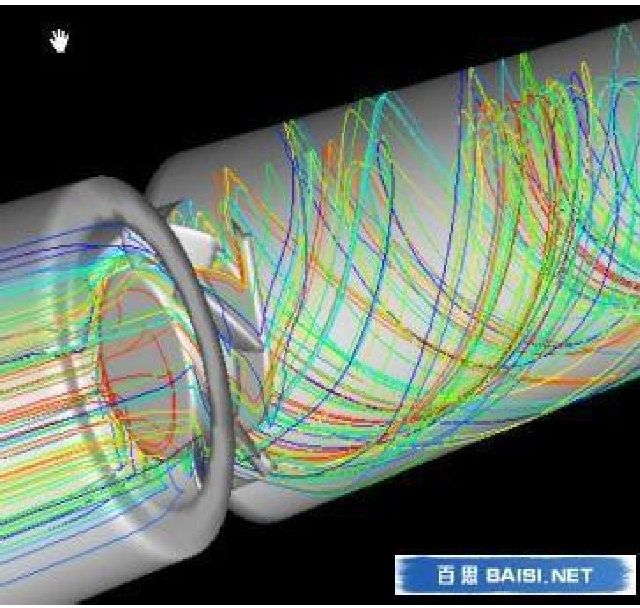
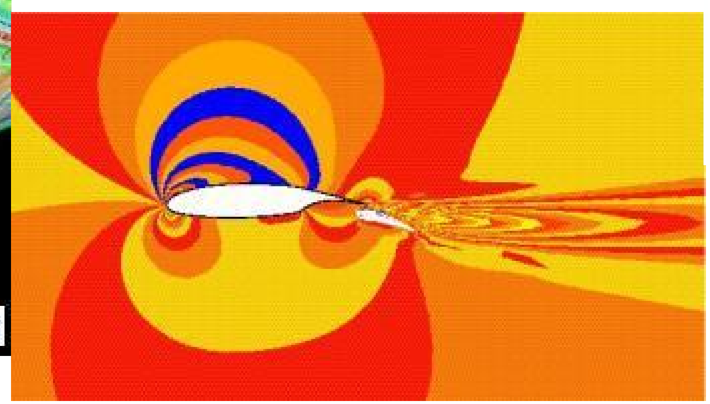
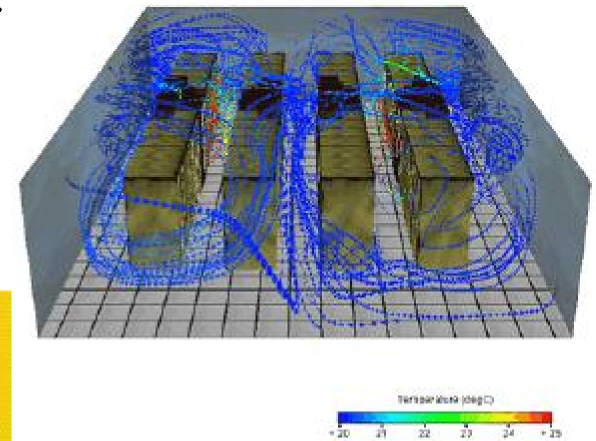
3.5 离散格式的定性分析II

收敛性稳定性







胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

3.5.3 离散格式的收敛性和稳定性

1. 离散格式的收敛性

- 当网格步长趋于零时(h→0)，在相同定解条件下，离散方程在解域任意离散点上的解趋于原方程在该点的真解

$$\lim_{\Delta t\to 0,\Delta x\to 0} \phi_j^n = \phi(x_j, t_n)$$

- 范数表示

$$\lim_{\Delta t\to 0,\Delta x\to 0} \left\| \phi(x_j, t_n) - \phi_j^n \right\| = 0$$

Lax等价定理

- 对于适定的线性偏微分方程初值问题所建立起来的相容离散格式，稳定性是收敛性的充分必要条件，即稳定性 → 收敛性

- 四个条件:

