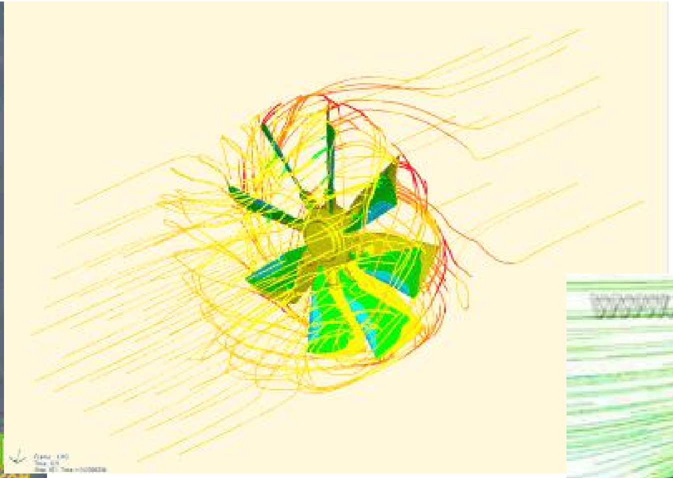
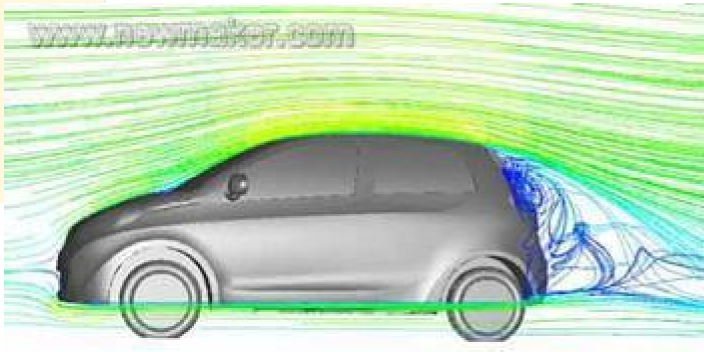
6.6 SIMPLE 算法的改进和发展





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin
/
humaobin@ustc.edu.cn

SIMPLE算法的三个简化假设

- 1半隐假设：速度修正值计算没有计及邻点速度修正值的影响
- 2 冻结系数法线化代数方程组：
- 3 初始速度场 u0, v0 和初始压力场 p* 的设定各自独立，一般不可能匹配

