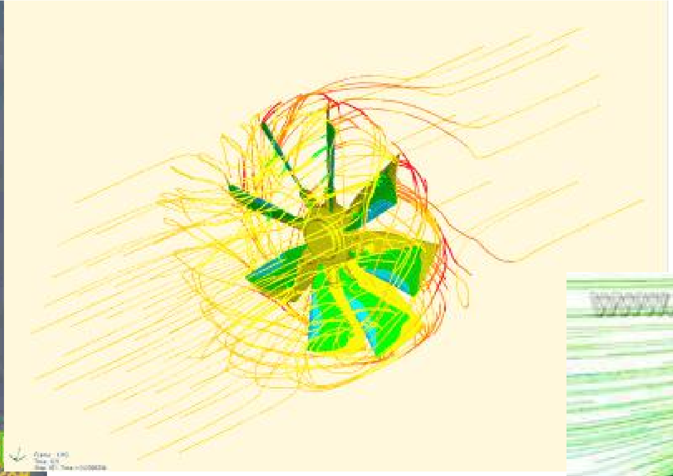
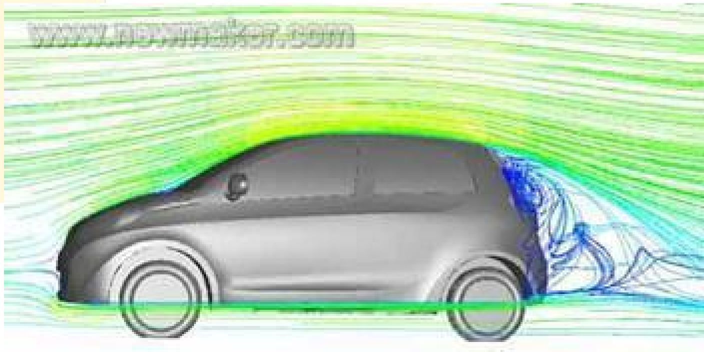
第6章 回流问题流动—传热耦合计算的数值方法





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

概 述

- 第5章 并没有涉及至关重要的流动物理量——速度的求解方法，也未论及流动和传热之间的耦合

- 本章处理流场计算的问题，必须处理压力梯度项，因为压力梯度是流场的驱动力

- 此外，还需处理动量方程与能量方程耦合的问题

概　述

- 回流问题的控制方程类型：

稳态问题：椭圆型

非稳态问题：以时间为行进坐标的抛物型

本章限于不可压流体回流问题

- 可压流体的回流问题：
- 《高速边界层传热》　　5系
- 《气动热物理》

难 点！！

- 速度的一阶导数项：对流项（第5章）
- 压力的一阶导数项：压力梯度项

6.1 不可压流体流—热耦合问题数值计算概述

回流问题的难点

- 耦合性：控制方程是由连续方程、动量方程和能量方程一组耦合的方程组成

- 不能单独求解

回流问题的难点

- 非线性：
- 由于对流项的存在，动量方程是非线性的
- 若速度与温度相关，如自然对流问题，则能量方程也是非线性的

必须使用迭代求解

- 各个关联求解量 u, v, p 之间的迭代 (SIMPLE算法)
- 解非线性问题的线化求解迭代(外迭代)
- 解线性代数方程组的迭代 (内迭代)

原始变量法和非原始变量法

- 原始变量法：求解流场，可以用原始方程中的速度 u, v,压力 p ,密度，温度T,浓度D作为基本变量，这称为原始变量法

- 非原始变量法：以涡函数、流函数作为变量，这称为非原始变量的涡流函数法

耦合求解和顺序求解

- 耦合求解法：各未知量关联在一起同时求解之
- 顺序求解法：先不考虑各变量的耦合，每个方程求解一个未知数，其它变量看成已知，在迭代过程中不断修正。

耦合求解和顺序求解

- 耦合求解法：对计算机资源要求较高，编程相对困难，发展缓慢
- 顺序求解法：需要进行相当繁琐的多层次的迭代，迭代收敛条件有时比较难找到。

6.2 原始变量法顺序求解流场所遇困难及解决途径

6.2.1 原始变量法
控制方程

6.2.1 简化条件下原始变量法求解流场的控制方程

- 不计质量力影响的二维不可压流动问题

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

顺序求解u

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

顺序求解v

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial v}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- 三个待求变量 u,v,p，仅有两个输运方程，并且压力 *p* 没有自身独立的输运方程

