2.2.2 偏微分方程的数学分类

胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

内容提要

1. 两个自变量的二阶偏微分方程
2. 多个自变量的二阶偏微分方程特征分类法
3. 偏微分方程组的特征分类方法

(1) 两个自变量的一阶方程组

(2) 多个自变量的一阶方程组

  i. 包含时间、空间自变量的一阶方程组

  ii. 只有空间自变量的一阶方程组

(3) 含有部分二阶以上导数的偏微分方程组

4. 偏微分方程分类的Fourier分析方法 (Symbol)

2. 多个自变量的二阶偏微分方程特征分类法

- 方程：

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0$$

方程主部

- 主部系数矩阵 A

- 寻找A的特征值： $\left| \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} \right| = 0$

分类方法

(i) 特征值λ中的任意一个为零，则方程为抛物型；

(ii) 特征值λ全部非零并且同号，则方程为椭圆型；

(iii) 特征值λ全部非零, 并且除了一个之外其余同号，则方程为双曲型。

3．偏微分方程组的特征分类方法

(1) 两个自变量的一阶方程组

- 两个函数的最简单情况:

$$a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{11}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{12}\frac{\partial v}{\partial y}=e_1$$

$$a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{21}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{22}\frac{\partial v}{\partial y}=e_2$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$$

- 矢量形式:

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=\boldsymbol{E}$$

特征方程

$$\left| \boldsymbol{A} dy - \boldsymbol{B} dx \right| = 0$$

即：

$$\left| \boldsymbol{A} \frac{dy}{dx} - \boldsymbol{B} \right| = 0$$

求出特征值：　　$\lambda = dy / dx$

分类方法

(1) 特征值λ为两个互异的实根，则方程组为双曲型

(2) 特征值λ为一个实根，则方程组为抛物型

(3) 特征值λ为两个共轭复根,则方程组为椭圆型

n个函数两个自变量一阶方程组

(1) 特征值为n个互异实根，则方程组为双曲型

(2) 特征值有m个互异实根，无复根，且 $1 \le m \le n-1$ 则方程组为抛物型

(3) 特征值无实根,则方程组为椭圆型

(4) 特征值一部分为实根，一部分为复根，则方程组为混合型

(2) 多个自变量的一阶方程组

a. 包含时、空自变量的一阶方程组

b. 只有空间自变量的一阶方程组

a. 包含时间、空间自变量的一阶方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}+\boldsymbol{R}=0$$

- 方法：在(t,x), (t,y) 和 (t,z) 平面上分别考虑

例如

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}=0$$

- 特征方程：

$$\left|\boldsymbol{A}-\frac{dx}{dt}\boldsymbol{I}\right|=0$$

b.只有空间自变量的一阶方程组

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}+\boldsymbol{C}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}+\boldsymbol{R}=0$$

- 特征方程： $\left|\boldsymbol{A}\lambda_x+\boldsymbol{B}\lambda_y+\boldsymbol{C}\lambda_z\right|=0$

- 考察法向方向数：

固定 $\lambda_x=\lambda_z=1$，若 λ_y 全复根，则方程组相对 y 方向是椭圆型

(3) 含有部分二阶以上导数的偏微分方程组

实际问题基本上都含有二阶以上导数

一般做法：引入中间变量函数，化为包含有更多函数的一阶偏微分方程组，然后进行分类。特别注意：一阶方程组的系数矩阵不能等同以致使方程组奇异。

例2.4 二维稳态不可压Navier-Stokes方程

连续方程 $$u_x + v_y = 0$$

动量方程
$$\begin{cases} uu_x + vu_y + p_x - \dfrac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ uv_x + vv_y + p_y - \dfrac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) = 0 \end{cases}$$

- 引入中间变量

$$R = v_x,\quad S = v_y,\quad T = u_y$$

6个函数 u、v、p、R、S、T

$R = v_x$， $S = v_y$， $T = u_y$

$$u_x + v_y = 0$$

$$uu_x + vu_y + p_x - \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$$uv_x + vv_y + p_y - \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) = 0$$

$$\begin{cases} u_y = T \\ u_x + v_y = 0 \\ -R_y + S_x = 0 \\ S_y + T_x = 0 \\ p_x + S_x/Re - T_y/Re = uS - vT \\ p_y - R_x/Re - S_y/Re = -uR - vS \end{cases}$$

