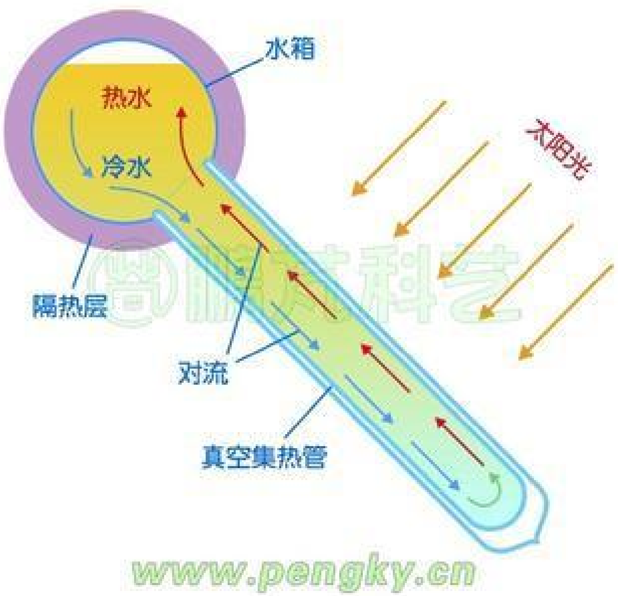
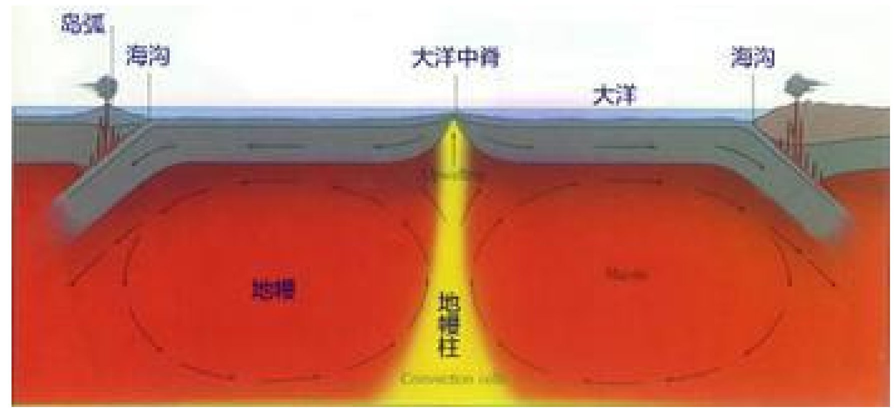
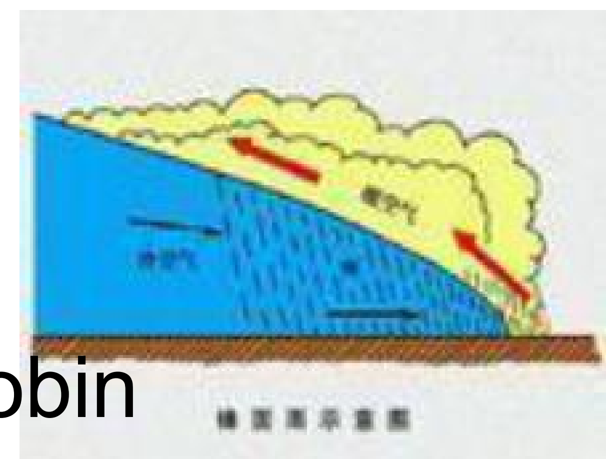
第五章 对流扩散方程的数值方法







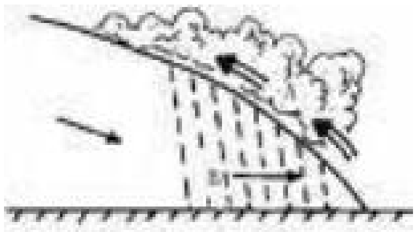
胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

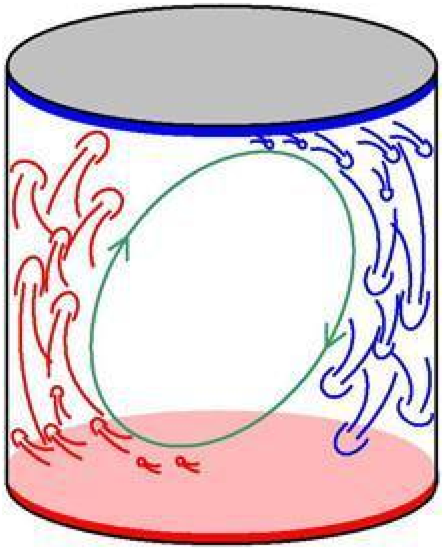
对流扩散方程求解难点

- 对流项：流动有方向性，并且有精度、稳定性和计算耗时方面的要求



- 压力梯度项：压力没有方向性的，采用中心差分符合物理意义，但会带来误差累积的问题 [留待第六章解决]

本章先假定速度已知，
讨论对流项离散方法



对流项离散的难点

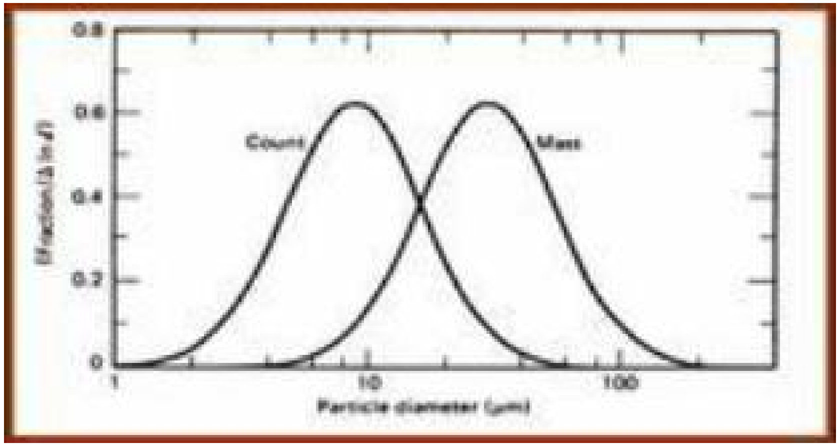
- 准确性：若用一阶迎风格式，与扩散项采用的二阶精度的中心差分离散格式不匹配，使整个方程的离散精度降低

