2.2 偏微分方程的物理分类和数学分类

胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

内容提要

- 热物理问题的控制方程
- 方程的物理分类
- 方程的数学分类

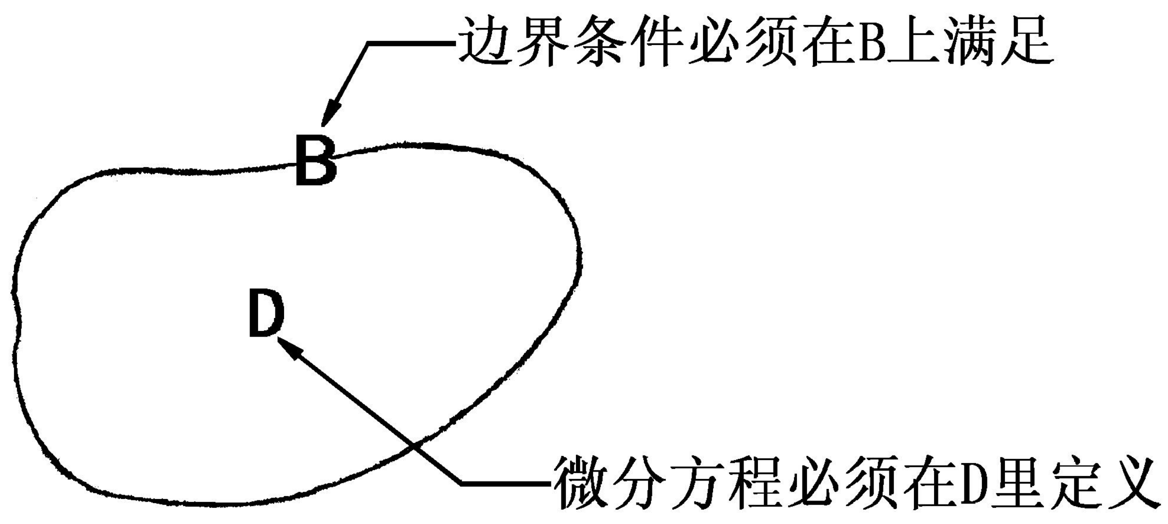
2.2 偏微分方程的物理分类和数学分类

2.2.1 偏微分方程的物理分类

- 平衡问题
- 行进问题
  - 对流问题
  - 扩散问题
  - 对流扩散问题

1. 平衡问题

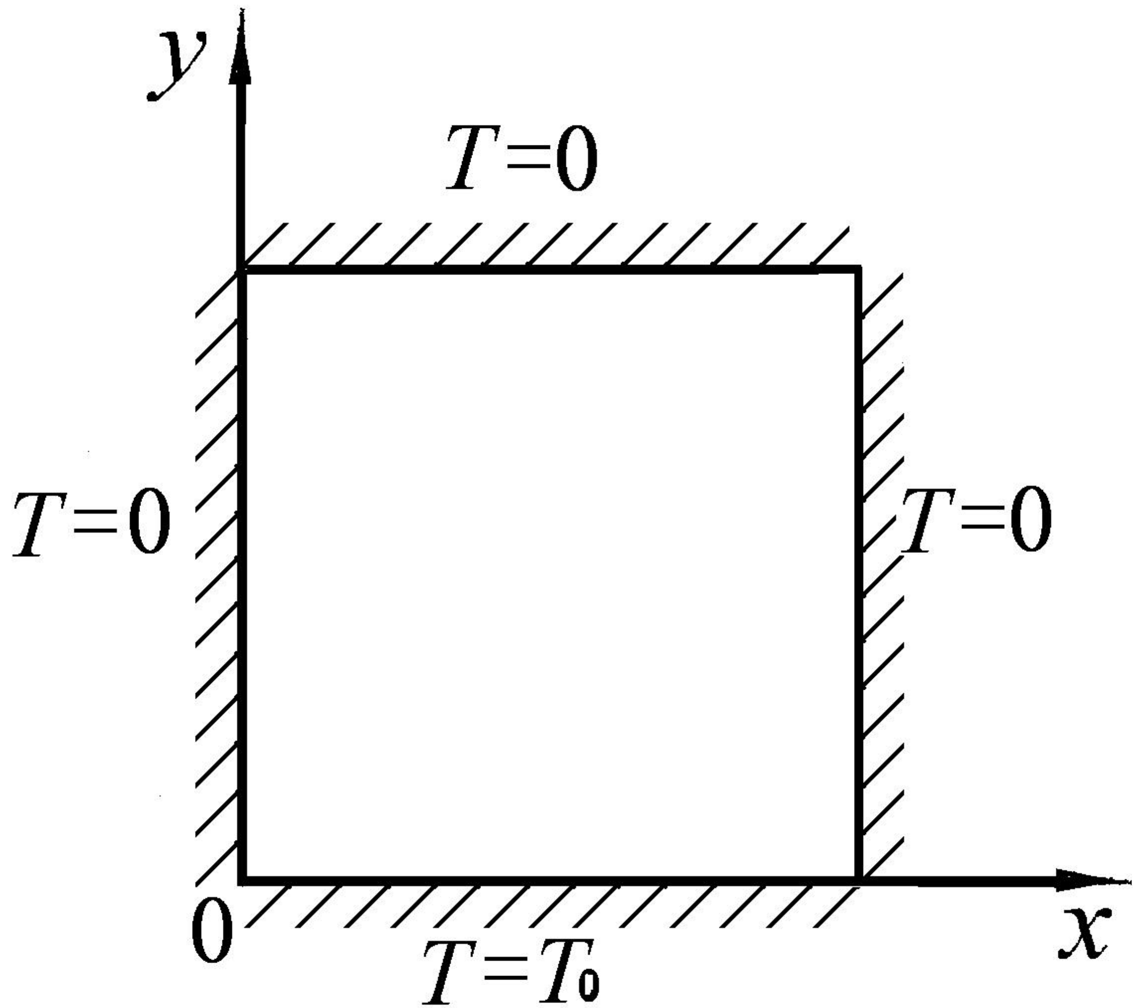
- 平衡问题：其对应偏微分方程的定义域是一个封闭区域；定义域上每一点的解，依赖于封闭边界每一点上的边界条件。



平衡问题

- 平衡问题不一定没有时间变量
- 平衡问题的判断是基于是否定义在封闭边界内，或者说是基于控制方程是否为椭圆型方程

例2.1 正方形导热体稳态温度分布



控制方程和边界条件

$$
\begin{cases}
\nabla^2 T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le \mathrm{y} \le 1 \\
T(0, y) = T(1, y) = T(x, 1) = 0 \qquad T(x, 0) = T_0
\end{cases}
$$

