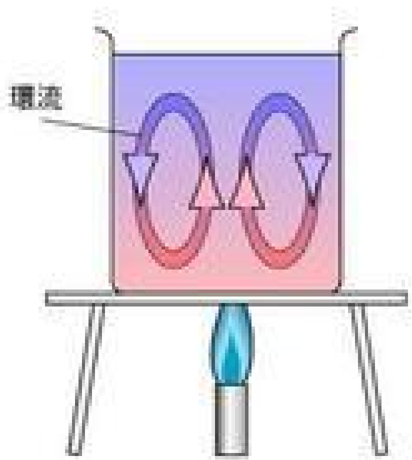
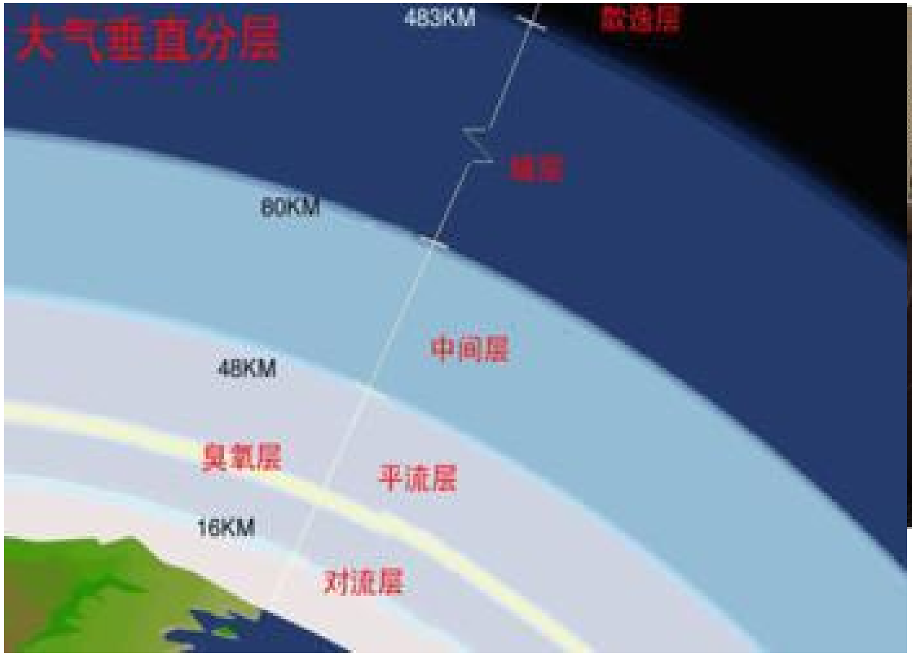
5.3 多维非稳态对流扩散问题





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

5.3.1 二维非稳态对流扩散方程的离散

1. 直角坐标系下的对流扩散方程和连续方程

- 控制方程

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S$$

- 连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$

引入通量密度

- 对流扩散总通量密度：

$$J_x = \rho u\phi - \Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad J_y = \rho v\phi - \Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

- 质量通量密度：

$$F_x = \rho u, \quad F_y = \rho v$$

用通量表示的控制方程

- 控制方程：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}=S$$

- 连续方程

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=0$$

2. 控制容积积分离散

- 非稳态项：假设沿空间为均匀分布

$$\int_s^n\int_w^e\int_t^{t+\Delta t}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}dtdxdy=\left[(\rho\phi)_P-(\rho\phi)_P^0\right]\Delta x\Delta y$$

- 对流、扩散通量项：时间积分取隐式，空间取均匀分布

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_w^e\frac{\partial J_x}{\partial x}dxdydt=\left[\left(J_x\right)_e-\left(J_x\right)_w\right]\Delta y\Delta t=(J_e-J_w)\Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_w^e\frac{\partial J_y}{\partial y}dxdydt=\left[\left(J_y\right)_n-\left(J_y\right)_s\right]\Delta x\Delta t=(J_n-J_s)\Delta t$$

源 项

- 线化为

$$S = S_C + S_P\phi \quad (S_P < 0)$$

- 时间、空间均取均匀分布

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} S dt dx dy = (S_C + S_P\phi)\Delta x \Delta y \Delta t$$

积分结果

$$\frac{(\rho\phi)_P-(\rho\phi)_P^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y+(J_e-J_w)+(J_n-J_s)=(S_C+S_P\phi_P)\Delta x\Delta y$$

