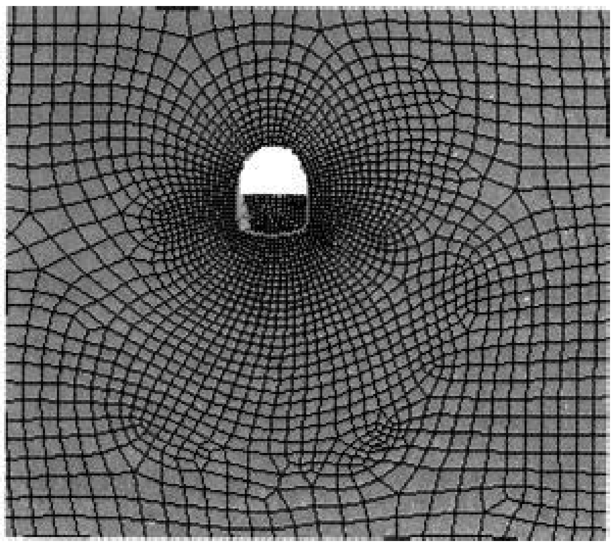
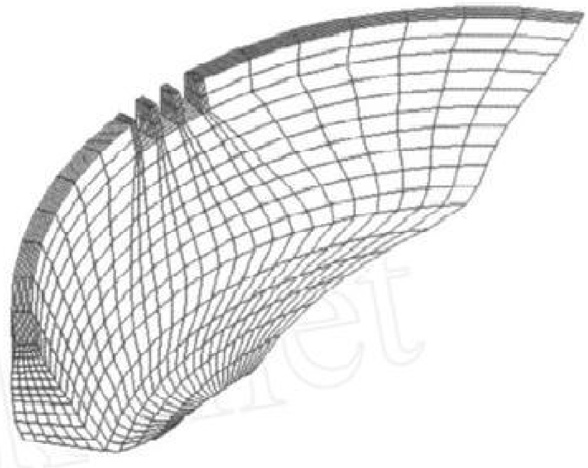
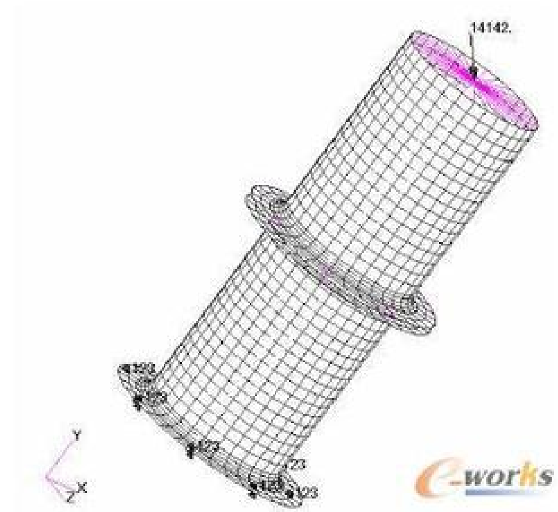
3.3 微分方程的
有限容积法离散







胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

3.3.1 控制容积
积分法离散

此方法基于对控制方程的积分

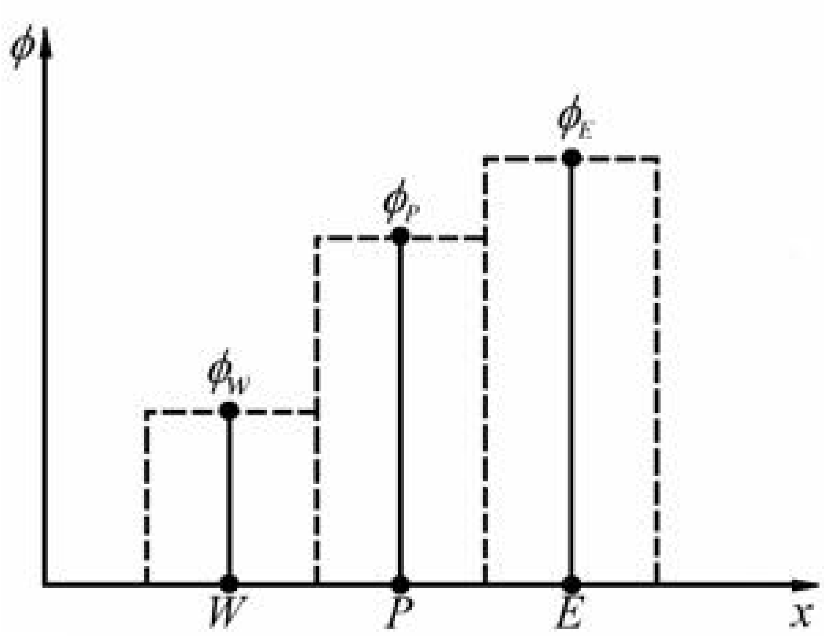
控制容积积分法实施步骤

1) 积分：将守恒型控制微分方程在控制容积及其时间间隔内作空间、时间积分，能够解除某些微分号的先积出来。

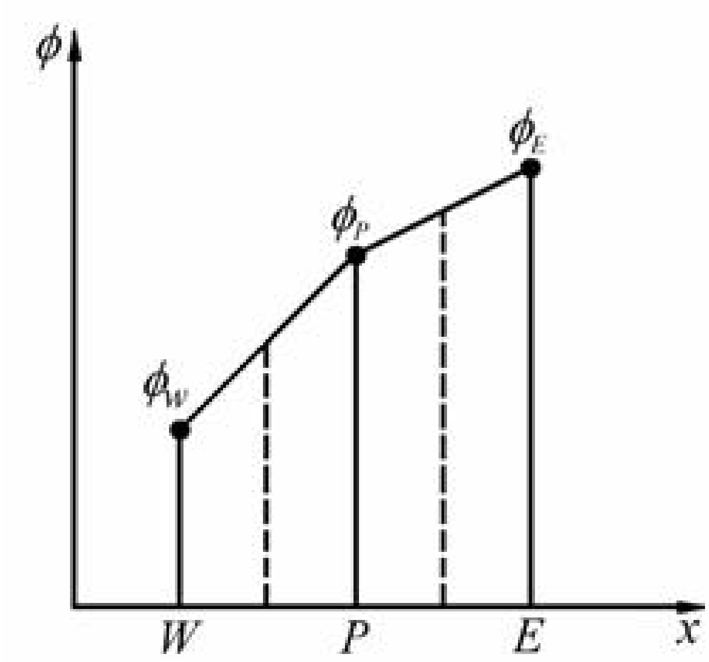
2) 作型线假设：根据离散精度要求，选择函数及其导数对时间、空间的分布曲线(型线) 。