解析求解过程

分离变量法

$$T(x,y)=X(x)Y(y)$$

得到

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)\,\mathrm{sh}[n\pi(y-1)]$$

系数：

$$A_n=\frac{2T_0}{n\pi}\frac{[(-1)^n-1]}{\mathrm{sh}(n\pi)}$$

Matlab 求解该问题的演示

运行 Example2_1.m

- 数学上，平衡问题由椭圆型偏微分方程控制

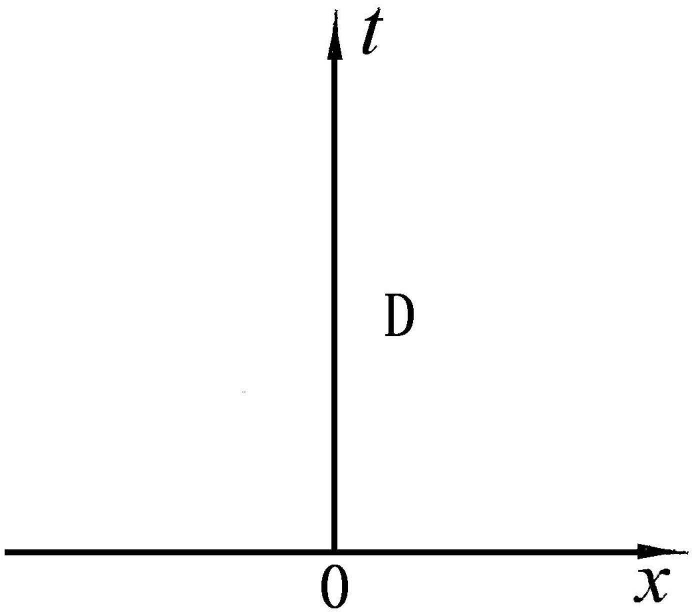
- 平衡问题例子：定常无粘不可压缩流动，稳态温度分布问题

2. 行进问题

- 行进问题：亦称传播问题（propagation problem），是一类瞬时问题（transient problem）或类瞬时问题（transient-like problem）。

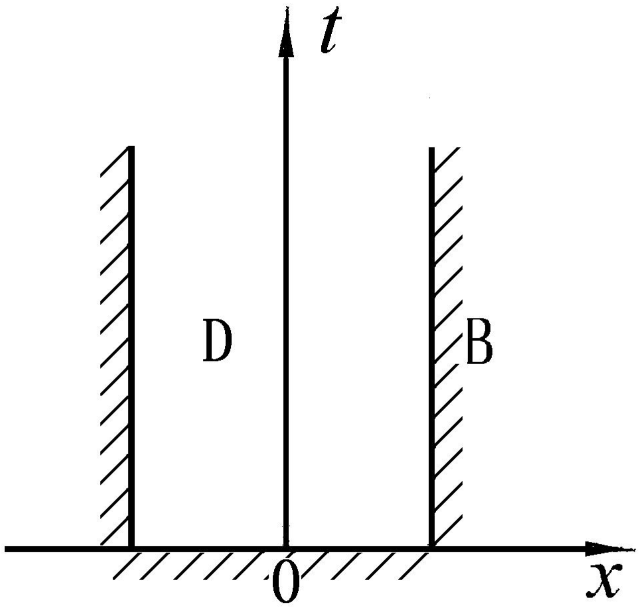
- 这类问题对应的偏微分方程定义在开区域上，它们满足初始条件或者初始－边界条件，称之为初值问题或者初边值问题

行进问题



(a)

初值问题



(b)

