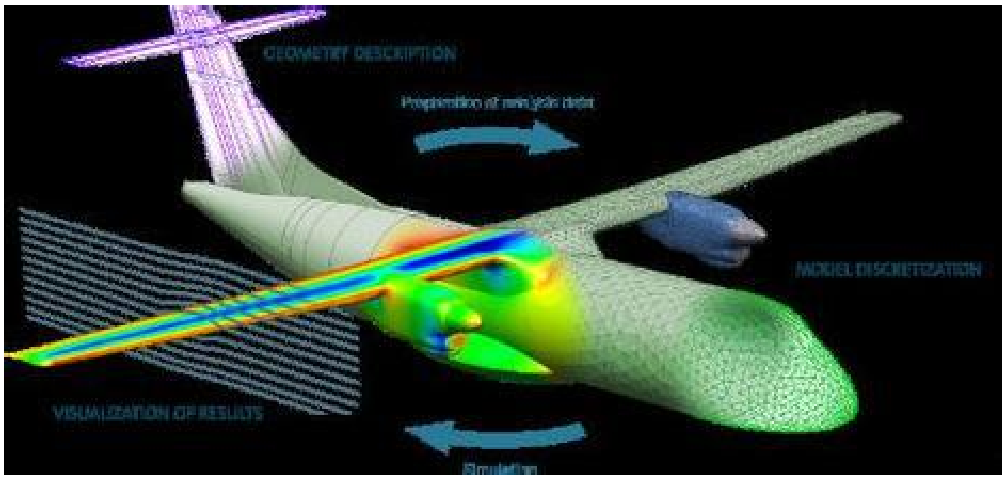
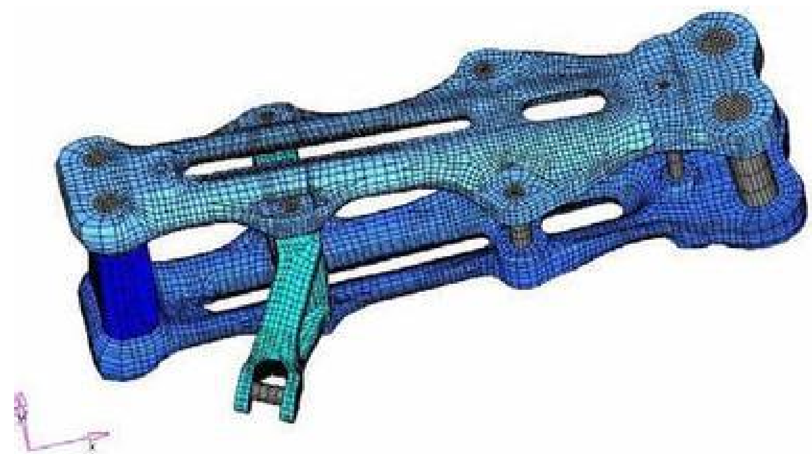
10.4 有限元法的基本原理和解题步骤