3) 进一步积分：按照型线对积分式各项作定积分，并整理成节点上的离散代数方程。

常用型线选择 – 空间

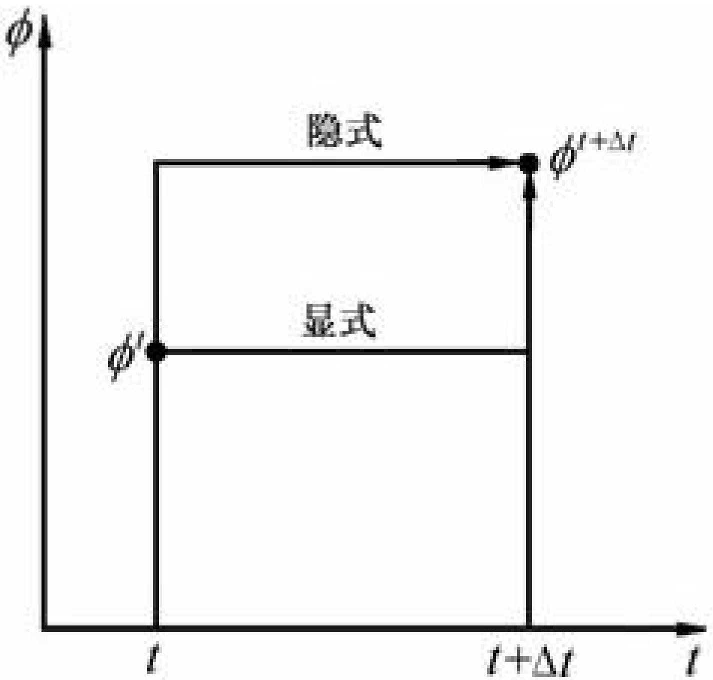


阶梯分布

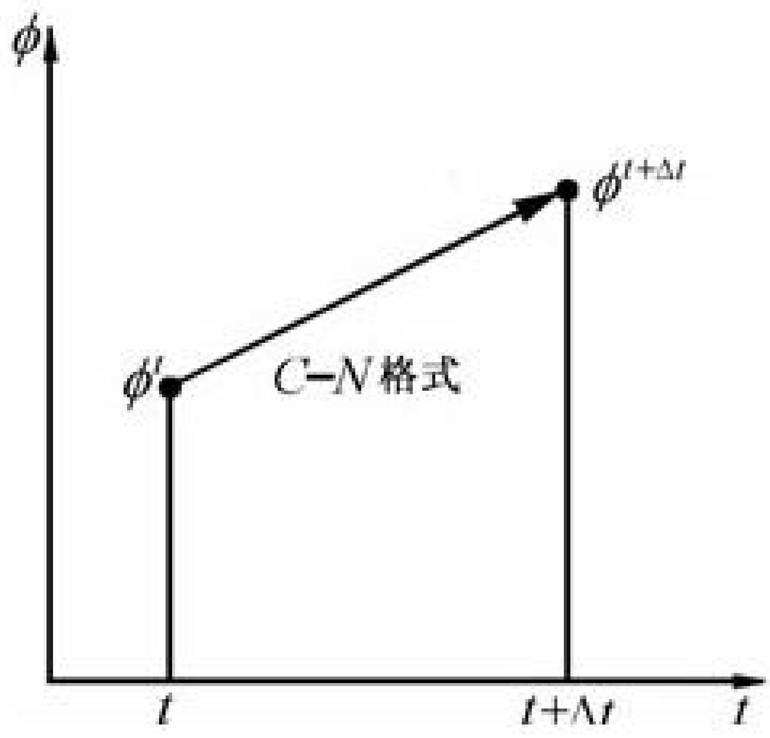


分段线性分布

常用型线选择 – 时间



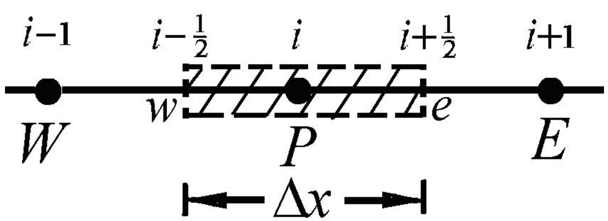
阶梯分布



分段线性分布

例：一维有源对流扩散方程的离散

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+S$$



1) 积分：

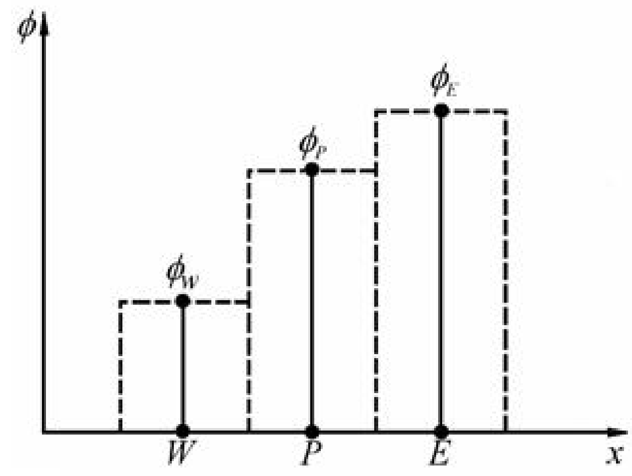
$$\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{w}^{e}\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}dxdt+\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{w}^{e}\frac{\partial \rho u\phi}{\partial x}dxdt=\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{w}^{e}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dxdt+\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{w}^{e}Sdxdt$$