- 稳定性：若用中心差分格式不能体现对流项的物理本质，常会引起数值解的振荡

- 经济性：若用高阶格式，无数值振荡，但格式复杂，求解相对困难，机时消耗较多

5.2 一维稳态对流扩散问题

$$\frac{d(\rho u \phi)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$



5.2.1 模型方程的精确解

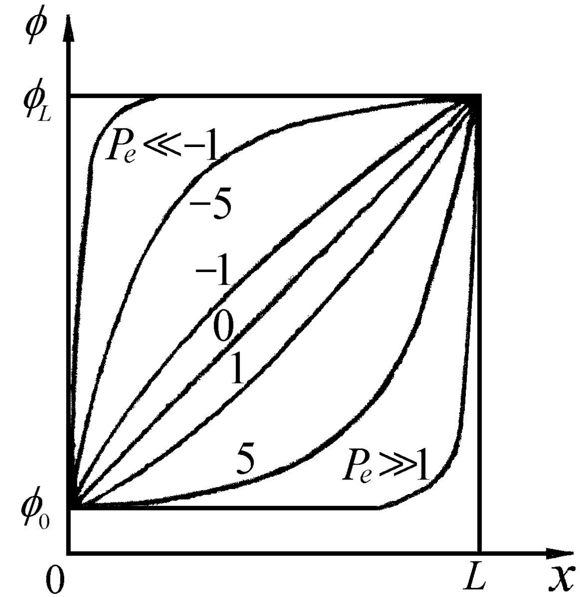
$$\frac{d(\rho u\phi)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$$

边界条件：

$$x=0,\phi=\phi_0;\quad x=L,\phi=\phi_L$$

精确解：

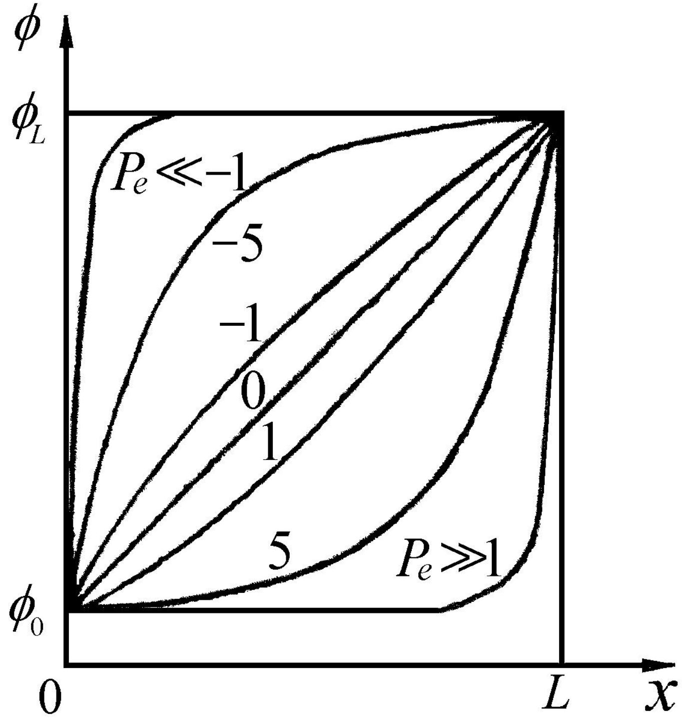
$$\frac{\phi-\phi_0}{\phi_L-\phi_0}=\frac{\exp(\rho ux/\Gamma)-1}{\exp(\rho uL/\Gamma)-1}=\frac{\exp(Pe\cdot x/L)-1}{\exp(Pe)-1}$$



Peclet 数

- 对流作用和扩散作用的比较

$$Pe = \rho u L / \Gamma$$



5.2.2 中心差分格式

- 1. 控制容积积分法离散

$$\frac{d(\rho u\phi)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w=\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)_w$$

$$\Downarrow$$

采用分段线性分布

$$(\rho u)_e\frac{\phi_P+\phi_E}{2}-(\rho u)_w\frac{\phi_W+\phi_P}{2}=\frac{\Gamma_e(\phi_E-\phi_P)}{(\delta x)_e}-\frac{\Gamma_w(\phi_P-\phi_W)}{(\delta x)_w}$$

移项整理结果

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W$$

- 系数

$$\begin{cases} a_E = D_e - \dfrac{1}{2}F_e, a_W = D_W + \dfrac{1}{2}F_w \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

网格Peclet数

- 网格尺度上的对流、扩散作用比值

$$P_{\Delta} = F/D = \rho u \delta x/\Gamma$$

- 系数表达为

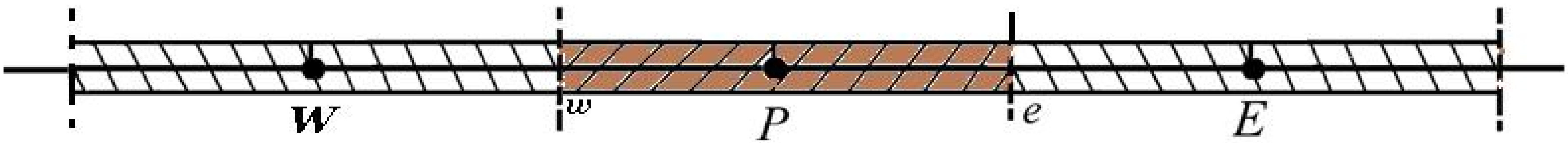
$$\begin{cases} a_E = D_e(1 - P_{\Delta e}/2), \quad a_W = D_W(1 + P_{\Delta w}/2) \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