初边值问题

行进问题

- 数学上行进问题对应双曲型或者抛物型偏微分方程

- 流体力学和热物理中，这类问题通常包括

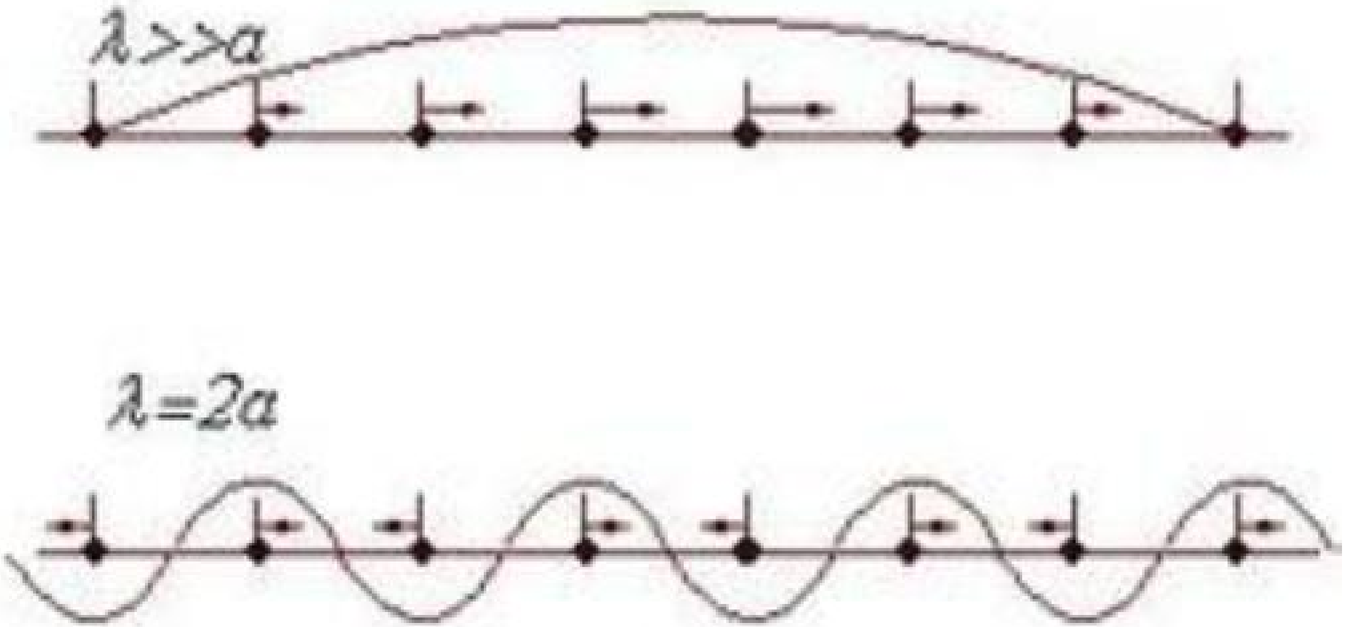
  对流问题
  扩散问题
  对流—扩散问题

(1) 对流问题

- 对流问题：双向传播的一维声波传播、平面定常超音速流动、一维非定常等熵流动

- 对应双曲型偏微分方程

例2.2一维无界线性声波



控制方程和初始条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (a\text{为常数，} \quad -\infty \le x \le \infty) \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