根据此三个假设

提出

改进方案

6.6.1 SIMPLER算法

SIMPLE Revised

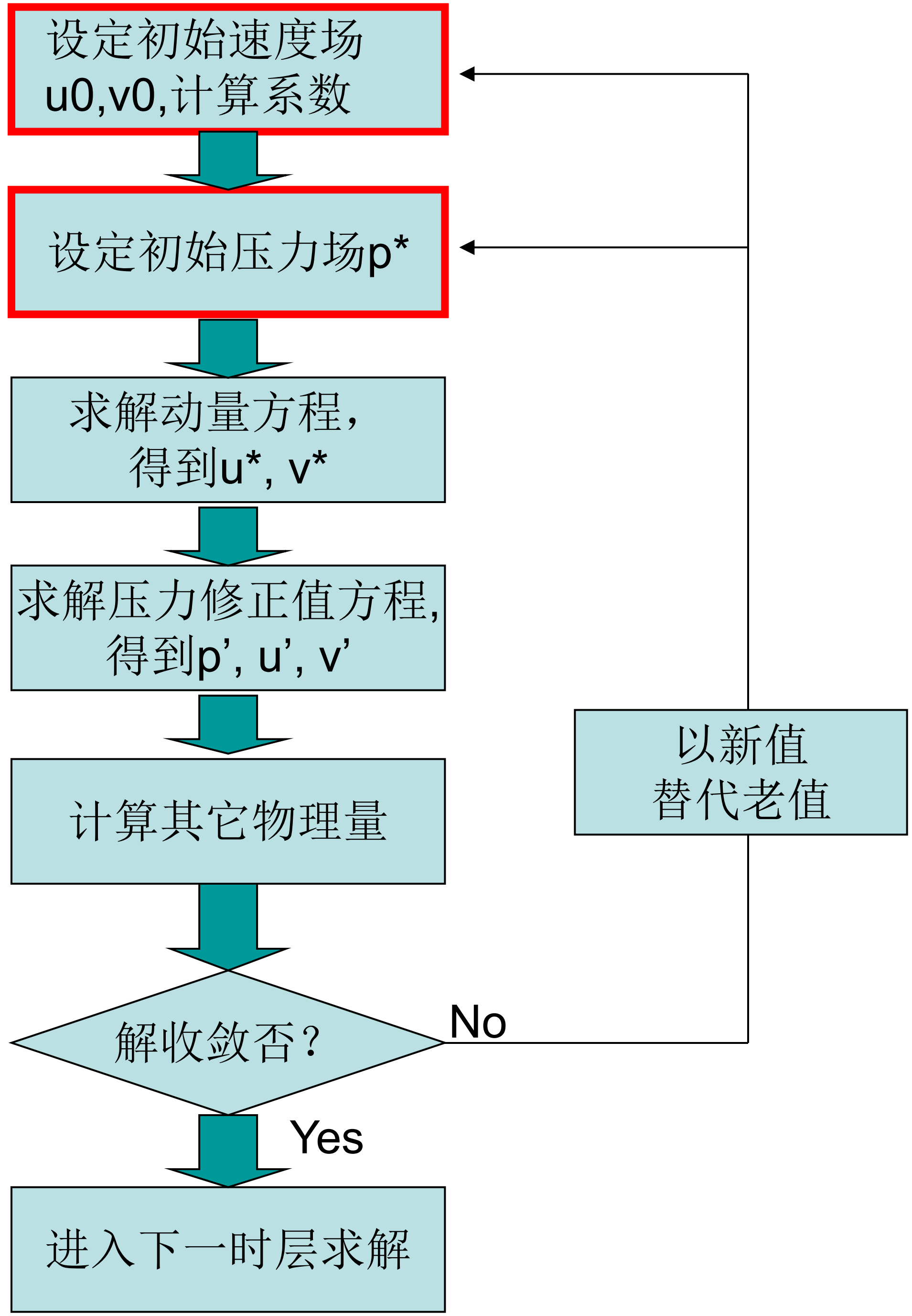
Patankar

SIMPLER 的提出

- 该法旨在解决 SIMPLE 算法中速度和压力的修正不同步的问题
- 速度场早已收敛，而压力场收敛十分缓慢
- 原因：假定了一组不协调的初始速度场和压力场，它们不匹配影响了收敛速度

流 程 图

（非稳态情况）



设定初始速度场
u0,v0,计算系数
设定初始压力场p*
求解动量方程，
得到u*, v*
求解压力修正值方程，
得到p’, u’, v’
计算其它物理量
解收敛否？
No
Yes
以新值
替代老值
进入下一时层求解

解决方案

- 压力场 直接 由 速度场 计算

压力方程的推导

- 定义假速度：

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_e}{a_e}$$

- 比较动量离散方程

$$a_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_e + (p_P - p_E) A_e$$

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (p_P - p_E)$$

$$u_e = \hat{u}_e + d_e(p_P - p_E)$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n(p_P - p_N)$$

- 代入连续方程

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \left[(\rho u)_e - (\rho u)_w\right]\Delta y + \left[(\rho v)_n - (\rho v)_s\right]\Delta x = 0$$

压力方程

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b_p$$

- 其中

$$b_p = \frac{\rho_P^0 - \rho_P}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \left[\left(\rho \hat{u}\right)_w - \left(\rho \hat{u}\right)_e\right]\Delta y + \left[\left(\rho \hat{v}\right)_s - \left(\rho \hat{v}\right)_n\right]\Delta x$$

