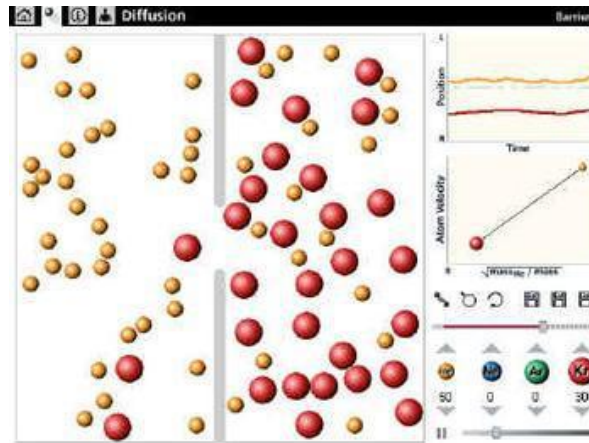


4.2.4 线性代数方程组的 迭代解法



胡 茂 彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin>
/

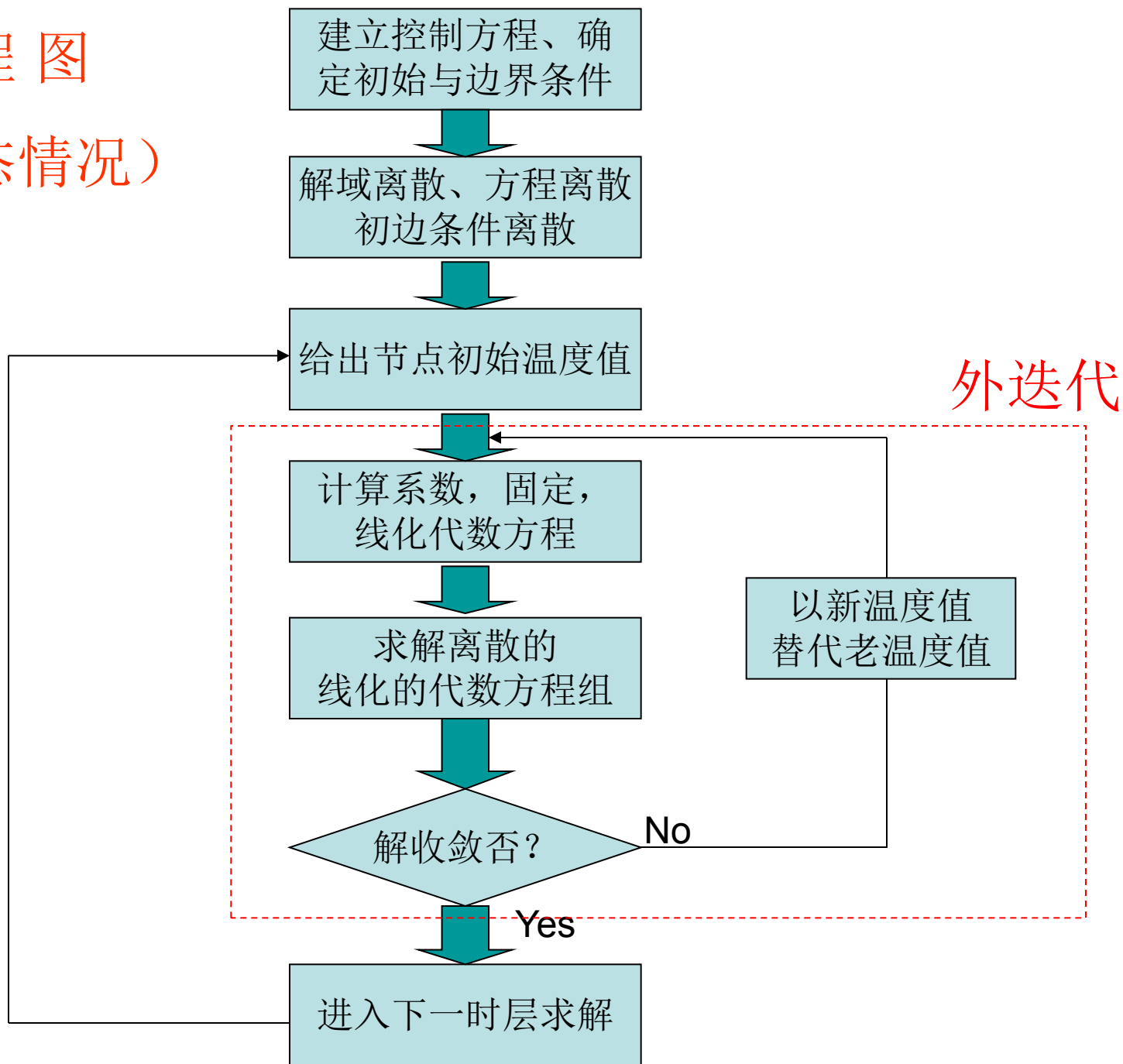
humaobin@ustc.edu.cn

多维情况求解特点和难点

