4.1.5 边界条件的引入

胡 茂 彬

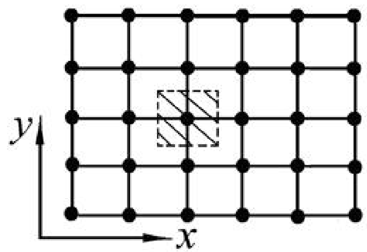
http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

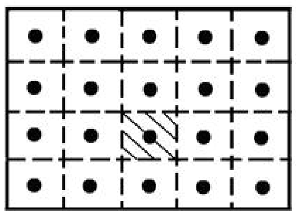
网格划分和边界条件

- 网格划分：

点中心



块中心



- 边界条件：

  1 函数值(Dirichilet)

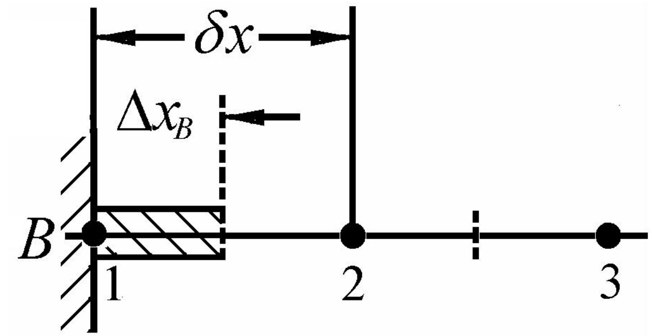
  2 导数值(Newman)

  3导数值与函数值的关系(Robin)