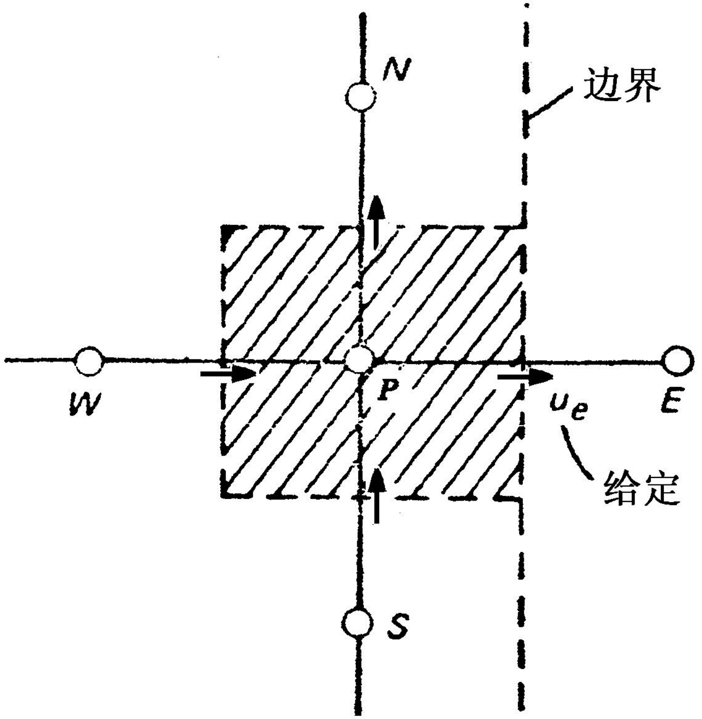
方法

- 由正确的速度u，v 计算假速度
- 代入压力方程，即可得到正确的压力 P
- 非常类似：将u*,v*代入压力修正值方程，得到压力修正值 p’

