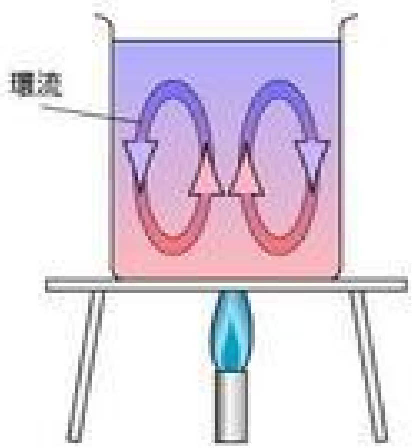
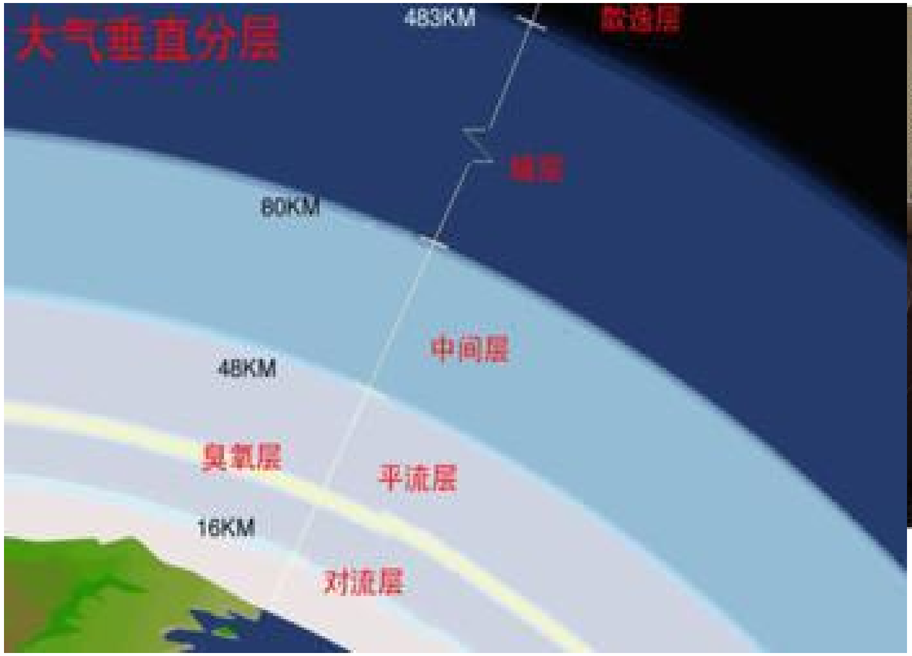
5.4 对流扩散方程离散格式的虚假扩散问题





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

5.4 对流扩散方程离散格式的虚假扩散问题

1. 人工粘性引起流向扩散
2. 网格取向引起交叉扩散
3. 非常数源项带来的虚假扩散

5.4.1人工粘性所引起的流向扩散

修正的偏微分方程(MPDE)

- 一维对流方程(波动方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a > 0)$$

- 一阶迎风格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (c = a\Delta t/\Delta x)$$

修正的偏微分方程(MPDE)

- 迎风格式的泰勒展开

$$u_t + a u_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{a\Delta x}{2} u_{xx} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} - \frac{a\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \cdots$$

自循环消元过程

- MPDE

$$u_t + a u_x = \frac{a\Delta x}{2}(1-c)u_{xx} - \frac{a\Delta x^2}{6}(2c-1)(c-1)u_{xxx} + \cdots$$