2) 型线假设

- 非稳态项：

$$\int_{w}^{e}\left[(\rho\phi)^{t+\Delta t}-(\rho\phi)^{t}\right]\mathrm{d}x$$

需对空间做假设，取阶梯分布

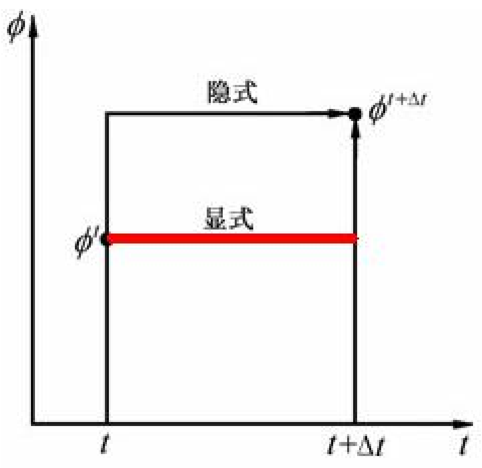


$$=\left[(\rho\phi)_{p}^{t+\Delta t}-(\rho\phi)_{p}^{t}\right](\Delta x)_{p}$$

对 流 项：需对时间分布取假设

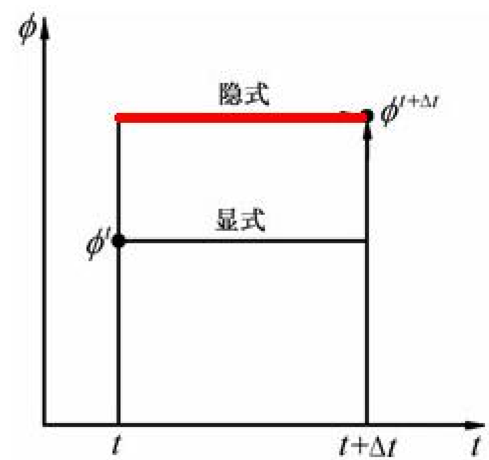
$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e \frac{\partial \rho u\phi}{\partial x}dxdt = \int_t^{t+\Delta t}\left[(\rho u\phi)_e - (\rho u\phi)_w\right]dt$$

a) 阶梯显式：



$$=\left[(\rho u\phi)_e^t - (\rho u\phi)_w^t\right]\Delta t$$

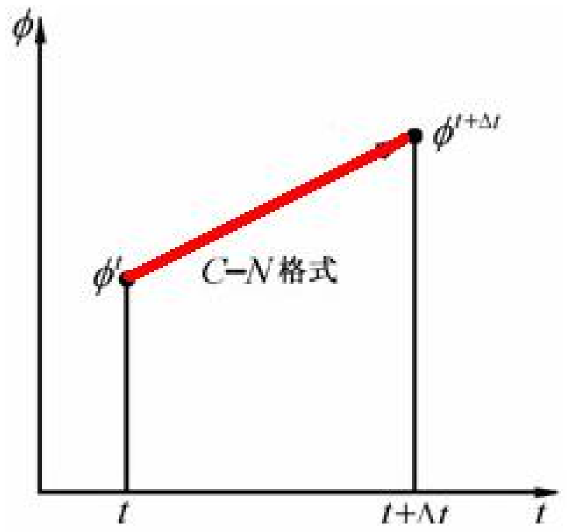
b) 阶梯隐式：



$$=\left[(\rho u\phi)_e^{t+\Delta t} - (\rho u\phi)_w^{t+\Delta t}\right]\Delta t$$

c) 取随 t 分段线性分布

算术平均格式 Crank-Nicolson 格式



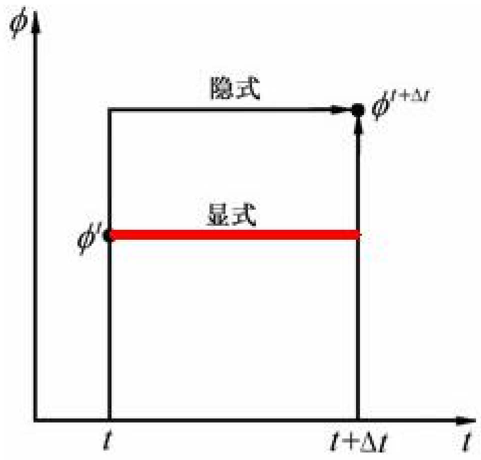
$$\int_t^{t+\Delta t}\left[(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\rho u\phi)_e^{t+\Delta t}-(\rho u\phi)_w^{t+\Delta t}+(\rho u\phi)_e^{t}-(\rho u\phi)_w^{t}\right]\Delta t$$

