第2章 热物理问题的数学描述与偏微分方程的分类

胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

内容提要

- 热物理问题的控制方程
- 方程的物理分类
- 方程的数学分类

2.2.2 偏微分方程的数学分类

单个方程，多个方程

单自变量，多自变量

低阶导数，高阶导数

二阶偏微分方程

$$\underbrace{a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy}}_{\text{方程主部}} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y)$$

- 线性方程：系数*a*、*b*、*c*、*d*、*e*、*f* 均为常数或只是*x*、*y*的函数
- 拟线性方程：系数 仅为*x*、*y*、ϕ、ϕ_x、ϕ_y 的函数
- 非线性方程：系数 是ϕ_{xx}、ϕ_{xy}、ϕ_{yy}的函数

以下为线性方程的
数学分类方法

引入坐标变换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

坐标变换的 Jacobi 行列式

$$J = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

转换为新坐标下的方程：

$$A\phi_{\xi\xi} + B\phi_{\xi\eta} + C\phi_{\eta\eta} + D\phi_{\xi} + E\phi_{\eta} + F\phi = g(\xi, \eta)$$

系　数

$$A = a\xi_x{}^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y{}^2$$

$$B = 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y$$

$$C = a\eta_x{}^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y{}^2$$

$$D = a\xi_{xx} + b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y$$

$$E = a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y$$

$$F = f$$

- 最重要的特征：

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = J^2(b^2 - 4ac)$$

- 对于任何非奇异的坐标变换， b^2-4ac 的符号不变！

- 线性方程的特征分类方法：

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 & \text{双曲型} \\ b^2-4ac=0 & \text{抛物型} \\ b^2-4ac<0 & \text{椭圆型} \end{cases}$$

三种类型方程形式的
简化 和 标准型式

简化的方法是通过坐标变换使方程的某些系数变成 0

$$A\phi_{\xi\xi}+B\phi_{\xi\eta}+C\phi_{\eta\eta}+D\phi_{\xi}+E\phi_{\eta}+F\phi=g(\xi,\eta)$$

其中系数A: $A=a\xi_x{}^2+b\xi_x\xi_y+c\xi_y{}^2$

系数C: $C=a\eta_x{}^2+b\eta_x\eta_y+c\eta_y{}^2$

构造方程: $az_x{}^2+bz_xz_y+cz_y{}^2=0$

假如：以此方程的一个特解作一个坐标，另一个特解作另一个坐标，则可简化为： $A=C=0,\ B\neq 0$

方程分类

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 & \text{双曲型} & \text{有两个特解} \\ b^2-4ac=0 & \text{抛物型} & \text{只有一个特解} \\ b^2-4ac<0 & \text{椭圆型} & \text{没有实的特解} \end{cases}$$

求解一阶方程

$$az_x^{\ 2}+bz_xz_y+cz_y^{\ 2}=0$$

改写为：

$$a(-\frac{z_x}{z_y})^2-b(-\frac{z_x}{z_y})+c=0$$

$z(x,y)=$常数

定义隐函数 $y(x)$

$$dz=z_xdx+z_ydy=0$$

$$dy/dx=-z_x/z_y$$

$$a(\frac{dy}{dx})^2-b(\frac{dy}{dx})+c=0$$

特征方程和特征线

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

是二阶线性偏微分方程

$$a\phi_{xx}+b\phi_{xy}+c\phi_{yy}+d\phi_x+e\phi_y+f\phi=g(x,y)$$

的特征方程。

特征方程的一般积分曲线，是其特征线！

（1） 双曲型方程

$$a(\frac{dy}{dx})^2 - b(\frac{dy}{dx}) + c = 0$$

当 $b^2 - 4ac > 0$

方程变为

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow \xi(x,y) = c_1 = const \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow \eta(x,y) = c_2 = const \end{aligned}\right.$$

积分

两族特征线

以此为坐标系，则 $A = C = 0$

$$\phi_{\xi\eta} = -\frac{1}{B}[D\phi_\xi + E\phi_\eta + F\phi - g] = h_4(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta)$$

双曲型方程的第二种标准型式

双曲型方程的第一种标准形式或简称为标准形式

再引入坐标

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} \alpha = (\xi + \eta)/2 \\ \beta = (\xi - \eta)/2 \end{cases}$$

