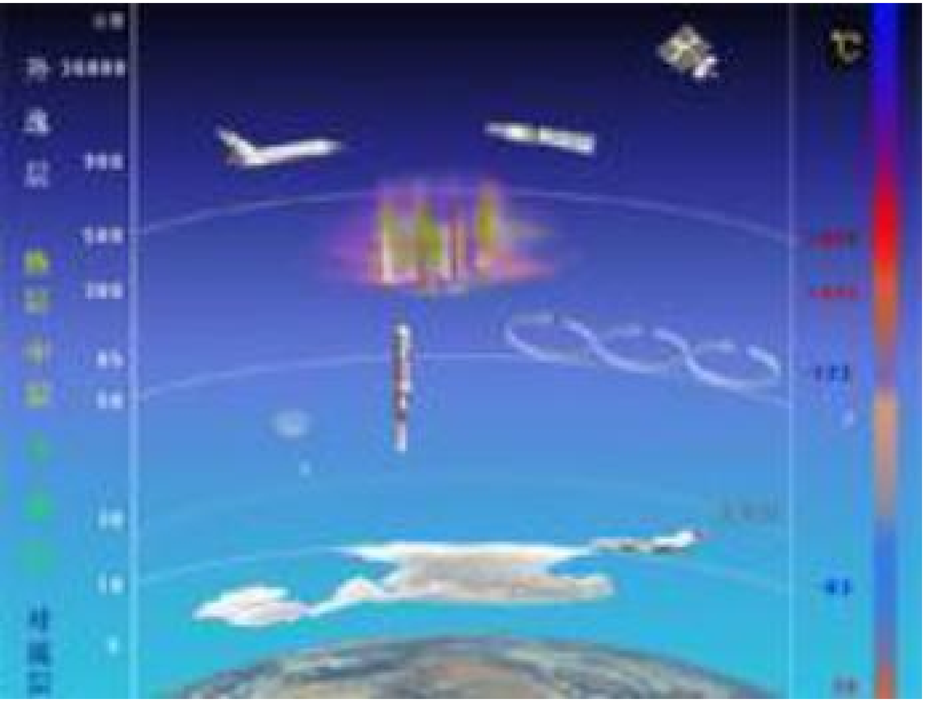
# 5.5 对流项的高阶迎风型格式





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

# 目标和主要内容

- 减轻虚假扩散：人工粘性引起的流向扩散、网格取向效应引起的交叉扩散、非常数源项引起的虚假扩散
- 增加数值计算的准确性

- 1.二阶迎风格式
- 2.三阶迎风格式
- 3. QUICK格式

# 5.5.1 二阶迎风格式

- 基于Taylor展开的待定系数方法

$$\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i}{2\Delta x}\left(3\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}\right), \qquad u_i > 0$$

$$\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i}{2\Delta x}\left(-3\phi_i + 4\phi_{i+1} - \phi_{i+2}\right), \qquad u_i < 0$$

# 与一阶迎风格式的区别

- 改写为

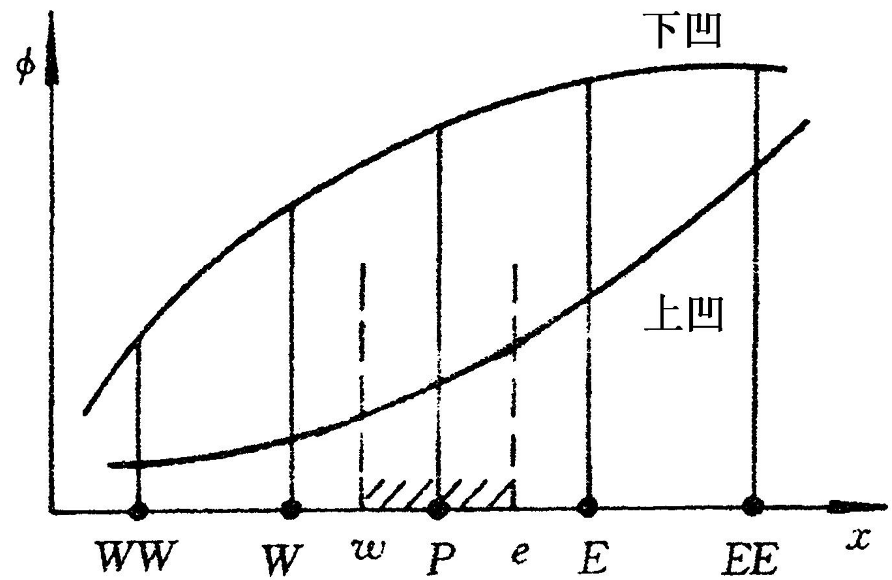
修正

$$\left(u\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = u_P\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x}+\frac{\phi_P-2\phi_W+\phi_{WW}}{2\Delta x}\right)$$

