

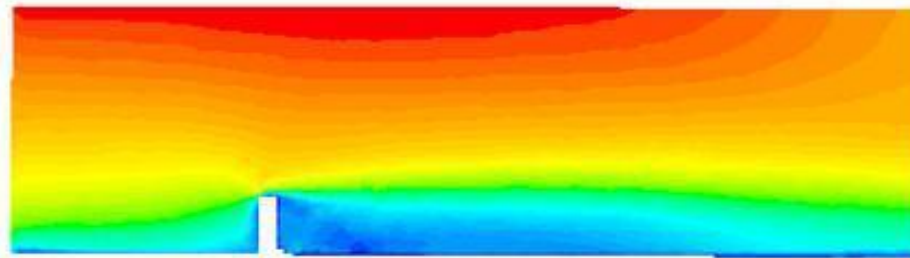
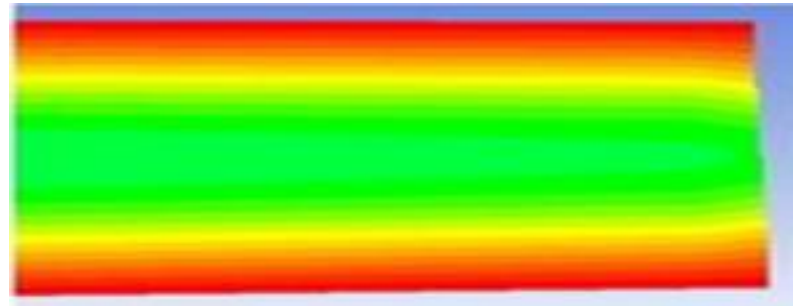
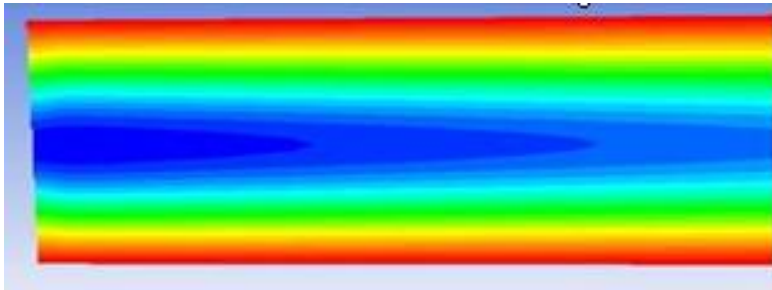
## 2.2.3 解的适定和定解条件

胡茂彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/>  
humaobin@ustc.edu.cn

# 意义

- 物理过程 = 控制方程 + 定解条件



- 定解条件关系到具体方程**是否有解**，其解**是否可靠**
- **定解条件**：边界条件、初始条件
- 偏微分方程的**适定性**：  
指定解条件能使方程 **解存在**、**解唯一**、**解稳定**（即解**连续地**依赖它的初始或边界条件）

## 例2.5 给定边界条件下的 二维 Laplace 方程

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad y \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_y(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad n > 0 \end{array} \right.$$

# 求解过程

分离变量:

$$u(x, y) = f(x)g(y)$$

利用定解条件:

$$u = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \operatorname{sh}(ny)$$

此解在  $y=0$  附近有可能不连续:

$$n \rightarrow \infty \xrightarrow{y \text{ 接近 } 0 \text{ 处}} u \rightarrow \infty$$

$$u(x, 0) = 0$$

# 原因分析

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- 此方程分类？

椭圆型！！！！

椭圆型方程要求提封闭边界上所有点的条件，  
尤其是无穷远处的边界条件！

# 方程对定解条件的要求

- **平衡问题（椭圆型方程）**：必须提封闭边界上**每一点**的边界条件，要特别小心“**无穷远边界**”上的条件
- **行进问题（抛物型、双曲型方程）**：必须提**初始条件**（二阶偏微分方程需要有**函数值**、**一阶导数值**条件）；空间无界定义域问题，有的可以不提无界边界上的条件，但有界定义域问题，一般需要规定一定的边界条件。

