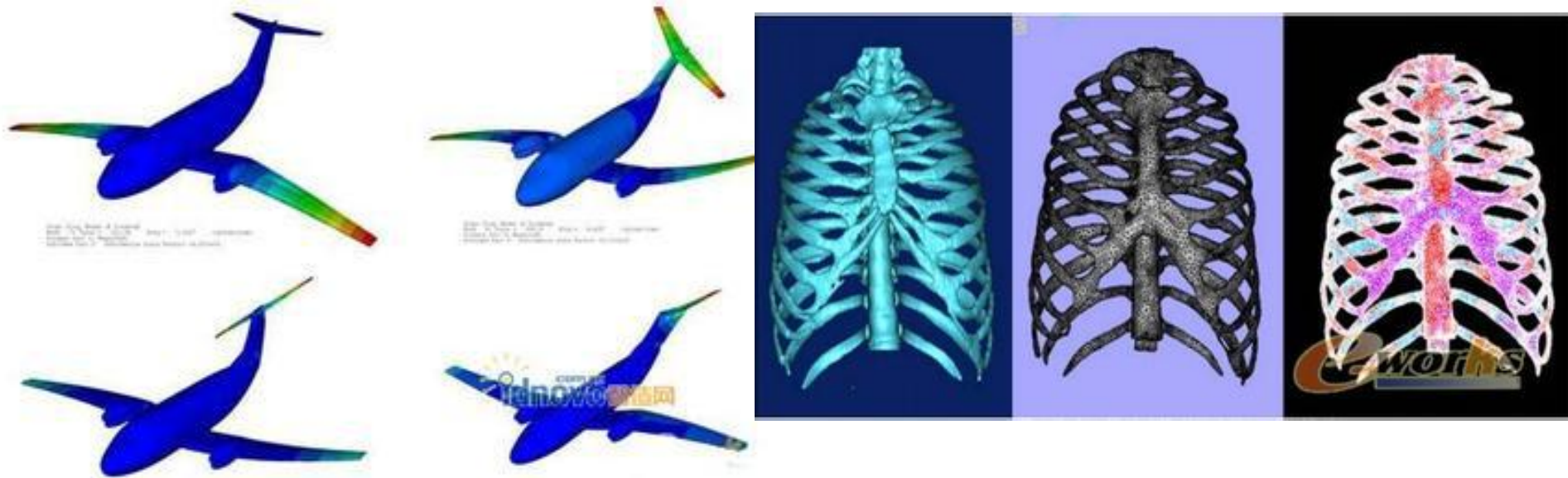


第10章 有限元法基础



胡茂彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin>

/

humaobin@ustc.edu.cn

10.1 有限元法概要

参考书:

《传热的有限元计算方法》 孔祥谦

10.1 有限元法概要

- **离散化**: “分块逼近” → “总体合成”
- **代数化**: 基于变分原理、加权余量法, 将微分方程转化为代数方程
- **固体力学**计算中用有限元法较多, 而**流体计算**一般用有限容积法。**流固耦合**计算中, 流体部分用有限容积法, 而固体部分用有限元

10.2 变分原理 和 Ritz 法

10.2.1 变分原理

如果存在于某个函数空间 D 中的物理状态函数 u ，决定了一个依赖它的泛函 $J(u)$ ，则在一切可能的物理状态中，真实的物理状态是 D 中使泛函 $J(u)$ 取极值的那个函数。