一阶迎风

$$u_i > 0$$

一阶迎风估计斜率为割线，
实际上斜率是切线



# 与一阶迎风格式的区别

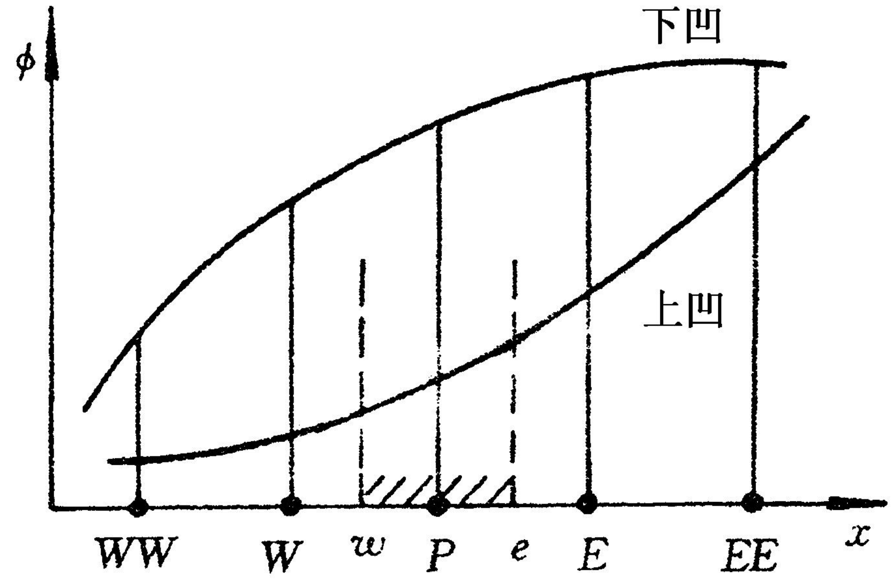
- 改写为

修正

$$\left(u\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = u_P\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x}-\frac{\phi_P-2\phi_E+\phi_{EE}}{2\Delta x}\right)$$

一阶迎风

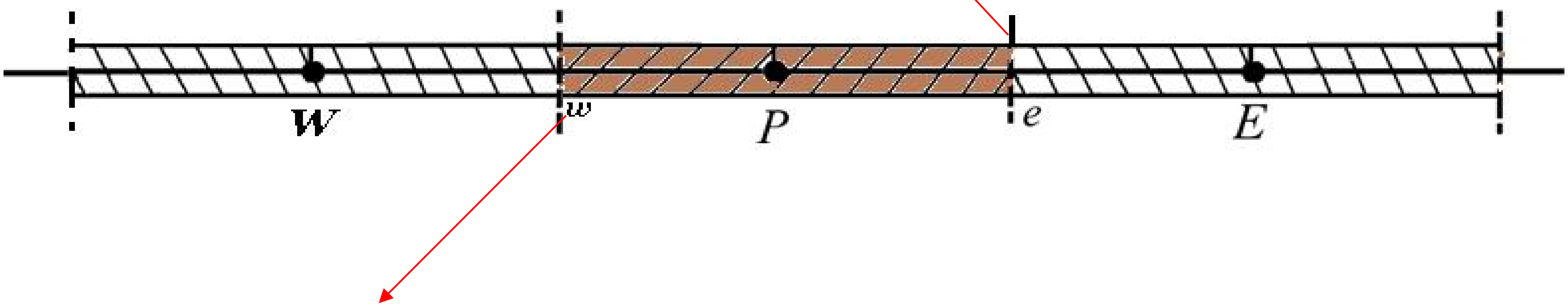
$$u_i<0$$



# 控制容积积分法离散

$$u_e > 0,\ \phi_e = 1.5\phi_P - 0.5\phi_W$$

$$u_e < 0,\ \phi_e = 1.5\phi_E - 0.5\phi_{EE}$$




$$u_w > 0,\ \phi_w = 1.5\phi_W - 0.5\phi_{WW}$$

$$u_w < 0,\ \phi_w = 1.5\phi_P - 0.5\phi_E$$

# 对流项的积分

$$\frac{1}{\Delta x}\int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial x}dx = \frac{\phi_e - \phi_w}{\Delta x} = \frac{(1.5\phi_E - 0.5\phi_{EE}) - (1.5\phi_P - 0.5\phi_E)}{\Delta x}$$