矩阵形式

$$A\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}=\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ R \\ S \\ T \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/Re & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/Re & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/Re \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/Re & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程 $\left|\boldsymbol{A}\lambda_x+\boldsymbol{B}\lambda_y\right|=0$

$$\left|\boldsymbol{A}\lambda_x + \boldsymbol{B}\lambda_y\right| = \begin{vmatrix} \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x \\ 0 & 0 & \lambda_x & 0 & \lambda_x/Re & -\lambda_y/Re \\ 0 & 0 & \lambda_y & -\lambda_x/Re & -\lambda_y/Re & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即：

$$\lambda_y{}^2(\lambda_x{}^2 + \lambda_y{}^2) = 0$$

取 $\lambda_x = 1$ ，λ_y 为虚数：方程组相对 y 方向为椭圆型

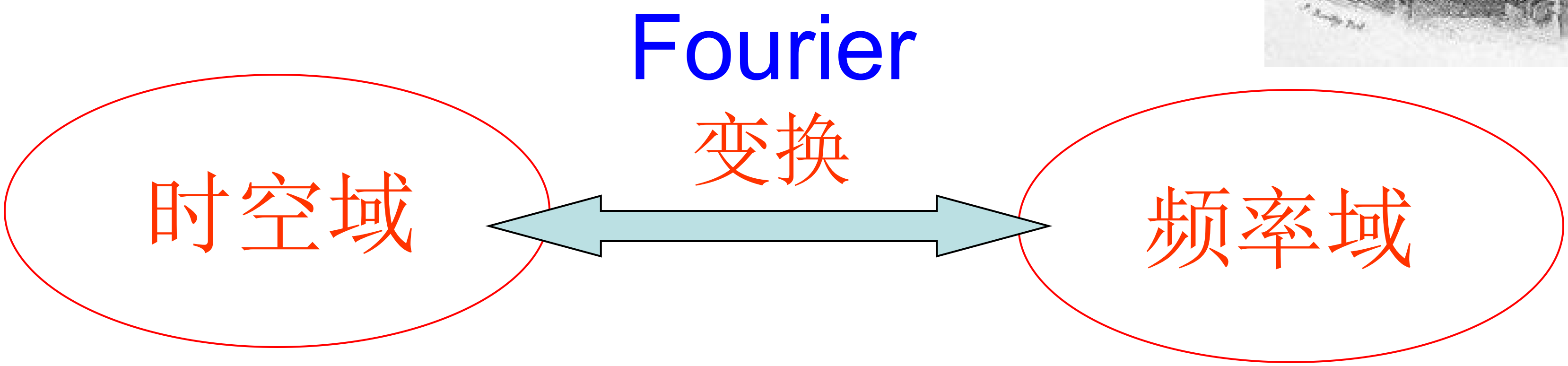
取 $\lambda_y = 1$ ，λ_x 为虚数：方程组相对 x 方向为椭圆型