困 难

- 1.常规网格下离散压力导数可能导出不合理的解

- 2.压力没有输运方程，如何求解

6.2.2 常规网格下离散压力导数可能导出不合理的解

压强没有方向性，不能使用迎风型差分，必须采用中心型差分格式

压强没有方向性
因此不能使用迎风型差分
必须采用中心型差分格式

常 规 网 格 离 散

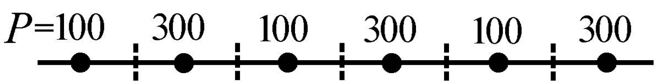
- 常规网格: 所有求解变量 u,v,p 均定义在一套网格节点上

- 一维情况，压力梯度项 $-\partial p/\partial x$

$$p_w - p_e = \frac{p_W + p_P}{2} - \frac{p_P + p_E}{2} = \frac{p_W - p_E}{2}$$

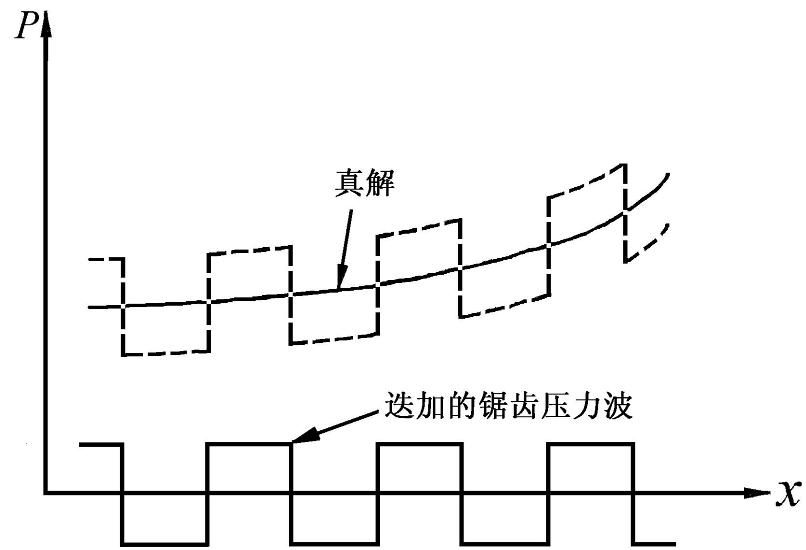
问 题！！！

- 动量方程无法识别锯齿状压力波



$$p_E = p_W$$

$$p_w - p_e = 0$$

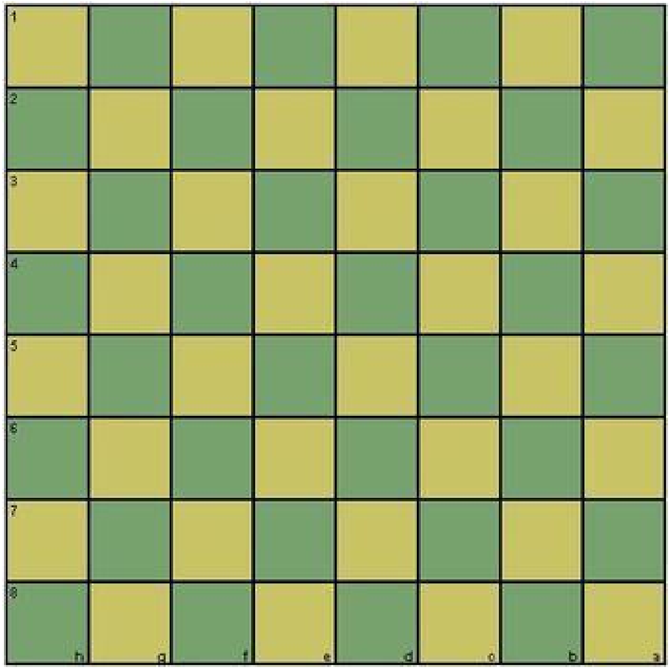


- 锯齿波压力场被等同于一个均匀的压力场

二维情况

- 棋盘形压力场：

  不能在 *x* 和 *y* 方向上产生任何压力作用，被处理成了一个均匀的压力场



解 决 方 法

- 动量方程离散时，既需要保留压力导数项取中心差分格式，该格式又要包含离散出发节点在内

- Harlow，Welch (1965) 提出交错网格 (staggered grid) 技术来解决这一困难

6.2.3 压力计算没有独立的方程

分 析 控 制 方 程

- 有了压力场，才可以计算速度场

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial v}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- 然而，连续方程没事可干