2.中心差分格式的问题

- 常导热系数、均匀网格下

$$\phi_P = \frac{(1 - P_\Delta/2)\phi_E + (1 + P_\Delta/2)\phi_W}{2}$$

- 例如 $P_{\Delta e} = P_{\Delta w} = 4$ 情况



$\phi_E = 100, \phi_W = 50$ ⟹ $\phi_P = 25$

$\phi_E = 50, \phi_W = 100$ ⟹ $\phi_P = 125$

适用条件有限

- 当 $|P_\Delta|>2$ 时，系数变成负数，会产生振荡
- 适用条件 $|P_\Delta|\le 2$ 这意味着：网格步长必须很小，或只能处理流速比较小的问题

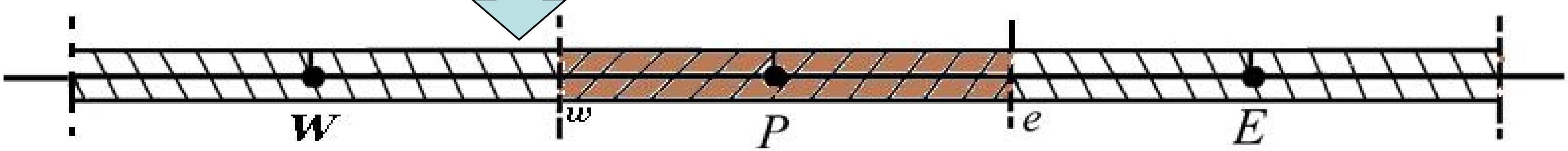
5.2.3 一阶迎风格式

- 1.积分离散和格式推演

$$\frac{d(\rho u\phi)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w=\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)_w$$

采用迎风思想：从来流上游方向找依赖区



在界面e上, 若 $u_e>0$,则$\phi_e=\phi_P$;若 $u_e<0$,则$\phi_e=\phi_E$;

在界面w上, 若 $u_w>0$,则$\phi_w=\phi_W$;若 $u_w<0$,则$\phi_w=\phi_P$

界面流量

- 引入符号 $[\![a_1, a_2]\!] = \max(a_1, a_2)$
- 对流：

$$(\rho u\phi)_e = F_e\phi_e = \phi_P[\![F_e, 0]\!] - \phi_E[\![-F_e, 0]\!],$$

$$(\rho u\phi)_w = F_w\phi_w = \phi_W[\![F_w, 0]\!] - \phi_P[\![-F_w, 0]\!]$$

- 扩散：

$$\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e}, \qquad \left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w}$$

系数表达式

$$\begin{cases} a_E = D_e + [[-F_e, 0]], \quad a_W = D_w + [[F_w, 0]] \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

- 或使用网格Peclet数

$$\begin{cases} a_E = D_e\left(1 + [[-P_{\Delta e}, 0]]\right), \quad a_W = D_w\left(1 + [[P_{\Delta w}, 0]]\right) \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

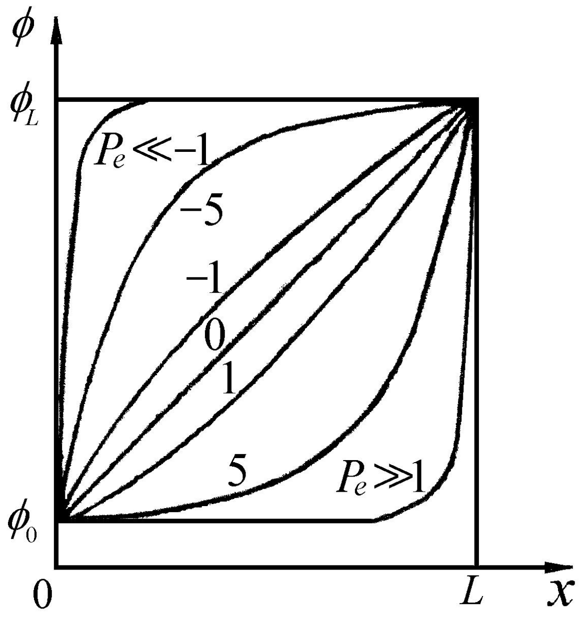
2. 一阶迎风格式评述

- 符合对流项物理意义，离散系数恒>零，无数值振荡。得到广泛的应用。
- 迎风思想：二阶迎风、三阶迎风和QUICK格式都很好地吸取了迎风思想：让信息主要来自流动上游方向
- 精度差：某些国际学术刊物已对该格式提出限制
- 在对流很强时，扩散效应已经很弱，迎风格式过渡估算了扩散作用

5.2.4 指数格式

- 1．指数格式推演，根据精确解表达式

$$\frac{\phi-\phi_0}{\phi_L-\phi_0}=\frac{\exp(\rho u x/\Gamma)-1}{\exp(\rho u L/\Gamma)-1}=\frac{\exp(Pe\cdot x/L)-1}{\exp(Pe)-1}$$



