}{\partial y}\delta y+\frac{\partial J}{\partial y^{'}}\delta y^{'}$$

多元泛函

$$J = J(y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n', \cdots, y_1^{(k)}, \cdots y_n^{(k)})$$

- 变分：

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial y_i'} \delta y_i' + \cdots \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial y_i^{(k)}} \delta y_i^{(k)}$$

2 变分的运算法则

- 1）和差的变分

$$\delta(J_1 + J_2) = \delta J_1 + \delta J_2$$

- 2）积的变分

$$\delta(J_1J_2) = J_1\delta J_2 + J_2\delta J_1$$

- 3）商的变分

$$\delta\left(\frac{J_1}{J_2}\right) = \frac{J_2\delta J_1 - J_1\delta J_2}{J_2^2}$$

- 4）微分的变分

$$\delta\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)=\frac{d^n}{dx^n}(\delta y)$$

- 5）积分的变分

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx=\int_{x_1}^{x_2}\delta F(x,y,y')dx$$

变分的计算

- 对于泛函 $J[y(x), y^{'}(x)]$

- 考虑自变量的小增量：

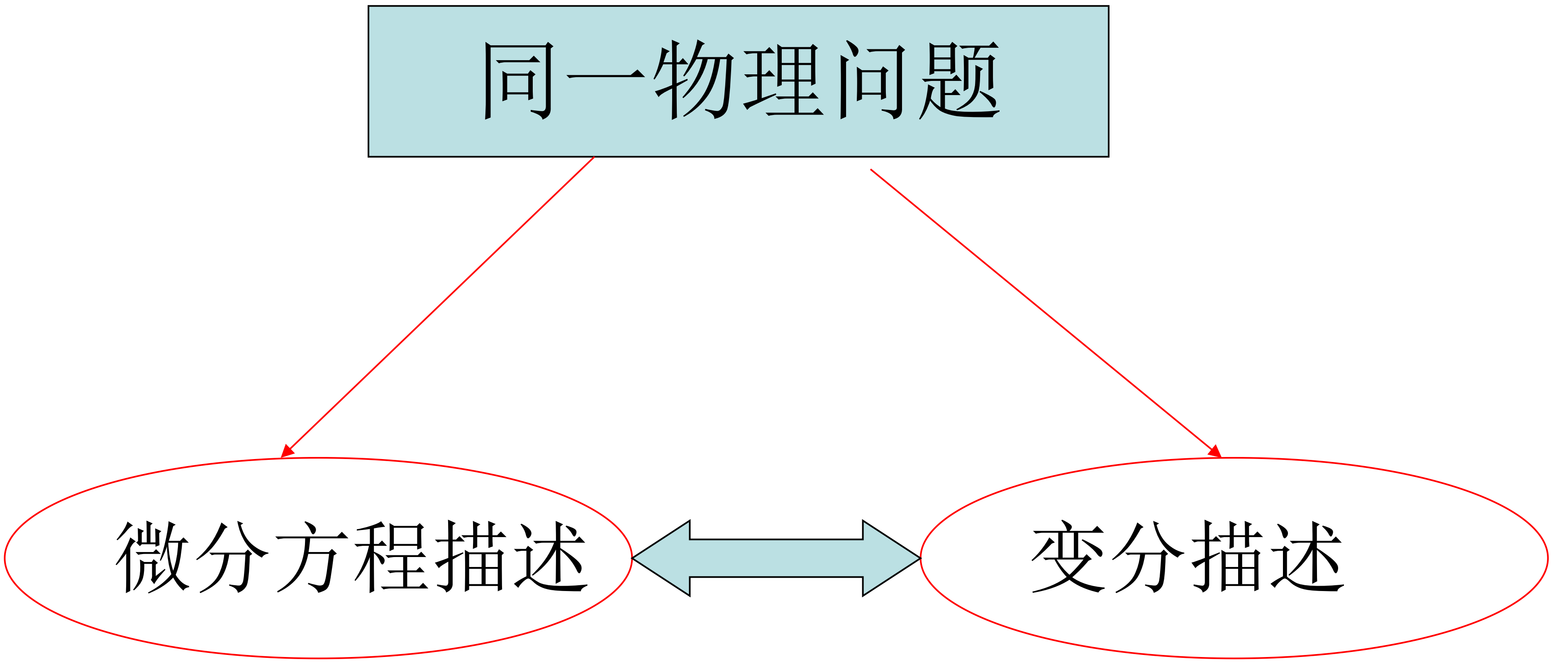
$$J[y(x)+\varepsilon\delta y(x), y^{'}(x)+\varepsilon\delta y^{'}(x)]$$

$$\delta J=\left.\frac{\partial J[y(x)+\varepsilon\delta y(x), y^{'}(x)+\varepsilon\delta y^{'}(x)]}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