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

耦合关系

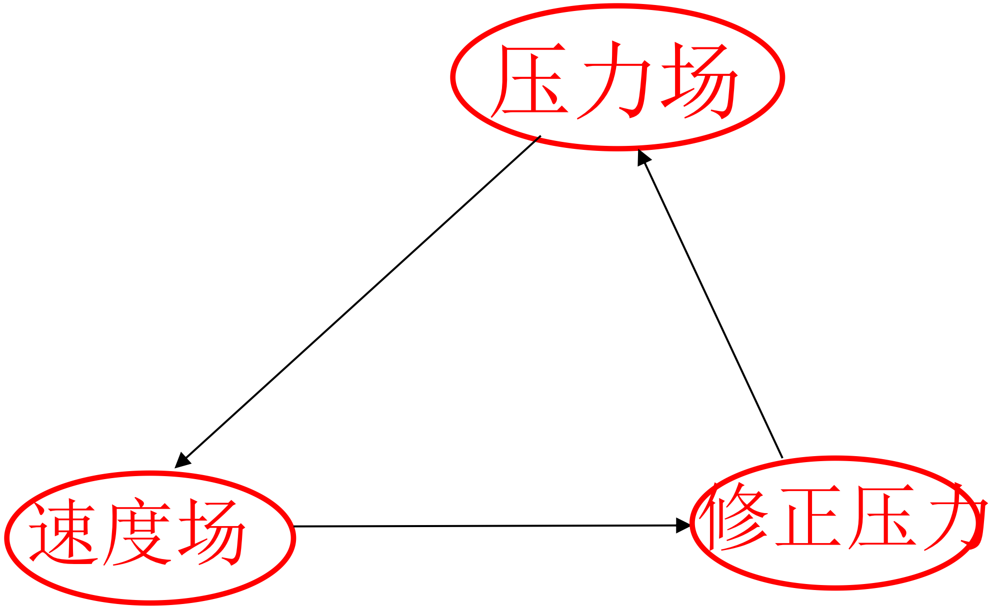
- 分析u,v,p三个变量间的耦合关系，速度和压力的正确耦合是通过连续方程：如果压力场是正确的，则按此压力场解得的速度场必满足连续方程。

思　路

- 可假定压力初始分布后，计算速度场

- 然后根据速度场与连续方程的不匹配程度，来修正压力分布

- 迭代，直到收敛。



迭代更新方法

- 先假定一个压力场，据此计算速度场

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial v}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- 考察此速度场不符合连续方程的程度，据此修正压力场，发挥了连续方程的作用