第1类边界条件

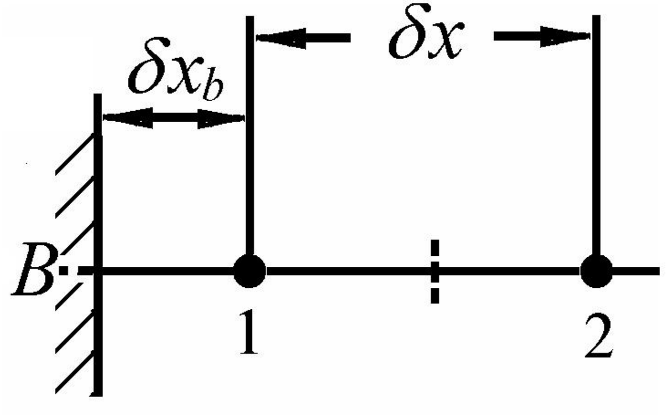
- 点中心：

直接转移 $T_1 = T_B$



- 块中心：

直接外推 $T_1 = T_B$ （一阶精度）

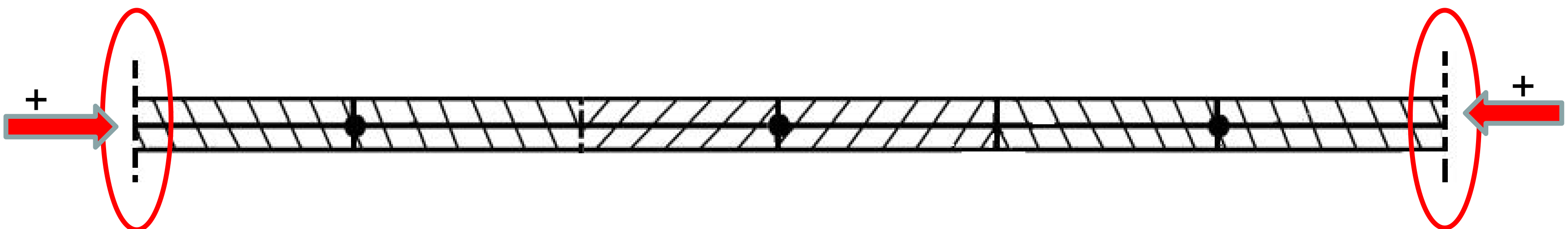


插值 $(3T_1 - T_2)/2 = T_B$

（二阶精度）

第2第3类边界条件

- 在处理边界条件时，通常约定通过边界流入系统的热流值为正，流出为负。



$$q_B = -\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_B$$

$$q_B = \left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_B$$

第2第3类边界条件

- **点中心情况**：边界值待求，需按给定的边界条件及方程在边界节点上的离散形式建立代数方程
- **块中心情况**：边界上无节点

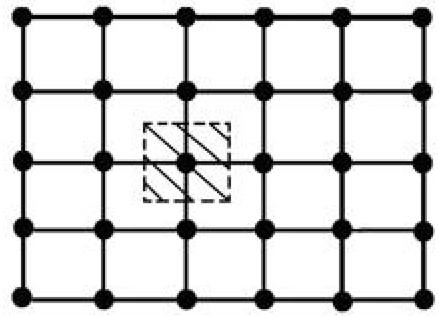
(1) 补充边界节点法

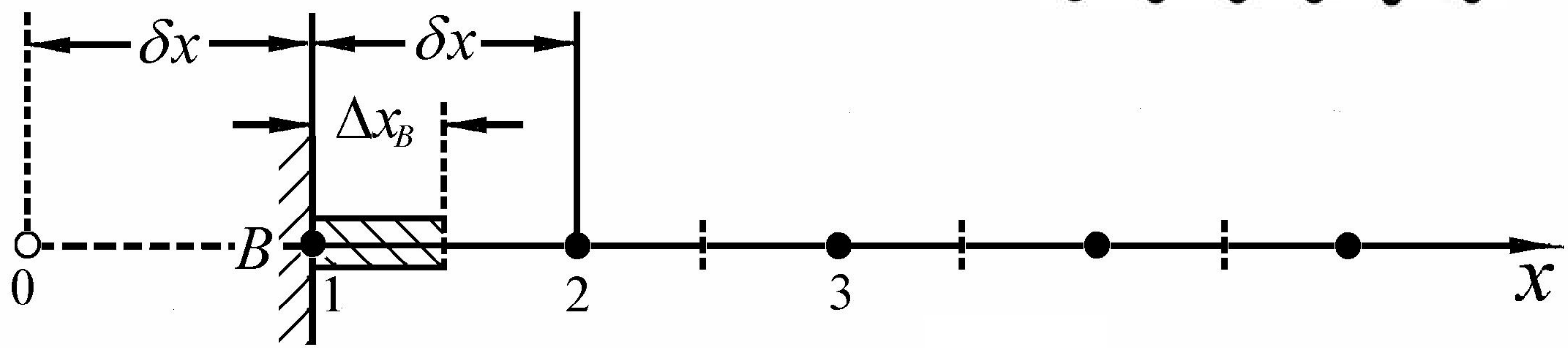
(2) 附加源项法

以下均以“一维稳态问题”的左边界为例进行说明

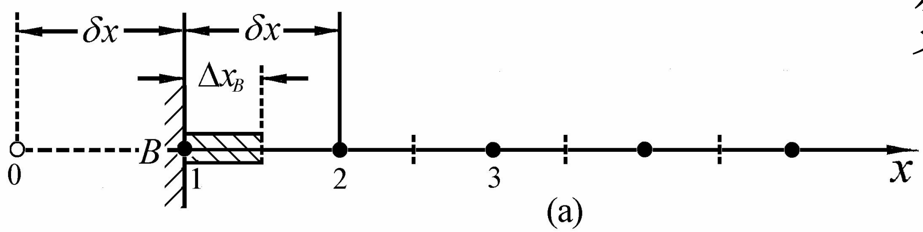
1. 点中心网格(左边界)

点中心法、外节点法、A法





(1) 采用有限差分方法



第2类边界条件

$$q_B = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_B$$

$$\frac{\lambda}{\delta x} T_1 = \frac{\lambda}{\delta x} T_2 + q_B$$

一阶精度