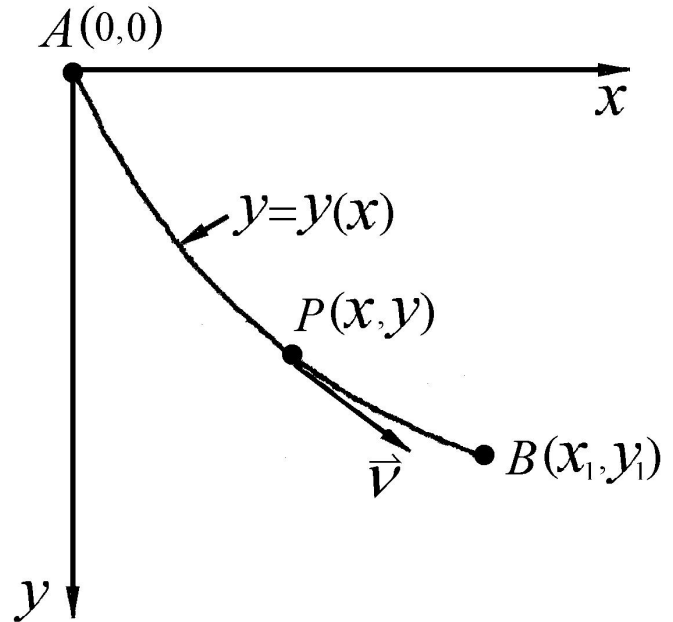
- 泛函：函数的函数，以函数为自变量
- 变分问题：求泛函极值的问题

变分问题

- 光线沿着用时最短的路径传播 - 费马原理
- Lagrange 最小作用量原理
- Hamilton原理、最小势能原理
- 最速下降线问题

例1 最速下降线问题

- A、B两点之间可以画许多条曲线，质点沿着哪条曲线运动所需的时间最短？
- 显然不是直线段！！！！



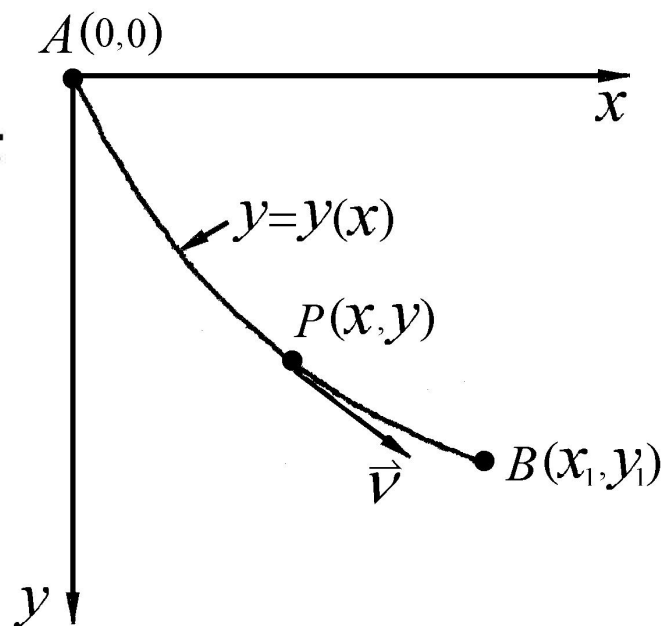
最速降线问题的数学描述

• 曲线: $y = y(x)$

• 速度: $v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt}$

• 弧长: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$

• 时间: $dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$

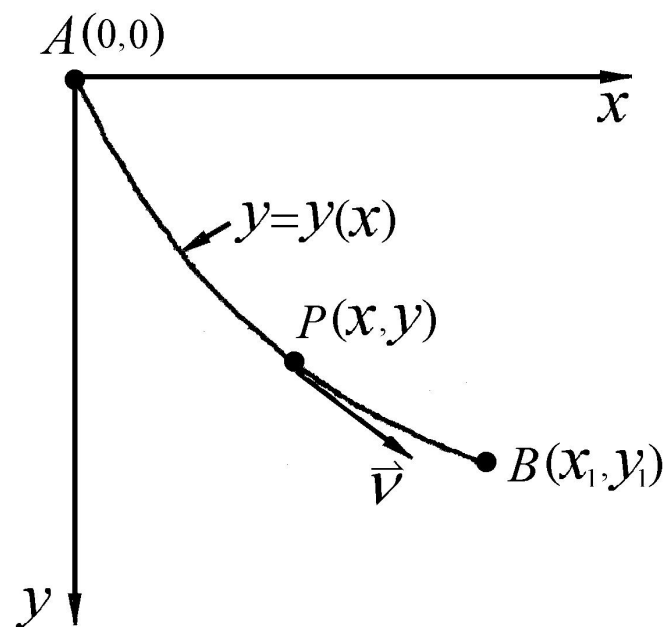


- 总时间:

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

- 端点条件:

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$$



函数与泛函

- **函数**：对于自变量 x ，有一个值与其对应

$$y = y(x)$$

- **泛函**：对于自变量 $y(x)$ ，有一个值与其对应

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

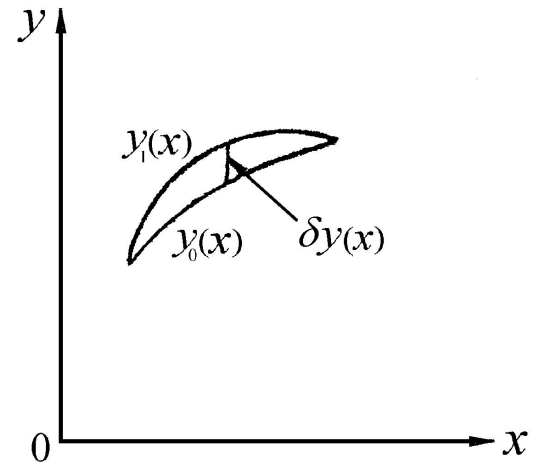
微分与变分

- **函数微分**：让自变量 x 略微变动一点，看函数 $y(x)$ 相应地变化多少。
- **泛函变分**：让自变量 $y(x)$ 略微变动一点，看泛函 $J(y)$ 相应地变化多少

泛函与变分

- 自变量的变分:

$$\delta y = y(x) - y_0(x) = \varepsilon \eta(x)$$



- 泛函的变分:

$$\Delta J = J(y + \delta y, y' + \delta y') - J(y, y')$$

泛函变分

$$J(y + \delta y, y' + \delta y') = J(y, y') + \frac{\partial J}{\partial y} \delta y + \frac{\partial J}{\partial y'} \delta y' + \dots$$



$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial y} \delta y + \frac{\partial J}{\partial y'} \delta y' + \dots$$



$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial y} \delta y + \frac{\partial J}{\partial y'} \delta y'$$

多元泛函

$$J = J(y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$$

- 变分:

$$\delta J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial y_i'} \delta y_i' + \dots + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial y_i^{(k)}} \delta y_i^{(k)}$$

2 变分的运算法则

- 1) 和差的变分

$$\delta(J_1 + J_2) = \delta J_1 + \delta J_2$$

- 2) 积的变分

$$\delta(J_1 J_2) = J_1 \delta J_2 + J_2 \delta J_1$$

- 3) 商的变分

$$\delta\left(\frac{J_1}{J_2}\right) = \frac{J_2 \delta J_1 - J_1 \delta J_2}{J_2^2}$$

- 4) 微分的变分

$$\delta \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) = \frac{d^n}{dx^n} (\delta y)$$

- 5) 积分的变分

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y') dx$$

变分的计算

• 对于泛函 $J[y(x), y'(x)]$

• 考虑自变量的小增量:

$$J[y(x) + \varepsilon\delta y(x), y'(x) + \varepsilon\delta y'(x)]$$

$$\delta J = \left. \frac{\partial J[y(x) + \varepsilon\delta y(x), y'(x) + \varepsilon\delta y'(x)]}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

泛函取极值的条件

$$\delta J = \left. \frac{\partial J[y(x) + \varepsilon \delta y(x), y'(x) + \varepsilon \delta y'(x)]}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

10.2.2 微分问题与变分问题的 等价关系

同一物理问题

```
graph TD; A[同一物理问题] --> B(微分方程描述); A --> C(变分描述); B <--> C;
```

The diagram illustrates the relationship between different mathematical descriptions of a physical problem. At the top, a light blue rectangular box contains the text '同一物理问题' (Same physical problem). Two red arrows point downwards from this box to two red ovals. The left oval contains the text '微分方程描述' (Differential equation description), and the right oval contains '变分描述' (Variational description). A light blue double-headed arrow connects the two ovals, indicating their equivalence.