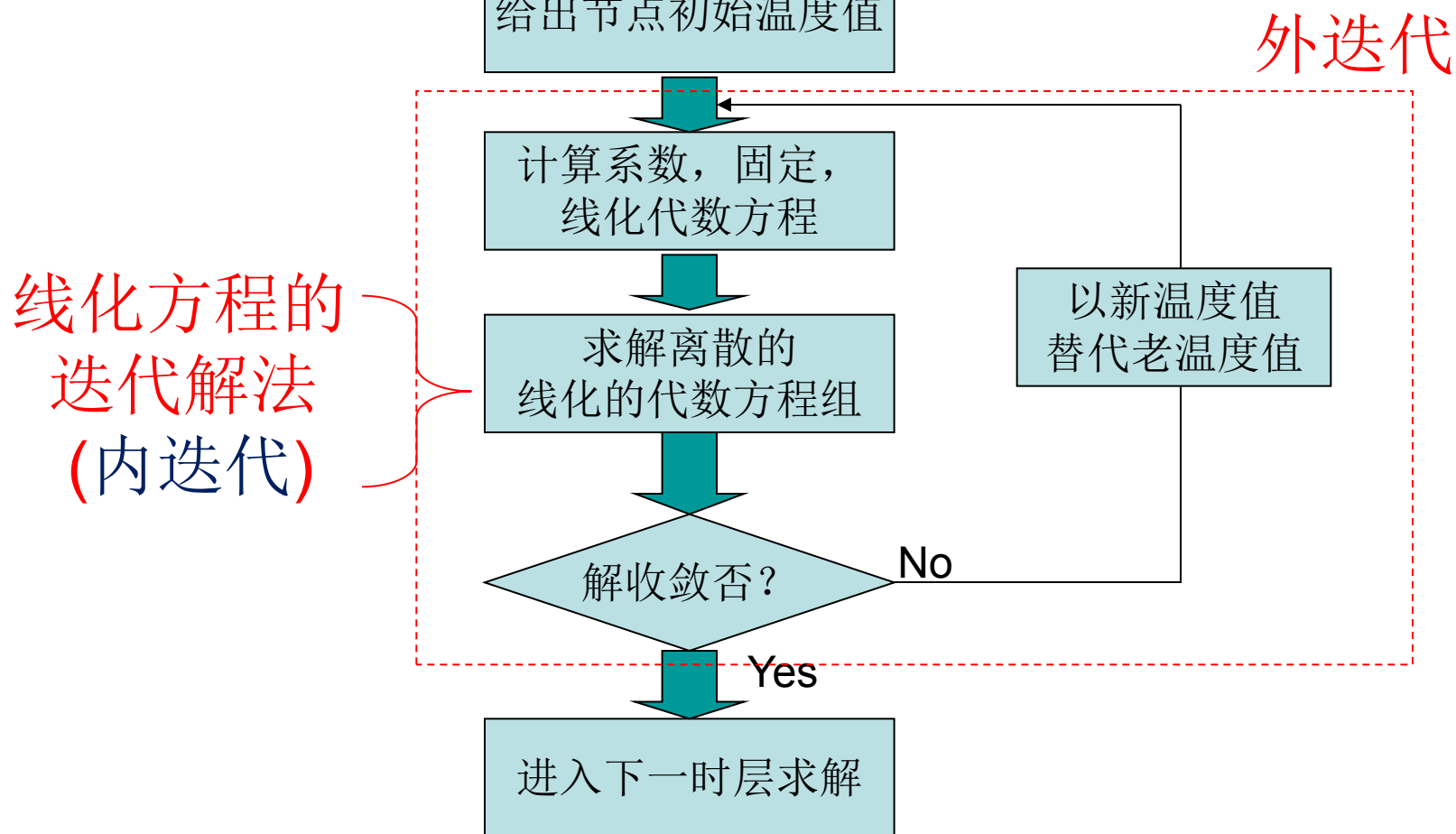
- 1. 系数可能是求解函数的函数，而使方程具有非线性性质，需要线化迭代求解
- 外迭代：反复更新非线性方程的系数而使方程线化求解的过程
- 2. 线化的代数方程组，系数矩阵不再是三对角阵，而是一个大型稀疏矩阵，不能TDMA直接求解。
Gauss消元法，需很大的内存，且计算效率低
- 内迭代：求解线化方程而使用迭代方法的过程

