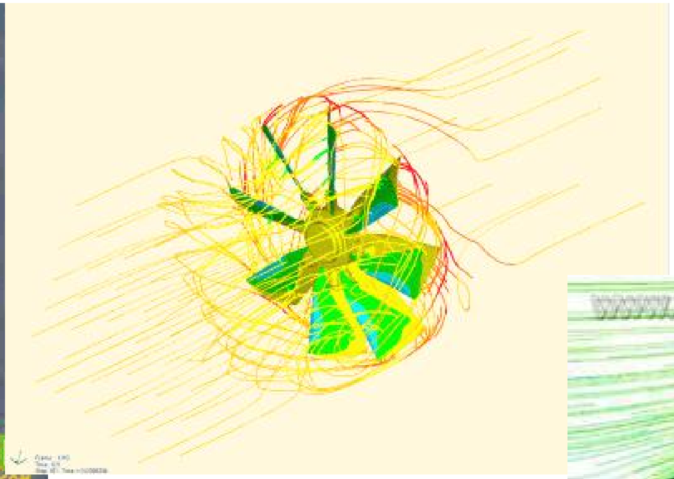
6.4 原始变量顺序求解流场的压力修正方法



胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/

humaobin@ustc.edu.cn

概　述

- 第5章 并没有涉及至关重要的流动物理量——速度的求解方法，也未论及流动和传热之间的耦合

- 本章处理流场计算的问题

- 需处理动量方程、能量方程耦合问题

6.4.1 压力修正方法的基本思想

- 压力修正方法是为了解决流场中压力P没有单独的控制方程，无法求解的问题

- 压力修正方法发挥了连续方程的作用，通过连续方程推导得到了压力修正值方程

简化条件下原始变量法求解流场的控制方程

- 不计质量力影响的二维不可压流动问题

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

压力梯度项

求解u

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

求解v

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial v}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- 三个待求变量 u,v,p，仅有两个输运方程，如何求解压力 p ？

分 析 控 制 方 程

- 有了压力场，才可以计算速度场

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\nu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\nu\frac{\partial v}{\partial y})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- 然而，连续方程没事可干！

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

分析耦合关系

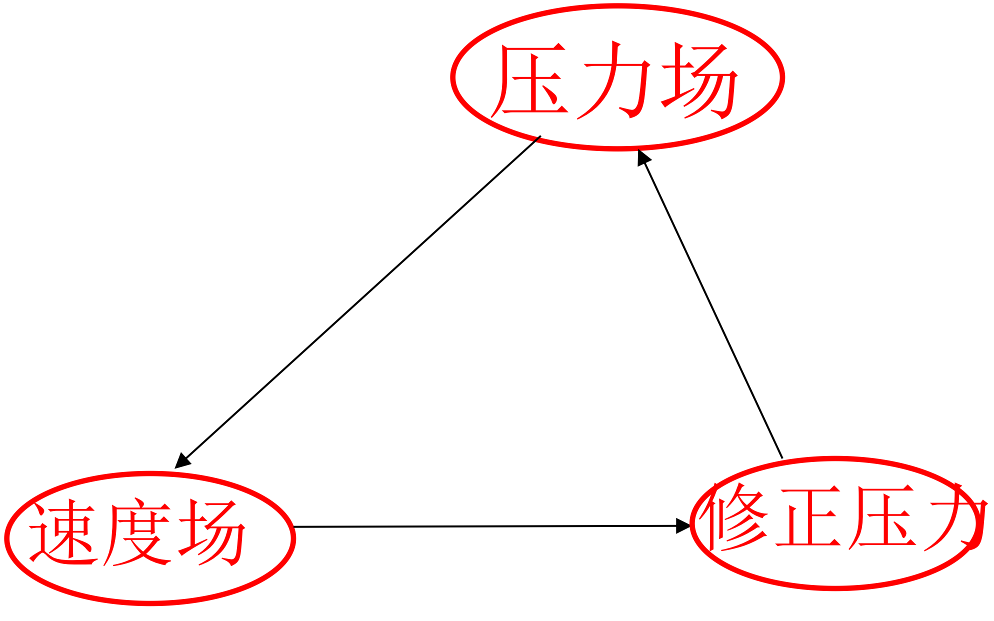
- 分析u,v,p三个变量间的耦合关系，速度和压力的正确耦合是通过连续方程：
- 如果压力场是正确的，则按此压力场解得的速度场必满足连续方程。