虚假的流向扩散

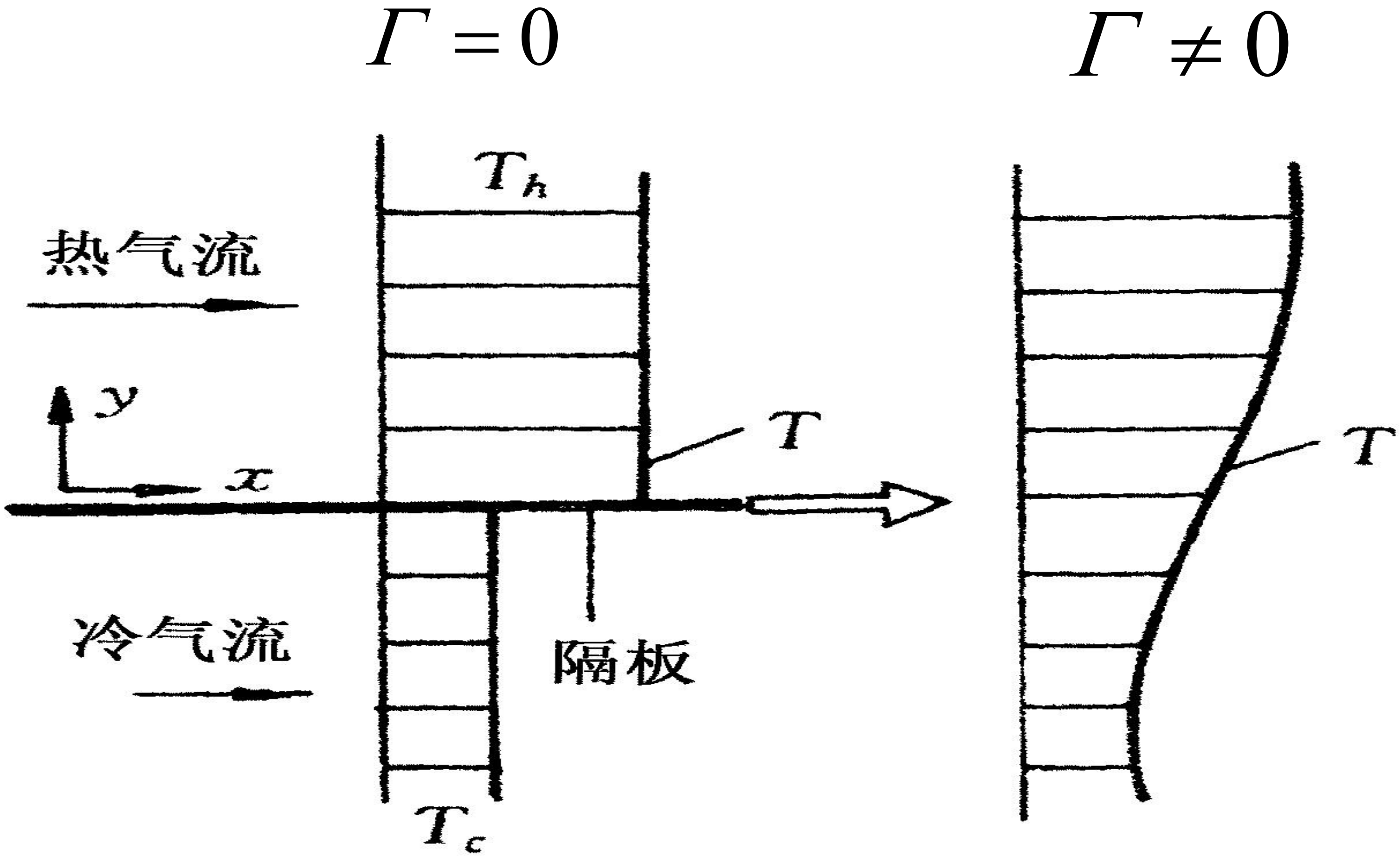
- MPDE中的二阶空间导数代表扩散作用(粘性效应)，相当在原始方程中增加了扩散作用(人工粘性作用)，这引入了原始方程中没有的一种虚假扩散。