4. 偏微分方程分类的 Fourier 分析方法

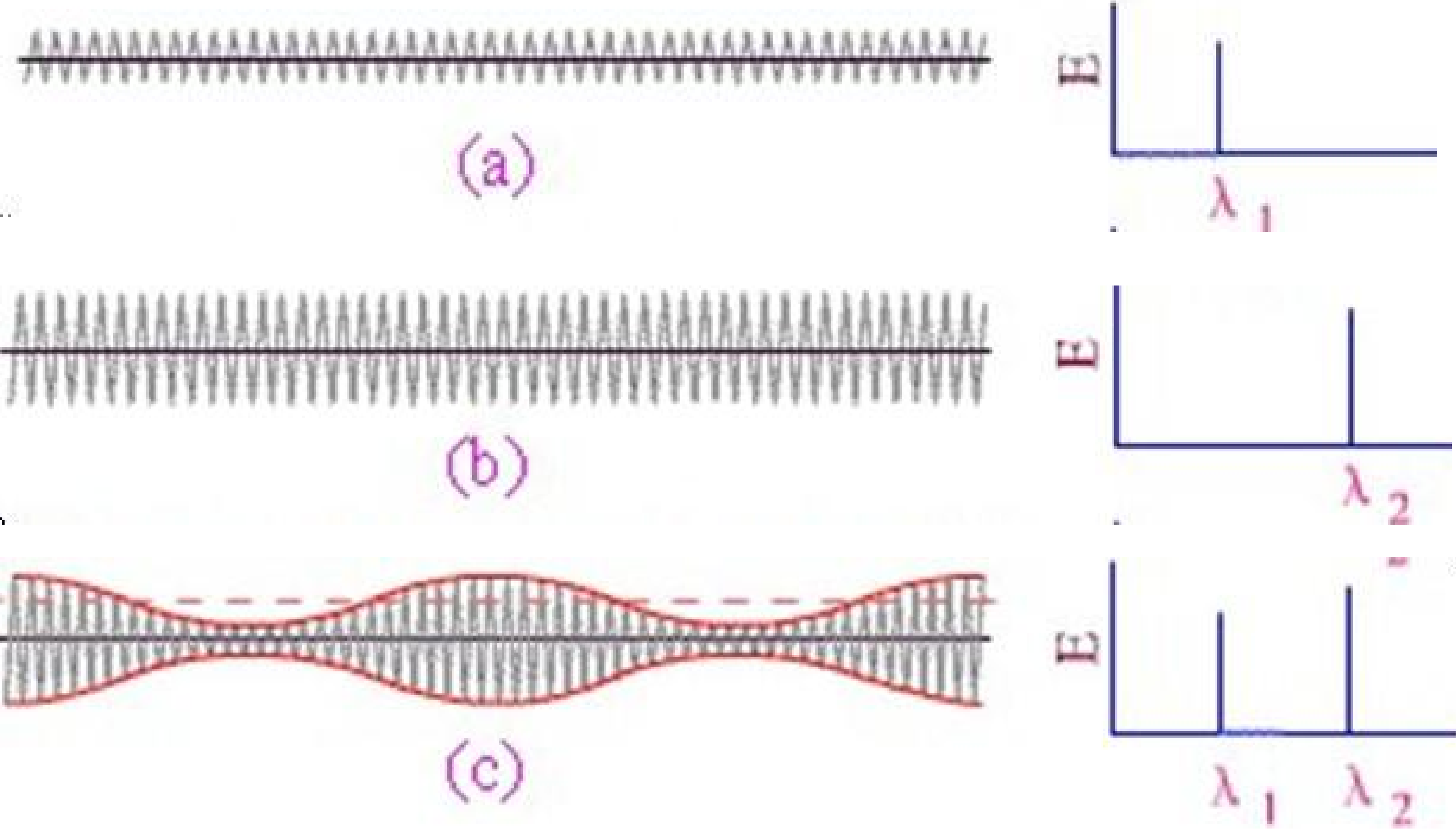
又称为偏微分方程的符号(Symbol)

可适用于单个方程、方程组；可适用于高阶导数情况；并且不需要引入中间变量

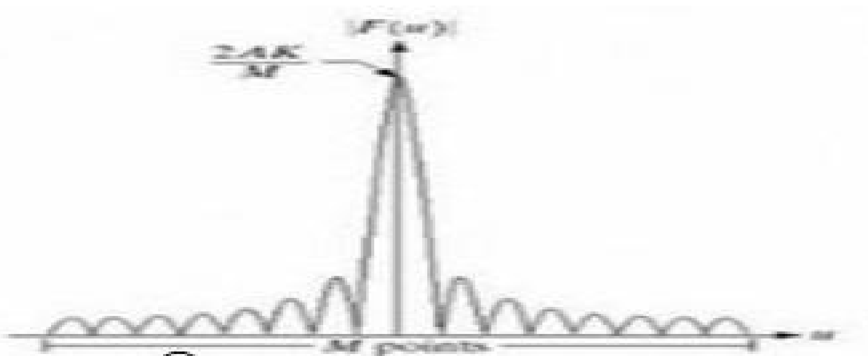
Fourier变换



- 主要应用了Fourier变换的微分关系


E
λ 1
(a)
E
λ 2
(b)
E
λ 1
λ 2
(c)