$$\lambda \frac{T_2 - T_0}{2\delta x} = -q_B$$

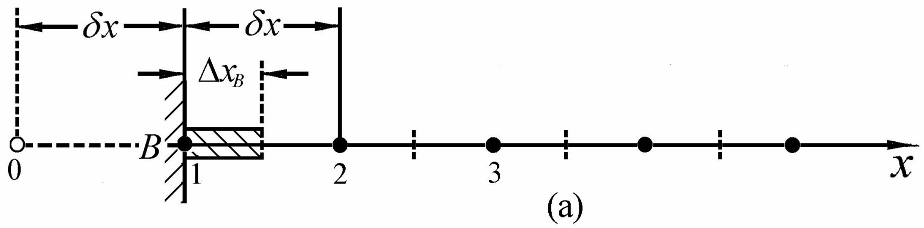
开拓网格
二阶精度

为消去T0，利用一维稳态有源导热方程在边界节点‘1’的差分离散式：

$$\lambda \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{(\delta x)^2} + S_C + S_P T_1 = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\delta x} - S_P (\Delta x)_B \right) T_1 = \left(\frac{\lambda}{\delta x} \right) T_2 + S_C (\Delta x)_B + q_B$$

第3类边界条件(点中心左边界)



$$q_B = h(T_f - T_B)$$

$$q_B = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_B$$

$$\frac{\lambda}{\delta x}T_1 = \frac{\lambda}{\delta x}T_2 + q_B$$

一阶精度

$$\left(\frac{\lambda}{\delta x}+h\right)T_1 = \frac{\lambda}{\delta x}T_2 + hT_f$$

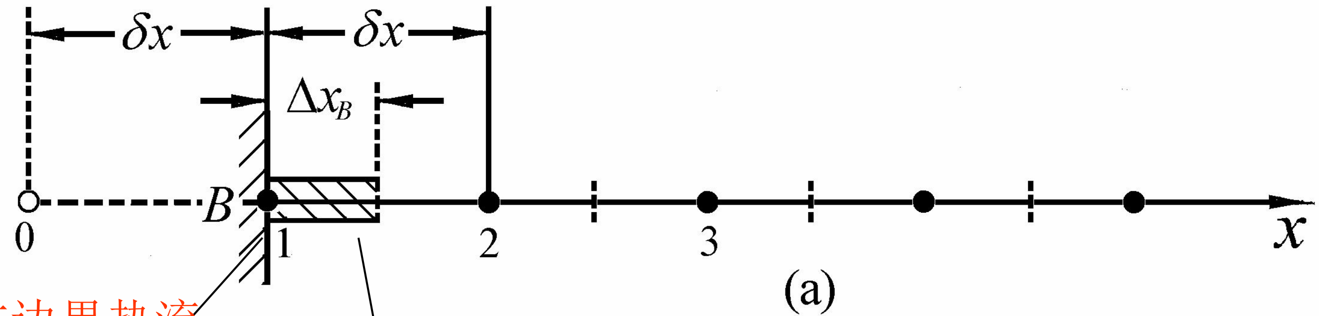
$$\left(\frac{\lambda}{\delta x} - S_P(\Delta x)_B\right)T_1 = \left(\frac{\lambda}{\delta x}\right)T_2 + S_C(\Delta x)_B + q_B$$