- 连续方程积分结果

$$\frac{\rho_P-\rho_P^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y+(F_e-F_w)+(F_n-F_s)=0$$

两式相减合并

$$\frac{\rho_P^0(\phi_P-\phi_P^0)}{\Delta t}\Delta x\Delta y+(J_e-F_e\phi_P)-(J_w-F_w\phi_P)+(J_n-F_n\phi_P)-(J_s-F_s\phi_P)$$
$$=(S_C+S_P\phi_P)\Delta x\Delta y$$

- 需要注意：一定要跟连续方程联立，才能得到正确的结果，才能适用于可压和不可压的情况

最终表达式

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b$$

$$a_E = D_e A(P_{\Delta e}) = D_e A\left(\left|P_{\Delta e}\right|\right) + \left[\left[-F_e\ ,\ 0\right]\right]$$

$$a_W = D_w B(P_{\Delta w}) = D_w A\left(\left|P_{\Delta w}\right|\right) + \left[\left[\ F_w\ ,\ 0\right]\right]$$

$$a_N = D_n A(P_{\Delta n}) = D_n A\left(\left|P_{\Delta n}\right|\right) + \left[\left[-F_n\ ,\ 0\right]\right]$$

$$a_S = D_s B(P_{\Delta s}) = D_s A\left(\left|P_{\Delta s}\right|\right) + \left[\left[\ F_s\ ,\ 0\right]\right]$$

- 根据采用的三点离散格式不同，选定A(|P|)函数形式不同，参见前一节的表格

5.3.2 三维非稳态对流扩散方程

- 离散结果

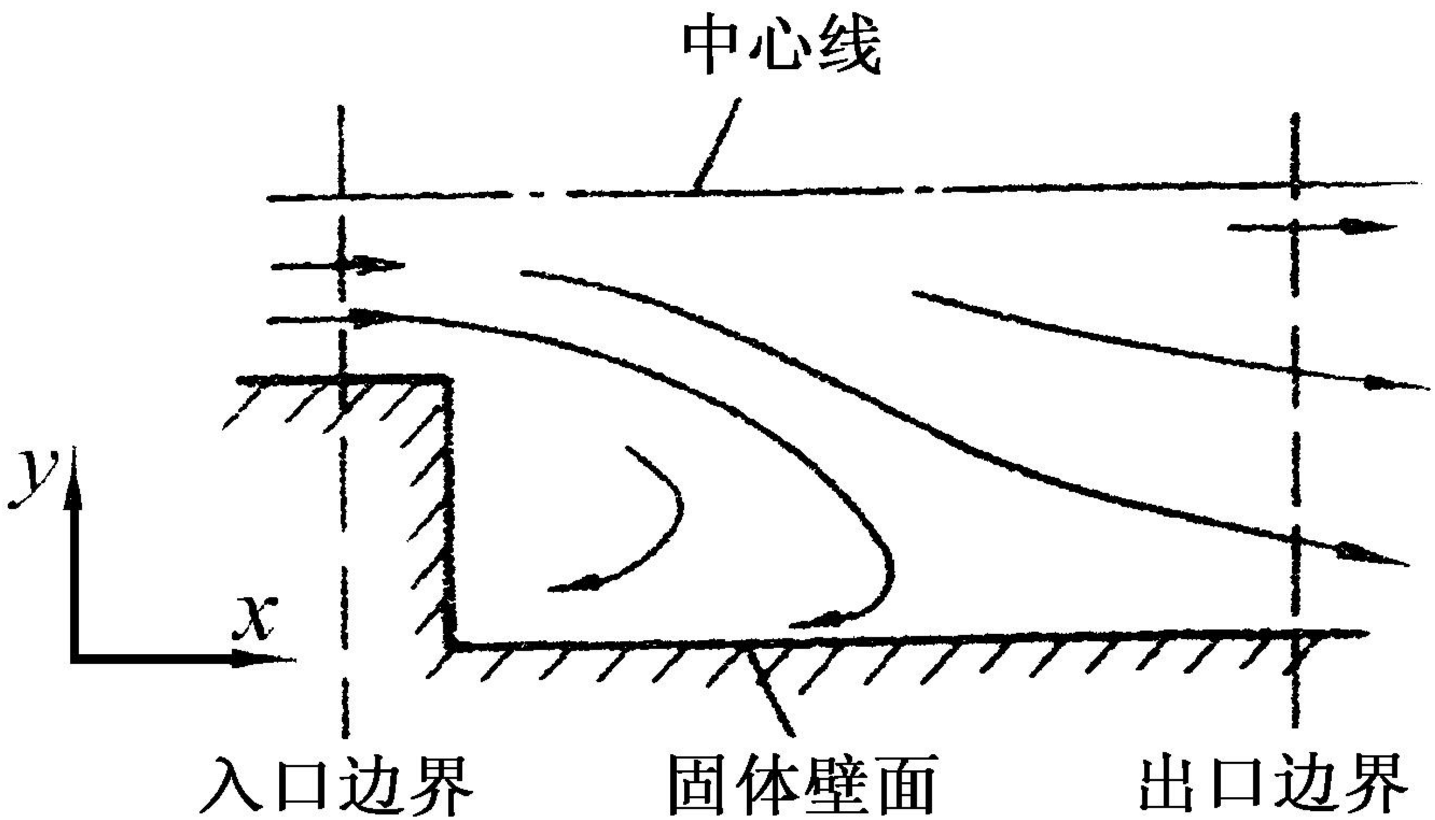
$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + a_T\phi_T + a_B\phi_B + b$$