对流-扩散总通量密度

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}$$

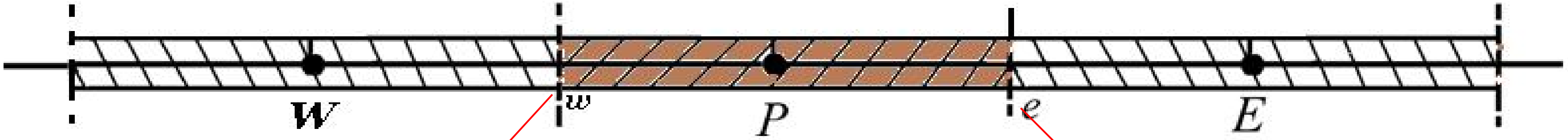
$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1} = \frac{\exp(Pe \cdot x / L) - 1}{\exp(Pe) - 1}$$

- 控制方程变为：

$$\frac{dJ}{dx} = 0; \quad 或 \quad J = const$$

$$J = F\left[\phi_0 + \frac{\phi_0 - \phi_L}{\exp(Pe) - 1}\right]$$

界面上通量



$$J_w = F_w\left[\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_{\Delta w}) - 1}\right]$$

$$J_e = F_e\left[\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_{\Delta e}) - 1}\right]$$

$$\left[\frac{F_e \exp(P_{\Delta e})}{\exp(P_{\Delta e}) - 1} + \frac{F_w}{\exp(P_{\Delta w}) - 1}\right]\phi_P = \frac{F_e}{\exp(P_{\Delta e}) - 1}\phi_E + \frac{F_w \exp(P_{\Delta w})}{\exp(P_{\Delta w}) - 1}\phi_W$$

合并整理结果

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W$$

- 系数

$$a_E = \frac{F_e}{\exp(P_{\Delta e})-1},\quad a_W = \frac{F_w\exp(P_{\Delta w})}{\exp(P_{\Delta w})-1}$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