# 初始条件

- 时间或类时间导数为**一阶**：只要给出函数在全域的**初始值**；
- 时间或类时间导数为**二阶**：函数在全域的**初始值**，以及函数在全域对时间或类时间变量的一阶导数值



# 3类边界条件

1. Dirichlet 条件
2. Neumann 条件
3. Robin 条件

# 第一类边界条件 (Dirichlet)

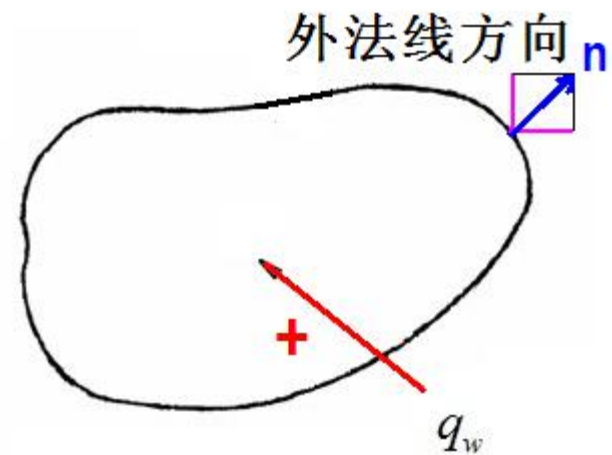
- 直接规定边界上的函数值 (可以随时间或类时间变化)

$$T(x, y, z, t) \Big|_w = T_w(t)$$

# 第二类边界条件 (Neumann)

- 直接规定在边界上的函数**导数值**
- **热物理问题一般规定**：热流值在流入边界内部方向时为正

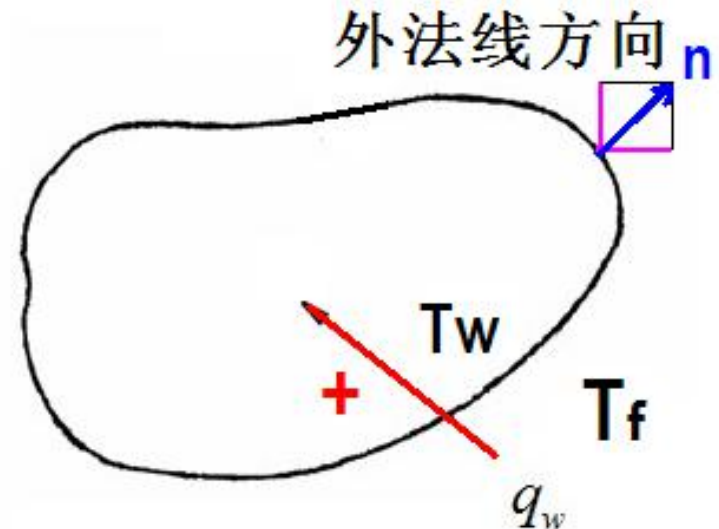
$$\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} \Big|_w = q_w(t)$$



# 第三类边界条件 (Robin)

- 规定边界上的函数值与它的法向导数之间的某个关系
- 冷却问题

$$\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} \Big|_w = h [T_f - T_w(t)]$$



# 从物理意义方面区分

1. 运动学条件
2. 动力学条件
3. 热力学条件

# 1 运动学条件 (Kinetic)

- **滑移边界条件**：无粘流体沿固壁切向速度不变
- **黏附条件**：粘性流体在固壁上满足静止壁上流体速度为零

## 2 动力学条件(Dynamic)

- 对流换热问题：有的边界需要规定压力或它的导数条件

# 3 热力学条件 (ThermoDynamic)

- 规定温度、热流率或它们两者间的关系，都是从热力学和能量守恒关系所提的边界条件



- 来流边界条件：进口边界
- 出流边界条件：出口边界
- 壁面边界条件：滑移、粘附
- 自由面：真空 或 大气层
- 对称面：只要研究一半
- 移动界面：相变交界处，钢水凝结、冰融化
- 间断面：激波，可能移动
- 角点：