微分方程描述

变分描述

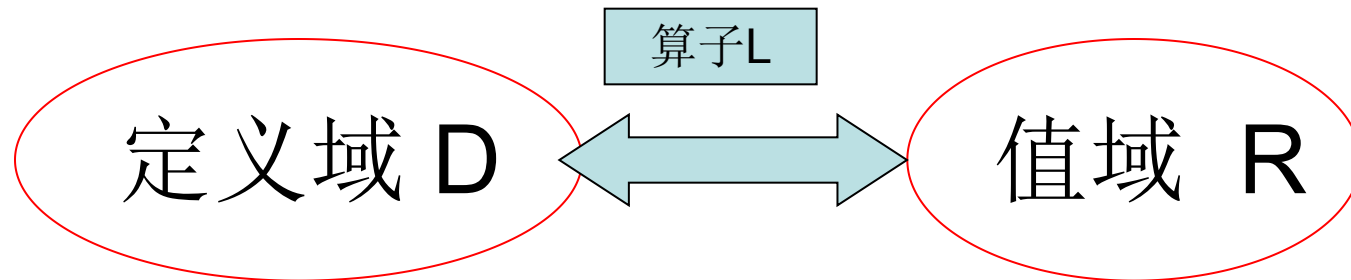
1、函数内积与算子

- 1) 内积

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\Omega$$

2) 算子 \rightarrow 一种运算

- 内积空间中某一集合 D 和另一集合 R 建立了某种一一对应的关系。



3) 线性算子

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$$

(4) 伴随算子

- 对内积进行分部积分

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L^*(v) \rangle + \int_S [\underline{F(v)G(u)} - \underline{F(u)G^*(v)}] ds$$

边界

- 5) 自伴算子

$$L^* = L$$

(6) 本质边界条件和自然边界条件

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L^*(v) \rangle + \int_S [\underline{F(v)G(u)} - \underline{F(u)G^*(v)}] ds$$

- 本质边界条件：规定 $F(u)$
- 自然边界条件：规定 $G(u)$
- 二阶偏微分方程：
 - 本质边界条件：是规定函数值(即第1类BC),
 - 自然边界条件：是规定导数值(即第2、3类BC)

- (7) 对称算子

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle$$

- (8) 正算子

$$\langle L(u), u \rangle > 0$$

(9) 算子方程

$$L(u) = p$$

例2 负Laplace算子

$$\begin{cases} L(u) = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

线性算子？

$$-\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha(-\Delta u) + \beta(-\Delta v)$$

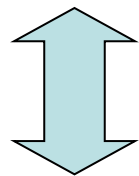
内积分部积分

$$\langle -\Delta u, v \rangle = -\iint_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega = -\iint_{\Omega} [\nabla \cdot (\nabla u \cdot v) - \nabla u \cdot \nabla v] d\Omega$$

$$= \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma$$

对称算子!

$$= \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$



$$\langle -\Delta v, u \rangle = \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega$$

正算子？

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega = \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega > 0$$

- **结论：** 线性对称正算子！

变分原理

同一物理问题

```
graph TD; A[同一物理问题] --> B(微分方程描述); A --> C(变分描述); B <--> C;
```

The diagram illustrates the relationship between different mathematical descriptions of a physical problem. At the top, a light blue rectangular box contains the text '同一物理问题' (Same physical problem). Two red arrows point downwards from this box to two red ovals. The left oval contains '微分方程描述' (Differential equation description) and the right oval contains '变分描述' (Variational description). A light blue double-headed arrow connects the two ovals, indicating their equivalence.

微分方程描述

变分描述

2 对称正算子方程的变分原理

$$\begin{cases} L(u) = p & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ F(u) = 0 & \text{在 } S_1 \text{ 上} \\ G(u) = 0 & \text{在 } S_2 \text{ 上} \end{cases}$$

$$J(u) = \langle L(u), u \rangle - 2 \langle p, u \rangle$$

此泛函取极值

3. 自伴算子方程非齐次边界条件的变分原理

$$\begin{cases} L(u) = p & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ F(u) = f & \text{在 } S_1 \text{ 上} \\ G(u) = g & \text{在 } S_2 \text{ 上} \end{cases}$$

$$J(u) = \langle L(u), u \rangle - 2\langle p, u \rangle - \langle f, G(u) \rangle_{S_1} + \langle g, F(u) \rangle$$

此泛函取极值

4. 变分问题转化为微分问题 ——Euler方程

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

泛函

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

微分方程

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) \\ = F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' \\ = 0 \end{aligned}$$