- 流向扩散(streamwise diffusion): 只要求解函数顺流向存在不为零的一阶导数时，它使方程的真解被光滑，导致数值计算误差

5.4.2 网格取向效应引起的交叉扩散

由于网格线和流线之间并非平行或垂直，而是有一定角度的交叉而导致的扩散

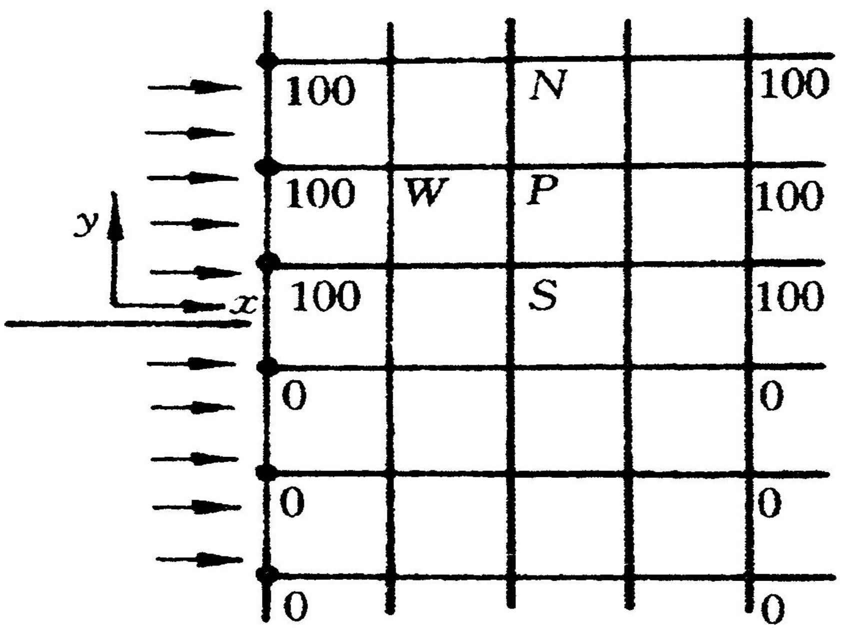
虚假扩散逐渐抹平阶梯分布



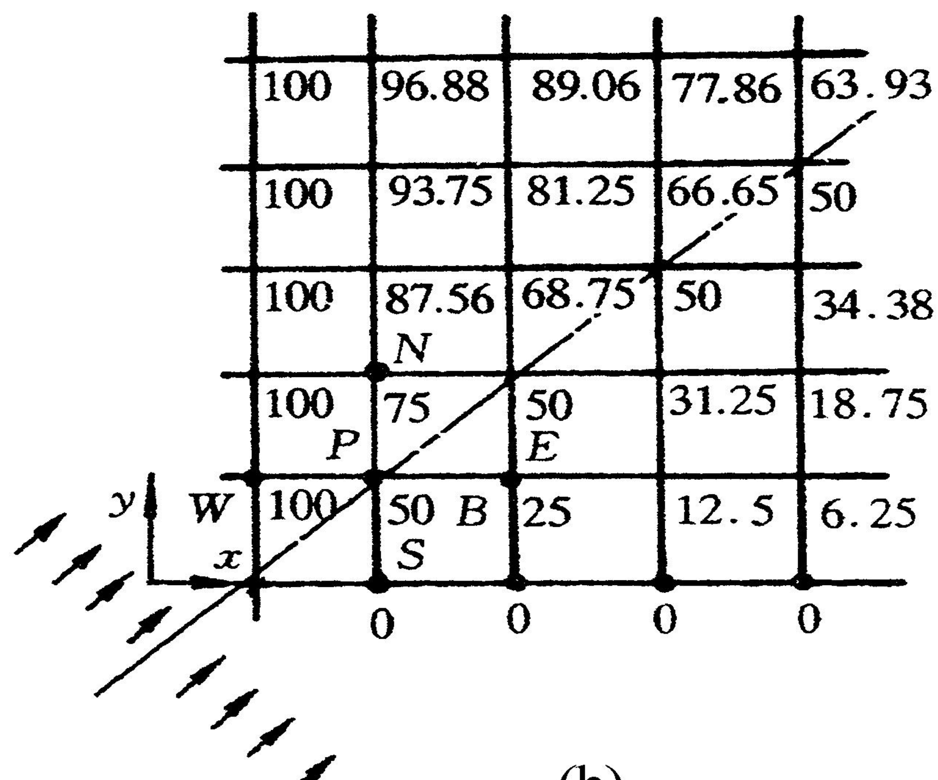
来流与网格线平行和交叉时迎风格式计算结果

$$\phi_P = \phi_W$$

$$\phi_P = \left(\phi_W + \phi_S\right)/2$$



(a)



(b)