流程图

(非稳态情况)



流程图



1. 迭代求解的基本思想

- 方程组的矩阵形式:

$$AT = b$$

- 构造向量(即求解函数 T 的序列)

$$\underbrace{\{T^{(n)}\}}_{\text{试探解}} \xrightarrow[\text{迭代收敛过程}]{n \rightarrow \infty} \underbrace{T^* = A^{-1}b}_{\text{真实解}}$$

构造向量的方法

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{F}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{T}^{(n-1)})$$

- 也称为“迭代方式”
- 从 $n-1$ 迭代层，经过一次迭代(与 $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ 相关)，演进到 n 迭代层

收敛条件

$$\left| \frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{(n)}}{T_{i,j}^{(n)}} \right|_{\max} \leq \varepsilon$$

$$10^{-3} \sim 10^{-6}$$

• 或者:

$$\sum_{i,j} \left| \frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{(n)}}{T_{i,j}^{(n)}} \right| \leq \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 \approx N\varepsilon$$

“迭代”是求解线性化了的代数
方程组的方法

在算法地位上与TDMA方法类似

迭代推进一层与时间演进进一步的区别

- 迭代是求解方程的方法，迭代推进一层并非时间演进进一步
- 迭代收敛之后才表示该方程组已经求解，此时表示该次的内迭代求解过程结束
- 只有在方程为线性的情况下，迭代收敛才意味着时间演进了一步

2. 常用的迭代求解方法

- 三类迭代方法：点迭代(显式迭代)、块迭代(隐式迭代)和交替方向线迭代
- 三种实施方式：简单(Jacob)迭代、Gauss-Seidel迭代和逐次松弛迭代

以直角坐标下二维非稳态导热
离散方程为例(全隐式)

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b$$

特别注意

- 虽然差分离散格式方程为全隐式，但其迭代求解方法可以是显式迭代(点迭代)，隐式迭代(块迭代/线迭代)，或者交替方向隐式迭代(交替方向线迭代)。
- 差分离散方程为时间层演进，上标为 $n, n+1$
- 迭代格式代表迭代层演进，上标 $(k), (k+1)$

1) 点迭代法 (显式迭代)

- i 简单迭代： 又称Jacobi迭代

$$T_P^{(n+1)} = \left(a_E T_E^{(n)} + a_W T_W^{(n)} + a_N T_N^{(n)} + a_S T_S^{(n)} + b \right) / a_P$$

优点： 构造简单

缺点： 收敛很慢

1) 点迭代法 (显式迭代)