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

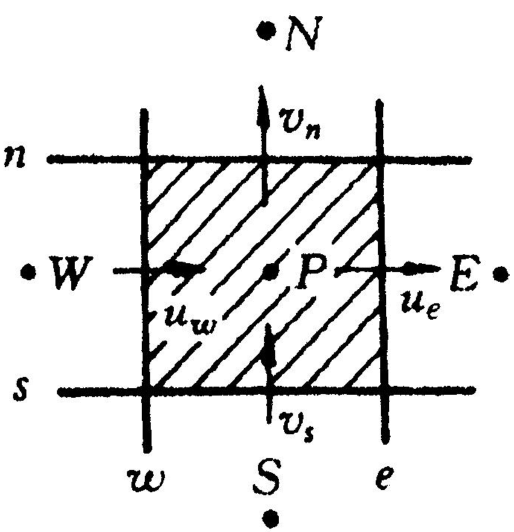
SIMPLE算法

压力关联方程的半隐式方法

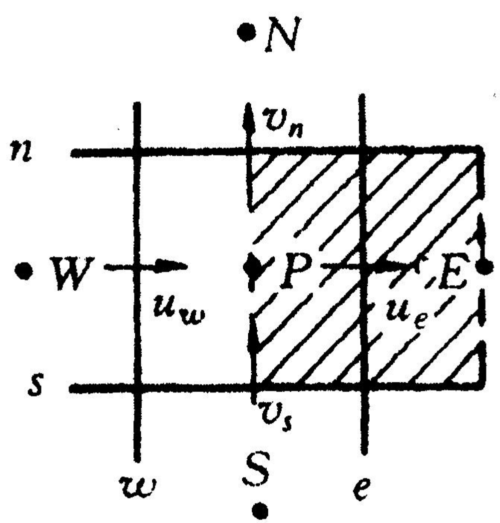
6.3 交错网格下的动量方程离散

6.3.1 交错网格及其变量布置

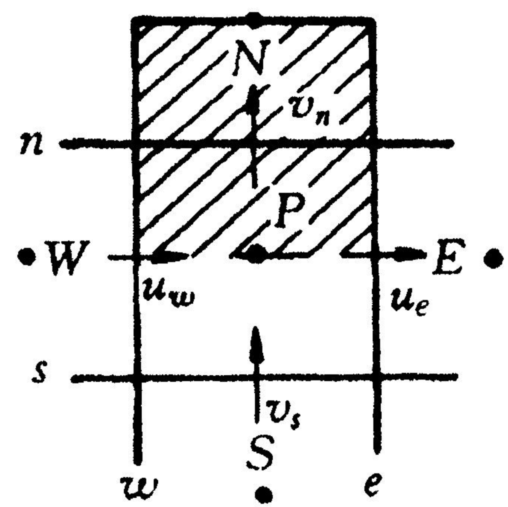
- 交错网格：将不同的求解变量及物性参数分别定义在不同网格上的网格系统



(a) 主控制体积



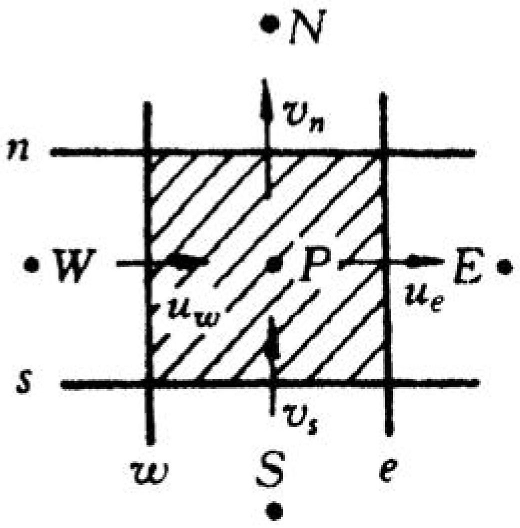
(b) u 控制体积



(c) v 控制体积

主网格

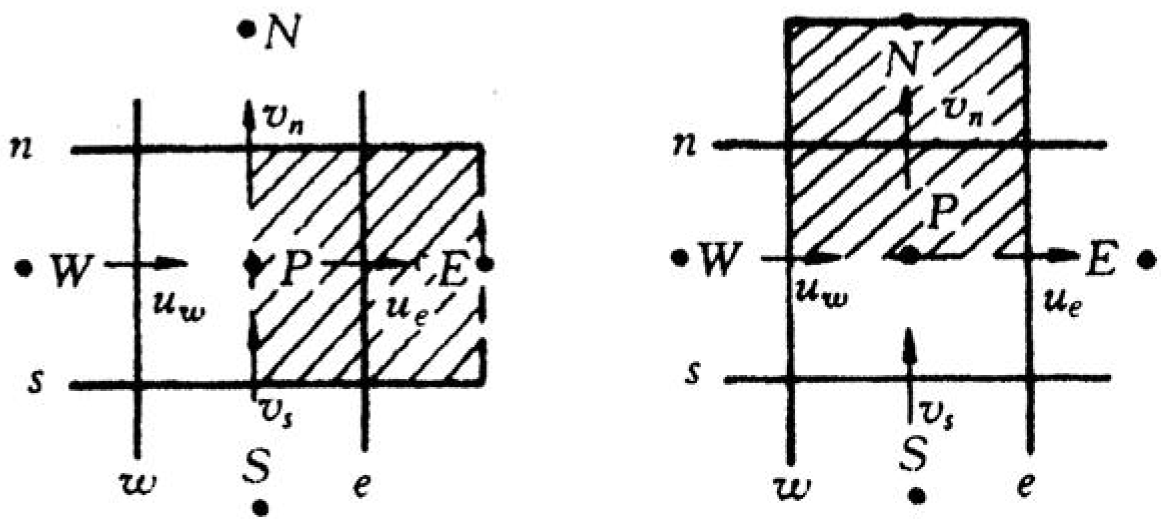
- 主节点(原始网格分割节点)：压力、温度、所有标量场与物性参数定义在这些节点上