$$= \frac{-3\phi_P + 4\phi_E - \phi_{EE}}{2\Delta x} = \frac{-3\phi_i + 4\phi_{i-1} - \phi_{i-2}}{2\Delta x}$$

- 与有限差分离散结果相同，都是二阶精度

# 5.5.2 三阶迎风型格式

- 基于泰勒展开待定系数方法

$$\left(u\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i}{6\Delta x}\left(2\phi_{i+1} + 3\phi_i - 6\phi_{i-1} + \phi_{i-2}\right), \qquad u_i > 0$$

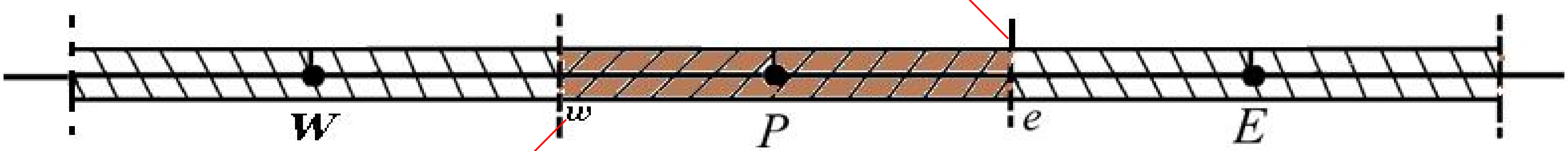
$$\left(u\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i}{6\Delta x}\left(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} - 3\phi_i - 2\phi_{i-1}\right), \qquad u_i < 0$$

# 控制容积积分法离散

界面上的函数值

$$u_e > 0,\ \phi_e = \left(-\phi_W + 5\phi_P + 2\phi_E\right)/6;$$

$$u_e < 0,\ \phi_e = \left(2\phi_P + 5\phi_E - \phi_{EE}\right)/6$$




$$u_w > 0,\ \phi_w = \left(-\phi_{WW} + 5\phi_W + 2\phi_P\right)/6;$$

$$u_w < 0,\ \phi_w = \left(2\phi_W + 5\phi_P - \phi_E\right)/6$$

# 评 述

- 在离散节点的流动下游取了一个节点，迎风性差

- 离散精度提高到三阶

- 格式变为条件稳定

- 具有守恒性

# 5.5.3 QUICK格式

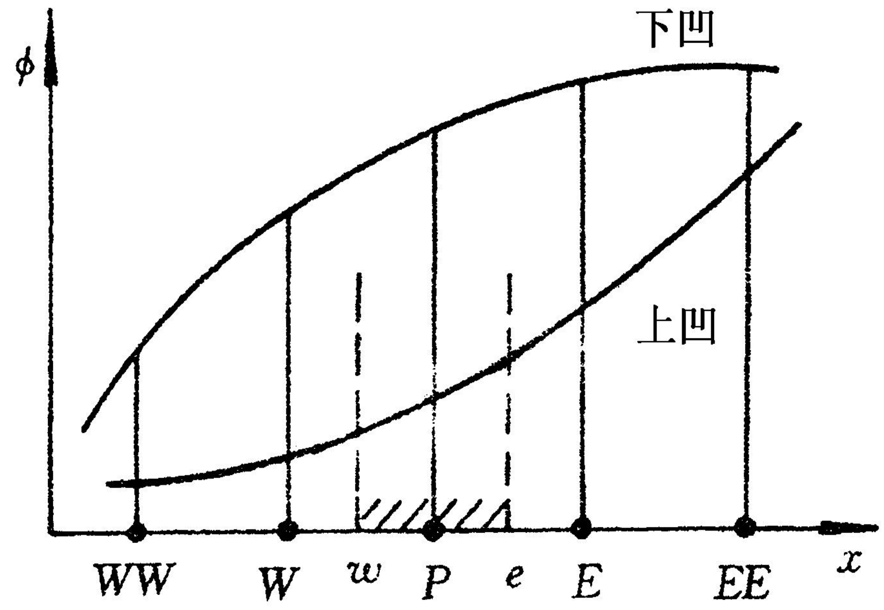
- 对流运动的二次迎风插值(Quadratic Upwind Interpolation of Convective Kinematics)