  1.适定

  2.线性偏微分方程

  3.满足相容性

  4.满足稳定性

2．初值问题离散格式的稳定性

- 稳定性：在时间或类时间的推进计算过程中，对误差具有抑制能力

- 强不稳定：计算中包含舍入误差在内的全部误差都增长；强稳定：计算中对所有误差都有抑制能力

- 弱不稳定：计算中只有舍入误差是增长的弱稳定：计算中对舍入误差有抑制能力

Fourier分析方法

(又称为von Neumann分析法)

Lax等价定理： 收敛性问题 ➔ 稳定性问题

假　定： 弱稳定 ➔ 强稳定

只需分析舍入误差即可

3.5.4 初值问题离散格式
稳定性分析方法

- 小扰动离散稳定性试验
- 双曲型方程显示格式的C-F-L条件
- von Neumann方法（Fourier分析法）
- 矩阵分析法（谱分析法）
- 能量分析法
- 修正方程分析法

von Neumann 分析方法

（Fourier分析方法）

(1) 稳定性分析 ➔ 误差函数演化特性分析

以一维稳态导热方程为例：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (\sigma > 0)$$

FTCS离散

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \alpha \left(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n \right), \quad \alpha = \sigma \Delta t / \Delta x^2$$

- 离散格式的精确解 D， 数值解 N， 误差 ε

$$N = D + \varepsilon$$

- 数值解 N 是按照差分格式演进：

$$N_j^{n+1} = N_j^n + \alpha\left(N_{j+1}^n - 2N_j^n + N_{j-1}^n\right)$$

- D是精确解，本身应满足：

$$D_j^{n+1} = D_j^n + \alpha\left(D_{j+1}^n - 2D_j^n + D_{j-1}^n\right)$$

误差函数的演化

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n + \alpha\left(\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n\right)$$

误差函数演化满足跟原离散格式的相同规律

FTCS格式：

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \alpha\left(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n\right), \qquad \alpha = \sigma\Delta t / \Delta x^2$$

稳定性

只需分析误差函数的
演化规律即可，
而其演化规律是满足
原离散格式

(2) von Neumann 稳定性分析方法

任意误差都可以展开成 Fourier 级数

$$\varepsilon(x,t)=\sum_m b_m(t)e^{ik_m x}$$

波数：

$$k_m = 2\pi/\lambda_m = \frac{2\pi}{2l/m} = \frac{m\pi}{l} \qquad m=0,1,2,\cdots,\mathrm{M}/2$$

最大最小波数：$k_{\min}=\dfrac{\pi}{l}, \quad k_{\max}=\dfrac{M\pi}{2l}$

基波：

$$\lambda_{\max}=2l=M\Delta x, \quad \lambda_{\min}=2\Delta x$$

线性条件下只需要分析一项

$$\varepsilon_m(x,t) = b_m(t)e^{ik_m x}$$

特解：

$$\varepsilon_m(x,t) = g^n e^{ik_m x}$$

时间因子：

$$g = e^{a\Delta t}$$

放大因子

$t = 0 \quad (n=0) \quad \varepsilon_m(x,0) = g^0 e^{ik_m x} = e^{ik_m x} = \varepsilon_m(x,0)$

$t = \Delta t \quad (n=1) \quad \varepsilon_m(x,\Delta t) = g e^{ik_m x} = e^{a\Delta t} e^{ik_m x} = g\varepsilon_m(x,0)$

$\vdots$

$t = n\Delta t \quad (n=n) \quad \varepsilon_m(x,n\Delta t) = g^n e^{ik_m x} = e^{at} e^{ik_m x} = g\varepsilon_m(x,(n-1)\Delta t)$

例3-6 一维非稳态导热方程FTCS格式稳定性

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \sigma \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\sigma > 0) \\ T(x,0) = e^{ikx} \end{cases}$$

初始误差（只取了一项）

FTCS格式

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \alpha\left(T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n\right), \quad \alpha = \sigma \Delta t / \Delta x^2$$

