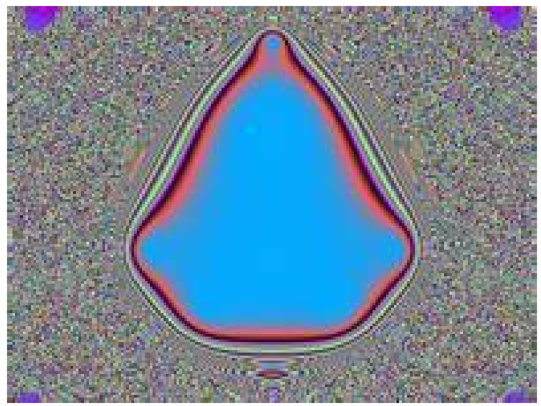
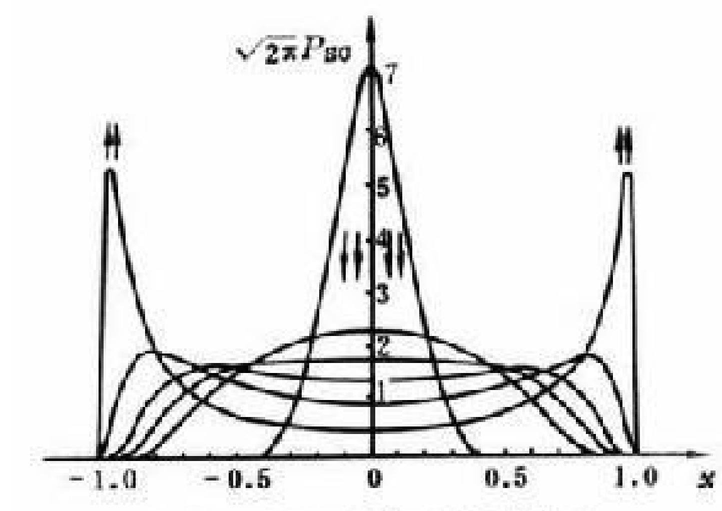
# 3.5.5 离散格式的定性分析III
# 耗散性、色散性

胡 茂 彬
http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/
humaobin@ustc.edu.cn

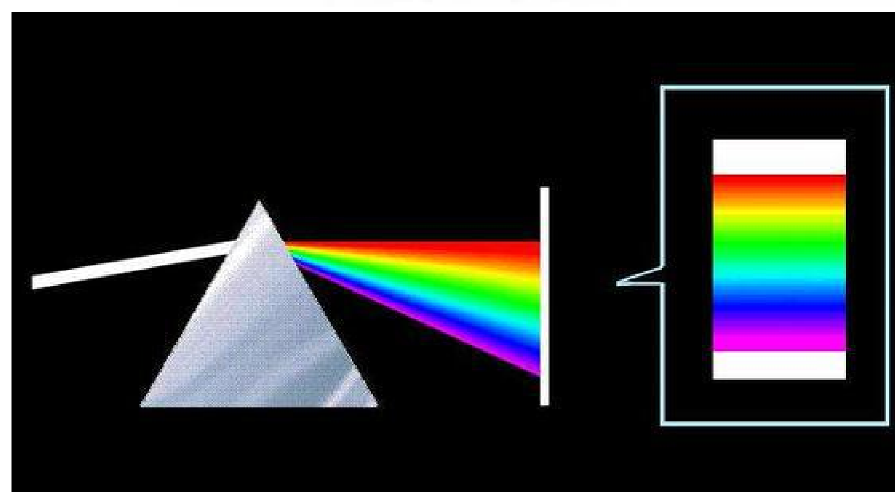
# 数值计算导致变形和失真

- 歧变现象：
- 耗散现象：
- 色散现象：






$P_{so}(x,t)$的x分布随时间的变化



# 1.修正的偏微分方程 (MPDE)

时间导数项 —自循环相消→ 空间导数项

# 例 一维波动方程一阶迎风格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a > 0)$$

一阶迎风格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c(u_j^n - u_{j-1}^n) \qquad (c = a\Delta t/\Delta x)$$

# 泰勒展开

$$u_t + au_x = -\frac{\Delta t}{2}u_{tt} + \frac{a\Delta x}{2}u_{xx} - \frac{\Delta t^2}{6}u_{ttt} - \frac{a\Delta x^2}{6}u_{xxx} + \cdots$$

$$u_t + au_x + \frac{\Delta t}{2}u_{tt} - \frac{a\Delta x}{2}u_{xx} + \frac{\Delta t^2}{6}u_{ttt} + \frac{a\Delta x^2}{6}u_{xxx} + \cdots = 0$$

# 自循环消元的推导过程

# 修正偏微分方程 (MPDE)

a>0 一阶迎风格式 MPDE：

$$u_t + a u_x = \frac{a\Delta x}{2}(1-c)u_{xx} - \frac{a\Delta x^2}{6}(2c-1)(c-1)u_{xxx} + \cdots$$

a<0 一阶迎风格式 MPDE：

$$u_t + a u_x = \frac{a\Delta x}{2}(1+c)u_{xx} - \frac{a\Delta x^2}{6}(2c+1)(c+1)u_{xxx} + \cdots$$

# 扩散方程的 MPDE

$$u_t - \sigma u_{xx} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

## BTCS 格式的MPDE

$$u_t - \sigma u_{xx} = \frac{\sigma \Delta x^2}{12}(1+6\alpha)u_{xxxx} + \frac{\sigma \Delta x^4}{360}(120\alpha^2 + 30\alpha + 1)u_{xxxxxx} + \cdots$$