割线中点值

修正

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - \frac{1}{8}(Cure)_e$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} - \frac{1}{8}(Cure)_w$$



# 曲率修正

- e界面上

$$u_e > 0,\quad (Cure)_e = \phi_E - 2\phi_P + \phi_W;$$
$$u_e < 0,\quad (Cure)_e = \phi_P - 2\phi_E + \phi_{EE}$$

界面值修正采用了迎风思想

- w界面上

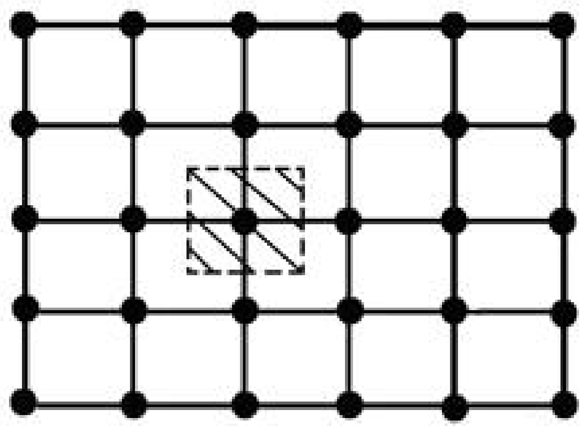
$$u_w > 0,\quad (Cure)_w = \phi_P - 2\phi_W + \phi_{WW};$$
$$u_w < 0,\quad (Cure)_w = \phi_W - 2\phi_P + \phi_E$$

# 5.5.4 对流项采用高阶格式时引出的新问题

# 涉及的节点数目增多

- 一维问题：*P*、*W*、*E*、*WW*、*EE*

- 二维问题：*P*、*W*、*E*、*S*、*N*、*WW*、*EE*、*SS*、*NN*



# 问题！

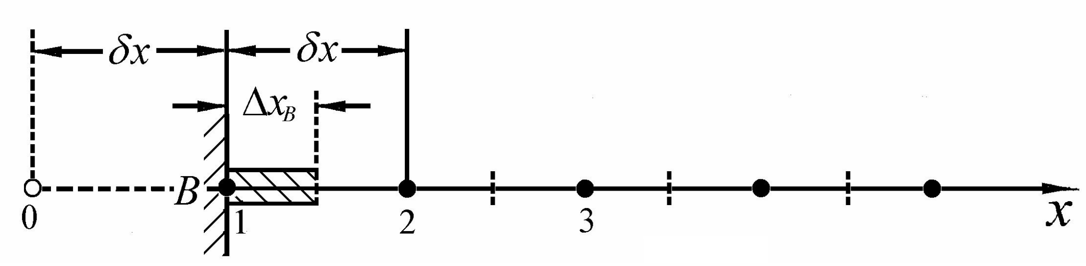
- 1. 紧邻边界的第一个内节点的离散方程如何构造？

- 2. 离散方程如何求解？

# 紧邻边界的第一个内节点的离散方程如何构造？

- 1. 开拓一个虚拟节点0，插值确定 $\phi_0$

$$\phi_0 = 2\phi_1 - \phi_2$$




- 2.采用一阶迎风或混合格式处理边界条件

# 离散方程如何求解？

- 一维情况：可采用五对角阵方程的直接求解方法求解(PDMA)

- 二维情况：可采用交替方向的五对角阵算法，还可采用延迟修正方法

# 5.6 对流项离散格式的稳定性问题

# 三类稳定性问题

- 1.代数方程迭代求解过程的不稳定性：迭代方法选择不当，迭代不收敛，导致迭代发散的情形
- 2.初值问题离散格式的不稳定性：由于时间(类时间)步长取得过大或者时间(类时间)与空间步长匹配不当，导致解振荡发散
- 3.对流格式的不稳定性：在采用某些离散格式求解对流扩散方程时，由于空间步长过大或者流速过高而网格Peclet数过大，也会使解振荡发散