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

10.4.1 常规的Galerkin法或Ritz法求解微分问题所遇到的困难

常规方法所遇到的困难

1. 基函数选取和近似解的构成困难：

   线性无关

   完备

   满足边界条件

$$\{\phi_j\} \ (j=1,2,\cdots,n)$$

待定系数

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$$

2.积分计算十分困难

10.4.2 有限元法的基本思想

分块逼近

总体合成

有限元法

1) 解域分块离散化：变成小区域列方程

2) 基函数规则化：统一基函数表达式

3) 单元有限元方程规范化：统一积分表达式

4) 总体合成条理化

10.4.3. 有限元法的解题步骤

1）区域剖分

2）确定单元基函数

3）写出单元的积分表达式

4）单元分析

5）总体合成

6）边界条件处理

7）解有限元方程，计算待求物理量

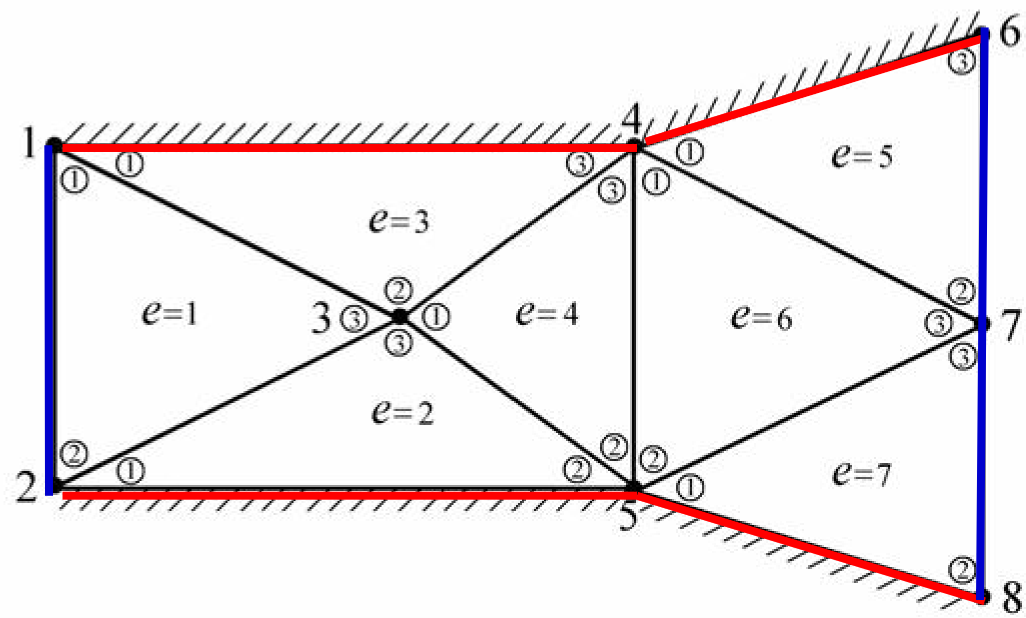
10.5 有限元法解题步骤分析

例：平面稳态导热问题

热源

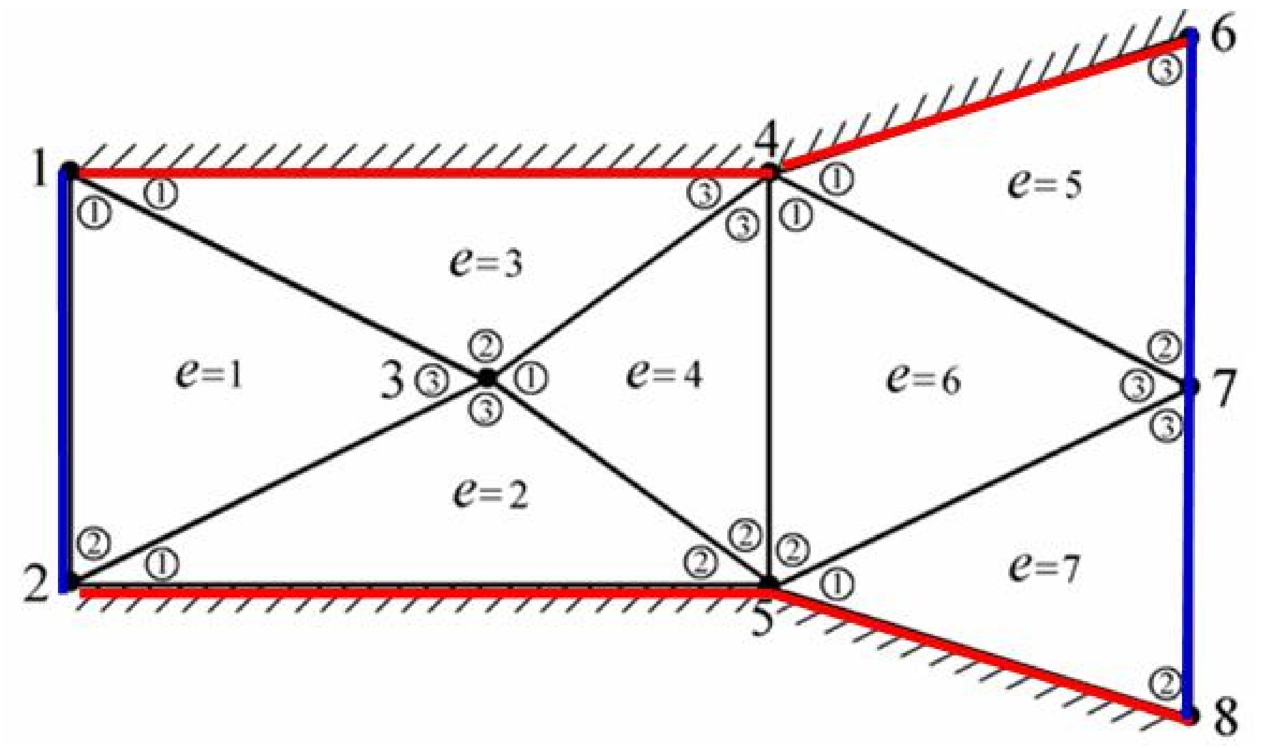
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial y}) + \dot{Q} = 0 & (x,y) \in \Omega \\ T\big|_{S_1} = T_0 & \text{本质边界条件} \\ \lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{S_2} = q_0 & \text{自然边界条件} \end{cases}$$