求解过程

引入坐标变换

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

方程变为：

$$u_{\xi\eta} = 0$$

积分：

$$u(x,t) = F_1(x+at) + F_2(x-at)$$

- 代入初始条件

$$u(x,y)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(\tau)d\tau$$

$$u(x,y)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(\tau)d\tau$$

当满足

$$x+at=c_1=const$$

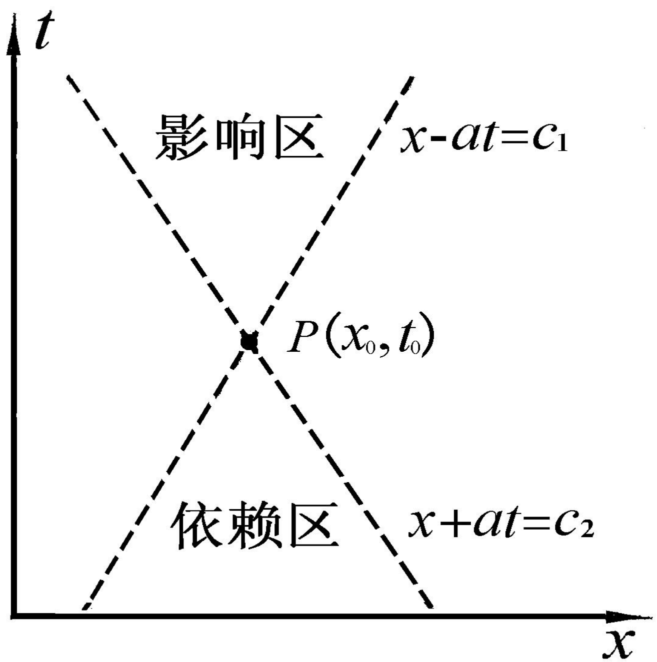
$$x-at=c_2=const$$

结果完全一样！

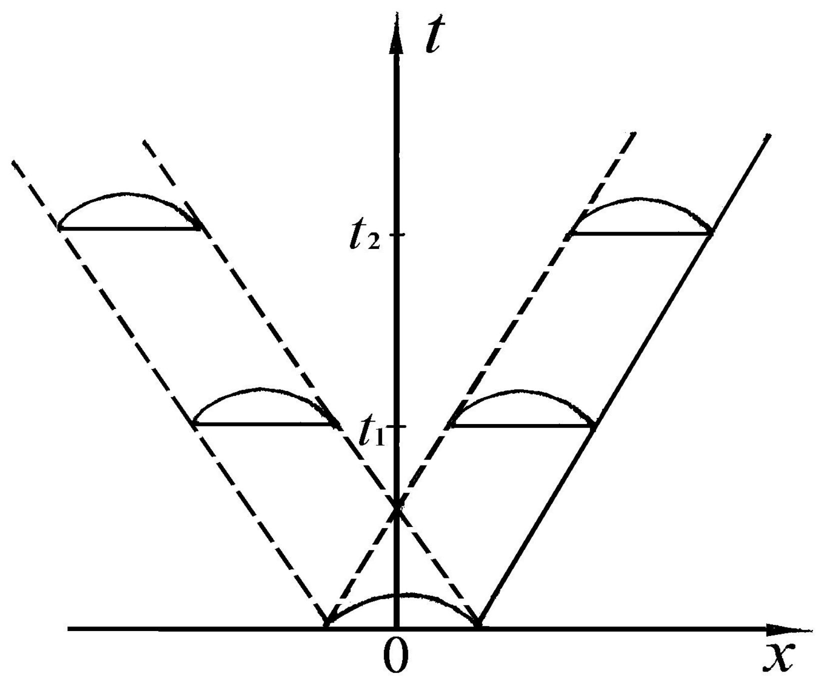
特征线

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{a} = \lambda_1 \\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{-1}{a} = \lambda_2 \end{cases}$$

对流问题：物理量传播的方向线



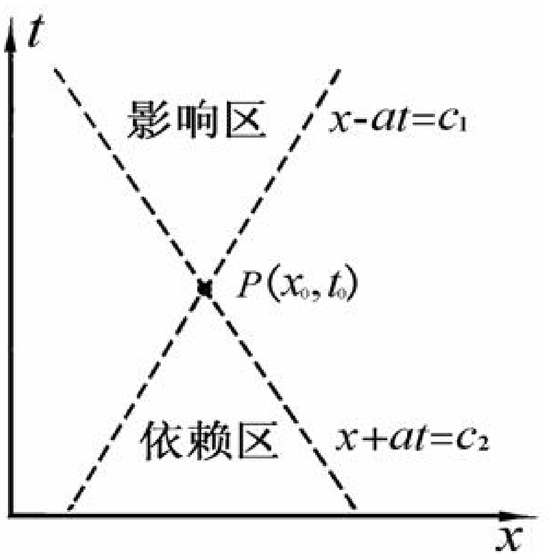
(a)



(b)

依赖区和影响区

- 过任意点 P 有两条特征线，构成两个特征区域，下游称为*P*点的影响区，上游称为*P*点的依赖区
- 依赖区：为了唯一确定P点的值，依赖区上点的条件必须完全给定；影响区：当P点的值变化时，影响区内点的值也随着变化