压力方程的边界条件

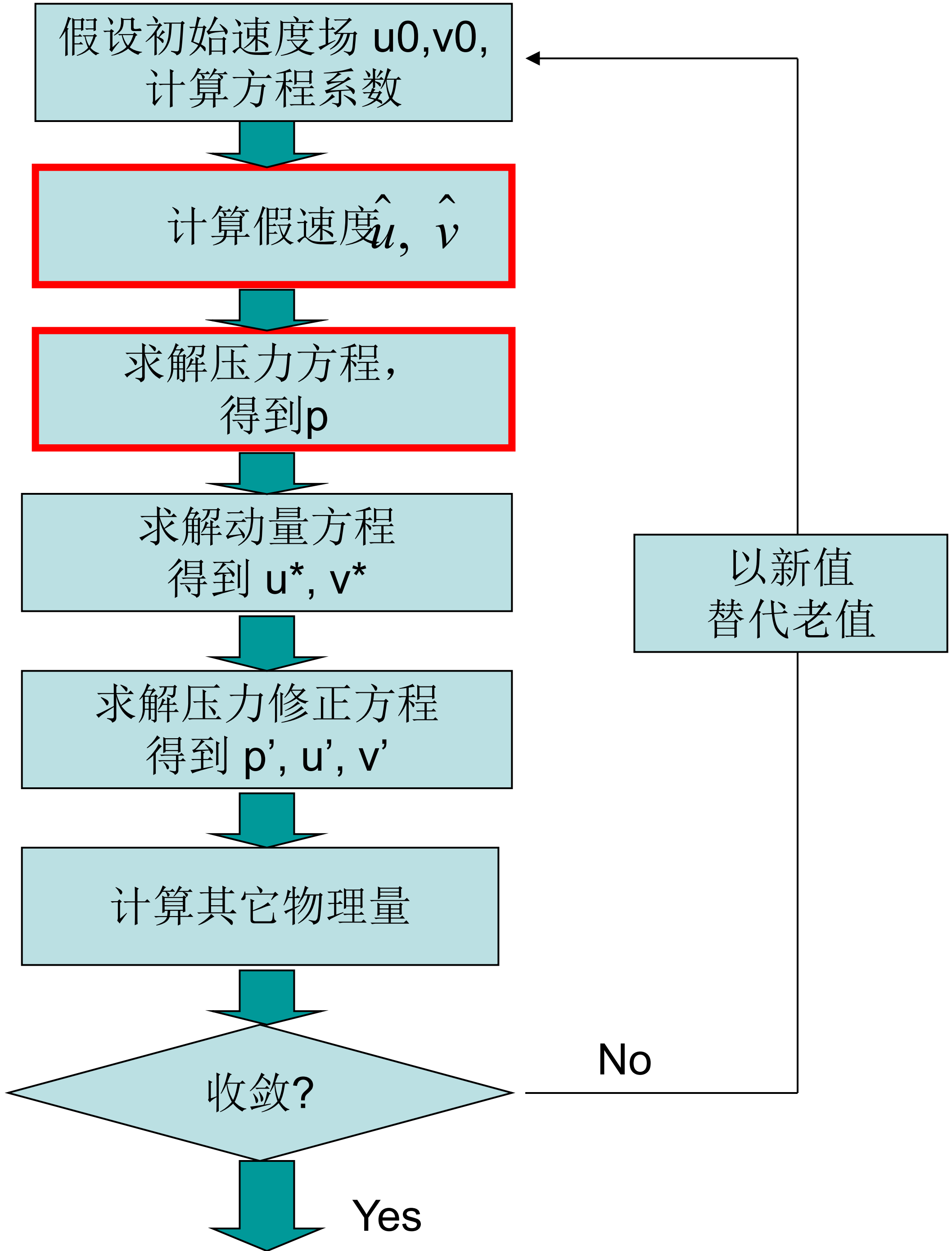
- 1 给定边界压力：
- 2 给定边界法向速度：

$$a_E = 0$$



流 程 图

（非稳态情况）


假设初始速度场 u0,v0,
计算方程系数
计算假速度 $\hat{u}$, $\hat{v}$
求解压力方程，
得到p
求解动量方程
得到 u*, v*
求解压力修正方程
得到 p’, u’, v’
计算其它物理量
收敛?
No
Yes
以新值
替代老值

评 述

- SIMPLER算法每个迭代层次计算的时间有所增加，但总的计算时间常较SIMPLE算法要少

6.6.2 SIMPLEC算法

SIMPLE Consistent

van Doormaal etal 1984

SIMPLEC算法的提出

- SIMPLEC 对第一项假设提出质疑：

$$a_e u_e^{'} = \cancel{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^{'}} + A_e (p_P^{'} - p_E^{'})$$

$$a_e = \sum a_{nb} + a_P^0 - S_P \Delta V$$

$$a_{nb} = 0$$

$$a_e u_e^{'} = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^{'} + A_e (p_P^{'} - p_E^{'})$$

同时减去 $\sum a_{nb} u_e^{'}$

$$\left(a_e - \sum a_{nb}\right) u_e^{'} = \cancel{\sum a_{nb}\left(u_{nb}^{'} - u_e^{'}\right)} + A_e (p_P^{'} - p_E^{'})$$

$$u_e' = d_e(p_P' - p_E'), \qquad d_e = \frac{A_e}{a_e - \sum a_{nb}}$$

$$v_n' = d_n(p_P' - p_N'), \qquad d_n = \frac{A_n}{a_n - \sum a_{nb}}$$

SIMPLE C 算法

- 1) 简化速度修正值公式中：

$$A_e / a_e \Longrightarrow A_e \Big/ \left(a_e - \sum a_{nb} \right)$$

- 2) p' 计算不需做亚松弛

稳态无源问题

- 此时：$a_e = \sum a_{nb}$

$$a_e - \sum a_{nb} = 0$$

- 但引入松弛之后，使用的是：

$$\left(\frac{a_e}{\omega} - \sum a_{nb} \right)$$

评 述

- 计算表明，SIMPLEC算法的收敛速率明显快于SIMPLE方法
- 有时甚至快于SIMPLER算法
- SIMPLEC 是计算中最常用的方法之一

6.6.3 SIMPLEX算法

SIMPLE eXtrapolation

Raithby 1986

SIMPLEX的提出

- SIMPLE X还是在第一个假设上做文章
- 基本思路是：系数 de ，dn 应该计算出来，而不是人为规定

$$u_e' = d_e(p_P' - p_E') = d_e \Delta p_e'$$

$$u_{nb}' = d_{nb} \Delta p_{nb}'$$

- 代入：

$$a_e u_e' = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}' + A_e(p_P' - p_E')$$

$$a_e d_e \Delta p_e' = \sum a_{nb} d_{nb} \Delta p_{nb}' + A_e \Delta p_e'$$

$$a_e d_e \Delta p_e^{'} = \sum a_{nb} d_{nb} \Delta p_{nb}^{'} + A_e \Delta p_e^{'}$$

