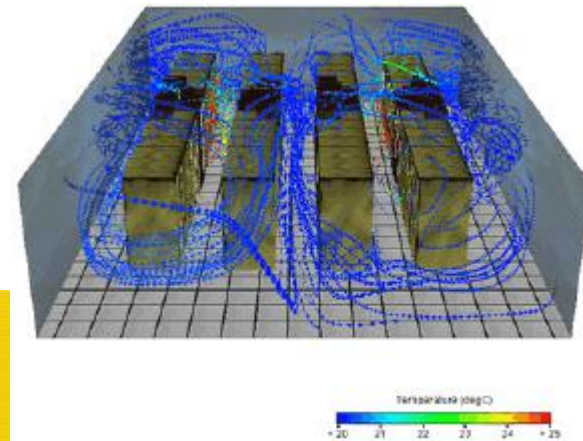
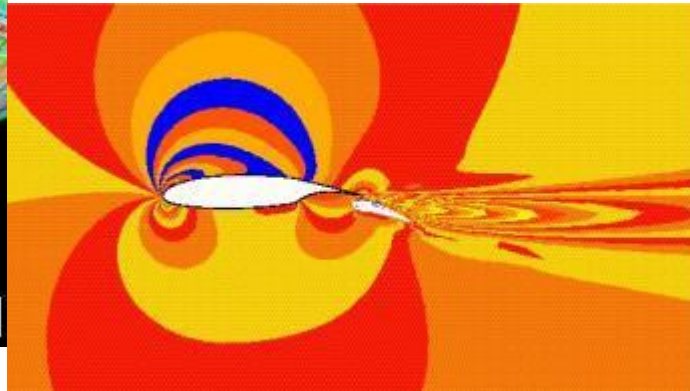
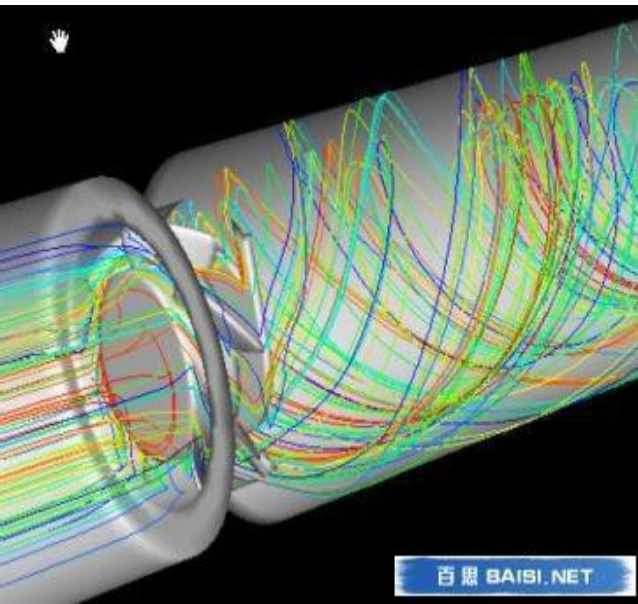


3.5 离散格式的定性分析



胡 茂 彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/>
humaobin@ustc.edu.cn

3.5.1 误差与精度

1. 截断误差 (T.E) 和精度

$$\text{T.E} = L(\phi(x_j, t_n)) - L_{\Delta}(\phi_j^n)$$

微分方程

差分离散方程

2. 舍入误差

(Round-off Error—R.E)

- 计算过程中，由机器字长的有效位数限制所引入的误差

3. 离散误差

(Discretization Error—D.E)

$$D.E = T.E + B.E$$

- B.E: Boundary Error 边界条件离散的误差

4. 计算误差

(Calculation Error—C.E)

$$\begin{aligned} \text{C.E} &= \text{N.E} = \text{D.E} + \text{R.E} \\ &= \text{T.E} + \text{B.E} + \text{R.E} \end{aligned}$$

T.E: 截断误差

B.E: 边界条件离散误差

R.E: 舍入误差

范 数

- 范数：函数空间中对函数相对大小的量度
- 范数是一个实数，又称作模

平方积分范数

(L_2 范数, Euclidean范数或空间模)

$$\|\phi\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

平方，积分，再开方

3.5.2 离散格式的相容性

- 相容性：指当网格步长趋于零时($h \rightarrow 0$)，离散格式（离散方程）趋于微分方程

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_{\Delta}(\phi_j^n) = L(\phi(x_j, t_n))$$

- 用范数表示

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L(\phi(x_j, t_n)) - L_{\Delta}(\phi_j^n)\| = 0$$

相容性

- 用截断误差的范数来表示

$$\lim_{h \rightarrow 0} |T.E| = 0$$

例3.5 一维扩散方程的D-F格式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (\sigma > 0)$$

- DuFort-Frankel 格式

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n-1} + 2\alpha \left[\phi_{j+1}^n - (\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1}) + \phi_{j-1}^n \right], \quad \alpha = \sigma \Delta t / \Delta x^2$$

泰勒展开

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \Delta t^2 - \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \dots$$

截断误差的量级：

$$\text{T.E} = O\left(\overset{0}{\Delta t^2}, \overset{0}{\Delta x^2}, \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)$$

$$\text{令 } \Delta t = O(\Delta x^m)$$

$$O\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = O\left(\left(\frac{\Delta x^m}{\Delta x}\right)^2\right) = O(\Delta x^{2(m-1)})$$

$$m > 1 \quad O\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = O(\Delta x^{2(m-1)}) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \quad \text{相容}$$

$$m < 1 \quad O\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = O(\Delta x^{2(m-1)}) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \infty \quad \text{不相容}$$

$$m = 1 \quad O\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = O(\Delta x^{2(m-1)}) = O(1) = A > 0$$

m=1时实际求解的方程

由于：

$$O\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = O(\Delta x^{2(m-1)}) = O(1) = A > 0$$

方程变为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (\sigma > 0, \quad \sigma_1 = \sigma A > 0)$$

结 论

- 此离散格式是有条件相容的
- 在截断误差中存在两个离散步长相除的情况时，要特别注意相容性条件！