- ii **Gause-Seidel(G-S)**迭代: 立即**启用新值**

$$T_P^{(n+1)} = \left(a_E T_E^{(n)} + a_W \underbrace{T_W^{(n+1)}} + a_N T_N^{(n)} + a_S \underbrace{T_S^{(n+1)}} + b \right) / a_P$$

收敛速度明显加快。收敛速度还与**扫描方向**有关。越是能把**边界条件**的影响尽快引入迭代的方向，越有利于加快收敛。

1) 点迭代法 (显式迭代)

iii 逐次松弛迭代(SOR/SUR):

将简单迭代或者G-S迭代之值，与上一轮迭代值加权平均

基于简单迭代:

$$T_P^{(n+1)} = (1 - \omega)T_P^{(n)} + \omega(a_E T_E^{(n)} + a_W T_W^{(n)} + a_N T_N^{(n)} + a_S T_S^{(n)} + b) / a_P$$

或基于G-S: (从左往右，从下往上)

$$T_P^{(n+1)} = (1 - \omega)T_P^{(n)} + \omega(a_E T_E^{(n)} + a_W T_W^{(n+1)} + a_N T_N^{(n)} + a_S T_S^{(n+1)} + b) / a_P$$

松弛因子

$\omega > 1$ 逐次超松弛(SOR)

$\omega < 1$ 逐次欠松弛(SUR)

$$0 < \omega < 2$$

一般形式

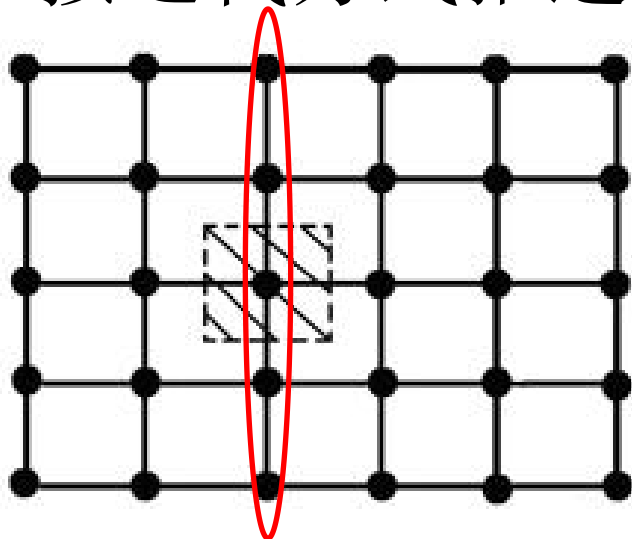
$$T_P^{(n+1)} = T_P^{(n)} + \omega \left(\overline{T}_P^{(n+1)} - T_P^{(n)} \right), \quad 0 < \omega < 2$$

GS或简单迭代结果

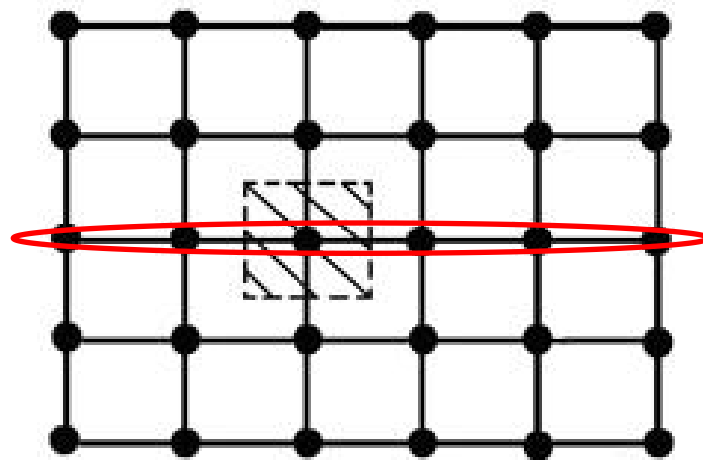
- 相邻两轮的迭代值之差恒为正或负时，采用超松弛能加速收敛。
- 当相邻两轮的迭代值之差的符号无规变化时，采用亚松弛，可以避免迭代发散