扩散项：需对时间分布取假设

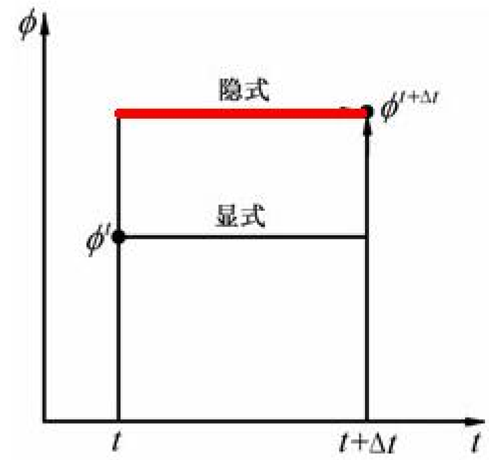
$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdt = \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]dt$$

a) 阶梯显式：



$$= \left[\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e^t - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w^t\right]\Delta t$$

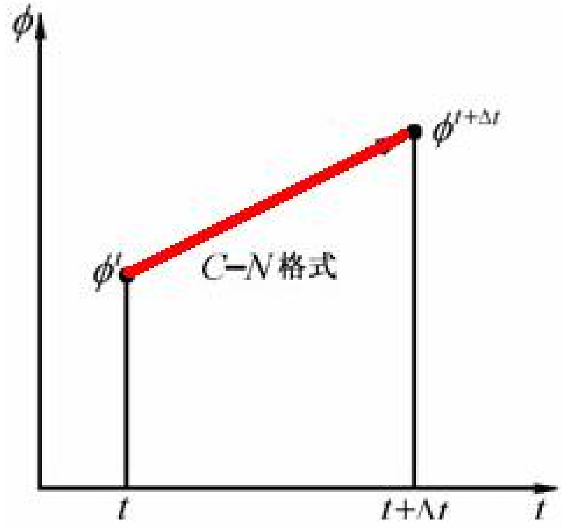
b) 阶梯全隐式：



$$= \left[\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e^{t+\Delta t} - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w^{t+\Delta t}\right]\Delta t$$

c) 取随 t 分段线性分布

算术平均格式 Crank-Nicolson 格式

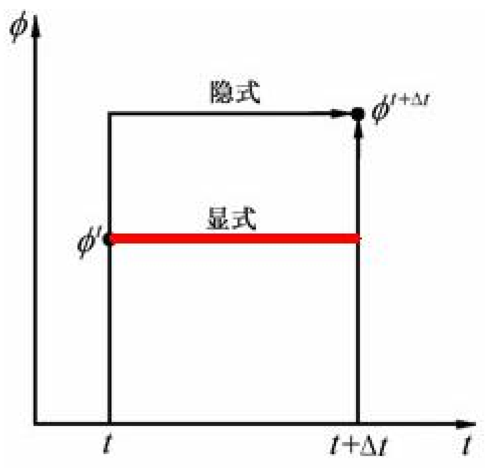


$$= \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e^{t+\Delta t} - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w^{t+\Delta t}\right]\Delta t + \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e^{t} - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w^{t}\right]\Delta t$$

源项：需对时间、空间分布取假设

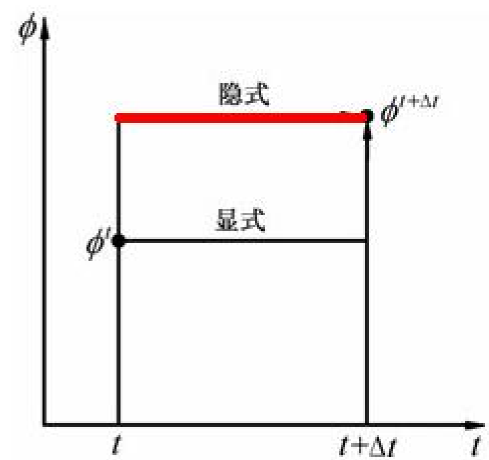
$\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{w}^{e} S dx dt$ 空间取阶梯分布，而时间可取：