(a) 主控制体积

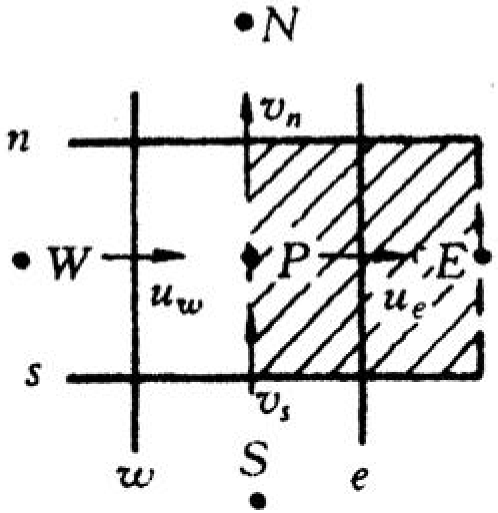
交错网格

- 将矢量函数速度u,v分别定义在错开主节点半个网格步长的主控制容积的界面上

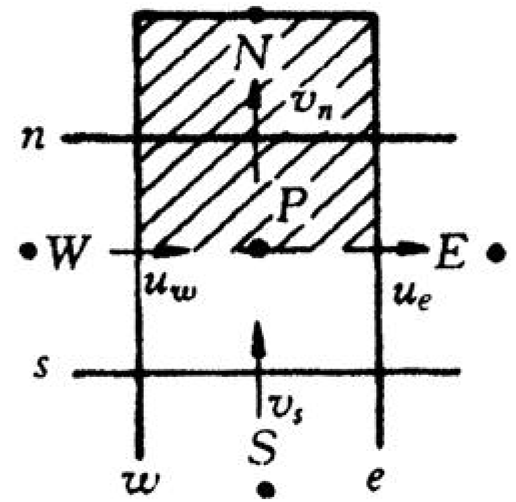


(b) u 控制体积　　(c) v 控制体积

压力梯度的离散



(b) u 控制体积



(c) v 控制体积

$$\left(p_E - p_P\right)/(\delta x)_e$$

$$\left(p_N - p_P\right)/(\delta y)_n$$

- 既保留压力导数项取中心差分格式
- 该格式又包含了离散出发节点 P 在内
- 能够识别锯齿状压力场和棋盘状压力场，避免了误差的累积叠加

代 价！！！

- 编制计算机程序必须提供速度分量位置的全部相关信息
- 需要进行相当繁琐的插值计算

6.3.2 交错网格下的动量方程离散

- 压力梯度项的积分

$$\int_s^n \int_P^E \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) dxdy = -\int_s^n p\Big|_P^E dy \approx (p_P - p_E)\Delta y$$