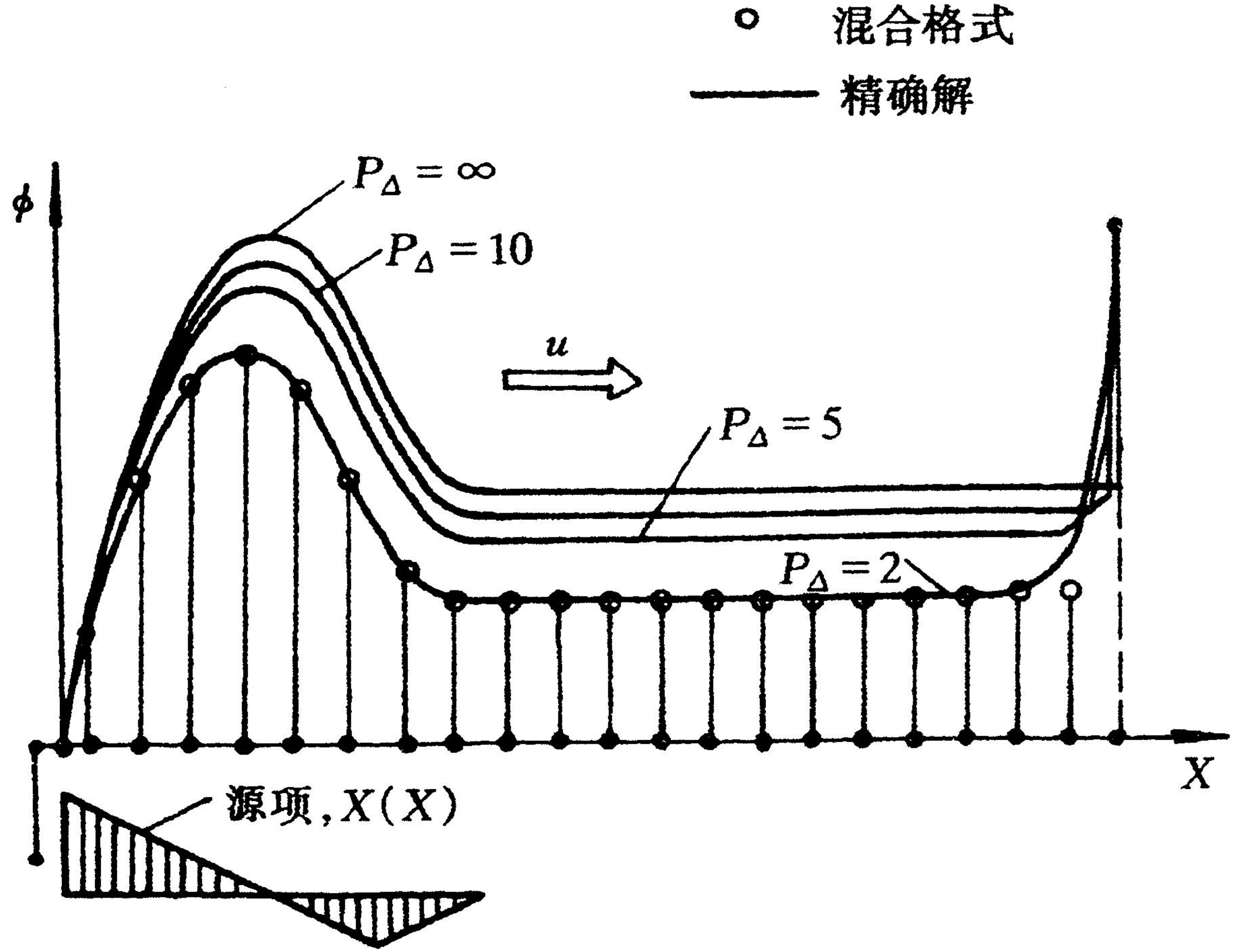
对 策

- 尽量减小流线与网格线间的倾斜和交叉。采用自适应网格，如“旋转坐标”技术。
- 改进对流项格式设计方案,采用高阶精度迎风格式
- 对一阶精度迎风格式加入适量的逆耗散，以减小扩散系数
- 离散格式中包含更多邻节点个数

5.4.3 非常数源项引起的虚假扩散

这是一种特殊情况，但在许多计算热物理问题中出现

考虑非常数源项时的数值结果



评 述

- 这种虚假扩散现象是一种特殊情况，但可能在不同的离散格式、不同源项分布情况下出现。

- 如何减少这种虚假扩散，还有待深入研究，但对流项采用高阶精度离散格式，对减轻相应的影响显然是有益的

虚假扩散无处不在，
无孔不入！！

采用高阶的对流项差分格式
总是有一定好处的