2．指数格式评述

- 精确：常物性、稳态、无源、一维。适用于任何*Pe*数。

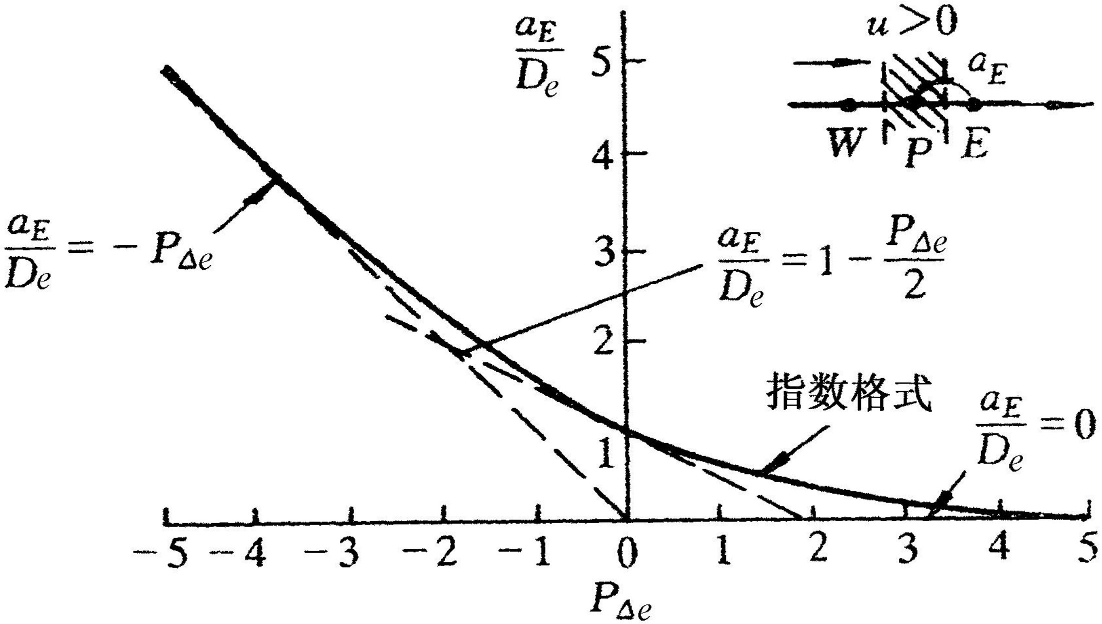
- 非稳态、多维、有源，则失去其精确解的意义

- 格式系数为指数形式，计算费时，经济性差，实际很少应用

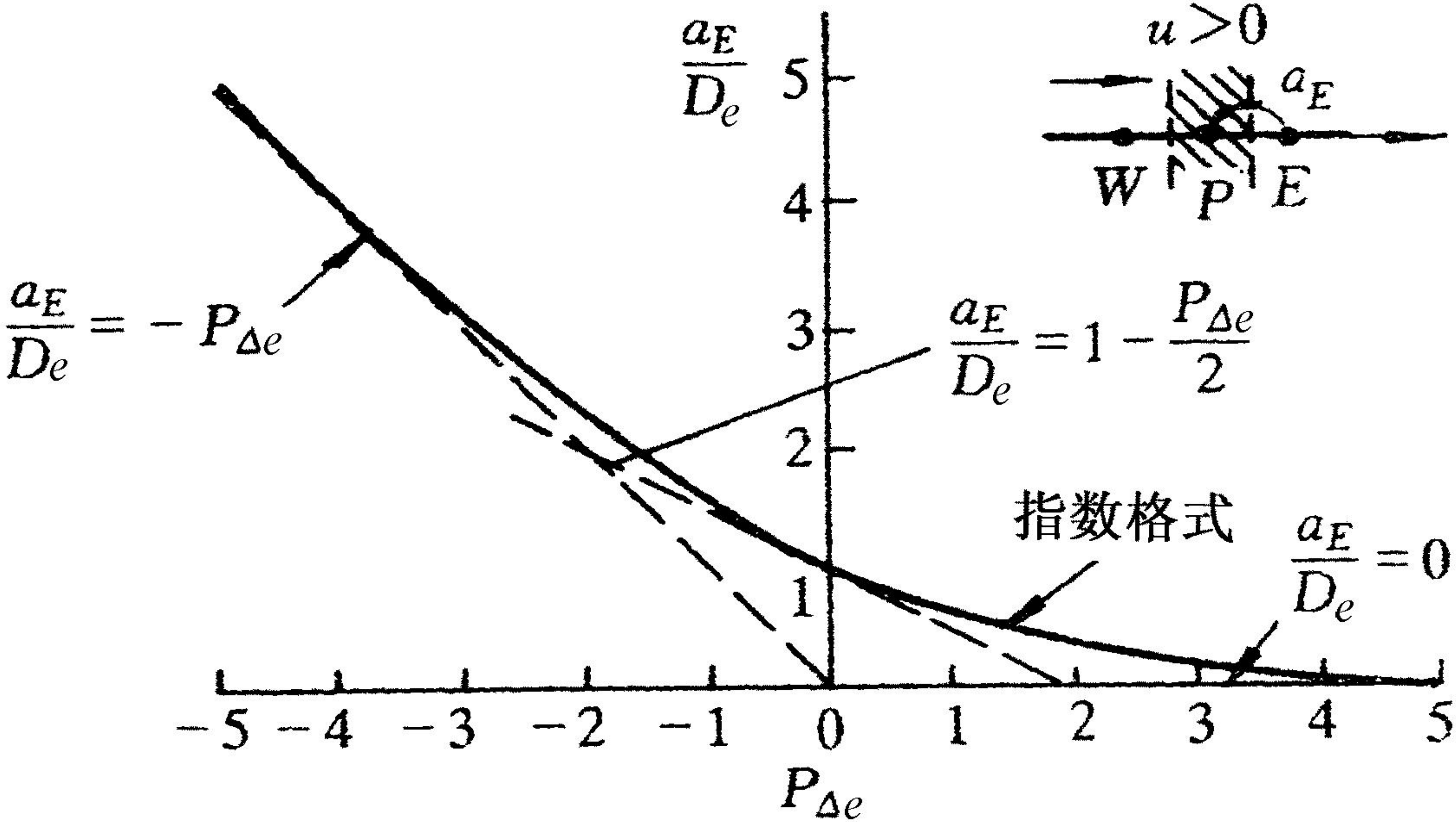
5.2.5 混合格式

- 1．混合格式提出[Spalding, 1972]

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_{\Delta e}}{\exp(P_{\Delta e}) - 1}$$



三条包络线



$\frac{a_E}{D_e}$
5
4
3
2
1
$u>0$
a_E
W
P
E
$\frac{a_E}{D_e}=-P_{\Delta e}$
$\frac{a_E}{D_e}=1-\frac{P_{\Delta e}}{2}$
指数格式
$\frac{a_E}{D_e}=0$
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
$P_{\Delta e}$

混合格式

三条包络线

$$\left.\begin{array}{l} 当P_{\Delta e} < -2 \quad a_E/D_e = -P_{\Delta e} \\ 当-2 \le P_{\Delta e} \le 2 \quad a_E/D_e = 1 - P_{\Delta e}/2 \\ 当P_{\Delta e} > 2 \quad a_E/D_e = 0 \end{array}\right\} \quad a_E = D_e \left[\left[-P_{\Delta e},\ 1 - \frac{P_{\Delta e}}{2},\ 0\right]\right]$$

同理可得

$$a_W = D_w \left[\left[P_{\Delta w},\ 1 + \frac{P_{\Delta w}}{2},\ 0\right]\right]$$

2. 混合格式评述

- 当 $|P_{\Delta e}| \le 2$ 时，与中心差分格式相同

- 当 $|P_{\Delta e}| > 2$ 时，为扩散项=零的迎风格式

- 形式简单，兼有中心差分和迎风格式的优点，较为适用

5.2.6 乘方律格式

- **1．乘方律格式提出和构成[Patankar]**

四条包络线

当 $P_{\Delta e} < -10,\qquad a_E / D_e = -P_{\Delta e}$

当 $-10 \le P_{\Delta e} < 0,\qquad a_E / D_e = \left(1 + 0.1 P_{\Delta e}\right)^5 - P_{\Delta e}$

当 $0 \le P_{\Delta e} \le 10,\qquad a_E / D_e = \left(1 - 0.1 P_{\Delta e}\right)^5$

当 $P_{\Delta e} > 10,\qquad a_E / D_e = 0$

紧凑形式

$$a_E = D_e \left[\left[0,\ \left(1 - 0.1\left|P_{\Delta e}\right|\right)^5\right]\right] + \left[\left[0,\ -F_e\right]\right]$$

$$a_W = D_w \left[\left[0,\ \left(1 - 0.1\left|P_{\Delta w}\right|\right)^5\right]\right] + \left[\left[0,\ F_w\right]\right]$$