a) 阶梯显式：



$$= \overline{S}^{t}(\Delta x)_P \Delta t$$

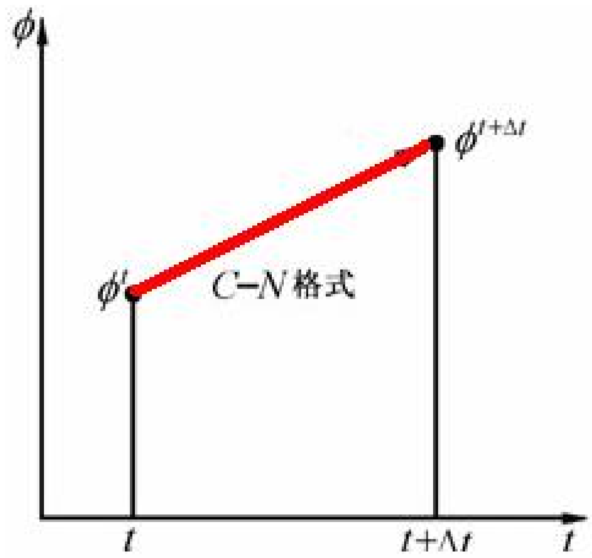
b) 阶梯全隐式：



$$= \overline{S}^{t+\Delta t}(\Delta x)_P \Delta t$$

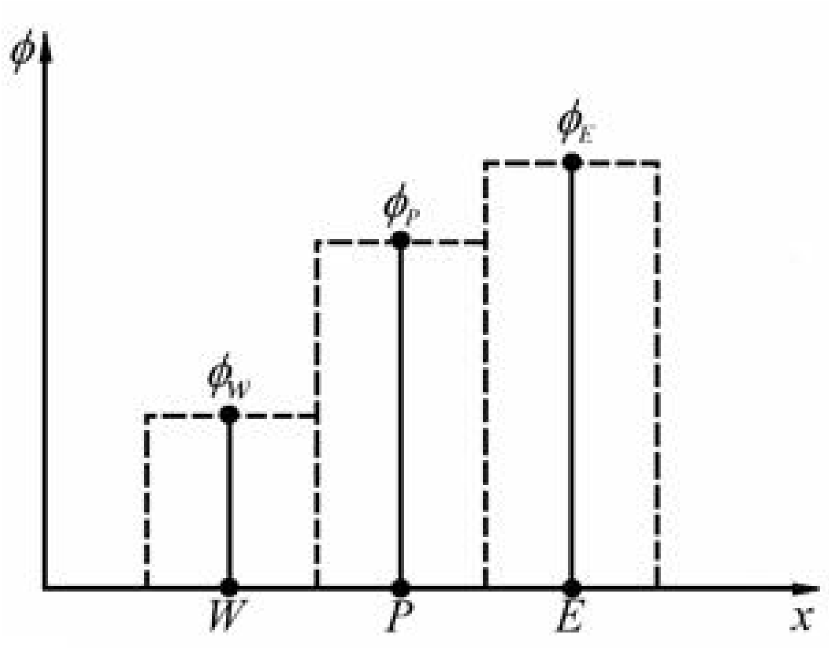
c) 取随 t 分段线性分布

算术平均格式 Crank-Nicolson 格式

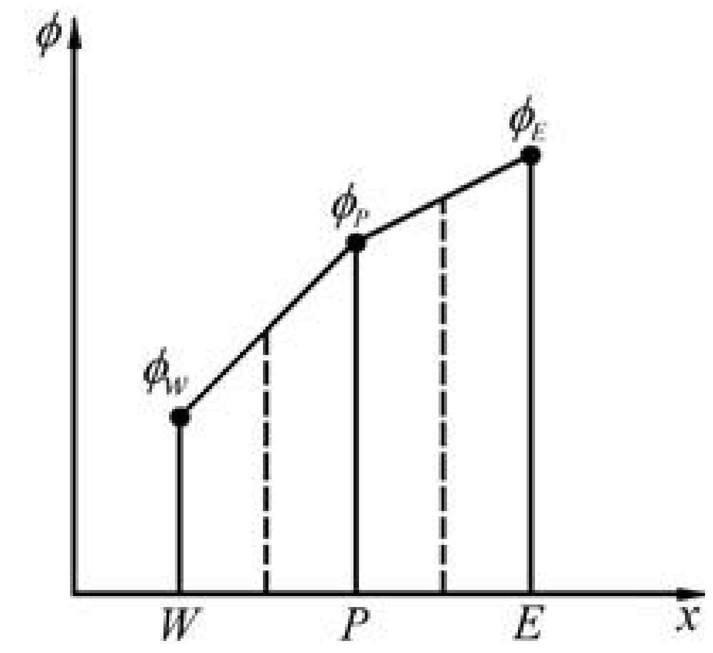


$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\overline{S}^{t+\Delta t} + \overline{S}^{t}}{2}(\Delta x)_P\,\Delta t$$