转化为

$$\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\beta\beta} = -\frac{2}{B}[(D+E)\phi_{\alpha} + (D-E)\phi_{\beta} + 2F\phi - 2g] = h_1(\phi_{\alpha}, \phi_{\beta}, \phi, \alpha, \beta)$$

物理实际

- 数学上的双曲型方程对应物理上的对流传播问题
- 二阶双曲型方程，过定义域上任意点，有两条实特征线构成两个特定区域—下游（前向）是影响区，上游（后向）为依赖区；
- 特征线是物理量沿其传播的方向线，也是方程高阶法向导数的弱间断线；
- 对非线性双曲型方程物理量在传播过程中可能形成间断。

（2） 抛物型方程

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0$$

当 $b^2 - 4ac = 0$

方程变为 $$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

积分得到一族实特征线

$$\sqrt{a}y - \sqrt{c}x = \xi(x, y) = const$$

以此为坐标，则有 A=0 且 B=0

- 选取坐标转换：

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) = \sqrt{a}y - \sqrt{c}x \\ \eta = \eta(x,y) = \sqrt{a}y + \sqrt{c}x \end{cases}$$

（积分得到实特征线）

（构造得到非奇异坐标）

$$\Downarrow$$

$$\phi_{\eta\eta} = -\frac{1}{C}[D\phi_\xi + E\phi_\eta + F\phi - g] = h_2(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta)$$

抛物型方程的标准型式

物理实际

- 数学上的抛物型方程对应物理上的扩散问题；
- 过定义域上任意点，只有一条实特征线将整个求解域区分为两个区域—下游（前向）是影响区，上游（后向）为依赖区
- 物理量垂直于特征线的方向向前传播，并在瞬刻到达整个影响区，但受扰动的影响大小随传播距离迅速衰减，表明抛物型方程具有耗散性；
- 穿过特征线，函数及其法向导数连续；
- 对非线性抛物型方程，物理量在传播过程中不会形成间断，这是方程本身具有耗散特性所致

（3）椭圆型方程

$$a(\frac{dy}{dx})^2 - b(\frac{dy}{dx}) + c = 0$$

当 $b^2 - 4ac < 0$

方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \lambda_1,\ \lambda_2$

积分得到 $\begin{cases} y - \lambda_1 x = \xi = \text{复常数} \\ y - \lambda_2 x = \eta = \text{复常数} \end{cases}$

以此为坐标则 $A = C = 0$

$$\phi_{\xi\eta} = -\frac{1}{B}[D\phi_\xi + E\phi_\eta + F\phi - g]$$

引入坐标变换：

$$\begin{cases} \xi = y - \lambda_1 x = \alpha + i\beta \\ \eta = y - \lambda_2 x = \alpha - i\beta \end{cases}$$

$$\phi_{\alpha\alpha} + \phi_{\beta\beta} = -\frac{2}{B}[(D+E)\phi_\alpha + i(D-E)\phi_\beta + 2F\phi - 2g] = h_3(\phi_\alpha, \phi_\beta, \phi, \alpha, \beta)$$

椭圆型方程的标准型式

物理实际

- 数学上的椭圆型方程对应物理上的平衡问题；

- 定义域里任意一点的解，完整依赖于整个封闭边界上的条件，各点的解相互耦合，因此椭圆型方程的依赖区是整个封闭边界，而影响区是整个定义域。

三类方程的标准型式

- 双曲型方程

$$\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\beta\beta} = -\frac{2}{B}[(D+E)\phi_{\alpha} + (D-E)\phi_{\beta} + 2F\phi - 2g] = h_1(\phi_{\alpha}, \phi_{\beta}, \phi, \alpha, \beta)$$

- 抛物型方程

$$\phi_{\eta\eta} = -\frac{1}{C}[D\phi_{\xi} + E\phi_{\eta} + F\phi - g] = h_2(\phi_{\xi}, \phi_{\eta}, \phi, \xi, \eta)$$

- 椭圆型方程

$$\phi_{\alpha\alpha} + \phi_{\beta\beta} = -\frac{2}{B}[(D+E)\phi_{\alpha} + i(D-E)\phi_{\beta} + 2F\phi - 2g] = h_3(\phi_{\alpha}, \phi_{\beta}, \phi, \alpha, \beta)$$