相当于有限差分法第4章的内容



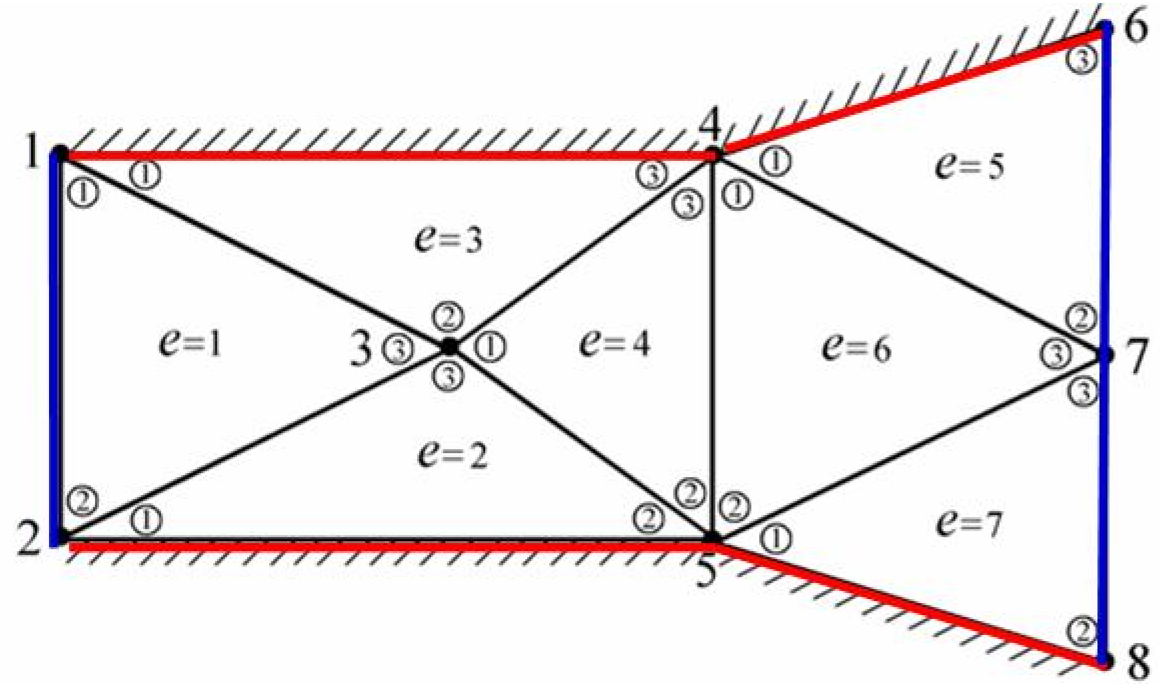
10.5.1 区域剖分

1．划分单元，确定节点



2．对节点进行编号

- 单元号
- 单元节点号
- 总体节点号

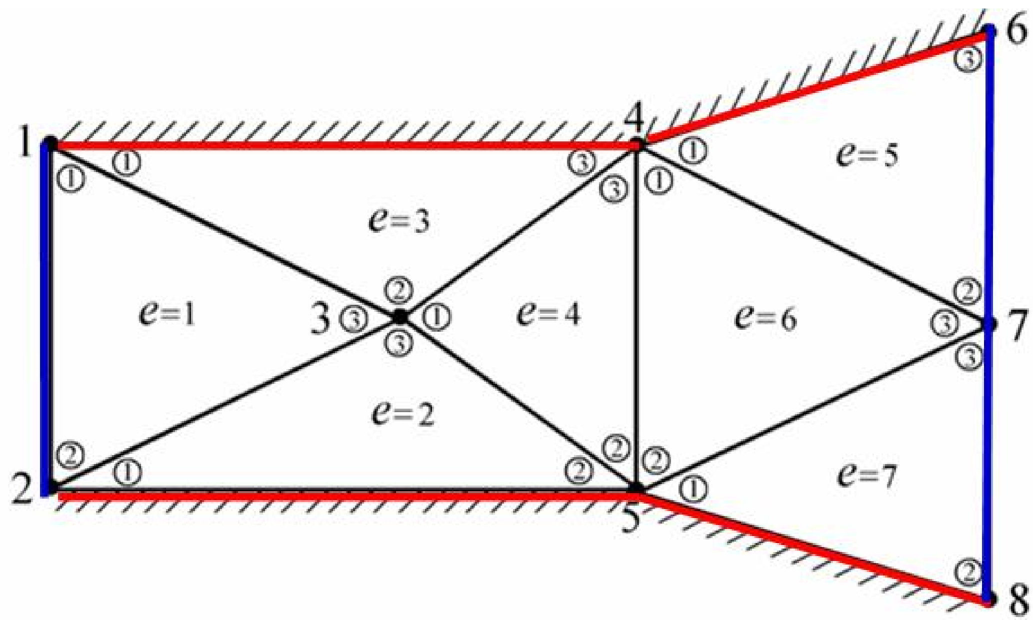


3．列出连缀表：

单元节点号←→总体节点号

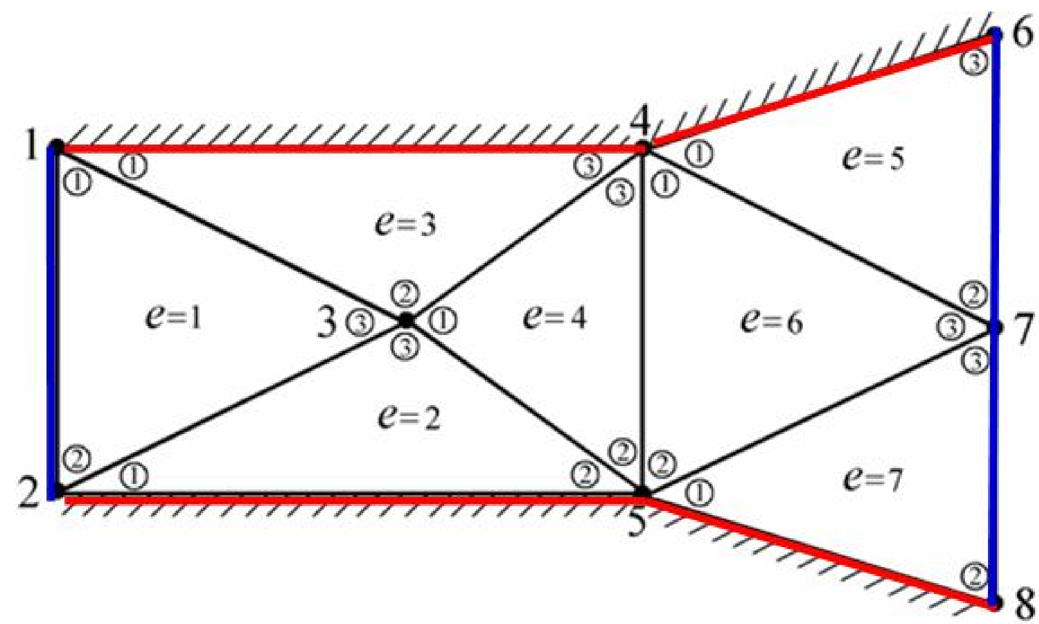
表 10−1　连缀表——单元节点与总体节点间关系

i \ n \ e	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	1	3	4	4	5
2	2	5	3	5	7	5	8
3	3	3	4	4	6	7	7



4．列出节点的坐标位置

5．列出本质边界和自然边界上的节点号，及其相应的边界函数值



10.5.2 确定单元基函数

加权余量法

1）选定基函数：

$$\{\phi_j\}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

2）构造近似解：

待定系数

$$u_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\phi_j$$

加权余量法 ➔ 有限元法

1）选定基函数：

$$\{\phi_j\}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

单元基函数

$$\boldsymbol{N}^T=(N_1,N_2,\cdots,N_I)$$

2）构造近似解：

$$u_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\phi_j$$

单元近似解

$$T^{(e)}=\sum_{i=1}^{I}T_i^{(e)}N_i$$

$$T^{(e)}=T_i^{(e)}N_i=\boldsymbol{T}^{IT}\bullet\boldsymbol{N}$$

构造单元基函数的原则

$$T^{(e)} = \sum_{i=1}^{I} T_i^{(e)} N_i$$

使此系数正好是相应节点上的待求参数值

单元插值基函数

- Lagrange插值(插函数值)：每节点一个参数
- Hermite插值 (插函数值及导数值)：每节点有两个或多个参数
- 节点自由度：该节点上的参数数目
- 单元自由度：单元所有节点自由度的总和

构造基函数的插值条件

- Lagrange：

$$N_i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Hermite：

$$\frac{d^k}{dx^k} H_{li}(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}\delta_{lk} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