界面上的函数值和导数值



阶梯分布



分段线性分布

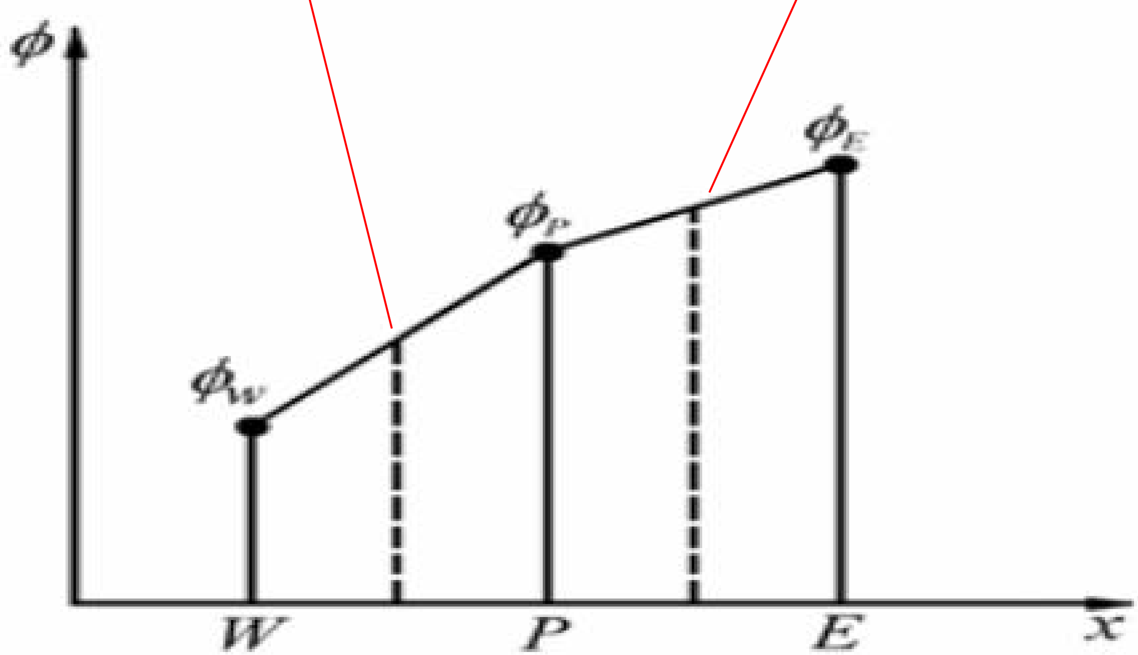
界面上的函数值和导数值

$$(\rho u\phi)_w = \frac{\rho_w u_w(\phi_W + \phi_P)}{2}$$

$$(\rho u\phi)_e = \frac{\rho_e u_e(\phi_P + \phi_E)}{2}$$

$$\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w = \left(\Gamma_\phi\right)_w \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w}$$

$$\left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e = \left(\Gamma_\phi\right)_e \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e}$$



离散格式：各种情况的组合

- 显式

$$\frac{(\rho\phi)_P-(\rho\phi)_P^0}{\Delta t}+\frac{\left[(\rho u)_e^0(\varphi_P^0+\varphi_E^0)-(\rho u)_w^0(\varphi_W^0+\varphi_P^0)\right]}{2(\Delta x)_P}$$

$$=\frac{(\Gamma_\phi)_e^0(\phi_E^0-\phi_P^0)}{(\Delta x)_P(\delta x)_e}-\frac{(\Gamma_\phi)_w^0(\phi_P^0-\phi_W^0)}{(\Delta x)_P(\delta x)_w}+\overline{S}^0$$

- 全隐式

$$\frac{(\rho\phi)_P-(\rho\phi)_P^0}{\Delta t}+\frac{\left[(\rho u)_e(\varphi_P+\varphi_E)-(\rho u)_w(\varphi_W+\varphi_P)\right]}{2(\Delta x)_P}$$

$$=\frac{(\Gamma_\phi)_e(\phi_E-\phi_P)}{(\Delta x)_P(\delta x)_e}-\frac{(\Gamma_\phi)_w(\phi_P-\phi_W)}{(\Delta x)_P(\delta x)_w}+\overline{S}$$