误差的演化

初始误差 $$T_j^0 = e^{ikx_j}$$

$$T_j^1 = T_j^0 + \alpha\left(T_{j+1}^0 - 2T_j^0 + T_{j-1}^0\right) = e^{ikx_j} + \alpha\left[e^{ik(x_j+\Delta x)} - 2e^{ikx_j} + e^{ik(x_j-\Delta x)}\right]$$

$$= e^{ikx_j}\left[1+\alpha\left(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}\right)\right] = e^{ikx_j}\left[1+2\alpha\left(\cos(k\Delta x)-1\right)\right]$$

$$= \left[1+2\alpha\left(\cos(k\Delta x)-1\right)\right]T_j^0$$

$$= gT_j^0$$

$$T_j^2 = gT_j^1 = g^2 T_j^0$$

$$T_j^{n+1} = gT_j^n = g^{n+1}T_j^0$$

放大因子

$$g = 1+2\alpha\left(\cos(k\Delta x)-1\right) = 1-4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2}$$

稳定性要求

放大因子 $|g| \le 1$

$$-1 \le 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \le 1$$

$$-1 \le 1 - 2\alpha$$

$\alpha \le 1/2$ 稳定条件 $\boldsymbol{\alpha = \sigma \Delta t / \Delta x^2}$

例3-7 二维非稳态导热方程 FTCS格式的稳定性

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \sigma\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \\ T(x,y,0) = e^{ik_x x + ik_y y} \end{cases} \qquad (\sigma > 0)$$

初始误差

FTCS格式：

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \alpha_x\left(T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}\right) + \alpha_y\left(T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}\right)$$

$$\alpha_x = \sigma\Delta t / \Delta x^2, \alpha_y = \sigma\Delta t / \Delta y^2$$

误差的演化

初始误差 $T_{i,j}^{0}=e^{i(k_x x_i+k_y y_j)}$

$$
\begin{aligned}
T_{i,j}^{1} &= T_{i,j}^{0}+\alpha_x\left(T_{i+1,j}^{0}-2T_{i,j}^{0}+T_{i-1,j}^{0}\right)+\alpha_y\left(T_{i,j+1}^{0}-2T_{i,j}^{0}+T_{i,j-1}^{0}\right)\\
&=\left[1+\alpha_x\left(e^{ik_x\Delta x}-2+e^{-ik_x\Delta x}\right)+\alpha_y\left(e^{ik_y\Delta y}-2+e^{-ik_y\Delta y}\right)\right]T_{i,j}^{0}\\
&=\left[1+2\alpha_x\left(\cos(k_x\Delta x)-1\right)+2\alpha_y\left(\cos(k_y\Delta y)-1\right)\right]T_{j}^{0}\\
&=\left[1-4\alpha_x\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2}-4\alpha_y\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}\right]T_{j}^{0}\\
&=gT_{j}^{0}
\end{aligned}
$$

放大因子

$$
g=1-4\alpha_x\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2}-4\alpha_y\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}
$$

稳定性要求

$$|g| \le 1 \qquad -1 \le 1 - 4\alpha_x \sin^2\frac{k_x\Delta x}{2} - 4\alpha_y \sin^2\frac{k_y\Delta y}{2} \le 1$$

即：

$$\alpha_x \sin^2\frac{k_x\Delta x}{2} + \alpha_y \sin^2\frac{k_y\Delta y}{2} \le \frac{1}{2}$$

⇓

$$\alpha_x + \alpha_y \le 1/2$$

有条件稳定

例3-8 二维非稳态导热方程
分裂C-N格式的稳定性

$$
\begin{cases}
T_t = \sigma T_{xx} \\
T_t = \sigma T_{yy} \\
T(x,y,0) = e^{ik_x x + ik_y y}
\end{cases}
$$