2．构造单元Lagrange插值基函数

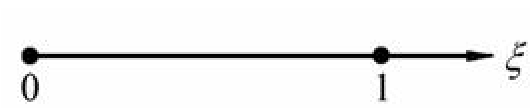
(1) 一维线性单元

- 基函数形式：
$$N_i = a_i + b_i x$$

- 插值条件：
$$N_i(x_j^{(e)}) = a_i + b_i x_j^{(e)} = \delta_{ij}$$

- 结果：
$$N_i = \frac{x_j^{(e)} - x}{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}}$$

无量纲局部坐标



$$\xi = \frac{x - x_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}$$

$$\xi = \frac{2x - (x_2^{(e)} + x_1^{(e)})}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}$$

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2 = \dfrac{1}{2}(1 + \xi) \end{cases}$$

（2）平面线性三角元

基函数：

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y$$

9个未知数

插值条件：

$$N_i(x_j^{(e)}, y_j^{(e)}) = \delta_{ij}$$

方程：

$$\begin{cases} a_i + b_i x_i^{(e)} + c_i^{(e)} y_i^{(e)} = 1 \\ a_i + b_i x_j^{(e)} + c_i^{(e)} y_j^{(e)} = 0 \\ a_i + b_i x_k^{(e)} + c_i^{(e)} y_k^{(e)} = 0 \end{cases}$$

9个方程!!!

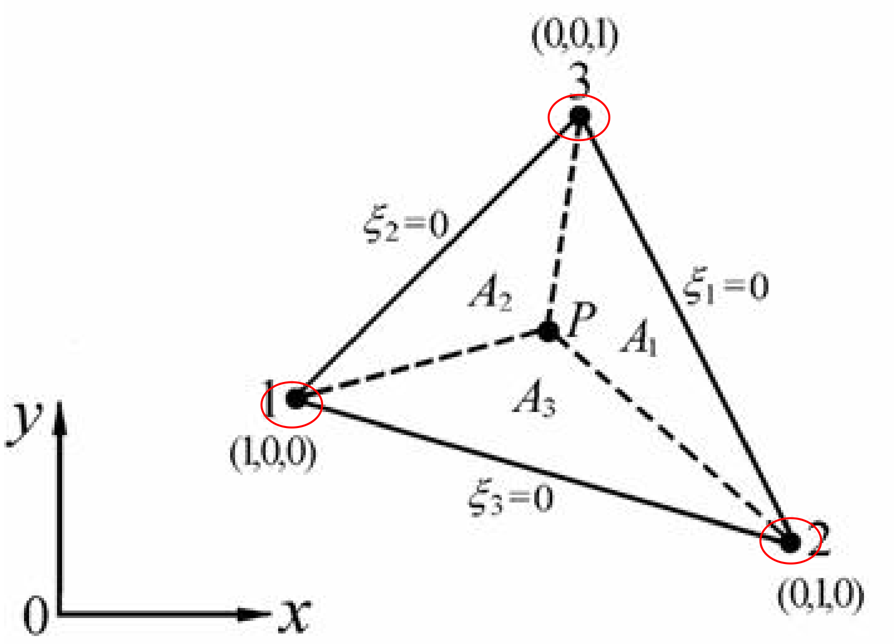
结 果

$$a_i = \frac{1}{2A_0^{(e)}} \begin{vmatrix} 1 & x_i^{(e)} & y_i^{(e)} \\ 0 & x_j^{(e)} & y_j^{(e)} \\ 0 & x_k^{(e)} & y_k^{(e)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2A_0^{(e)}} (x_j^{(e)} y_k^{(e)} - x_k^{(e)} y_j^{(e)})$$

$$b_i = \frac{1}{2A_0^{(e)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_i^{(e)} \\ 1 & 0 & y_j^{(e)} \\ 1 & 0 & y_k^{(e)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2A_0^{(e)}} (y_j^{(e)} - y_k^{(e)})$$

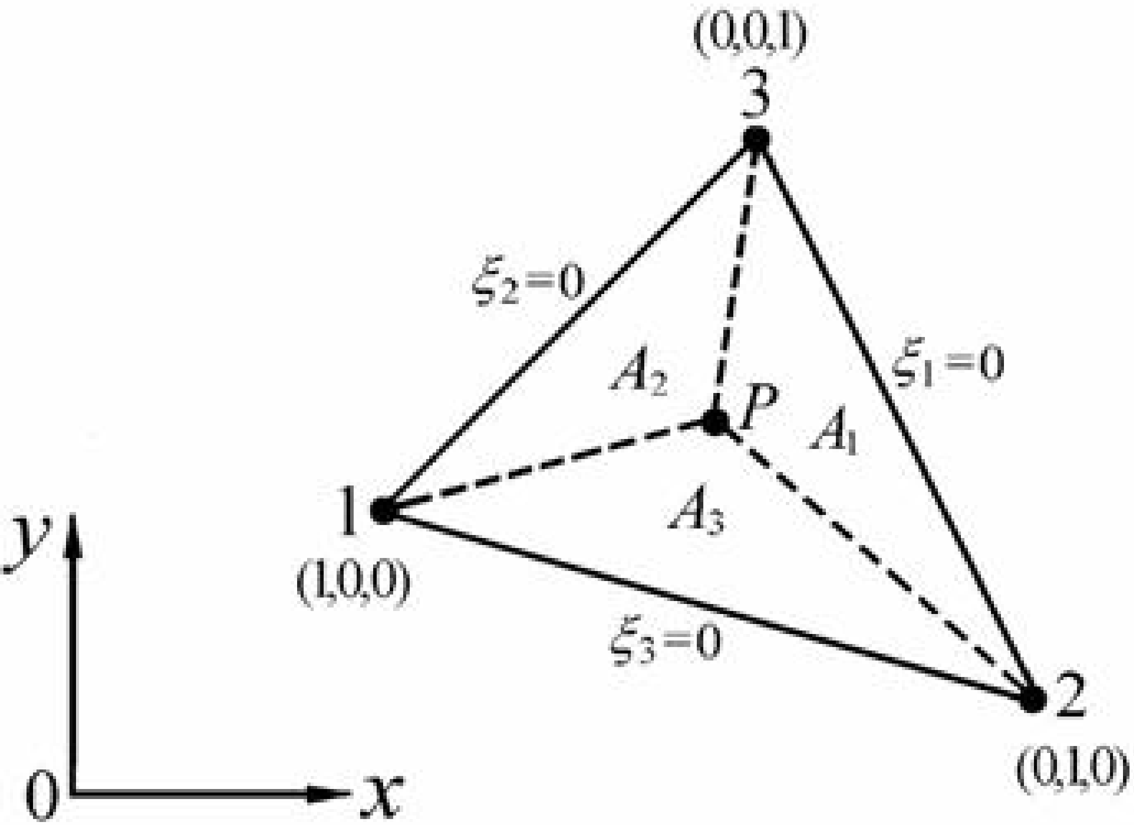
$$c_i = \frac{1}{2A_0^{(e)}} \begin{vmatrix} 1 & x_i^{(e)} & 1 \\ 1 & x_j^{(e)} & 0 \\ 1 & x_k^{(e)} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2A_0^{(e)}} (x_k^{(e)} - x_j^{(e)})$$