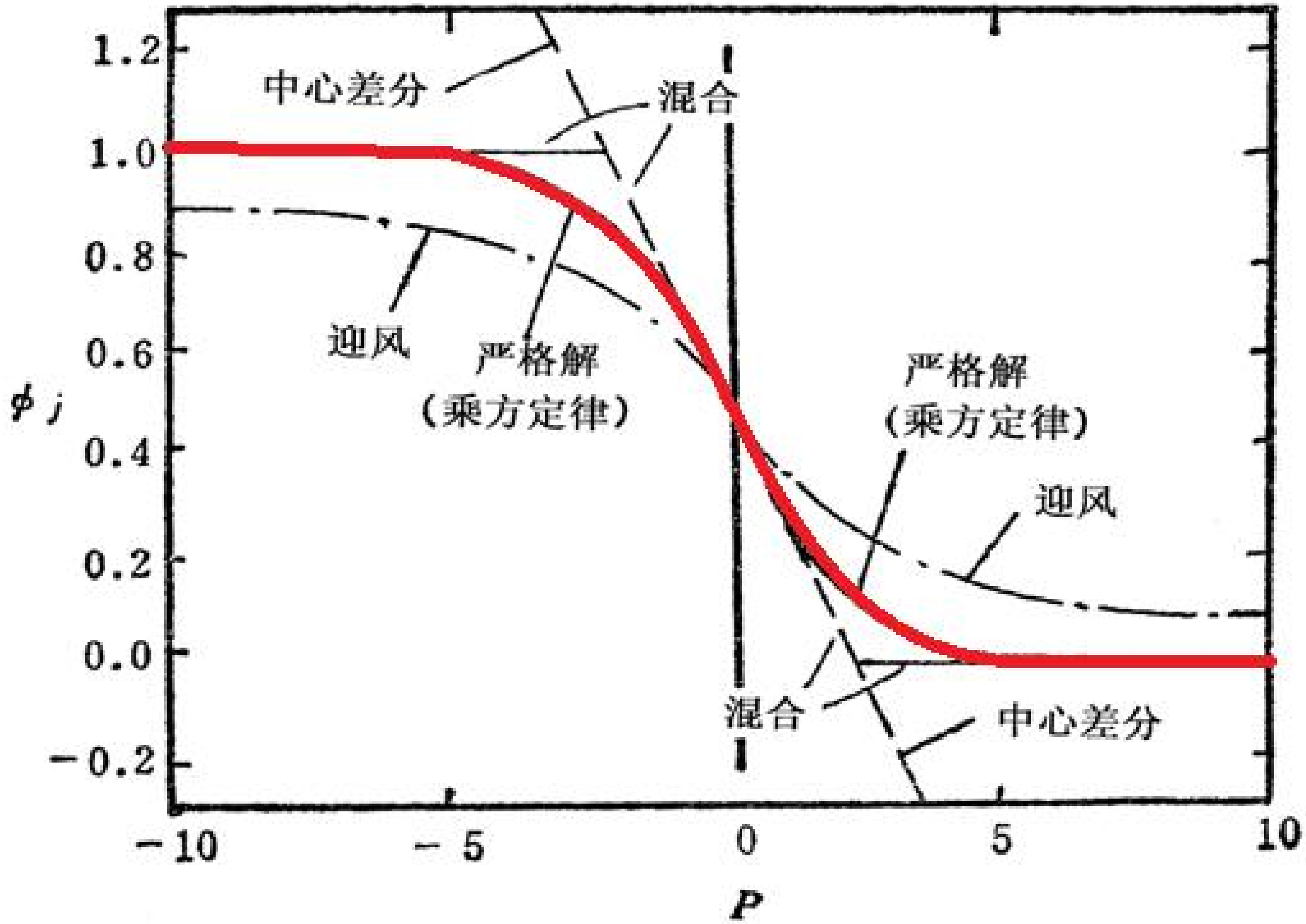
2．乘方律格式评述

- 用四条线逼近准确解，十分接近指数格式的结果，但计算量小得多

- 比混合格式复杂，计算量增加，但准确性提高

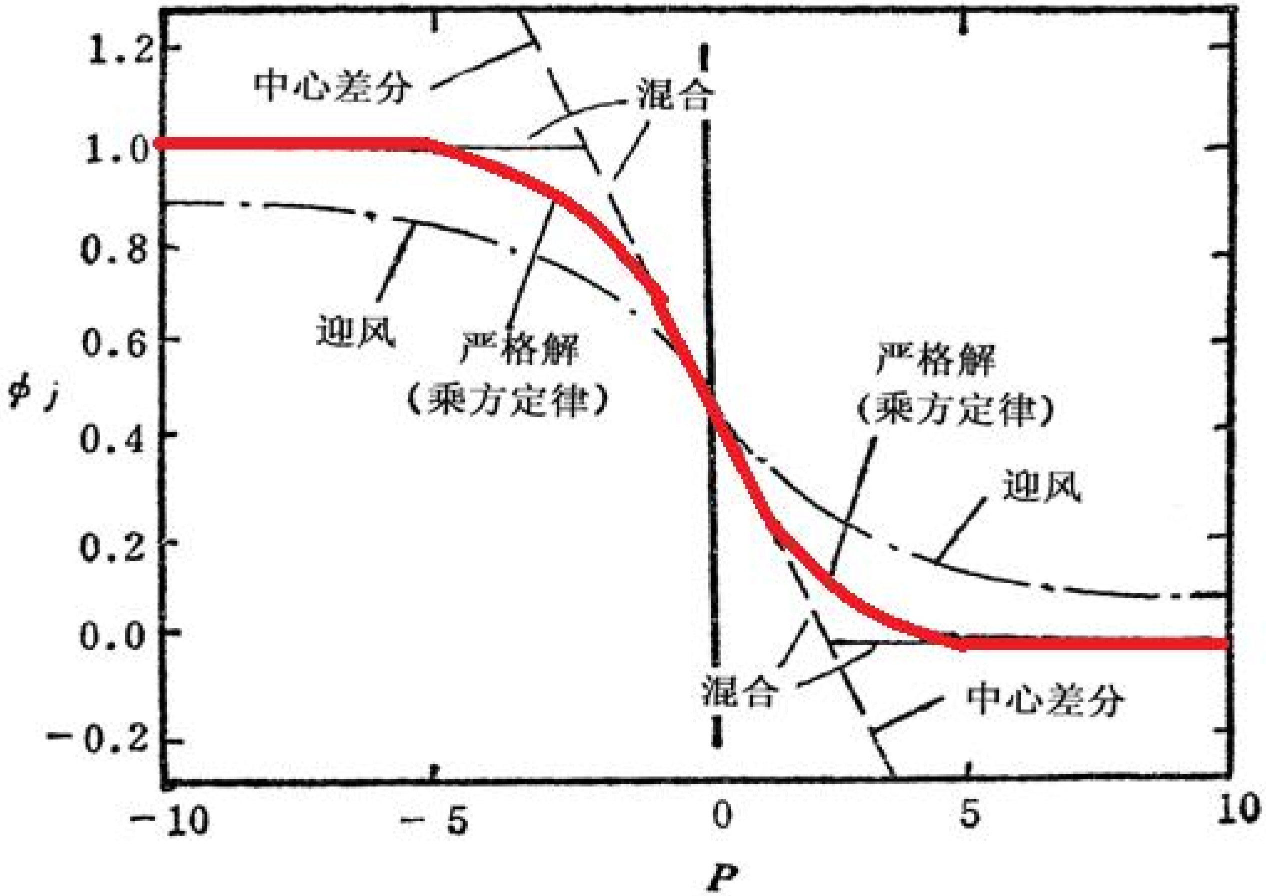
5.2.8 五种三点式离散格式计算结果比较