开拓网格

二阶精度

$$\left(\frac{\lambda}{\delta x} - S_P(\Delta x)_B + h\right)T_1 = \frac{\lambda}{\delta x}T_2 + S_C(\Delta x)_B + hT_f$$

(2) 采用控制容积平衡法



左右边界热流

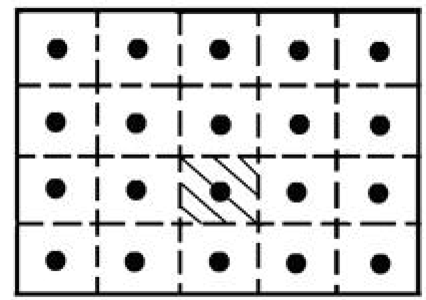
内热源作用

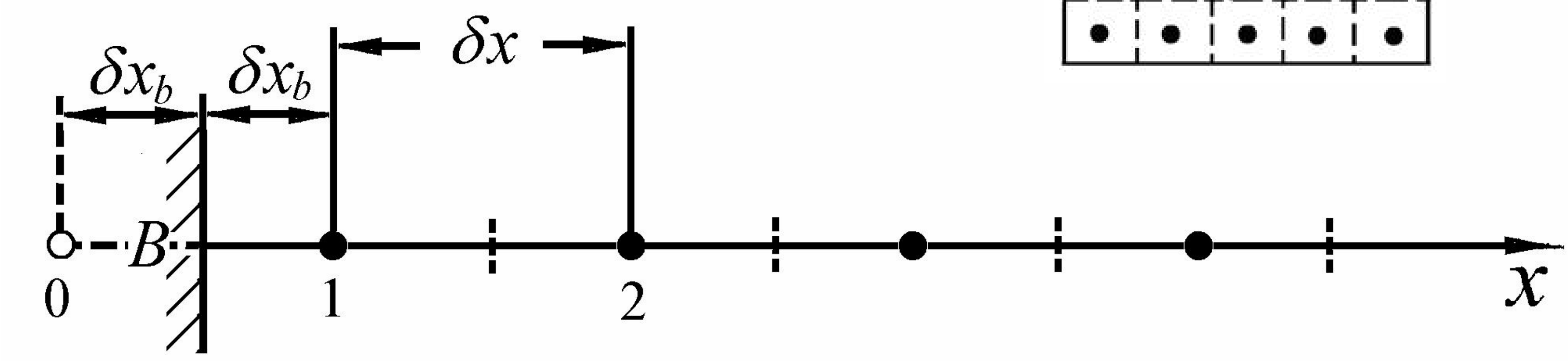
$$q_B + \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e + \underline{(S_C + S_P T_1)(\Delta x)_B} = 0$$

右边界热流： $$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \lambda\frac{T_2 - T_1}{\delta x}$$

2. 块中心网格(左边界)

块中心法、内节点法，B法



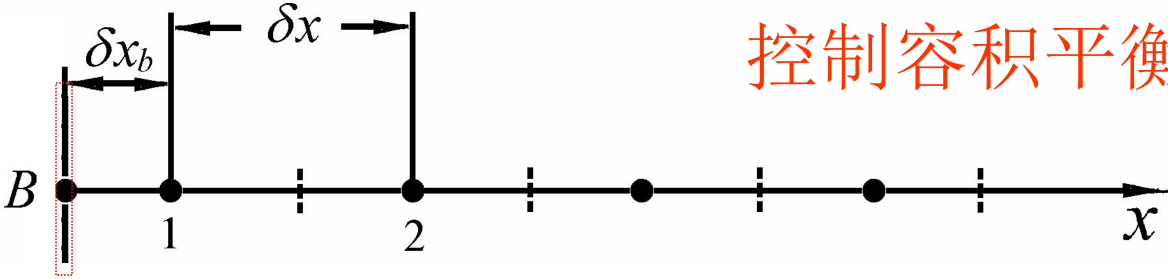


(1) 补充边界节点法

(2) 附加源项法

(1) 补充边界节点

控制容积平衡法离散



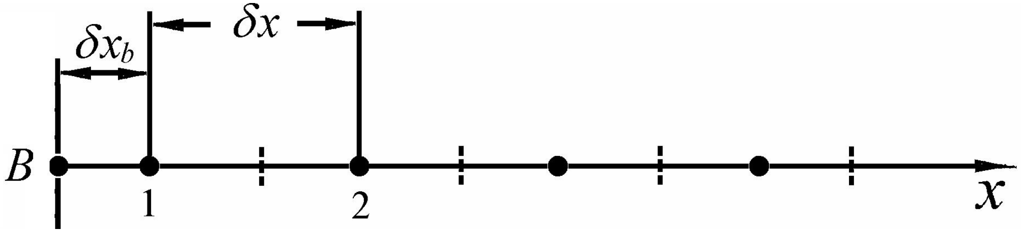
零控制体

$$(\Delta x)_B = 0$$

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + \underline{\left(S_C + S_P T_1\right)(\Delta x)_B} = 0$$