无量纲面积坐标



$$\xi_i = \frac{A_i^{(e)}}{A_0^{(e)}}$$

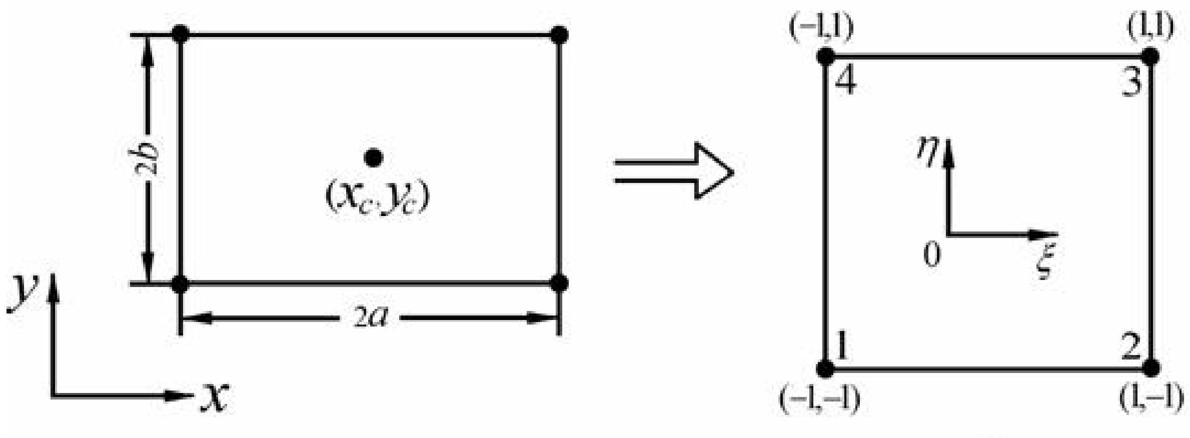
面积坐标表示的基函数



$$N_i = \xi_i$$

（3）平面线性矩形单元

- 无量纲转换



$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{a}(x - x_c) \\ \eta = \dfrac{1}{b}(y - y_c) \end{cases}$$

确定基函数

基函数： $N_i = a_i + b_i\xi + c_i\eta + d_i\xi\eta$ 16个未知数

插值条件： $N_i(\xi_j^{(e)}, \eta_j^{(e)}) = \delta_{ij}$ 16个方程

结果：

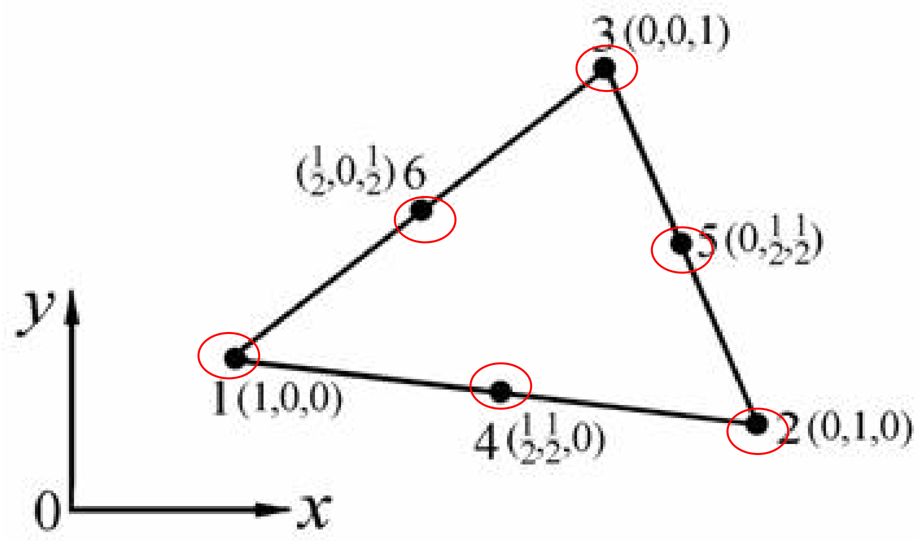
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