思 路

- 可假定压力初始分布后，计算速度场

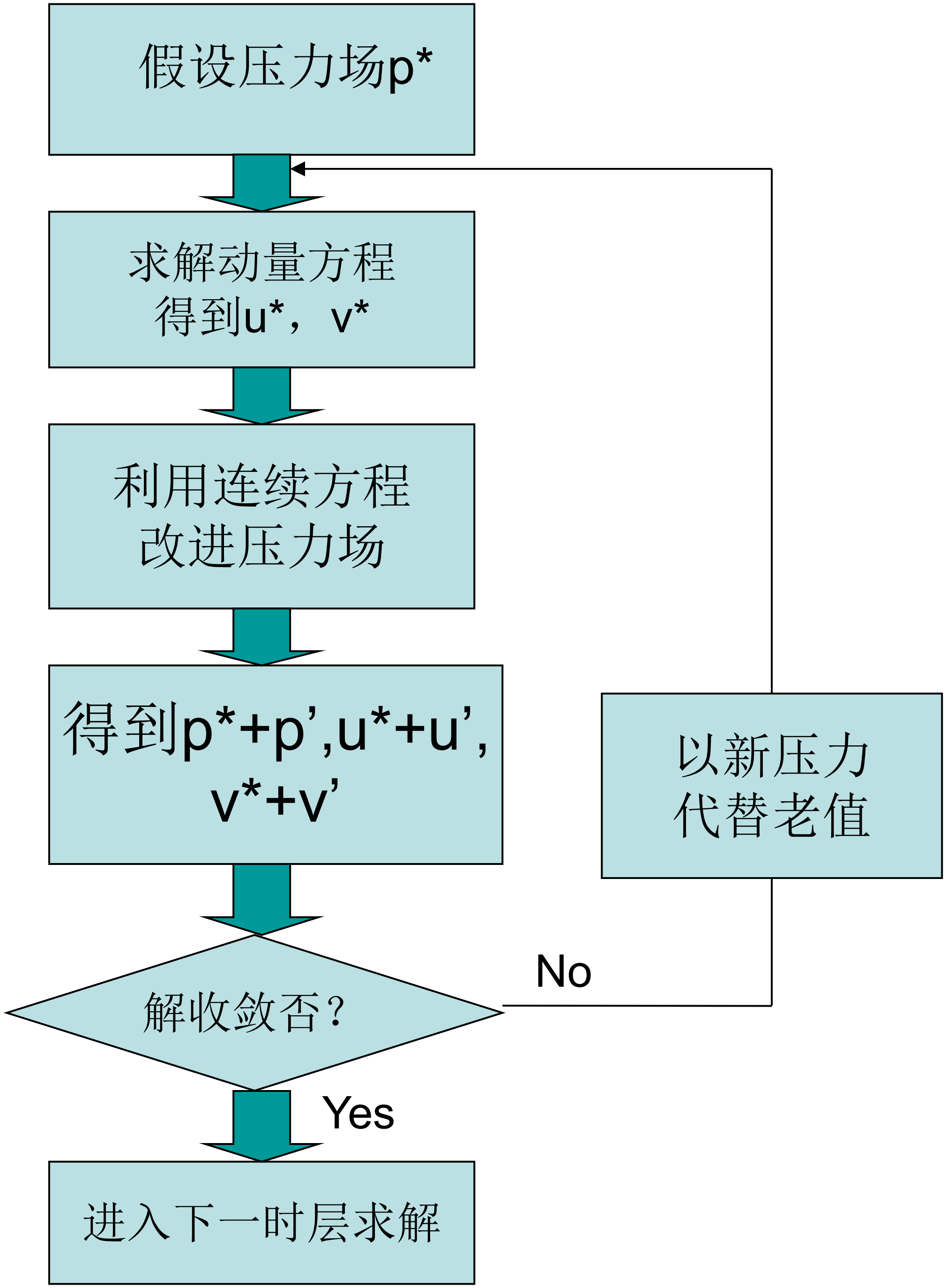
- 然后根据速度场与连续方程的不匹配程度，来修正压力分布

- 迭代，直到收敛。



压力修正方法

流 程 图



假设压力场p*
求解动量方程
得到u*，v*
利用连续方程
改进压力场
得到p*+p’,u*+u’,
v*+v’
解收敛否？
No
以新压力
代替老值
Yes
进入下一时层求解

关 键 问 题

- 要求使改进的压力场 p^*+p' 对应的改进速度场 u^*+u', v^*+v' 能够满足连续方程

- Q1：如何构造压力修正值 p' 方程?