初始误差

离散：

$$
\frac{\overline{T}_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2\Delta x^2}\left(\delta_x{}^2 \overline{T}_{i,j}^{n+1} + \delta_x{}^2 T_{i,j}^{n}\right)
$$

$$
\frac{T_{i,j}^{n+1} - \overline{T}_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\sigma}{2\Delta y^2}\left(\delta_y{}^2 \overline{T}_{i,j}^{n+1} + \delta_y{}^2 T_{i,j}^{n+1}\right)
$$

$$\left(1-\frac{\alpha_x}{2}\delta_x{}^2\right)\overline{T}_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{\alpha_x}{2}\delta_x{}^2\right)T_{i,j}^{n}, \qquad \alpha_x=\sigma\Delta t/\Delta x^2$$

$$\left(1-\frac{\alpha_y}{2}\delta_y{}^2\right)T_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{\alpha_y}{2}\delta_y{}^2\right)\overline{T}_{i,j}^{n+1}, \qquad \alpha_y=\sigma\Delta t/\Delta y^2$$

$$\left(1-\frac{\alpha_y}{2}\delta_y{}^2\right)\left(1-\frac{\alpha_x}{2}\delta_x{}^2\right)T_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{\alpha_y}{2}\delta_y{}^2\right)\left(1+\frac{\alpha_x}{2}\delta_x{}^2\right)T_{i,j}^{n}$$

误差的演化

初始误差：$$T_{i,j}^{0}=e^{i(k_x x_i+k_y y_j)}$$

$$\delta_x{}^2 T_{i,j}=T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}=-2\left(1-\cos(k_x\Delta x)\right)T_{i,j}$$

$$\delta_y{}^2 T_{i,j}=T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}=-2\left(1-\cos(k_y\Delta y)\right)T_{i,j}$$

$$\left(1-\frac{\alpha_y}{2}\delta_y{}^2\right)\left(1-\frac{\alpha_x}{2}\delta_x{}^2\right)T_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{\alpha_y}{2}\delta_y{}^2\right)\left(1+\frac{\alpha_x}{2}\delta_x{}^2\right)T_{i,j}^{n}$$

$$\left[1+\alpha_y\left(1-\cos(k_y\Delta y)\right)\right]\left[1+\alpha_x\left(1-\cos(k_x\Delta x)\right)\right]g^{n+1}T_{i,j}^{0}$$
$$=\left[1-\alpha_y\left(1-\cos(k_y\Delta y)\right)\right]\left[1-\alpha_x\left(1-\cos(k_x\Delta x)\right)\right]g^{n}T_{i,j}^{0}$$

放大因子

$$g=\frac{\left[1-2\alpha_y\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}\right]\left[1-2\alpha_x\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2}\right]}{\left[1+2\alpha_y\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}\right]\left[1+2\alpha_x\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2}\right]}$$

$$|g|\le 1$$

恒稳定

2 矩阵分析方法
(谱分析方法)

对所有节点离散方程所组合起来的方程组进行全局分析，包括内部节点和边界节点

问题求解的矢量型式

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{n} + \boldsymbol{F}$$

未知时层　　　　　　已知时层

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{U}^{n} + \boldsymbol{D}$$

全局稳定型分析

误差函数演化：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{n} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{n}$$

要求：

$$\|\boldsymbol{G}\| \le 1 \quad \text{or} \quad \|\boldsymbol{G}^n\| \le K \ (K\text{为常数})$$

一步放大　　　　n步累积放大

谱半径

- 谱半径：矩阵所有特征值绝对值的最大值

$$\rho(\boldsymbol{G}) = \max_{1 \le j \le J-1} \left| \lambda_j(\boldsymbol{G}) \right| \le 1$$

例3-10 一维非稳定导热方程第1类边界条件

FTCS格式的稳定性

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ \ 0\le x\le 1,\quad (\sigma>0)$$

$$T(x,0)=F(x)$$

$$T(0,t)=f_1(t),\ \ T(1,t)=f_2(t)$$

FTCS格式离散：

$$T_j^{n+1}=T_j^n+\alpha\left(T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n\right)=\alpha T_{j-1}^n+(1-2\alpha)T_j^n+\alpha T_{j+1}^n,\quad \alpha=\sigma\Delta t/\Delta x^2$$