(4) 高阶线性插值单元

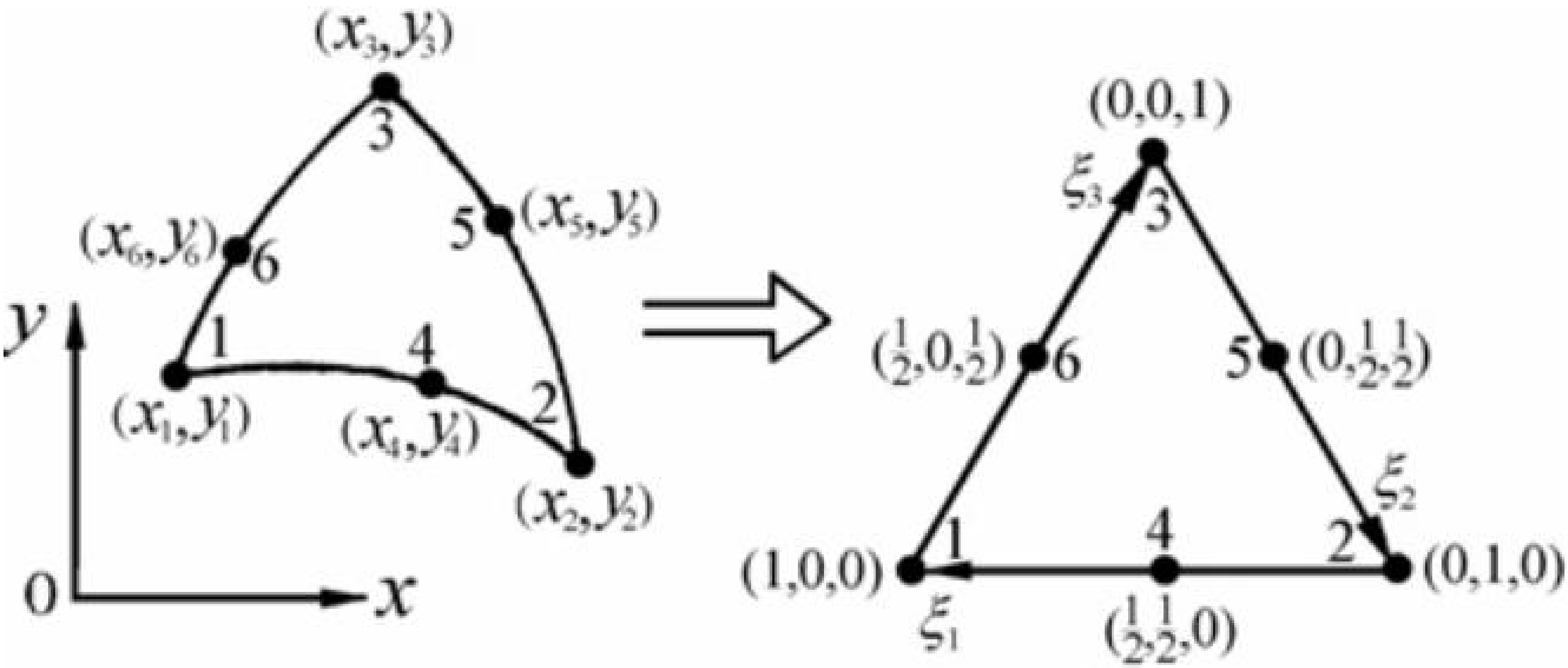
$$N_i = a_i + b_i\xi_1 + c_i\xi_2 + d_i\xi_1^2 + e_i\xi_1\xi_2 + f_i\xi_2^2$$

36个未知数



(5) 曲边单元和等参单元

- 要先进行坐标转换



10.5.3 写出单元的积分表达式

- Galerkin弱解积分表达式

$$\iint_{\Omega_e} \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial(\delta T)}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial(\delta T)}{\partial y}\right)d\Omega=\iint_{\Omega_e}\dot{Q}\,\delta T d\Omega+\int_{S_{e2}} q_0 \delta T ds$$

$$\langle \varepsilon,\ \delta u \rangle = 0$$

弱解积分另一种表达式

$$\iint_{\Omega_e} \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial(\delta T)}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial(\delta T)}{\partial y}\right)d\Omega = \iint_{\Omega_e} \dot{Q}\,\delta T d\Omega + \int_{S_{e2}} q_0 \delta T ds$$

$$\Updownarrow$$

待求函数

$$\left[\iint_{\Omega^{(e)}} \lambda\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\Omega\right] T_j^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \dot{Q}\,N_i d\Omega + \int_{S_2^{(e)}} q_0 N_i ds$$

$$\langle \varepsilon,\ \delta u \rangle = 0$$

$$\langle \varepsilon,\ \phi_i \rangle = 0$$

10.5.4 单 元 分 析

目标：建立单元的有限元方程

方法：进行积分

弱解积分表达式

待求系数

$$\left[\iint_{\Omega^{(e)}} \lambda\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\Omega\right] T_j^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \dot{Q} N_i d\Omega + \int_{S_2^{(e)}} q_0 N_i ds$$

积分1：影响矩阵

积分2：输入向量

- 待求系数：就是节点上的待求函数值

影响矩阵积分Kij

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

线性三角元：

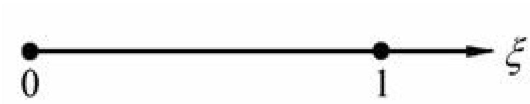
$$N_i = a_i + b_i x + c_i y$$

$$= \lambda (b_i b_j + c_i c_j) \cancel{\iint_{A^{(e)}} dxdy} \quad A_0^{(e)}$$

$$= \lambda A_0^{(e)} \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{pmatrix}$$

局部坐标下的积分公式

一维线性坐标：



$$\xi_1 = \frac{x_2^{(e)} - x}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}, \quad \xi_2 = 1 - \xi_1$$

积分：

线段长度

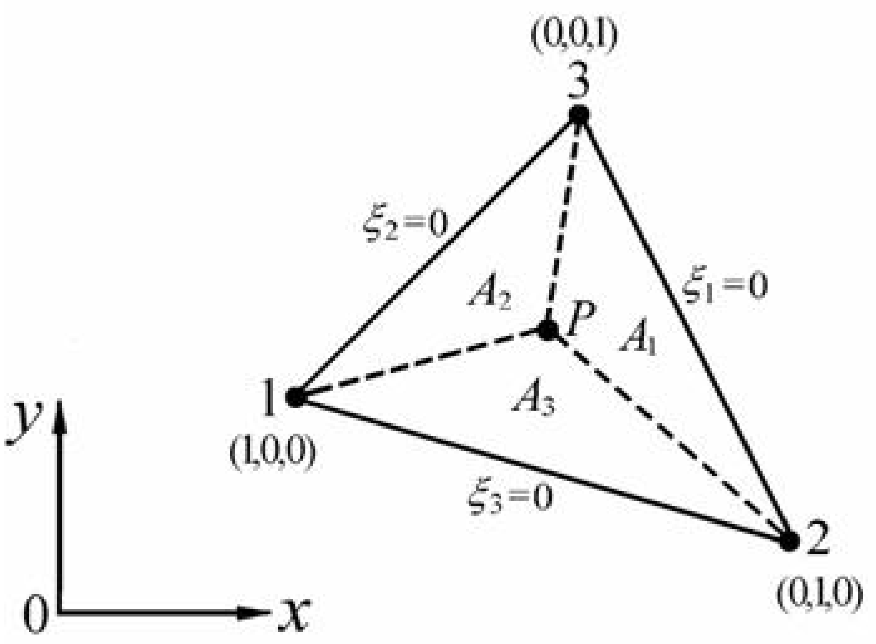
$$I_1 = \int_L \xi_1^{\alpha} \xi_2^{\beta} dl = L \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!}$$