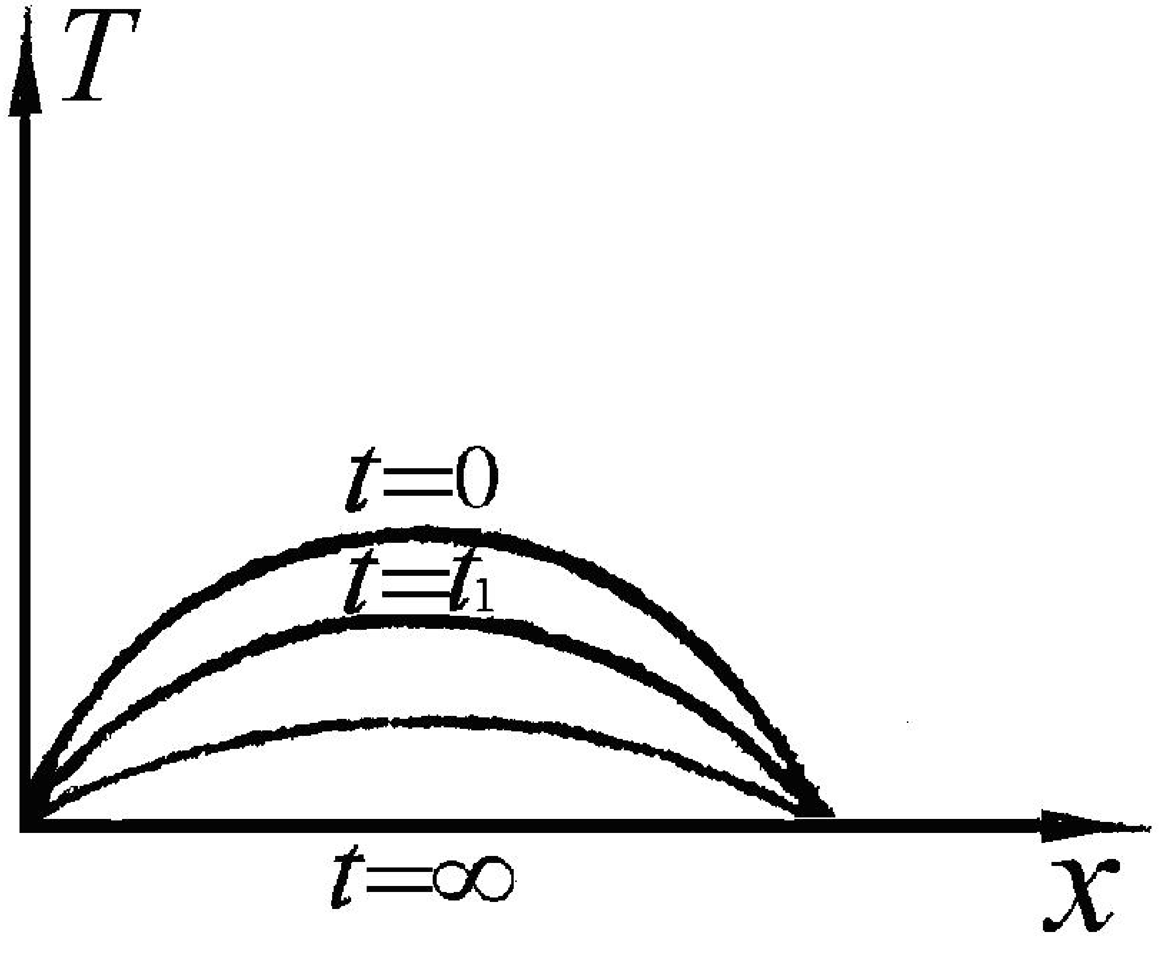
- 对线性波的情况(a=常数)，波形不变
- 对于非线性波问题，波在传播中要变形
- 若为压缩波，还可能逐渐发展成解为间断的激波