2K points
M points


|F(u)|
2AK
M
M points

a. 单个方程的情况

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Fourier级数表达的解：

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{u}_{jk}\exp[\mathrm{i}(\sigma_x)_j x]\exp[\mathrm{i}(\sigma_y)_k y]$$

极限情况下用Fourier积分表达：

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\sigma_x,\sigma_y)\exp(\mathrm{i}\sigma_x x)\exp(\mathrm{i}\sigma_y y)d\sigma_x d\sigma_y$$

Fourier 转换

- 系数：

$$\hat{u}(\sigma_x,\sigma_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\exp(-\mathrm{i}\sigma_x x)\exp(-\mathrm{i}\sigma_y y)dxdy$$

- Fourier 转换：

$$\hat{u}=Fu$$

- 微分特性：

$$\mathrm{i}\sigma_x\hat{u}=F(\frac{\partial u}{\partial x}),\quad \mathrm{i}\sigma_y\hat{u}=F(\frac{\partial u}{\partial y}),\quad (\mathrm{i}\sigma_x)(\mathrm{i}\sigma_x)\hat{u}=F(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}),$$

$$(\mathrm{i}\sigma_x)(\mathrm{i}\sigma_y)\hat{u}=F(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}),\quad (\mathrm{i}\sigma_y)(\mathrm{i}\sigma_y)\hat{u}=F(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

微分关系

函数每对 x 或 y
做一次偏导数

Fourier
变换

Fourier转换乘因子

$i\sigma_x$ 或 $i\sigma_y$

时空域

频率域

利用微分关系改写方程

Fourier
变换

函数每对 x 或 y 做一次偏导数

Fourier转换乘因子 $-i\sigma_x$ 或 $-i\sigma_y$

时空域

频率域

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Longleftrightarrow -a\sigma_x^2-b\sigma_x\sigma_y-c\sigma_y^2=0$$

微分方程

代数方程

频域方程特性

$$-a\sigma_x^2 - b\sigma_x\sigma_y - c\sigma_y^2 = 0$$

$$a(-\sigma_x/\sigma_y)^2 - b(-\sigma_x/\sigma_y) + c = 0$$

原方程的特征方程：

$$a(\frac{dy}{dx})^2 - b(\frac{dy}{dx}) + c = 0$$

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & \text{双曲型} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{抛物型} \\ b^2 - 4ac < 0 & \text{椭圆型} \end{cases}$$

Fourier分析方法应用于方程组情况

$$u_x + v_y = 0$$

$$uu_x + vu_y + p_x - \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$$uv_x + vv_y + p_y - \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} i\sigma_x & i\sigma_y & 0 \\ i(u\sigma_x + v\sigma_y + \frac{1}{Re}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)) & 0 & i\sigma_x \\ 0 & \mathrm{i}(u\sigma_{\mathrm{x}} + v\sigma_{\mathrm{y}} + \frac{1}{Re}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)) & i\sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = 0$$

方程组存在非平凡解的条件
是
系数矩阵行列式为零

$$\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)\left[i(u\sigma_x+v\sigma_y)+(\sigma_x^2+\sigma_y^2)/Re\right]=0$$

次要贡献　　方程主部的贡献

主部决定方程性质：

$$(\sigma_x^2+\sigma_y^2)(\sigma_x^2+\sigma_y^2)=0$$

比较特征分类法：

$$\lambda_y{}^2(\lambda_x{}^2+\lambda_y{}^2)=0$$

Fourier 分析法与特征分析法

- Fourier 分析法与特征分析法殊途同归，可以得到一样的结论
- Fourier 分析法相对简单，适用面广
- Fourier 分析法在分析比较复杂的问题时更有优势