以某一点函数值在不同网格 Peclet 数的计算结果为例



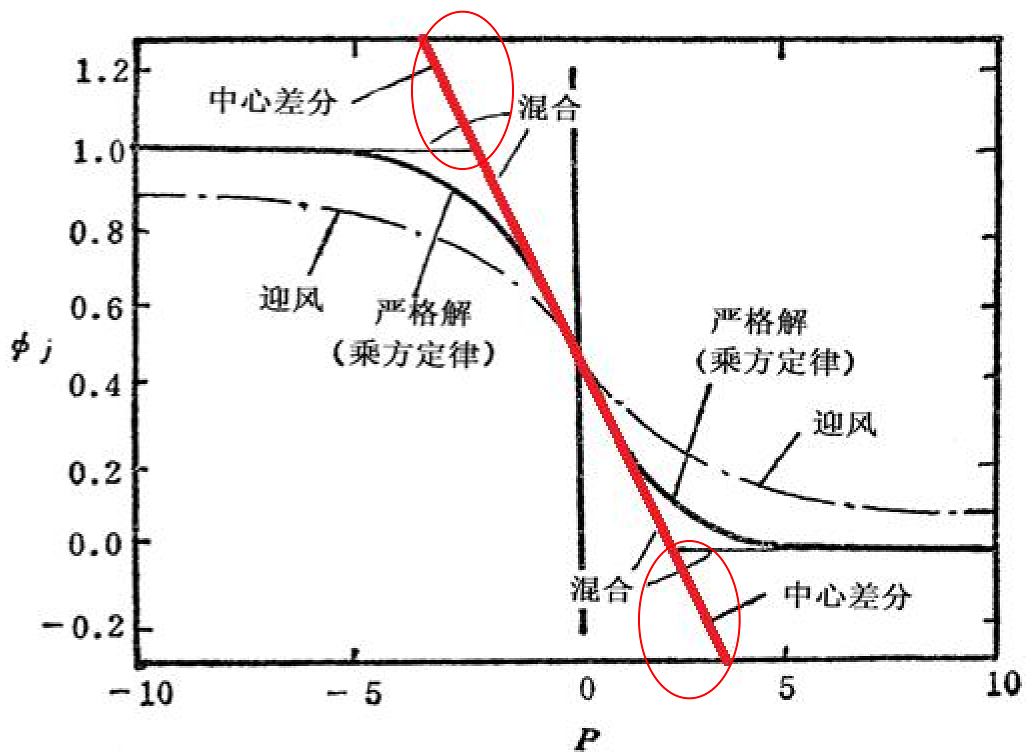
乘方律格式

- 与准确解几乎完全吻合



中心差分格式

- 在小$|P_\Delta|$下与准确解符合得好，在$|P_\Delta|$接近2时，误差显著增大，在$|P_\Delta|>2$结果超出0和1的范围，已违反物理真实性；