假定

$$\Delta p_e^{'} = \Delta p_{nb}^{'}$$

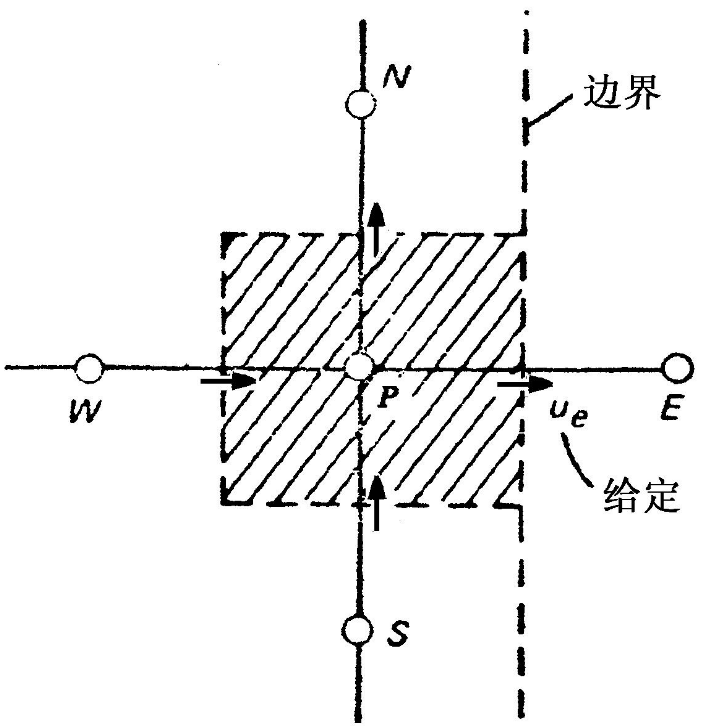
计算de, dn
的代数方程组

$$\left\{\begin{aligned} a_e d_e &= \sum a_{nb} d_{nb} + A_e \\ a_n d_n &= \sum a_{nb} d_{nb} + A_n \end{aligned}\right.$$