  此问题直接搞很难！！！

- Q2：如何得到修正速度 u', v'?

  可先处理这个问题，迂回战术！

6.4.2 速度修正值的简化近似计算

- u*, v*, p* 必满足离散的动量方程：

$$a_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b_e + A_e (p_P^* - p_E^*)$$

- 期望I： 修正后的速度能满足连续方程
- 期望II： 修正后的速度也能满足动量方程

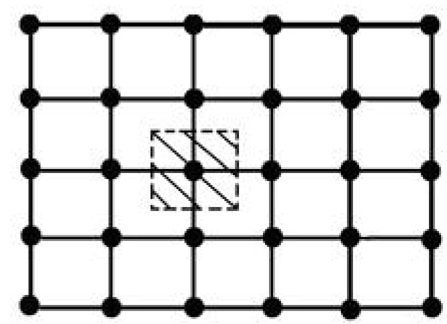
$$a_e(u_e^* + u') = \sum_{nb} a_{nb}(u_{nb}^* + u_{nb}') + b_e + A_e\left[(p_P^* + p_P') - (p_E^* + p_E')\right]$$

速度修正值u’，v’方程

压力修正值梯度项

$$a_e u_e' = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}' + A_e (p_P' - p_E')$$

邻点的耦合项



大胆的假设

$$a_e u_e' = \cancel{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb}'} + A_e (p_P' - p_E')$$

$$\Downarrow$$

$$a_e u_e' = A_e (p_P' - p_E')$$

$$u_e' = d_e(p_P' - p_E'), \qquad d_e = A_e / a_e$$

$$v_n' = d_n(p_P' - p_N'), \qquad d_n = A_n / a_n$$

修正的速度

$$u_e = u_e^* + d_e(p_P' - p_E')$$

$$v_n = v_n^* + d_n(p_P' - p_N')$$

6.4.3 将连续方程离散式转化为压力修正值p’方程

- 连续方程(不限于不可压):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0$$

- 全隐式离散:

$$\frac{\rho_P-\rho_P^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y+\left[(\rho u)_e-(\rho u)_w\right]\Delta y+\left[(\rho v)_n-(\rho v)_s\right]\Delta x=0$$

将修正的速度方程代入

$$u_e = u_e^* + d_e(p_P^{'} - p_E^{'})$$

$$v_n = v_n^* + d_n(p_P^{'} - p_N^{'})$$

压力修正值p’方程

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b_{p'} = \sum_{nb} a_{nb} p_{nb}' + b_{p'}$$

其中：

$$b_{p'} = \frac{\rho_P^0 - \rho_P}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left[\left(\rho u^* \right)_w - \left(\rho u^* \right)_e \right] \Delta y + \left[\left(\rho v^* \right)_s - \left(\rho v^* \right)_n \right] \Delta x$$

比较

$$b_{p'} = \frac{\rho_P^0 - \rho_P}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \left[\left(\rho u^*\right)_w - \left(\rho u^*\right)_e\right]\Delta y + \left[\left(\rho v^*\right)_s - \left(\rho v^*\right)_n\right]\Delta x$$

- 连续方程离散形式：

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \left[\left(\rho u\right)_e - \left(\rho u\right)_w\right]\Delta y + \left[\left(\rho v\right)_n - \left(\rho v\right)_s\right]\Delta x = 0$$