2) 块迭代法(隐式迭代)

- 将解域分成为由一条网格线或数条网格线组成的若干个块，每个块内节点值以隐式方法相互关联，用 TDMA 得到其解，格块之间则按迭代方式推进



按列扫描



按行扫描

特别注意

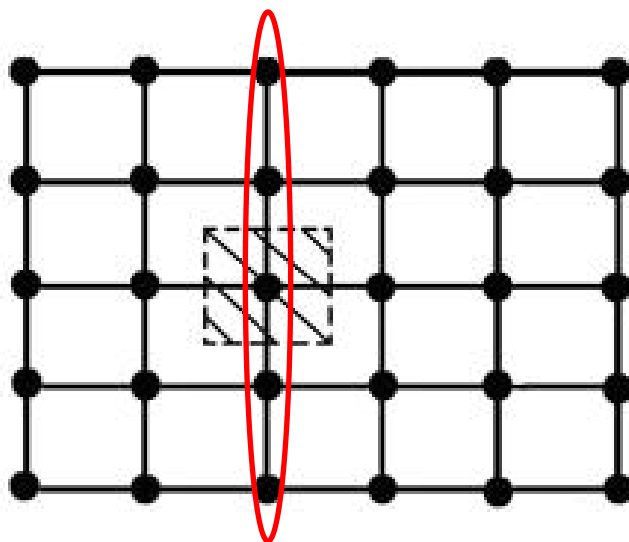
- 虽然差分离散格式方程为全隐式，但其迭代求解方法可以是显式迭代，隐式迭代，或者交替方向隐式迭代。
- 差分离散方程为时间层演进，上标为 $n, n+1$
- 迭代格式代表迭代层演进，上标 $(n), (n+1)$

2) 块迭代法(隐式迭代)

- i 简单线迭代

逐列扫描:

$$-a_S T_S^{(n+1)} + a_P T_P^{(n+1)} - a_N T_N^{(n+1)} = a_E T_E^{(n)} + a_W T_W^{(n)} + b$$

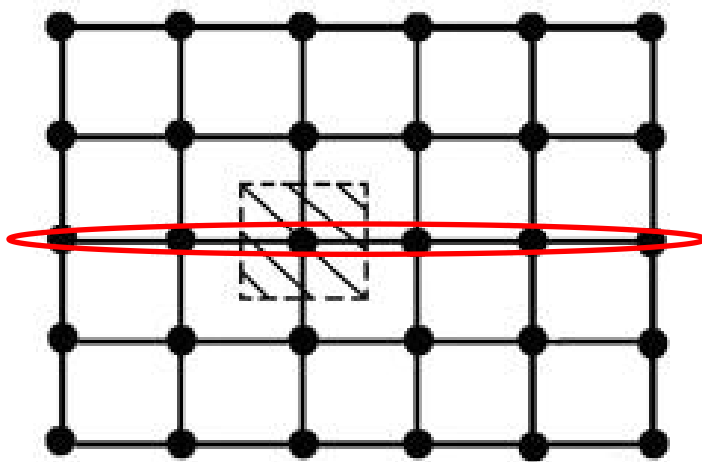


2) 块迭代法(隐式迭代)