内热源作用

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{\lambda}{\delta x_b}(T_1 - T_B), \qquad -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = q_B$$



$$\frac{\lambda}{\delta x_b} T_B = \frac{\lambda}{\delta x_b} T_1 + q_B$$

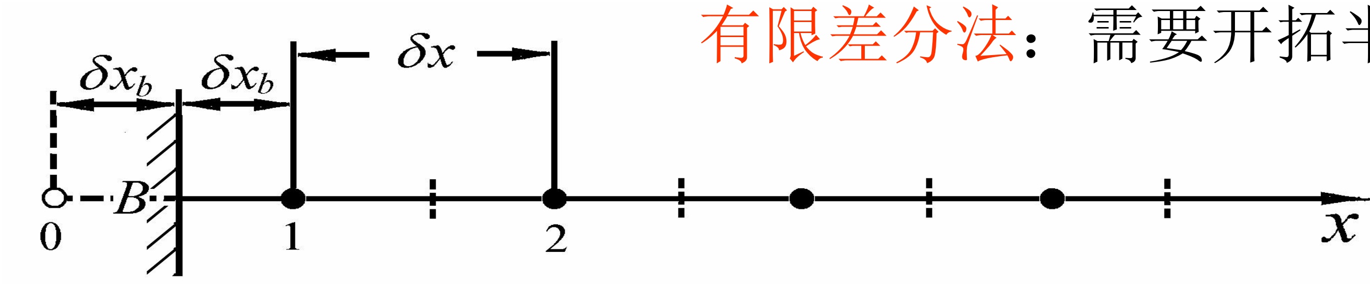
- 第3类边界条件

$$q_B = h(T_f - T_B)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\delta x_b} + h \right) T_B = \frac{\lambda}{\delta x_b} T_1 + h T_f$$

(1) 补充边界节点

有限差分法：需要开拓半个网格



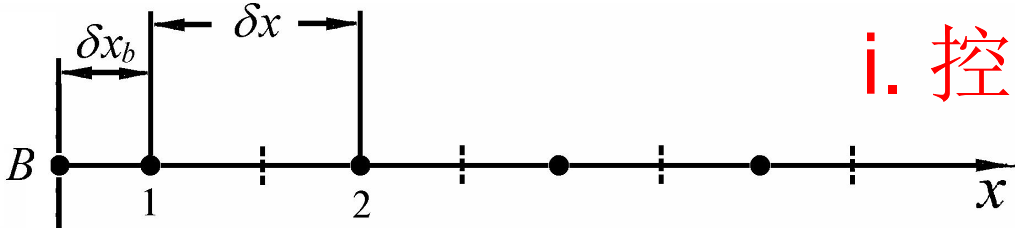
$$q_B = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_B = \frac{\lambda}{2\delta x_b}(T_0 - T_1)$$

为消掉T0，假设 $$T_B = (T_1 + T_0)/2$$

得到 $$\frac{\lambda}{\delta x_b}T_B = \frac{\lambda}{\delta x_b}T_1 + q_B$$

第3类边界条件 $q_B = h(T_f - T_B)$ 得到 $$\left(\frac{\lambda}{\delta x_b} + h\right)T_B = \frac{\lambda}{\delta x_b}T_1 + hT_f$$

(2) 附加源项法



i. 控制容积积分法

离散方程在节点1
上的表达式：

$$a_1T_1 = a_2T_2 + a_BT_B + b$$

消去 TB 和 aB

$$(a_1 - a_B)T_1 = a_2T_2 + a_B(T_B - T_1) + b$$

$$a_1 - a_B = a_2 - S_P\delta x$$

$$q_B = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_B = \frac{\lambda}{\delta x_b}(T_B - T_1) = a_B(T_B - T_1)$$

最终结果热流表现为源项

$$\overline{a_1}T_1 = a_2T_2 + \overline{b}$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{\delta x}, \quad \overline{a_1} = a_2 - S_P\delta x, \quad \overline{b} = S_C\delta x + q_B$$

附加源项

编程实现方法

$$a_1T_1 = a_2T_2 + a_BT_B + b$$

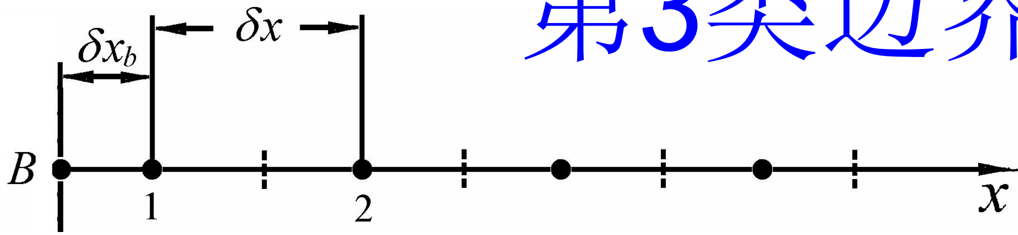
1 将内点离散方程应用在边界节点‘1’上

2 将系数 a_B 设为0

3 将边界热流加到非齐次项 b 上

$$a_2 = \frac{\lambda}{\delta x}, \quad \overline{a_1} = a_2 - S_P\delta x, \quad \overline{b} = S_C\delta x + q_B$$