# 对流项格式的不稳定性

- 分析方法：

通常将离散格式用于最简单的一维稳态无源项的模型方程来讨论。如果最简单的问题都不能正确解决，那么。。。

正系数法，离散方程精确解分析法，反馈灵敏度分析法，符号不变法

# 对流项格式的不稳定性

- 具有迁移性的对流离散格式无条件稳定：
- 相对离散出发点的单边型一阶、二阶迎风格式具有迁移性，因此恒稳定。

# 上下游都有节点的离散格式

- 中心型或偏心型的格式都不具有迁移性，这些格式只能有条件稳定；且格式在下游节点的系数越小，相对稳定性越强，临界网格 Peclet 数越大

- 临界网格Peclet数：在此Peclet数之下，离散格式是稳定的

# 上下游都有节点的离散格式

几种常见差分格式的临界Peclet数：

- 中心差分格式： $(P_\Delta)_{cr}=2$
- Quick格式： $(P_\Delta)_{cr}=8/3$
- 三阶迎风格式： $(P_\Delta)_{cr}=3$

- 实际计算发生数值解振荡的临界Peclet数要比简化模型分析得到的结果要大

- 简化模型的五个条件：一维、线性(物性均为常数)、无源、两点边值问题、均匀网格

- 解除5个苛刻条件中的任何一个，使解发生振荡的 $(P_{\Delta})_{cr}$ 都要增大

- 实际使用中，要通过数值实验，逐步扩宽临界Peclet数的选择范围，以求既能使解稳定，又不致让Peclet数太小，达到经济适用

- 多维复杂情况下对流扩散方程对流项离散格式的稳定性条件研究，是计算热物理中需要进一步解决的重要课题

# 第 5 章和第 4 章
# 重点回顾

# 5 对流扩散方程的数值方法

- 8 种对流项差分离散格式：

1 中心差分格式
2 一阶迎风格式
3 指数格式
4 混合格式
5 乘方律格式

此五种三点离散格式可写成统一形式

6 二阶迎风格式
7 三阶迎风格式
8 Quick格式

高阶迎风格式,会带来边界条件处理困难的问题

# 3 种虚假扩散

1. 人工粘性引起流向扩散

2. 网格取向引起交叉扩散

3. 非常数源项带来的虚假扩散

虚假扩散无处不在，无孔不入！！

# 一些知识点

- 2 维 和 3 维对流扩散问题的方程离散
- **多维对流扩散问题的边界条件处理：进口边界、出口边界、对称边界、固壁边界(1,2,3类边界条件)**
- **高阶对流项格式时引出的新问题**
- **对流项离散格式的稳定性**

# 4. 扩散问题的数值方法

- 1维、2维、3维导热方程的全隐式离散
- 源项线化方法
- 界面当量导热系数的确定方法
- 边界条件的处理

- 方程非线性性质的处理
- 线化代数方程组的解法：TDMA和迭代方法

# 源项线化

- 要求线化后的斜率Sp为负值
- Sp为负值，才能保证最后求解方程组的系数矩阵对角占优，有利于收敛

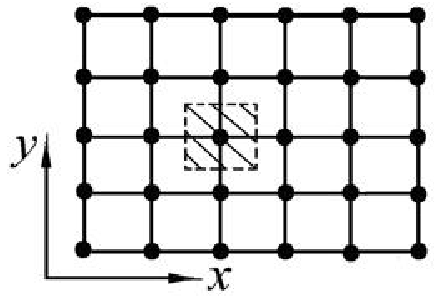
# 界面当量导热系数

- 加权平均方法
- 调和平均方法 (最符合物理意义)

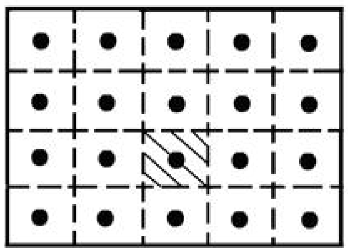
# 网格划分和边界条件

- 网格划分：

点中心




块中心



- 三类边界条件：

  1 函数值(Dirichilet)

  2 导数值(Newman)

  3 导数值与函数值的关系(Robin)