泛函取极值的条件

$$\delta J = \left.\frac{\partial J[y(x)+\varepsilon\delta y(x), y^{'}(x)+\varepsilon\delta y^{'}(x)]}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

10.2.2 微分问题与变分问题的等价关系


同一物理问题
微分方程描述
变分描述

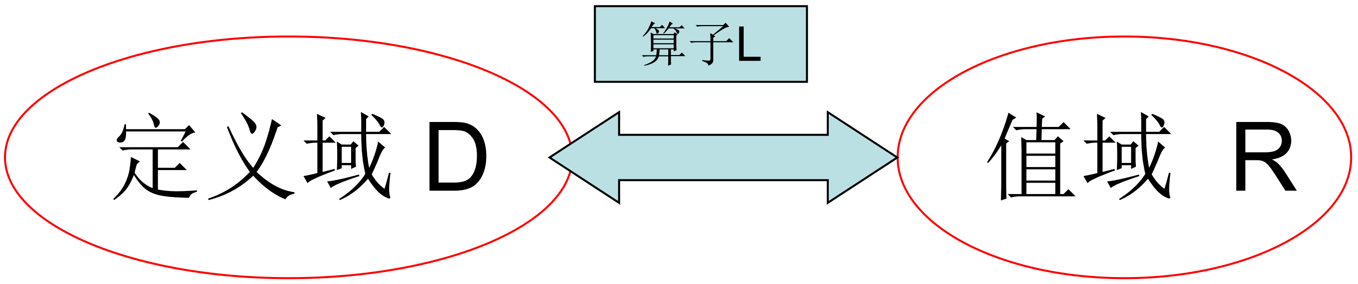
1、函数内积与算子

- 1）内积

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\Omega$$

2）算子 ➔ 一种运算

- 内积空间中某一集合 D 和另一集合 R 建立了某种一一对应的关系。



3） 线性算子

$$L(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha L(u_1)+\beta L(u_2)$$

（4）伴随算子

- 对内积进行分部积分

$$\langle L(u),v\rangle = \langle u,L^*(v)\rangle + \int_S \left[F(v)G(u) - F(u)G^*(v)\right]ds$$

边界

- 5） 自伴算子

$$L^* = L$$

（6） 本质边界条件和自然边界条件

$$\langle L(u),v\rangle=\langle u,L^{*}(v)\rangle+\int_{S}\left[\underline{F(v)G(}u)-\underline{F(u)G^{*}}(v)\right]ds$$

- 本质边界条件：规定 F(u)
- 自然边界条件：规定G(u)

- 二阶偏微分方程：

本质边界条件：是规定函数值(即第1类BC)，

自然边界条件：是规定导数值(即第2、3类BC)

- （7） 对称算子

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle$$

- （8） 正算子

$$\langle L(u), u \rangle > 0$$

（9） 算子方程

$$L(u) = p$$

例2 负Laplace算子

$$\begin{cases} L(u) = -\Delta u = -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & (x, y) \in \Omega \\ u\big|_{\Gamma} = 0, \ \text{或} \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

线性算子？

$$-\Delta(\alpha u+\beta v)=\alpha(-\Delta u)+\beta(-\Delta v)$$

内积分部积分

$$\langle -\Delta u, v\rangle = -\iint_{\Omega} \Delta u \bullet v d\Omega = -\iint_{\Omega} [\nabla \bullet (\nabla u \bullet v) - \nabla u \bullet \nabla v] d\Omega$$

$$= \iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v d\Omega - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma$$