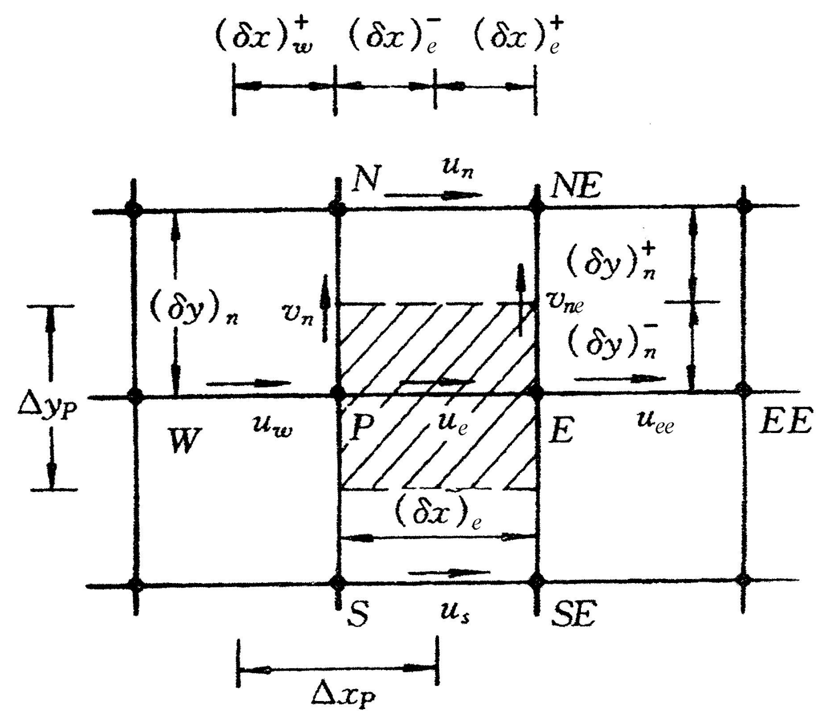
- 压力梯度项在速度节点 e 处一步中心差离散，二阶精度

X 动量方程

$$a_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_e + (p_P - p_E) A_e$$

$$nb = w, e, s, n$$

$$b_e = S_C \Delta V + a_e^0 u_e^0$$



Y 动量方程

$$a_n v_n = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_n + (p_P - p_N) A_n$$