三角形面积坐标

- 积分公式：

三角形面积

$$I_2 = \iint_{A^{(e)}} \xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta}\xi_3^{\gamma} dA = 2A_0^{(e)} \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}$$



$$\xi_i = \frac{A_i^{(e)}}{A_0^{(e)}}$$

三维四面体单元

- 体积坐标：

$$\xi_i = \frac{V_i^{(e)}}{V_0^{(e)}}$$

- 积分公式：

四面体体积

$$I_3 = \iint_{V^{(e)}} \xi_1^{\alpha} \xi_2^{\beta} \xi_3^{\gamma} \xi_4^{\delta} dV = 6V_0^{(e)} \frac{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+3)!}$$

弱解积分表达

待求函数

$$\left[\iint_{\Omega^{(e)}} \lambda\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\Omega\right] T_j^{(e)} = \underline{\iint_{\Omega^{(e)}} \dot{Q} N_i d\Omega + \int_{S_2^{(e)}} q_0 N_i ds}$$

积分2：输入向量

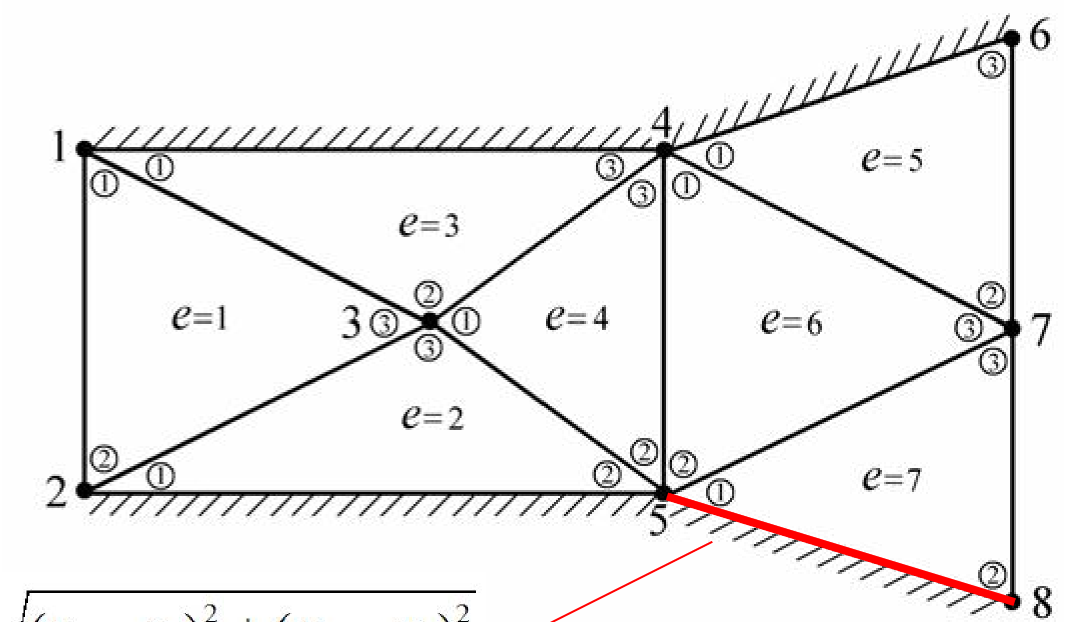
输入向量 P1： 面积分

$$(P_1)_i^{(e)} = \iint_{\Omega^{(e)}} \dot{Q} N_i d\Omega \xrightarrow{\text{三角单元}} = \dot{Q} \iint_{A^{(e)}} \xi_i dA = \dot{Q} \iint_{A^{(e)}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} dA$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{(e)} \dot{Q}/3 \\ A_0^{(e)} \dot{Q}/3 \\ A_0^{(e)} \dot{Q}/3 \end{pmatrix}$$

输入向量 P2：线积分

$$(P_2)_i^{(7)} = \int_{S_2^{(7)}} q_0 N_i ds \qquad = q_0 \int_{L_{12}^{(7)}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 1-\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} dl \qquad = \begin{pmatrix} L_{12}^{(7)} q_0 / 2 \\ L_{12}^{(7)} q_0 / 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$L_{12}^{(7)} = \sqrt{(x_2^{(7)} - x_1^{(7)})^2 + (y_2^{(7)} - y_1^{(7)})^2} = \sqrt{(x_8 - x_5)^2 + (y_8 - y_5)^2}$$

单元有限元方程

单元刚度矩阵

影响矩阵

$$K_{ij}^{(e)} T_j^{(e)} = P_i^{(e)} = (P_1)_i^{(e)} + (P_2)_i^{(e)}$$

单元输入向量

载荷矢量

10.5.5 总体合成

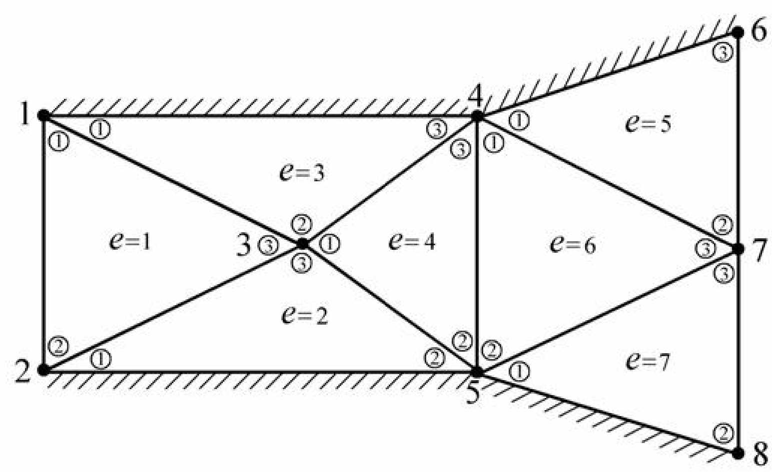
把单元系数矩阵 K 和输入向量 P
按连缀表查号置入，分别累加

连缀表：

单元节点号←→总体节点号

表 10−1　连缀表——单元节点与总体节点间关系

i \ n \ e	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	1	3	4	4	5
2	2	5	3	5	7	5	8
3	3	3	4	4	6	7	7