$$= \iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v d\Omega$$

对称算子！

$$\Updownarrow$$

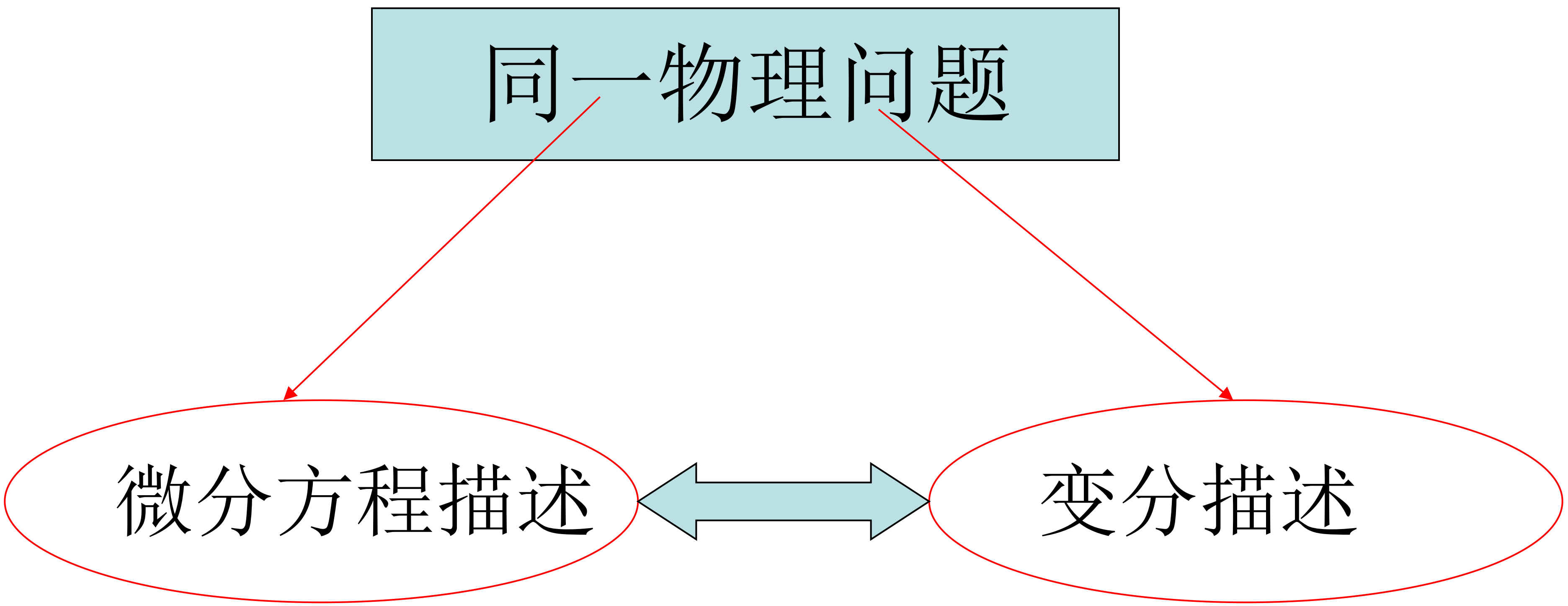
$$\langle -\Delta v, u\rangle = \iint_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u d\Omega$$

正算子？

$$\langle -\Delta u, u\rangle = \iint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla u d\Omega = \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega > 0$$

- 结论：线性对称正算子！

变分原理



2 对称正算子方程的变分原理

$$\begin{cases} L(u) = p & \text{在}\Omega\text{中} \\ F(u) = 0 & \text{在}S_1\text{上} \\ G(u) = 0 & \text{在}S_2\text{上} \end{cases}$$

$$J(u) = \langle L(u), u \rangle - 2\langle p, u \rangle$$

此泛函取极值

3. 自伴算子方程非齐次边界条件的变分原理

$$\begin{cases} L(u) = p & \text{在}\Omega\text{中} \\ F(u) = f & \text{在}S_1\text{上} \\ G(u) = g & \text{在}S_2\text{上} \end{cases}$$

$$J(u) = \langle L(u), u \rangle - 2\langle p, u \rangle - \langle f, G(u) \rangle_{S_1} + \langle g, F(u) \rangle$$

此泛函取极值

4. 变分问题转化为微分问题——Euler方程

$$y(x_1)=y_1,\ \ y(x_2)=y_2$$

泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

微分方程

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})$$
$$=F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''$$
$$=0$$