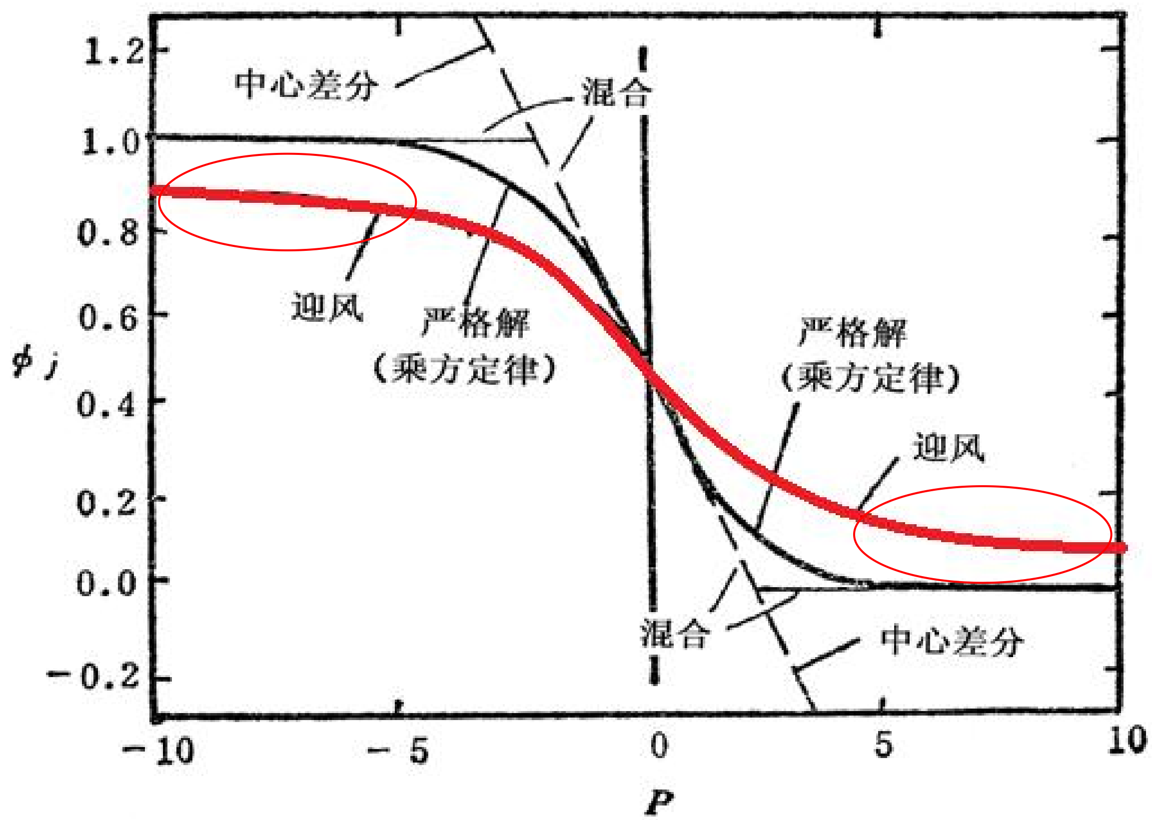


迎 风 格 式

- 在所有$|P_\Delta|$ 下，解的变化趋势与准确解一致，但结果误差都较大

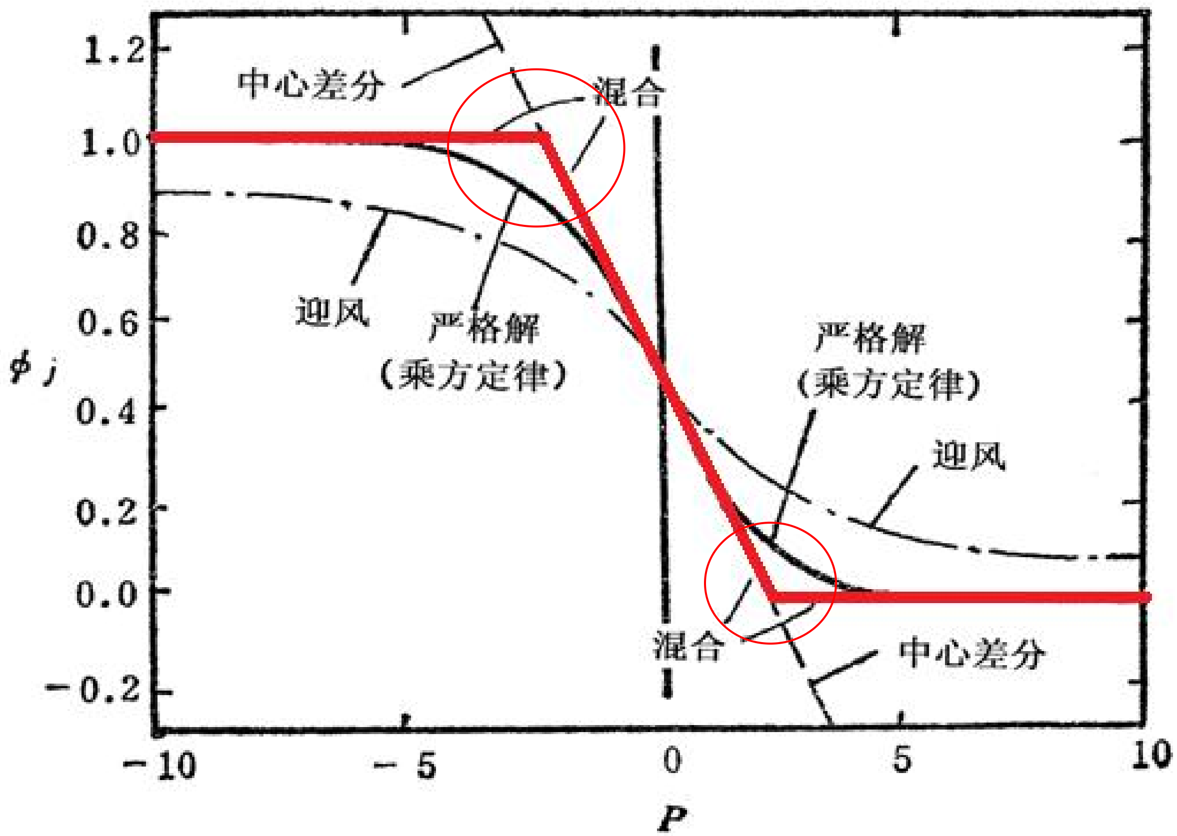
- 精度只有一阶

- 大$|P_\Delta|$ 时准确解偏离线性分布，而扩散项仍用中心差分计算



混 合 格 式

- 在$|P_\Delta|\le 2$时与中心差分格式相同，在$|P_\Delta|>2$时，由于取消扩散项，比迎风格式有很大改进



5.2.7 五种三点式离散格式系数的统一表达形式

- 不要求掌握
- 有兴趣者可以去推导一下