边界条件

$$T_j^{n+1} = \alpha T_{j-1}^n + (1-2\alpha) T_j^n + \alpha T_{j+1}^n$$

左边界

$$T_1^{n+1} = (1-2\alpha)T_1^n + \alpha T_2^n + \alpha T_0^n$$

右边界

$$T_{J-1}^{n+1} = \alpha T_{J-2}^n + (1-2\alpha)T_{J-1}^n + \alpha T_J^n$$

总的离散方程组

$$
\begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{J-2}^{n+1} \\ T_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1-2\alpha & \alpha & & & & \\
\alpha & 1-2\alpha & \alpha & & & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & 0 & & \alpha & 1-2\alpha & \alpha \\
 & & & & \alpha & 1-2\alpha
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T_1^{n} \\ T_2^{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{J-2}^{n} \\ T_{J-1}^{n} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} \alpha f_1^n \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \alpha f_2^n \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{T}^{n+1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{T}^{n} + \boldsymbol{D}^{n}
$$

等价齐次方程

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{n}$$

三对角对称矩阵的特征值

$$\lambda_j = l_2 + 2\sqrt{l_1 l_3}\cos\frac{j\pi}{J}\ , \qquad j = 1, 2, \cdots J-1$$

$$\lambda_j(\mathbf{G}) = 1 - 2\alpha + 2\alpha\cos\frac{j\pi}{J} = 1 - 4\alpha\sin^2\frac{j\pi}{2J}\ , \qquad j = 1, 2, \cdots J-1$$

格式稳定性要求

$$\rho(\boldsymbol{G}) = \max_j \left|\lambda_j\right| = \max_j \left|1 - 4\alpha \sin^2 \frac{j\pi}{2J}\right| \le 1, \qquad j = 1, 2, \cdots J - 1$$

即：

$$\left|1 - 4\alpha \sin^2 \frac{j\pi}{2J}\right| \le 1, \qquad j = 1, 2, \cdots J - 1$$

结果：

$$\alpha \le 1/2$$

总结

谱分析方法是一种精确的分析方法

高维条件下矩阵特征值计算十分复杂，困难

局部分析常用此法

例3-11 一维对流方程组非一致离散格式的稳定性

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

非一致离散：前方程FTCS，后方程BTCS

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + c(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n)/2 \\ w_j^{n+1} = w_j^n + c(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})/2 \\ v_j^0 = v_0 e^{ikx_j},\ w_j^0 = w_0 e^{ikx_j} \end{cases}$$

(其中 $c = a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$)

初始误差

矢量型式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + c(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n)/2 \\ w_j^{n+1} = w_j^n + c(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})/2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j+1}^{n+1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j}^{n+1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j-1}^{n+1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j+1}^{n} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j}^{n} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U}_{j-1}^{n}$$

演 化

未知时层　　　　　　　　　　　　已知时层

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix} e^{ik\Delta x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix} e^{-ik\Delta x}\right\} \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik\Delta x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-ik\Delta x}$$

引入 $\beta = c\sin(k\Delta x)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得：

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ i\beta & 1-\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ i\beta & 1-\beta^2 \end{pmatrix}$$

特征方程： $|\boldsymbol{G} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$

即： $\lambda^2 - \lambda(2-\beta^2) + 1 = 0$

不稳定

1) $\beta^2 - 4 > 0$ $\lambda_1 \lambda_2 = 1$

2) $\beta^2 - 4 = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$ 稳定

3) $\beta^2 - 4 < 0$ $\lambda = \left[2 - \beta^2 \pm i\sqrt{\beta^2(4-\beta^2)} \right] / 2$ 稳定

稳定条件 $-2 \le c \le 2 \quad (c = a\Delta t / \Delta x)$