# 方程的求解

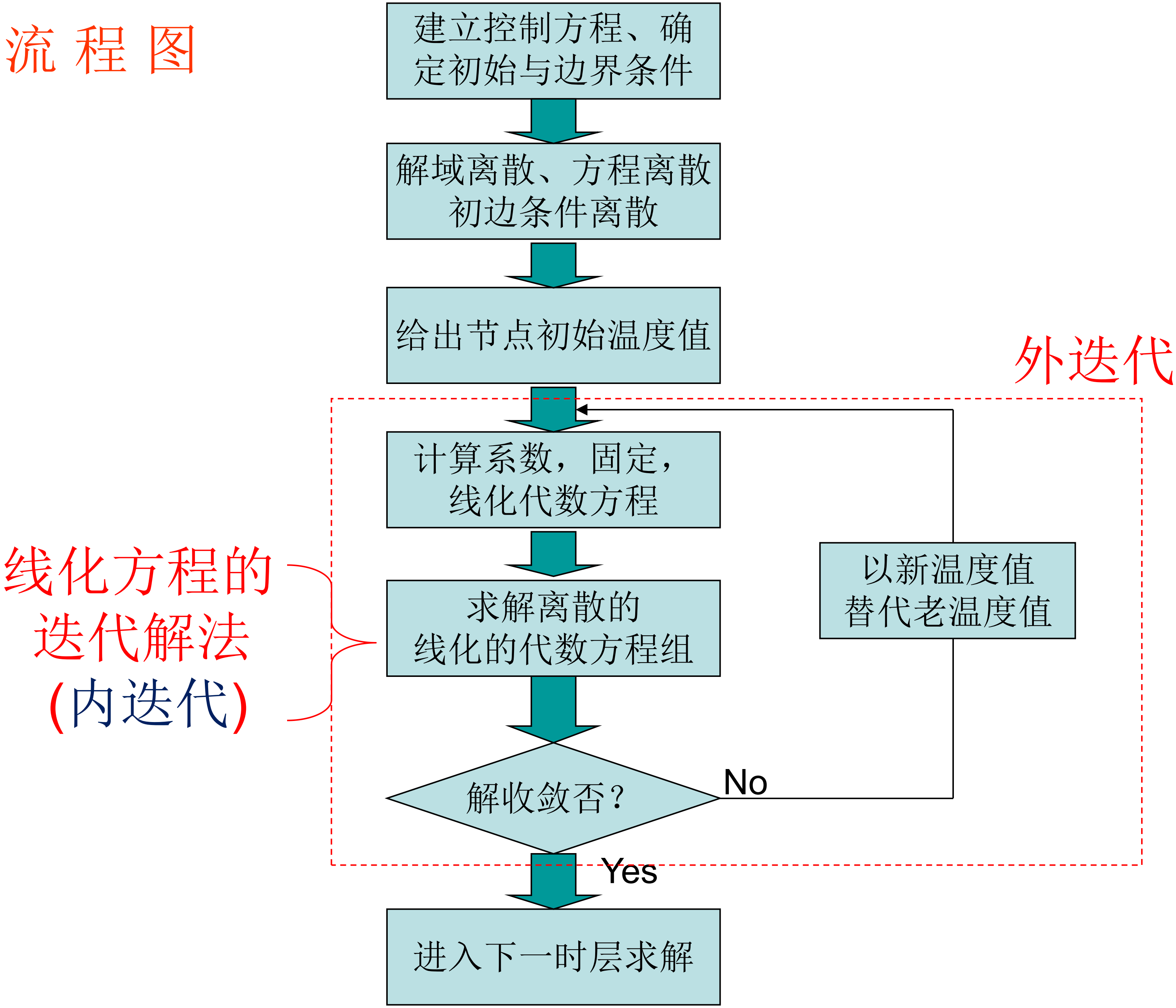
- 方程非线性性质的处理(外迭代)

- 线化代数方程组的解法：

  TDMA，PDMA

  迭代方法(内迭代)

# 流 程 图


建立控制方程、确定初始与边界条件
解域离散、方程离散初边条件离散
给出节点初始温度值
外迭代
计算系数，固定，线化代数方程
线化方程的迭代解法(内迭代)
求解离散的线化的代数方程组
以新温度值替代老温度值
解收敛否？
No
Yes
进入下一时层求解

# 特别注意

- 虽然差分离散格式方程为全隐式，但其迭代求解方法可以是显式迭代(点迭代)，隐式迭代(块迭代/线迭代)，或者交替方向隐式迭代(交替方向线迭代)。

- 差分离散方程为时间层演进，上标为n, n+1

- 迭代格式代表迭代层演进，上标(n),(n+1)