(2) 扩散问题

- 例：非稳态导热、粘性流体中一个突然启动的作匀速运动的平板所引起的旋涡扩散

- 控制方程对应数学上的抛物型方程

例2.3 一维导热杆的瞬态温度分布

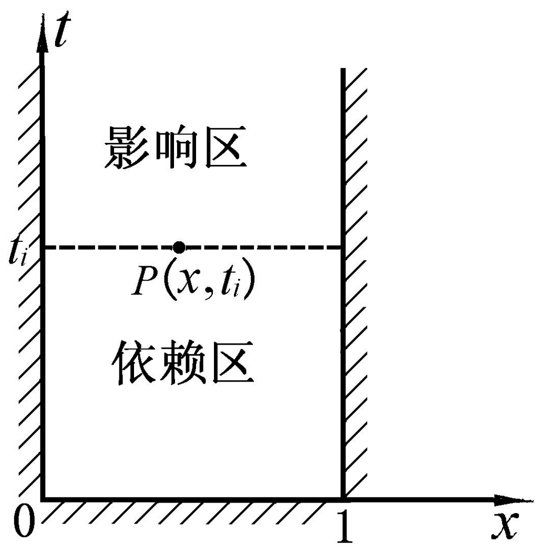


控制方程和初边条件

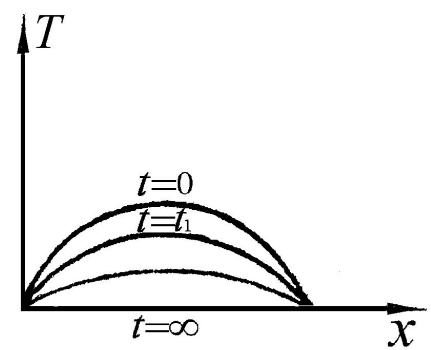
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (\alpha\text{为常数，}\quad 0 \le x \le 1) \\
T(x,0) = \sin(\pi x) \\
T(0,t) = T(1,t) = 0 \\
\end{cases}
$$

精确解

$$T(x,t)=\sin(\pi x)\exp(-\pi^2 t)$$



(a)



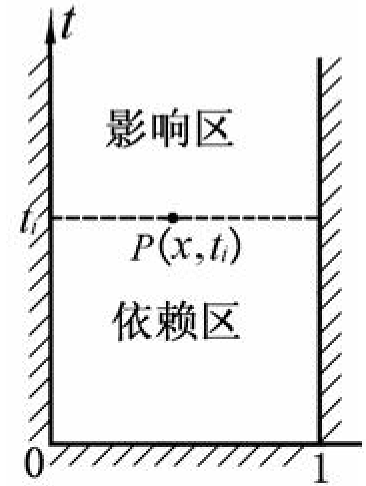
(b)

- 温度随时间呈指数衰减 - 具有耗散特性

特征线和依赖区

- 任意时刻 t，解域被垂直于行进方向轴的直线 t=const 区分为两个区域。此线称为该抛物型方程的特征线

- 以此线为分界线，它的整个上游区域都是依赖区，整个下游区域均为影响区



（3） 对流-扩散问题

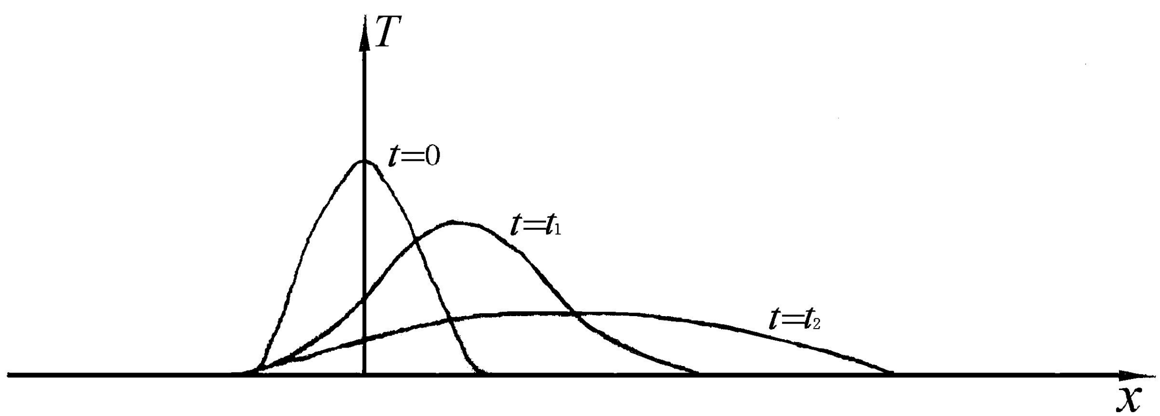
- 既包含对流，又有扩散，为对流扩散问题
- 方程除了一阶的时间或类时间坐标导数外，含有一阶、二阶的空间导数项
- 时间或类时间导数代表行进过程，一阶空间导数代表对流，二阶空间导数代表扩散

控制方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

非稳项　　对流项　　扩散项

解的特征：



物理分类

- 平衡问题
- 行进问题
  - 对流问题
  - 扩散问题
  - 对流扩散问题