Crank-Nicolson 格式

$$\frac{(\rho\phi)_P-(\rho\phi)_P^0}{\Delta t}+\frac{\left[(\rho u)_e(\varphi_P+\varphi_E)-(\rho u)_w(\varphi_W+\varphi_P)\right]}{4(\Delta x)_P}$$

$$+\frac{\left[(\rho u)_e^0(\varphi_P^0+\varphi_E^0)-(\rho u)_w^0(\varphi_W^0+\varphi_P^0)\right]}{4(\Delta x)_P}$$

$$=\frac{(\Gamma_\phi)_e(\phi_E-\phi_P)+(\Gamma_\phi)_e^0(\phi_E^0-\phi_P^0)}{2(\Delta x)_P(\delta x)_e} \qquad \Gamma = const$$

$$-\frac{(\Gamma_\phi)_w(\phi_P-\phi_W)+(\Gamma_\phi)_w^0(\phi_P^0-\phi_W^0)+}{2(\Delta x)_P(\delta x)_w}+\frac{\bar{S}+\bar{S}^0}{2}$$

- 均匀网格，不可压 $\rho = const$

$$(u\phi)_e=\frac{(u\phi)_P+(u\phi)_E}{2}, \qquad (u\phi)_w=\frac{(u\phi)_W+(u\phi)_P}{2}$$

整理出

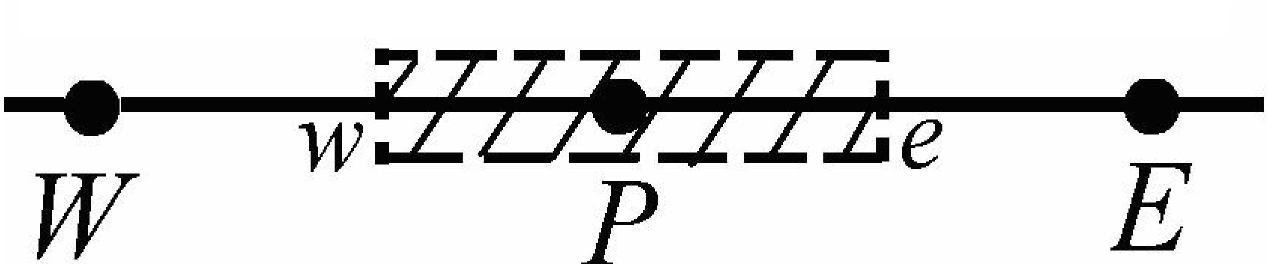
最终的离散表达式

关于型线假设的讨论

- 只有适当选择型线，才能导出离散方程；一旦离散方程建立，型线使命完成 ➔ 这与有限元方法不同
- 型线可变化多样：即同一方程不同物理量可选不同的型线；同一物理量不同坐标也可选不同的型线；同一物理量同一坐标在方程不同项中也可选不同型线
- 型线选择多样 ➔ 离散方程的多样性

3.3.2 控制容积
平衡法离散

此法不需要控制方程，直接通过物理量平衡条件得到离散格式



$$\rho(\phi_P^{t+\Delta t}-\phi_P^t)\Delta x_P=\rho\left[(u\phi)_w-(u\phi)_e\right]\Delta t+\Gamma_\phi\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]\Delta t+\overline{S}\Delta x_P\Delta t$$

等式右端各项的时间层次型线假设可采取三种不同方案：阶梯显式、阶梯全隐式、**C-N格式**

3.3.3 控制容积法离散方程的

四条基本规则

离散结果通用型式

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

四条基本规则

1. 控制容积界面上的相容性———控制体任意界面上各类通量（质量流量、动量流量、能量流量）都只能有一个值，这个值由界面的控制体共同确定

2. 离散方程求解函数各系数都是正值———只有这样，才能保证解的物理真实性

3. 源项线化时需取负斜率—只有这样，才能保证正系数原则（上一条）不致遭破坏

4.源项为常数的稳态问题满足邻近系数求和

$$a_P = \sum_{nb} a_{nb}$$