- $b_{p'}$ 为0，则u*, v* 已经满足连续方程，即方程组已经收敛

- $b_{p'}$ 的绝对值反映了靠近收敛的距离，迭代的过程就是不断减少这个值

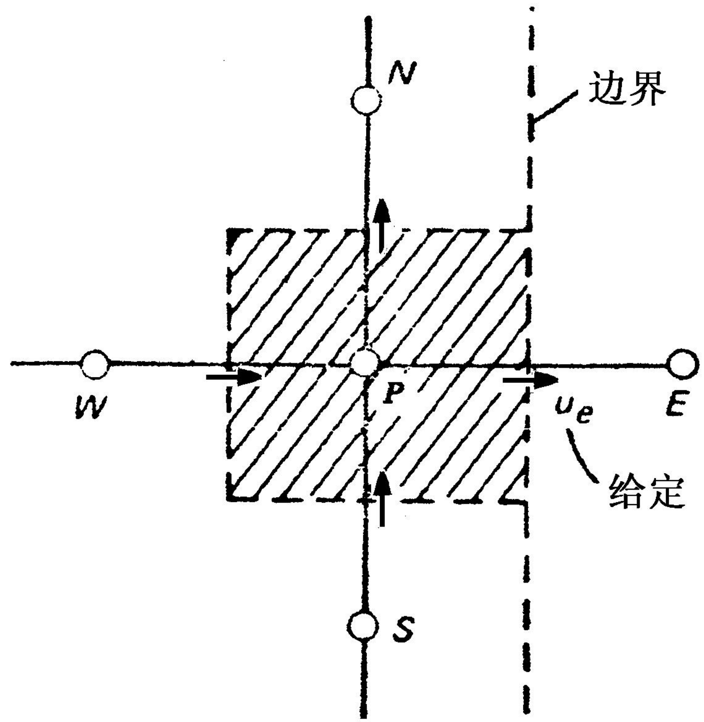
6.4.4 p’方程的边界条件

- 1、给定边界压力分布，速度待求：

$$p' = 0$$

$$a_E p_E^{'} = 0$$

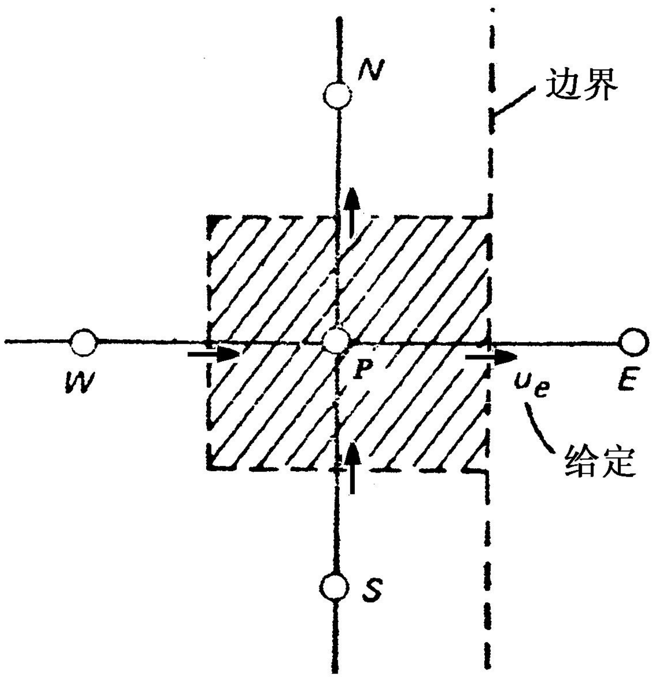
$$a_E = 0$$



2、给定边界速度

$$a_P p_P^{'} = a_E p_E^{'} + a_W p_W^{'} + a_N p_N^{'} + a_S p_S^{'} + b_{p^{'}} = \sum_{nb} a_{nb} p_{nb}^{'} + b_{p^{'}}$$

$$u_e^{'} \equiv 0$$



$$a_E p_E^{'} = 0$$

$$a_E = 0$$

6.5 SIMPLE算法

压力关联方程的半隐式方法

(Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations)

Patankar,Spalding (1972)