- 系数表达式见课本

5.3.3 多维对流扩散问题的边界条件处理

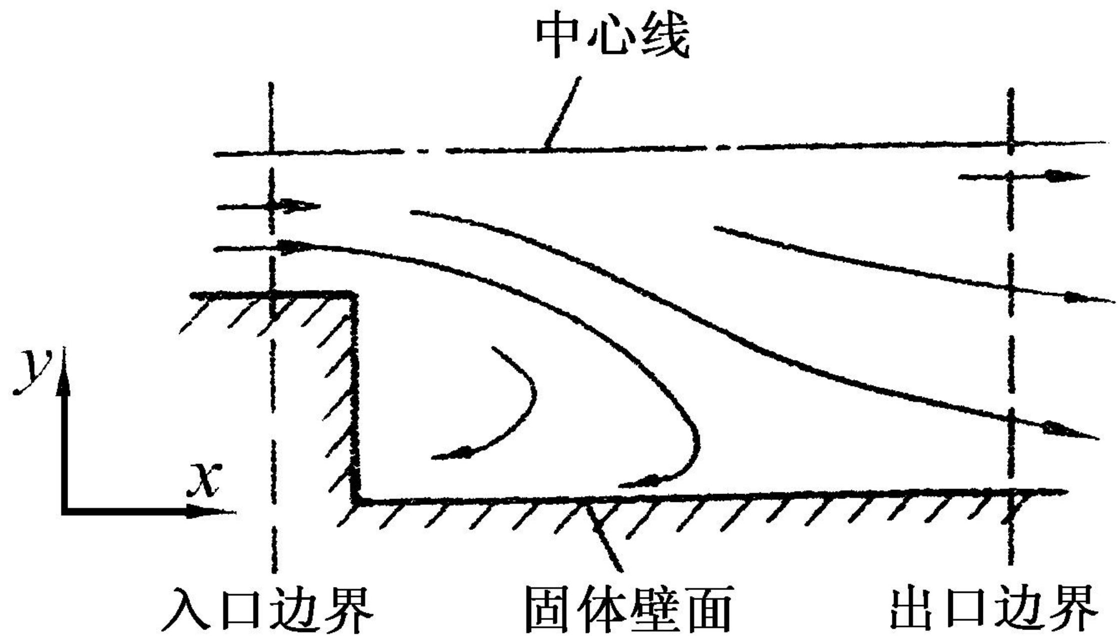
几种可能的边界条件

- 以有回流的突扩通道为例



入口边界

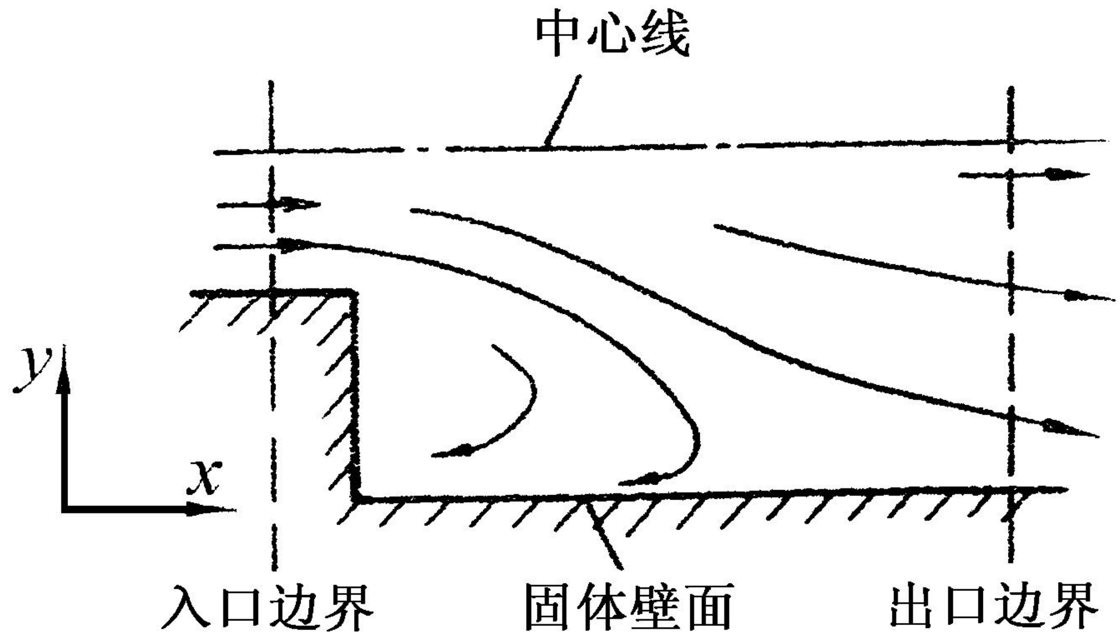
- 一般规定入口边界上的函数值 ϕ 和流速 u 和 v 的分布



对称边界

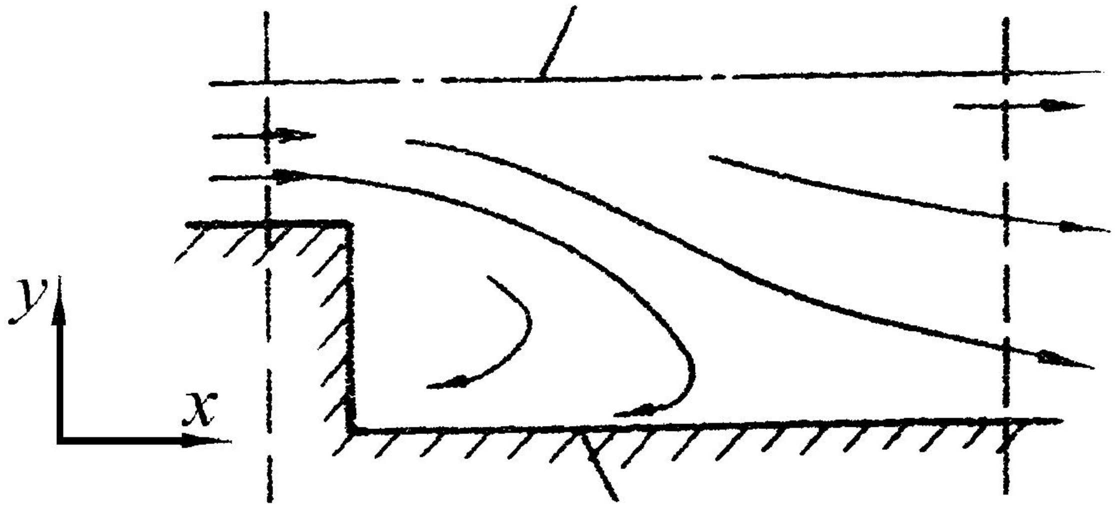
- 由对称性，有

$$v = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$



固壁边界

- 对粘性流体，壁面无渗透，其壁面速度为零，即 $u = v = 0$
- 对于 ϕ，可提1、2、3类边界条件。



出口边界

- 难点：除非实测，不可能获得出口截面信息
- **出口截面局部坐标单向化**：假定出口截面节点对它近邻的内节点无影响，从而令边界节点对内节点的影响系数为零