## C-N 格式 MPDE

$$u_t - \sigma u_{xx} = \frac{\sigma \Delta x^2}{12}u_{xxxx} + \frac{\sigma \Delta x^4}{360}(30\alpha + 1)u_{xxxxxx} + \cdots$$

# MPDE 通用形式

$$L(\phi(x_j, t_n)) = \sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{2m+1} \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}$$

偶数阶
耗散项

奇数阶
色散项

# 2. 用MPDE判断格式的耗散性和色散性

耗散和色散主项：最低阶的耗散项和色散项

$$L(\phi(x_j,t_n)) = \sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{2m+1} \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}$$

耗散主项： $(-1)^L \nu_{2L} < 0$ 正耗散 反之 逆耗散

色散主项： $(-1)^M \mu_{2M+1} < 0$ 正色散 反之 负色散

- 热传导方程MPDE：一般没有奇阶导数项，逆耗散格式是可用的，且绝对稳定，因为自身还有耗散项

- 对流方程MPDE：逆耗散格式肯定不稳定，因此不可用

# 3.5.6 离散格式的定性分析IV

# 守恒性

# 守恒性定义和条件

对离散方程定义域的有限空间作求和，所得表达式满足该区域上物理量守恒关系

1. 从守恒型控制方程出发进行离散

2. 使同一界面两侧具有相同函数值和函数通量值

守恒型方程：

对流项用散度形式写出

# 例：一维对流问题

- 守恒型方程：$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial u\phi}{\partial x}=0$$

- 非守恒型方程：$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$$

# 1) 守恒型

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial u\phi}{\partial x}=0 \Longrightarrow \frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}=-\left(\frac{(u\phi)_{j+1}^n-(u\phi)_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

求和：

$$\sum_{J_1}^{J_2}(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)\Delta x=-\frac{1}{2}\sum_{J_1}^{J_2}[(u\phi)_{j+1}^n-(u\phi)_{j-1}^n]\Delta t$$

$$\sum_{J_1}^{J_2}[(u\phi)_{j+1}^n-(u\phi)_{j-1}^n]=[(u\phi)_{J_1+1}^n-(u\phi)_{J_1-1}^n]+[(u\phi)_{J_1+2}^n-(u\phi)_{J_1}^n]+$$

$$[(u\phi)_{J_1+3}^n-(u\phi)_{J_1+1}^n]+\cdots+[(u\phi)_{J_2-1}^n-(u\phi)_{J_2-3}^n]+[(u\phi)_{J_2}^n-(u\phi)_{J_2-2}^n]$$

$$+[(u\phi)_{J_2+1}^n-(u\phi)_{J_2-1}^n]=-[(u\phi)_{J_1}^n+(u\phi)_{J_1-1}^n]+[(u\phi)_{J_2+1}^n+(u\phi)_{J_2}^n]$$

# 边界通量

$$(u\phi)_{in} = [(u\phi)^n_{J_1} + (u\phi)^n_{J_1-1}]/2, \qquad (u\phi)_{out} = [(u\phi)^n_{J_2+1} + (u\phi)^n_{J_2}]/2$$

得到：

$$\sum_{J_1}^{J_2}(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)\Delta x = \left[(u\phi)_{in} - (u\phi)_{out}\right]\Delta t$$

具有守恒性

# 2) 非守恒型

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} = -u_j \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

求和结果:

$$\sum_{J_1}^{J_2} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)\Delta x = -\frac{1}{2}\sum_{J_1}^{J_2} [u_j(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n)]\Delta t$$

仅在匀速流动时
具有守恒性

# 讨 论

- 格式具有守恒性是好的，但并非必须。有限容积法要求从守恒方程出发离散，而有限差分法并无此要求

- 守恒性并非意味着准确性

- 某些非守恒型的格式也能算出准确结果，例：双曲方程的特征线法，边界层流动

# 3.5.7 离散格式的定性分析V 迁移性

即迎风性

是对流项离散的要求

# 迁 移 性

- 对流项离散格式，仅能使扰动顺着流动方向传递的特性 ➔ 迎风性/传输性
- 对流项离散必须满足迎风性
- 一般采用 离散扰动分析法

# 例 一维匀流方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad u = \text{常数}$$

$$\phi(x_j, t_n) = \varepsilon \qquad \text{其余} \quad \phi(x, t_n) = 0$$

初始微扰

显式中心差分FTCS格式

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - c(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n)/2, \qquad c = u\Delta t / \Delta x$$

# 初始微扰的传播演化

j+1 节点：

$$\phi_{j+1}^{n+1} = \phi_{j+1}^{n} - c(\phi_{j+2}^{n} - \phi_{j}^{n})/2$$

$$= c\phi_j^n / 2 = c\varepsilon / 2$$

j-1 节点：

$$\phi_{j-1}^{n+1} = -c\phi_j^n / 2 = -c\varepsilon / 2$$

初始微扰会向两个方向传播 ➔ 无迁移性

# 一阶迎风格式

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - c(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n), \qquad c = u\Delta t / \Delta x < 0$$

j+1节点：

$$\phi_{j+1}^{n+1} = \phi_{j+1}^n - c(\phi_{j+2}^n - \phi_{j+1}^n) \;= \mathbf{0}$$

j-1节点：

$$\phi_{j-1}^{n+1} = \phi_{j-1}^n - c(\phi_j^n - \phi_{j-1}^n) = -c\varepsilon$$

初始扰动向单方向传播 ➔ 具有迁移性