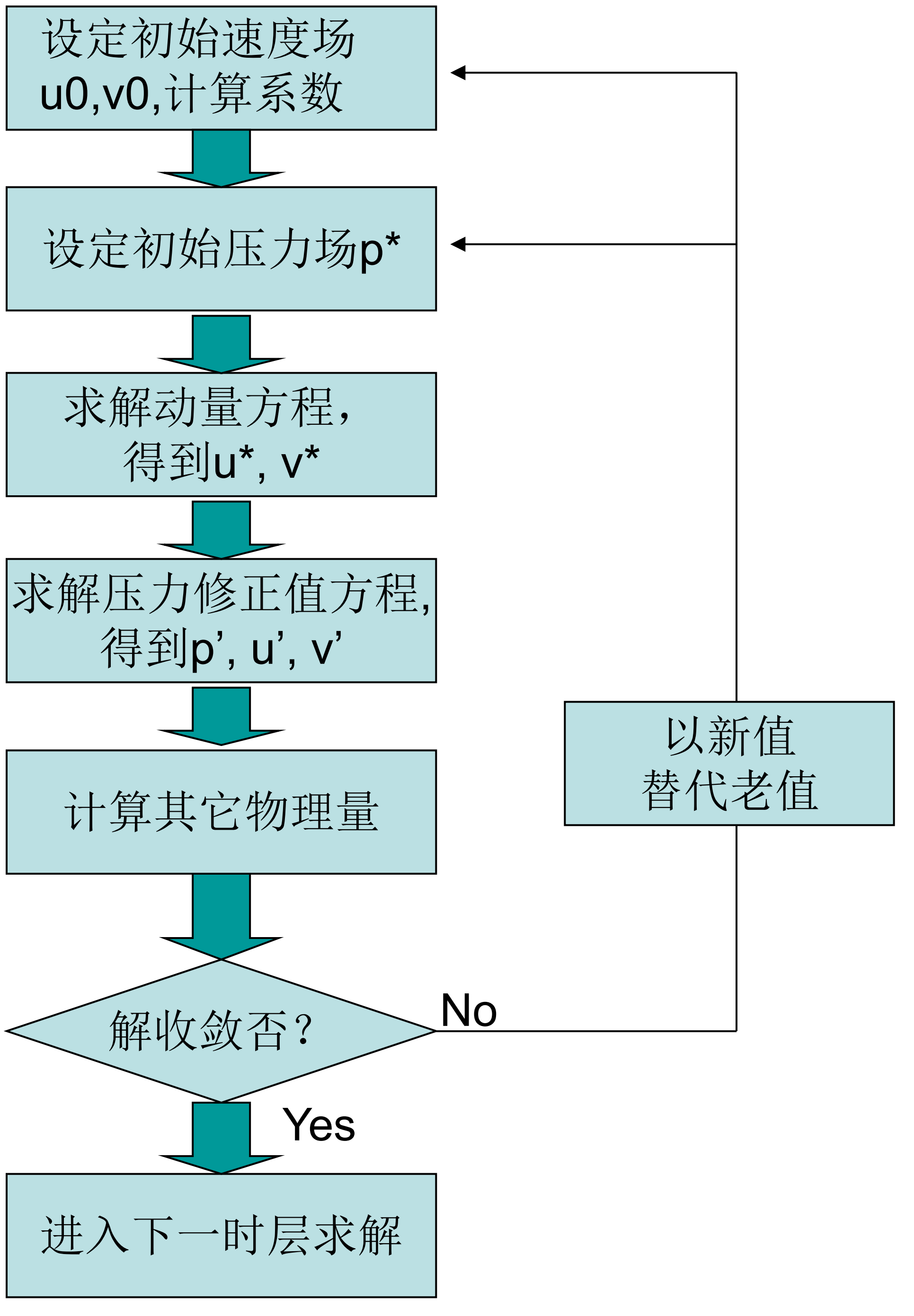
半 隱 Semi-Implicit

$$a_e u_e' = \cancel{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb}'} + A_e (p_P' - p_E')$$

$$a_e u_e' = A_e (p_P' - p_E')$$

流 程 图

（非稳态情况）


设定初始速度场
u0,v0,计算系数
设定初始压力场p*
求解动量方程，
得到u*, v*
求解压力修正值方程,
得到p’, u’, v’
计算其它物理量
解收敛否？
No
以新值
替代老值
Yes
进入下一时层求解

SIMPLE算法的三个简化假设

- 1半隐假设：速度修正值计算没有计及邻点速度修正值的影响
- 2 冻结系数法线化代数方程组：
- 3 初始速度场 u0, v0 和初始压力场 p* 的设定各自独立，一般不可能匹配

6.5.2 SIMPLE算法若干问题讨论

1．算法的简化假设不影响流场最终收敛解，

但影响收敛的速度

三个简化假设

- 1 半隐假设：构造能够迭代求解的方法
- 2 冻结系数法线化代数方程组：处理非线性问题的基本做法
- 3 u0, v0 和 p* 不匹配：解决迭代起步问题

2．P’方程的数学特征

- 压力修正方程

$$a_P p_P^{'} = a_E p_E^{'} + a_W p_W^{'} + a_N p_N^{'} + a_S p_S^{'} + b_{p'} = \sum_{nb} a_{nb} p_{nb}^{'} + b_{p'}$$

$$a_P = \sum a_{nb}$$

- 如果p’是方程的解，p’+C 也符合方程

P’ 方程的多值特性

边界条件不能唯一确定 p’ 值

- 给定边界压力或给定边界法向速度，都令其方程中与边界相应的系数为零，结果p’还是不能唯一确定

P’ 方程的多值特性

- 实际上，由该方程确定 p’ 的绝对值意义不大，重要的是 p’ 的相对值

$$a_e u_e' = A_e (p_P' - p_E')$$

一般做法

- 在每个迭代层次求解 p’ 的方程之前，令整个初场的 p’ =0 ，这样做可使 p’ 的解的绝对值不会很大，舍入误差较小

3．速度和压力修正值的亚松弛

动量方程中的亚松弛

$$\frac{a_e u_e}{\omega} = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_e + (p_P^0 - p_E^0) A_e + (1 - \omega) \frac{a_e u_e^0}{\omega}$$

$$\frac{a_n v_n}{\omega} = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_n + (p_P^0 - p_N^0) A_n + (1 - \omega) \frac{a_n v_n^0}{\omega}$$