第3类边界条件



$$q_B = h(T_f - T_B) = \frac{\lambda}{\delta x_b}(T_B - T_1) = a_B(T_B - T_1)$$

消去T_B

$$q_B = \frac{T_f - T_1}{1/h + \delta x_b/\lambda}$$

$$\boxed{\overline{\overline{a}}_1 T_1 = a_2 T_2 + \overline{\overline{b}}}$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{\delta x}, \quad \overline{\overline{a}}_1 = a_2 - S_P \delta x + \frac{1}{1/h + \delta x_b/\lambda}, \quad \overline{\overline{b}} = S_C \delta x + \frac{T_f}{1/h + \delta x_b/\lambda}$$

编程实现方法

$$a_1T_1 = a_2T_2 + a_BT_B + b$$

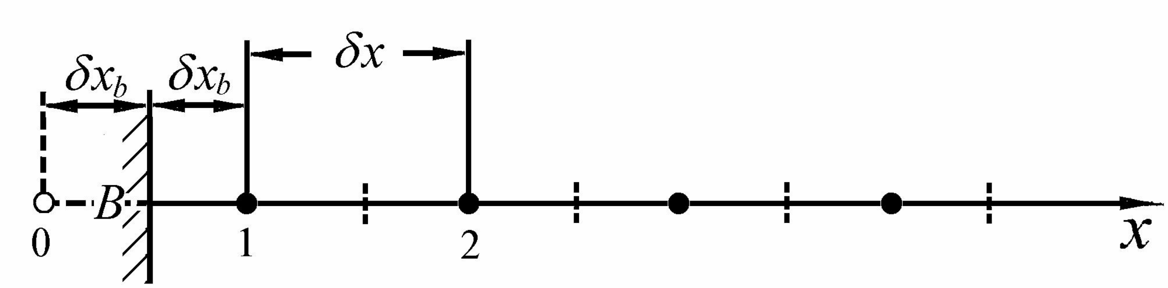
1 将内点离散方程应用在边界节点‘1’上

2 将系数 a_B 设为0

3 将边界热流加到系数a_1和非齐次项 b 上

$$a_2 = \frac{\lambda}{\delta x},\quad \overline{\overline{a_1}} = a_2 - S_P\delta x + \frac{1}{1/h + \delta x_b/\lambda},\quad \overline{\overline{b}} = S_C\delta x + \frac{T_f}{1/h + \delta x_b/\lambda}$$

(ii) 采用有限差分法



- 开拓半个网格，节点0

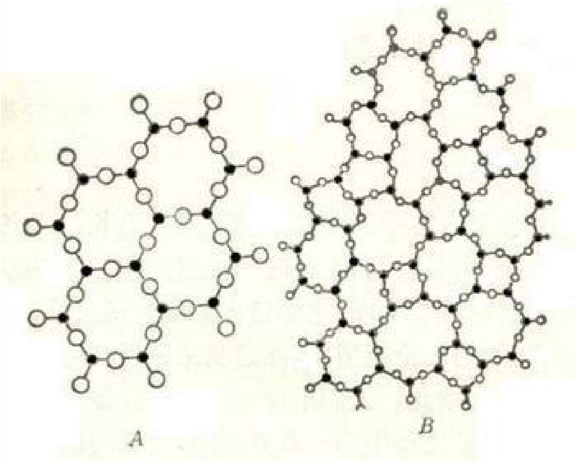
$$a_1 T_1 = a_2 T_2 + a_0 T_0 + b$$

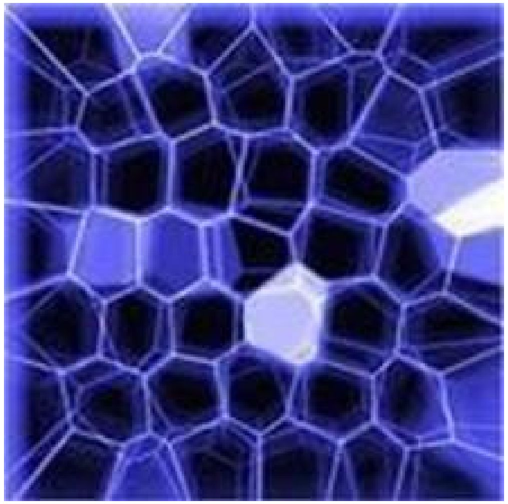
$$q_B = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_B = \frac{\lambda}{2\delta x_b}(T_0 - T_1)$$

$$a_1 T_1 = a_2 T_2 + a_0 \left(\frac{2\delta x_b}{\lambda} q_B + T_1 \right) + b$$

4.1.6 离散方程的非线性性质处理

- 非线性：当导热系数依赖于求解函数温度T时，则离散代数方程的系数也是温度T的函数，方程具有非线性性质。





系数迭代更新法

- 最简单的线化迭代求解方法:

(1) 给出节点温度的试探值作为迭代初值；

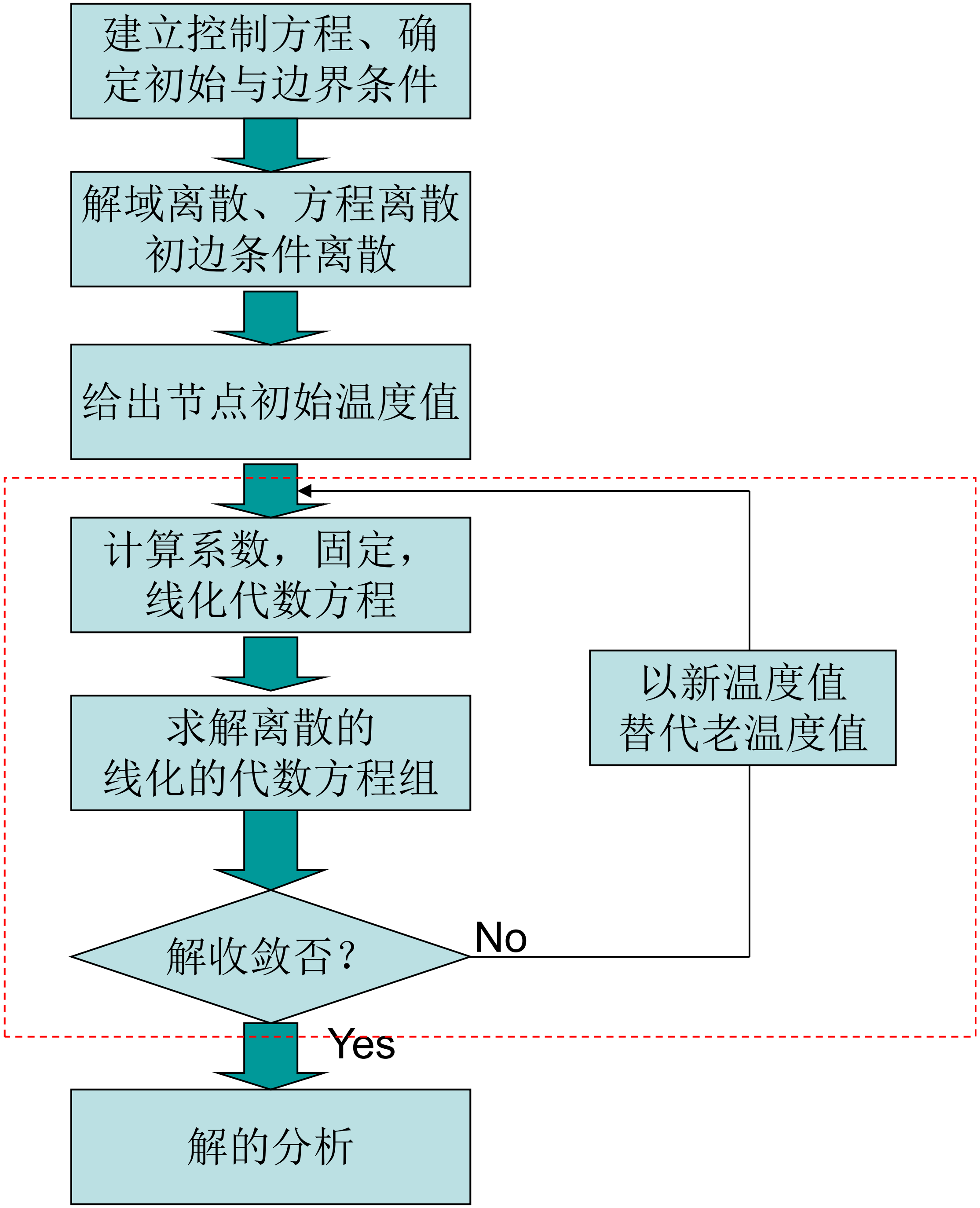
(2) 用迭代初值计算离散方程中系数值，固定系数，将方程线化；

(3) 求解线化的代数方程组，得到新温度值；

(4) 用新温度值替代迭代初值，返回至步骤2，重复其计算过程，一次次更新系数，一次次线化并求解方程，直到迭代收敛。

流 程 图

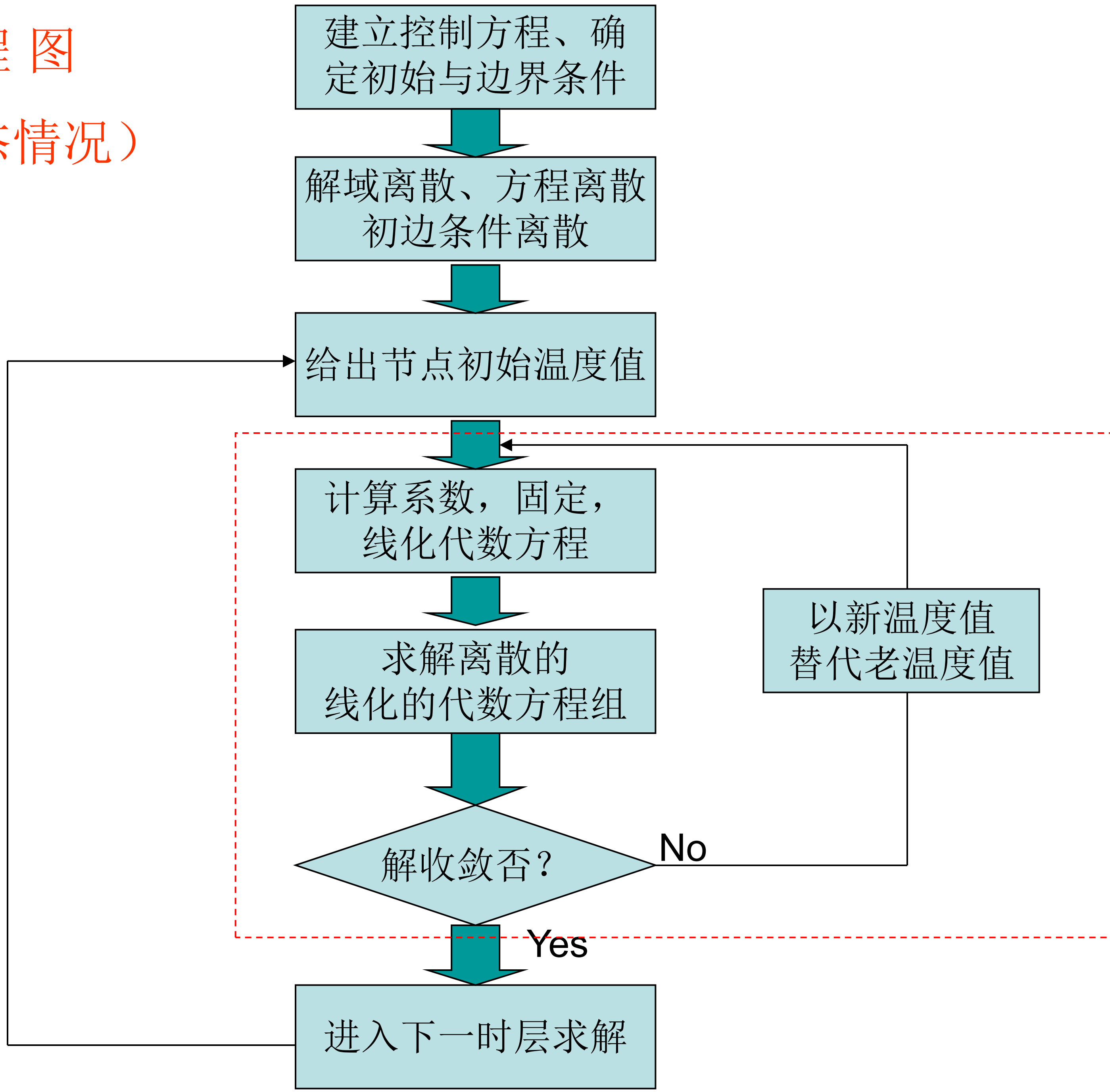
（稳态情况）



建立控制方程、确定初始与边界条件
解域离散、方程离散
初边条件离散
给出节点初始温度值
计算系数，固定，线化代数方程
求解离散的线化的代数方程组
解收敛否？
No
以新温度值替代老温度值
Yes
解的分析