- i 简单线迭代

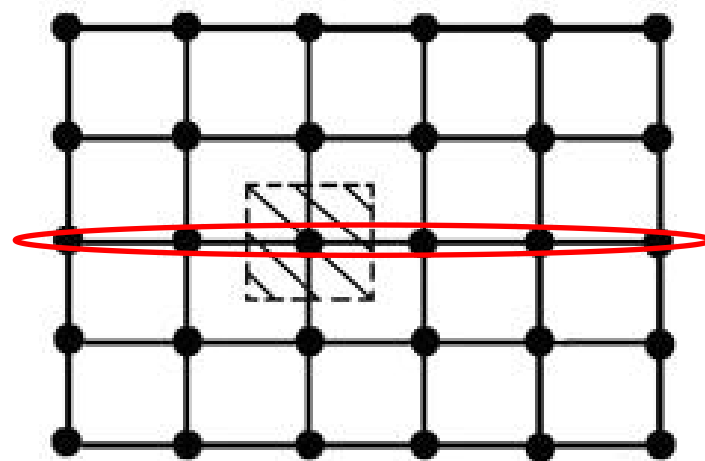
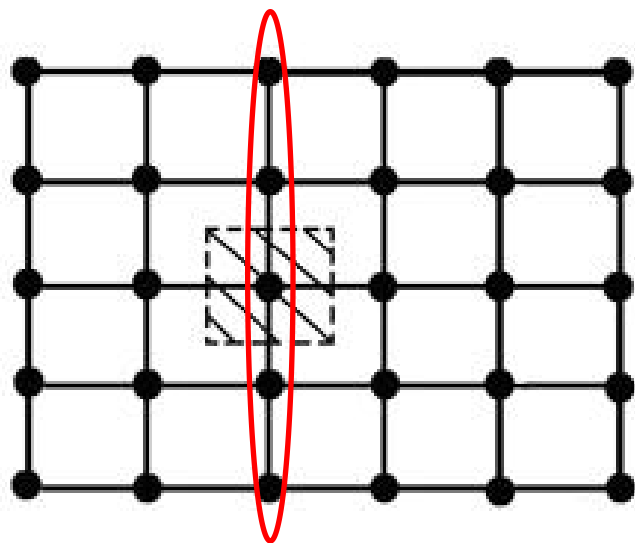
逐行扫描:

$$-a_W T_W^{(n+1)} + a_P T_P^{(n+1)} - a_E T_E^{(n+1)} = a_N T_N^{(n)} + a_S T_S^{(n)} + b$$



实施

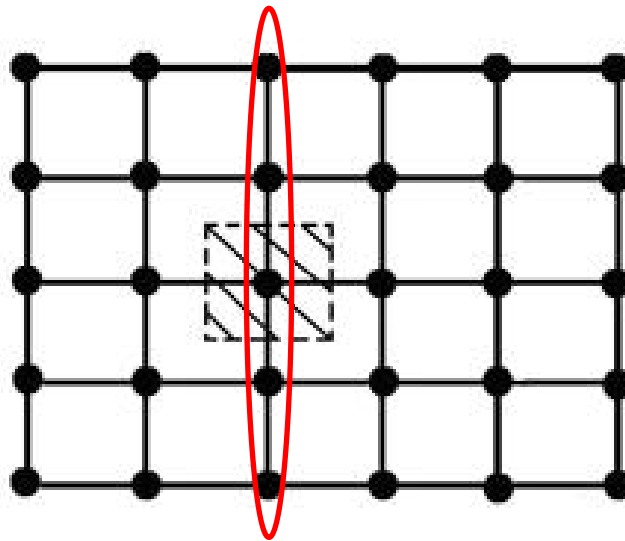
- 引入边界条件后，均可用**TDMA**直接求解。
整个解域**逐线扫描**一遍后，完成**一轮**迭代



2) 块迭代法(隐式迭代)

- ii **Gauss-Seidel**线迭代:立即启用新值
从左往右逐列扫描:

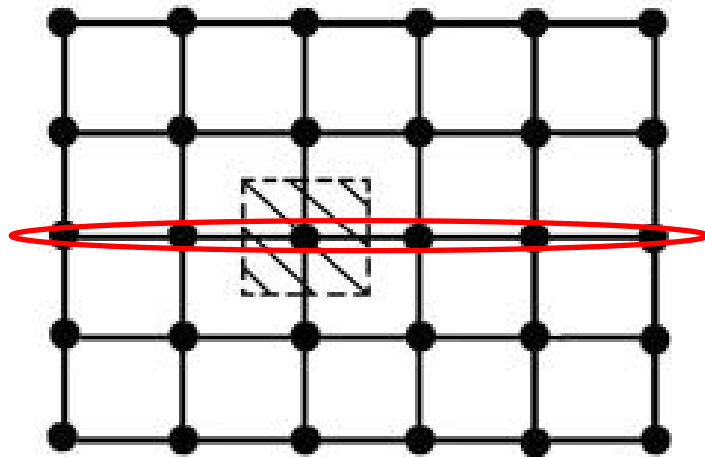
$$-a_S T_S^{(n+1)} + a_P T_P^{(n+1)} - a_N T_N^{(n+1)} = a_E T_E^{(n)} + a_W T_W^{(n+1)} + b$$



2) 块迭代法(隐式迭代)

- ii **Gauss-Seidel**线迭代:立即启用新值
从下往上逐行扫描:

$$-a_W T_W^{(n+1)} + a_P T_P^{(n+1)} - a_E T_E^{(n+1)} = a_N T_N^{(n)} + a_S \underbrace{T_S^{(n+1)}}_{\text{new value}} + b$$



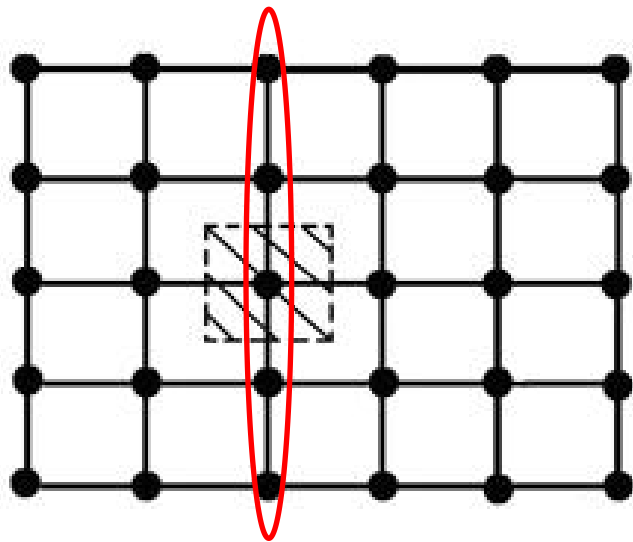
2) 块迭代法(隐式迭代)

- iii 逐次松弛线迭代(SOR/SUR)

在完成简单或G-S线迭代计算过程后，将其所算之值与上一轮迭代之值作加权平均，所得值才算新一轮迭代的新值

直接写成一步计算

$$-\omega a_S T_S^{(n+1)} + a_P T_P^{(n+1)} - \omega a_N T_N^{(n+1)} = (1 - \omega) a_P T_P^{(n)} + \omega (a_E T_E^{(n)} + a_W \underbrace{T_W^{(n+1)}}_{\text{red circle}} + b)$$



3) 交替方向隐式迭代(ADI)

- 此法扫描方向可以变化，且有多种组合。

3 判断迭代格式收敛的 几个常用条件

正定矩阵

- 对任意具有 n 个分量的非零矢量函数 $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0$$

不可约矩阵

- 矩阵***A***不能通过行的次序调换和其相应列的次序调换而成为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

对角优

- 矩阵**A**对角线上的元素满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

迭代收敛判断定理

- 1 若方程组的系数矩阵**A**不可约，且对角优，则简单迭代和Gauss-Seidel迭代必收敛
- 2 若方程组的系数矩阵**A**正定，则Gauss-Seidel迭代必收敛
- 3 松弛迭代收敛的必要条件是松弛因子满足

$$0 < \omega < 2$$

4 若方程组的系数矩阵**A**不可约，且对角优，
松弛因子 $0 < \omega < 1$ 则松弛迭代法收敛。

5 若方程组的系数矩阵**A**正定，松弛因子 满足 $0 < \omega < 2$ ，则松弛迭代收敛。