压力修正中的亚松弛

$$a_e u_e' = \cancel{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb}'} + A_e (p_P' - p_E')$$

- 引入亚松弛：

$$p = p^0 + \omega_p p'$$

松弛因子

- Patankar

$$\omega = 0.5, \quad \omega_p = 0.8$$

- Demirdzic & Peric

$$\omega + \omega_p = c$$

修正速度方程不需要进行松弛

$$u_e = u_e^* + d_e(p_P' - p_E')$$

$$v_n = v_n^* + d_n(p_P' - p_N')$$

4． SIMPLE算法中的迭代

三重迭代含义

外迭代

- 1. SIMPLE算法中动量方程、压力修正方程、速度修正方程之间的迭代
- 2. 非线性方程线化之后求解的迭代

内迭代

- 3. 线化之后的离散动量方程、离散压力修正方程的迭代求解

5 迭代收敛判据

1) 停止内迭代的判据

- 内迭代: 采用迭代方法求解系数和非齐次项暂被固定冻结而得以线化的代数方程组(临时的线化方程组)

- 可以“适时地”停止

停止内迭代

往往以

压力修正值p’方程为依据

(1) 如果采用交替方向线迭代与块修正，则规定运算轮数即可

(2) 规定方程余量范数<小数

- 范数：函数空间中某函数大小的量度。
  Euclid范数：平方求和再开方

$$R_p^{(k)} = \left\{ \sum_{\text{对控制容积求和}} \left[\left(a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b - a_P p'_P \right)^{(k)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b_{p'}$$

- 判据：

$$R_p^{(k)} \le \varepsilon_p$$

(3) 规定余量范数缩小的比例

经过k次迭代后的余量范数

$$\frac{R_p^{(k)}}{R_p^{(0)}} \le r_p$$

初始的余量范数

2）停止外迭代的判据

动量方程、压力修正方程之间的迭代

非线性方程系数冻结线化的迭代

压力修正值p’方程

$$a_P p_P^{'} = a_E p_E^{'} + a_W p_W^{'} + a_N p_N^{'} + a_S p_S^{'} + b_{p'} = \sum_{nb} a_{nb} p_{nb}^{'} + b_{p'}$$

其中非齐次源项 $b_{p'}$ 代表 u*，v* 不符合连续方程的衡量：

$$b_{p'} = \frac{\rho_P^0 - \rho_P}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \left[\left(\rho u^*\right)_w - \left(\rho u^*\right)_e\right]\Delta y + \left[\left(\rho v^*\right)_s - \left(\rho v^*\right)_n\right]\Delta x$$

(1) $b_{p'}$绝对值之和 或 绝对值最大者 < 某参考质量流量

$$\frac{\sum\limits_{\text{内点求和}} \left| b_{p'} \right|}{q_m} \le \varepsilon$$

- 或者：

$$\varepsilon \approx N \varepsilon_1$$

$$\frac{\left| b_{p'} \right|_{\max}}{q_m} \le \varepsilon_1$$

(2) $b_{p'}$ 的范数小于某个参考流量

$$\frac{\sqrt{\sum_{\text{内点求和}}\left(b_{p'}\right)^{2}}}{q_{m}} \le \varepsilon$$

(3) 动量方程余量绝对值或范数小于某个参考动量

$$\left| \sum_{\text{内点求和}} \left\{ a_e u_e - \left[\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_e + A_e (p_P - p_E) \right] \right\} \right| \Big/ \rho u_{in}^2 \le \varepsilon$$

- 或：

$$\left(\sum_{\text{内点求和}} \left\{ a_e u_e - \left[\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_n + A_e (p_P - p_E) \right] \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \rho u_{in}^2 \le \varepsilon$$

(4) 令某特征物理量在连续数个层次迭代的相对偏差小于允许值

$$\left| \frac{Nu_m^{(k+n)} - Nu_m^{(k)}}{Nu_m^{(k+n)}} \right| \leq \varepsilon$$

- Nusselt 数

祝大家在

传热 和 流体 方向上

技术越来越精！

道路越走越宽！

为国家重大国防问题作出贡献！