按连缀表查号置入

单元节点 ⇔ **总体节点**

i j n_i n_j

$K_{ij}^{(e)} \longrightarrow K_{n_i n_j}$

$P_i^{(e)} \longrightarrow P_{n_i}$

例

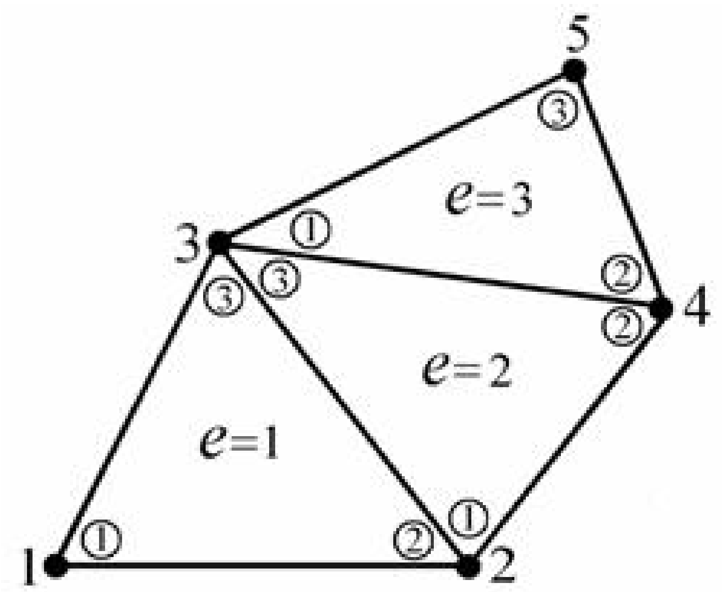


表 **10—2** 节点关系连缀表

n e / i	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	4
3	3	3	5

10.5.6 边界条件处理

自然边界条件：已在弱解积分中满足

本质边界条件：代入总体有限元方程

边界条件处理

对总体有限元方程进行修正，使其满足本质边界条件

1 消行修正法

2 对角线项扩大法

本质边界节点 r

该节点上函数值 $(T_0)_r$

消行修正法：

1) 令 K 矩阵 r 行 r 列元素= 0， 而 $K_{rr} = 1$

2) 令输入向量 P的 r 分量为 $(T_0)_r$

其余分量变为

$$P_r - K_{nr}(T_0)_r$$

$$
\boldsymbol{K}^{*} = \begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & \cdots K_{1,r-1} & 0 & K_{1,r+1} & \cdots K_{1,N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
K_{r-1,1} & K_{r-1,2} & \cdots K_{r-1,r-1} & 0 & K_{r-1,r+1} & \cdots K_{r-1,N} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
K_{r+1,1} & K_{r+1,2} & \cdots K_{r+1,r-1} & 0 & K_{r+1,r+1} & \cdots K_{r+1,N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
K_{N,1} & K_{N,2} & \cdots K_{N,r-1} & 0 & K_{N,r+1} & \cdots K_{NN}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{P}^{*} = \begin{bmatrix} P_1 - K_{1r}(T_0)_r \\ \vdots \\ P_{r-1} - K_{r-1,r}(T_0)_r \\ (T_0)_r \\ P_{r+1} - K_{r+1,r}(T_0)_r \\ \vdots \\ P_N - K_{Nr}(T_0)_r \end{bmatrix}
$$

对角线项扩大法

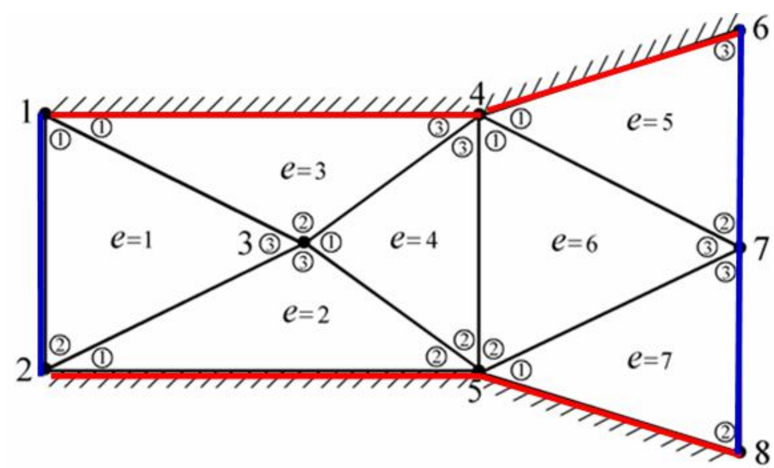
1) 刚度矩阵 K 的对角线项扩大

$$K_{rr}^{*} = 10^{20} K_{rr}$$

2) 输入向量 P 的相应项变为：

$$P_{r}^{*} = 10^{20} K_{rr} (T_{0})_{r}$$

$$\begin{bmatrix} 10^{22}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & 10^{22}K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & 10^{20}K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & 10^{20}K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & 10^{20}K_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{10^{22}K_{11}T_0} \\ \underline{10^{22}K_{22}T_0} \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ \underline{10^{20}K_{66}T_0} \\ \underline{10^{20}K_{77}T_0} \\ \underline{10^{20}K_{88}T_0} \end{bmatrix}$$



10.5.7 解总体有限元方程

代数方程组：迭代方法解

常微分方程组：Runge-Kuta法