6.3.3 交错网格下控制容积界面上物理量的插值

1. 界面流量插值
2. 主控制容积界面的密度插值
3. 界面上的扩散系数或者扩导插值

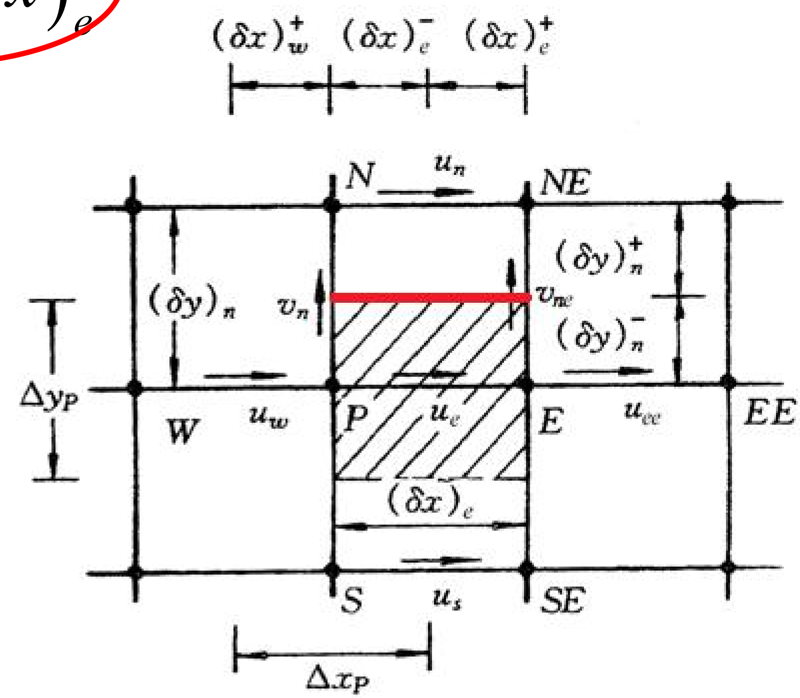
1. 界面流量插值

- 北界面*n-e*的流量

Vne的贡献

$$F_{n-e} = (\rho v)_n (\delta x)_e^- + (\rho v)_{ne} (\delta x)_e^+$$

Vn的贡献



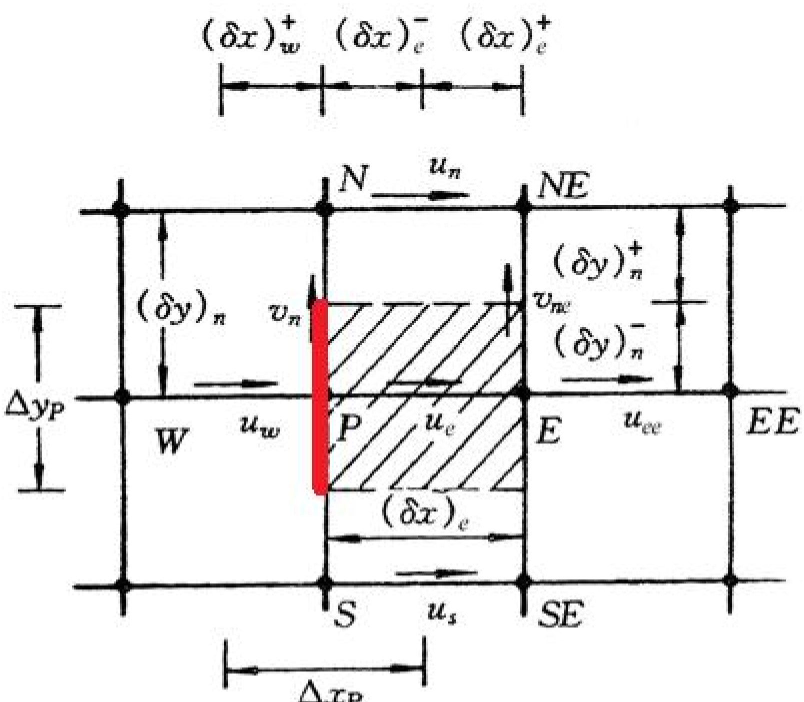
西界面*P*上的流量Fp

- Fe，Fw加权插值

Fw的贡献

$$F_P = F_e \frac{(\delta x)_w^+}{\Delta x_P} + F_w \frac{(\delta x)_e^-}{\Delta x_P} = \underline{(\rho u)_e \Delta y} \frac{(\delta x)_w^+}{\Delta x_P} + \underline{(\rho u)_w \Delta y} \frac{(\delta x)_e^-}{\Delta x_P}$$

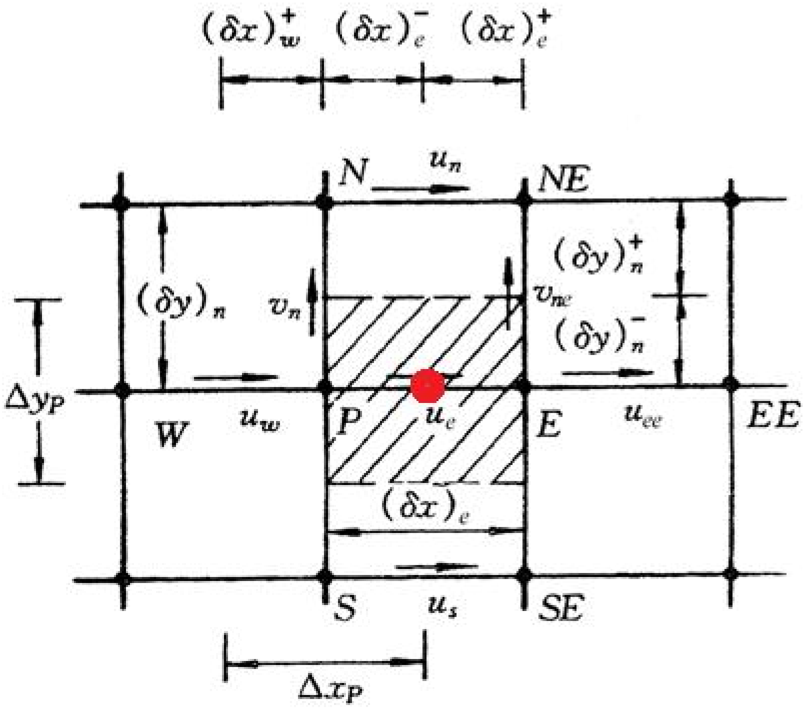
Fe的贡献



2. 主控制容积界面的密度插值

- 密度只在主节点P，E上定义

$$\rho_e = \rho_E \frac{(\delta x)_e^-}{(\delta x)_e} + \rho_P \frac{(\delta x)_e^+}{(\delta x)_e}$$



3．界面上的扩散系数或者扩导插值

- 北界面n-e上的扩导

$$D_{n-e}=\underbrace{\frac{(\delta x)_e^-}{\frac{(\delta y)_n}{\Gamma_n}}+\frac{(\delta x)_e^+}{\frac{(\delta y)_n}{\Gamma_{ne}}}}_{\text{并联的扩导}}=\underbrace{\frac{(\delta x)_e^-}{\frac{(\delta y)_n^-}{\Gamma_P}+\frac{(\delta y)_n^+}{\Gamma_N}}}_{\text{串联的阻力}}+\underbrace{\frac{(\delta x)_e^+}{\frac{(\delta y)_n^-}{\Gamma_E}+\frac{(\delta y)_n^+}{\Gamma_{NE}}}}_{\text{串联的阻力}}$$