d 方程的边界条件

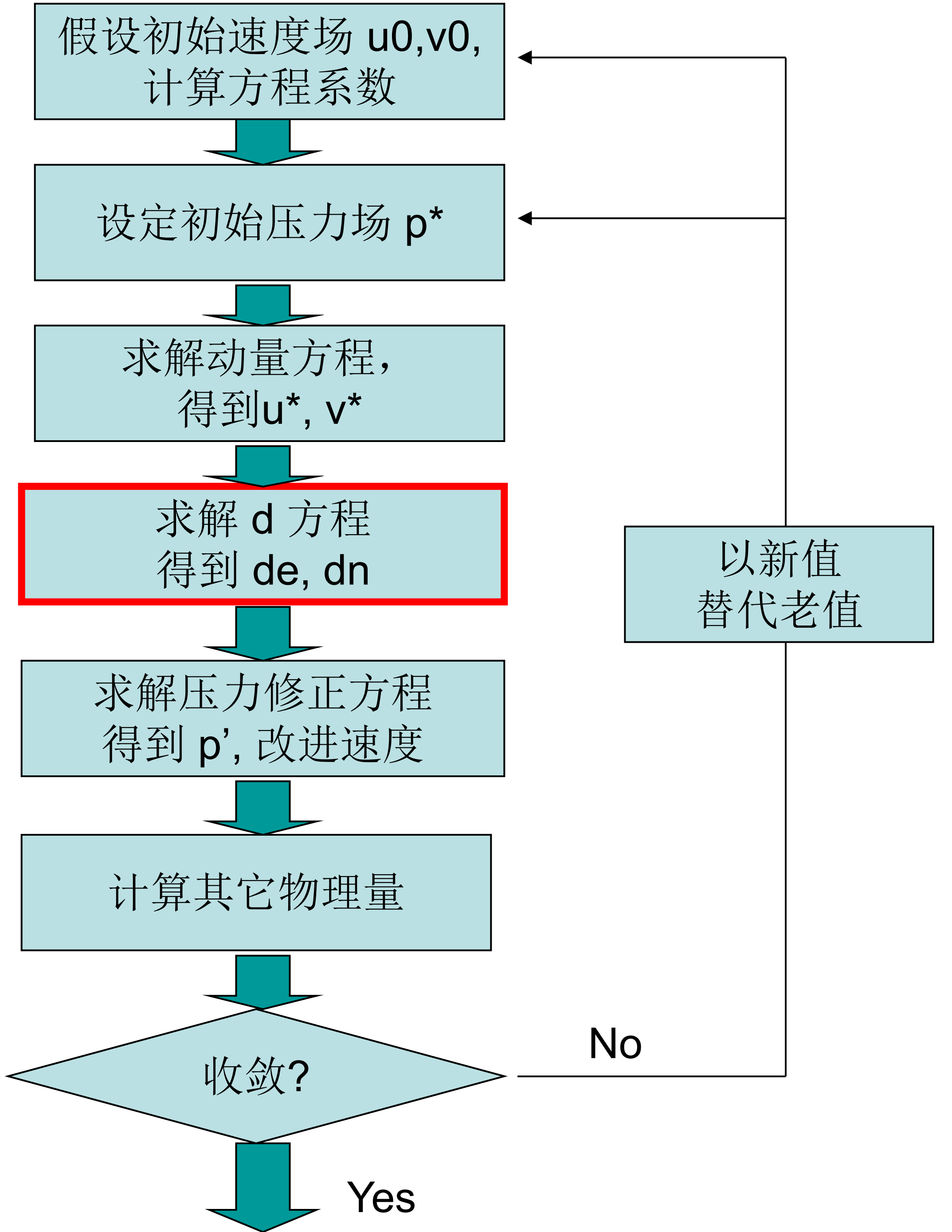
- 1 给定边界压力：
- 2 给定边界法向速度：

$$d_e = 0$$



流 程 图

（非稳态情况）


假设初始速度场 u0,v0,
计算方程系数
设定初始压力场 p*
求解动量方程，
得到u*, v*
求解 d 方程
得到 de, dn
求解压力修正方程
得到 p’, 改进速度
计算其它物理量
收敛?
No
Yes
以新值
替代老值

6.6.4 预估校正的SIMPLE算法
Data 修正方案

Data（1986)

Date 修正方案的提出

- 对第一、第二项假设同时进行改进
- SIMPLE 算法中动量方程求解只是预估步
- 校正步：考虑在SIMPLE算法中邻点修正速度求和项被略去以及非齐次项被冻结为常数对迭代收敛的影响

预估步和校正步

- 预估步 　　　　　　　　　　　　　　　校正步

$$p^{(p)} = p^{*} + p^{'} \quad \Longrightarrow \quad p = p^{(p)} + p^{''}$$

$$u_e^{(p)} = u_e^{*} + u_e^{'} \quad \Longrightarrow \quad u_e = u_e^{(p)} + u_e^{''}$$

$$v_n^{(p)} = v_n^{*} + v_n^{'} \quad \Longrightarrow \quad v_n = v_n^{(p)} + v_n^{''}$$

校正项

$$a_e u_e' = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}' + A_e (p_P' - p_E')$$

$$a_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_e + (p_P - p_E) A_e$$

忽略项

动量离散方程中的非齐次项b由于速度改变而引起的变动

$$u_e'' = \underline{d_e (p_P'' - p_E'')} + \frac{\sum a_{nb} u_{nb}' + s_u(u', v')}{a_e}$$

将u"写成 p" 的函数
减少未知数

Y方向：

$$v_n'' = d_n (p_P'' - p_N'') + \frac{\sum a_{nb} v_{nb}' + s_v(u', v')}{a_n}$$

校正后的速度

$$u_e = u_e^{(p)} + d_e(p_P'' - p_E'') + \frac{\sum a_{nb}u_{nb}' + s_u(u', v')}{a_e}$$

已知　　　　未知　　　　已知：可以算

$$v_n = v_n^{(p)} + d_n(p_P'' - p_N'') + \frac{\sum a_{nb}v_{nb}' + s_v(u', v')}{a_n}$$

- 代入连续方程

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t}\Delta x \Delta y + \left[(\rho u)_e - (\rho u)_w\right]\Delta y + \left[(\rho v)_n - (\rho v)_s\right]\Delta x = 0$$