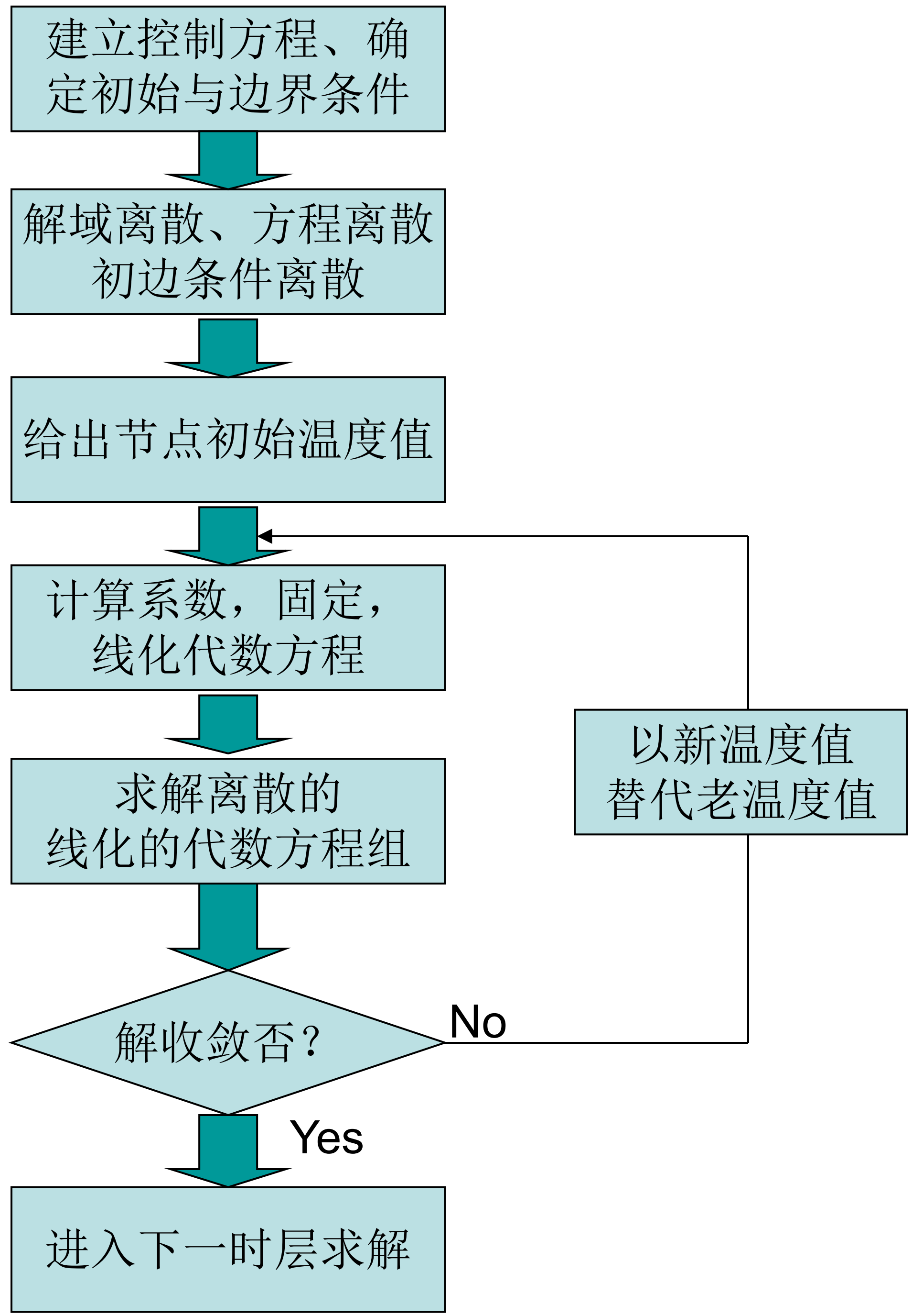
流 程 图

（非稳态情况）


建立控制方程、确定初始与边界条件
解域离散、方程离散
初边条件件离散
给出节点初始温度值
计算系数，固定，
线化代数方程
求解离散的
线化的代数方程组
以新温度值
替代老温度值
解收敛否？
No
Yes
进入下一时层求解

4.1.7 线化代数方程组的三对角阵算法（TDMA，追赶法）

流 程 图



1、直接解法

TDMA

2、迭代解法

留待多维情况再介绍

一维扩散方程离散格式

某节点：
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \cdots N-1, N$$

矩阵形式：

$a_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & . & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$c_N = 0$

三对角 矩阵

TDMA，追赶法

Tri-Diagonal Matrix Algorithm

- 消元过程（追）：

  自前向后，从第二行开始，利用前一行方程中两个未知量间关系，把本行中第一个非零元素消除，使原来的三元方程变为二元方程。当消元进行到最后一行时，其二元方程化为一元，于是，最后一个未知量之值立即得到。

- 回代过程（赶）：

  从倒数第二行开始，自后向前逐个进行回代，由消元过程得到的二元方程解出其它未知值

消元过程

- i=1时：

$$T_1 = -\frac{c_1}{b_1}T_2 + \frac{d_1}{b_1} = P_1T_2 + Q_1$$

- i=2时：

$$T_2 = \frac{-c_2}{a_2P_1 + b_2}T_3 + \frac{d_2 - a_2Q_1}{a_2P_1 + b_2} = P_2T_3 + Q_2$$

- 令i-1行

$$\left.\begin{aligned} T_{i-1} &= P_{i-1}T_i + Q_{i-1} \\ a_iT_{i-1} + b_iT_i + c_iT_{i+1} &= d_i \end{aligned}\right\} b_iT_i + c_iT_{i+1} = d_i - a_iP_{i-1}T_i - a_iQ_{i-1}$$

$$\Downarrow$$

- i 行

$$T_i = \frac{-c_i}{a_iP_{i-1} + b_i}T_{i+1} + \frac{d_i - a_iQ_{i-1}}{a_iP_{i-1} + b_i} = P_iT_{i+1} + Q_i$$

递推公式

$$P_i = \frac{-c_i}{a_i P_{i-1} + b_i}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{a_i P_{i-1} + b_i}$$

- 第1行 $P_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$
- 第N行 $P_N = 0, \quad Q_N = \frac{d_N - a_N Q_{N-1}}{a_N P_{N-1} + b_N} = T_N$ 正是所求的未知数

回代过程

$$T_i = \frac{-c_i}{a_i P_{i-1} + b_i} T_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{a_i P_{i-1} + b_i} = P_i T_{i+1} + Q_i$$

从Tn开始，逐个回代：

$$P_N = 0, \quad Q_N = \frac{d_N - a_N Q_{N-1}}{a_N P_{N-1} + b_N} = T_N$$

编程实现方法

消元：

$$P_i = \frac{-c_i}{a_i P_{i-1} + b_i}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{a_i P_{i-1} + b_i}$$

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$P_N = 0, \quad Q_N = \frac{d_N - a_N Q_{N-1}}{a_N P_{N-1} + b_N} = T_N$$

回代：

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1}$$

TDMA方法的扩展

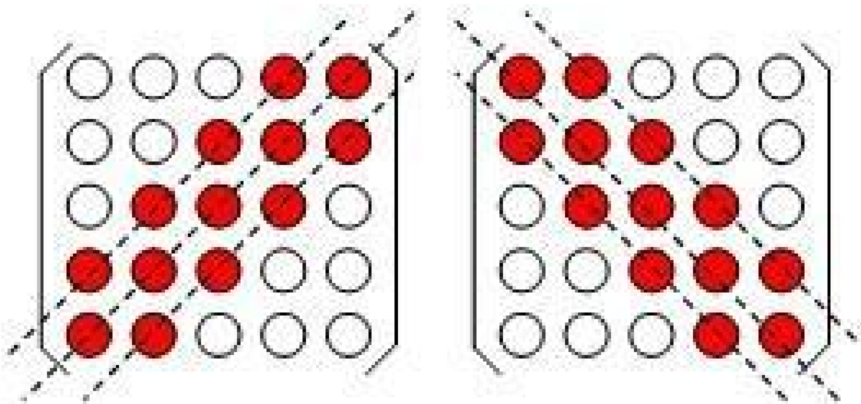


图 2-1　三对角矩阵示意图