P" 方程

$$a_P p_P'' = a_E p_E'' + a_W p_W'' + a_N p_N'' + a_S p_S'' + b_{p''} = \sum_{nb} a_{nb} p_{nb}'' + b_{p''}$$

- 非齐次项

$$b_{p''} = \left\{ \left[\frac{\sum a_{nb} u_{nb}' + s_u(u', v')}{a_w} \right]_w - \left[\frac{\sum a_{nb} u_{nb}' + s_u(u', v')}{a_e} \right]_e \right\} \rho \Delta y$$
$$+ \left\{ \left[\frac{\sum a_{nb} v_{nb}' + s_v(u', v')}{a_s} \right]_w - \left[\frac{\sum a_{nb} v_{nb}' + s_v(u', v')}{a_n} \right]_e \right\} \rho \Delta x$$

实施方法

- 求解p’方程之后，还需要增加求解 p”方程
- 求解得到p”之后，更新压力和速度(方程6.37)，其它步骤与SIMPLE算法一致
- 每个迭代层次上的计算量几乎增加一倍，但方程收敛速度大大加快
- 收敛所需要的迭代次数远少于SIMPLE算法的一半，因此，经济性还是好的

6.7 同位网格上的SIMPLE算法

- 多维问题
- 非规则区域
- 非结构网格

- 交错网格越来越复杂，实施越来越困难
- 1988年左右，出现同位网格方法
  (Collocated grids / Non-staggered grids)

- 1）压力梯度离散只能取一步中心差分
- 2）方程组不能产生压力/速度失耦的问题

常规网格上的动量离散方程

- 节点P上动量方程（一步中心差分）

$$a_P u_P = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u + A_P (p_w - p_e)$$

$$u_P = \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_P} \right)_P - \left(\frac{A_P}{a_P} \right)_P (p_e - p_w)_P = \hat{u}_P - \left(\frac{A_P}{a_P} \right)_P (p_e - p_w)_P$$

- 节点E上的动量方程

$$u_E = \hat{u}_E - \left(\frac{A_P}{a_P} \right)_E (p_e - p_w)_E$$

连续方程

$$\left(\rho uA\right)_e-\left(\rho uA\right)_w+\left(\rho vA\right)_n-\left(\rho vA\right)_s=0$$

在错开半个网格的界面上
写出动量方程

$$u_e = \hat{u}_e - \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_e (p_E - p_P)$$

$$\hat{u}_e = \hat{u}_P \frac{(\delta x)_e^+}{(\delta x)_e} + \hat{u}_E \frac{(\delta x)_e^-}{(\delta x)_e}$$

$$\left(\frac{A_P}{a_P}\right)_e = \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_P \frac{(\delta x)_e^+}{(\delta x)_e} + \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_E \frac{(\delta x)_e^-}{(\delta x)_e}$$

$$u_w = \hat{u}_w - \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_w (p_P - p_W)$$

$$v_n = \hat{v}_n - \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_n (p_N - p_P)$$

$$v_s = \hat{v}_s - \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_s (p_P - p_S)$$

引入半隐假设

$$u_e' = \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_e \left(p_P' - p_E'\right) = d_e\left(p_P' - p_E'\right)$$

$$u_w' = \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_w \left(p_W' - p_P'\right) = d_w\left(p_W' - p_P'\right)$$

$$v_n' = \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_n \left(p_P' - p_N'\right) = d_n\left(p_P' - p_N'\right)$$

$$v_s' = \left(\frac{A_P}{a_P}\right)_s \left(p_S' - p_P'\right) = d_s\left(p_S' - p_P'\right)$$

代入连续方程

$$u_e = u_e^* + u_e^{'},\ u_w = u_w^* + u_w^{'},\ v_n = v_n^* + v_n^{'},\ v_s = v_s^* + v_s^{'}$$

- 得到压力修正值方程

$$a_P p_P^{'} = a_E p_E^{'} + a_W p_W^{'} + a_N p_N^{'} + a_S p_S^{'} + b_{p'}$$

$$b_{p'} = \left(\rho u^* A\right)_w - \left(\rho u^* A\right)_e + \left(\rho v^* A\right)_s - \left(\rho v^* A\right)_n$$