7.4 标准 k-ε 两方程模型

胡 茂 彬
http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/
humaobin@ustc.edu.cn

k- ε 双方程模型

- 为考虑对流和扩散对湍流尺度的影响，还需建立湍流尺度的微分方程

- 用各向同性耗散率 ε 作为变量，建立微分方程，利用ε 和 k 计算出湍流尺度

- 湍流动能 k 方程 + 湍流耗散率 ε 方程

湍流动能耗散率的引入

- 耗散率定义： $\varepsilon = \frac{\mu}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\right) = \nu\left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\right)$

- 湍动能、耗散率、尺度三者关系

$$\varepsilon = c_D k^{3/2} / l$$

- 涡粘系数表达式

$$\mu_t = c'_\mu \rho k^{1/2} l = \left(c'_\mu c_D\right) \rho k^2 \frac{1}{c_D k^{3/2} / l} = \frac{c_\mu \rho k^2}{\varepsilon}$$

耗散率 ε 方程由动量方程推导

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial \rho u_j \varepsilon}{\partial x_j}}_{(2)} = \underbrace{-2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}\right)}_{(3)}$$

$$\underbrace{-2\nu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial p'}{\partial x_j}}\right) + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j}}_{(4)} \underbrace{-2\frac{\mu^2}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}}\right)}_{(5)}$$

$$\underbrace{-2\mu\left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}\right)}_{(6)} - \underbrace{\rho \frac{\overline{\partial u'_j \varepsilon}}{\partial x_j}}_{(7)} \underbrace{-2\mu\left(\overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)}_{(8)}$$

简化的 k- ε 方程

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t}}_{\text{非稳态项}} + \underbrace{\frac{\partial \rho u_j \varepsilon}{\partial x_j}}_{\text{对流项}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]}_{\text{扩散项}} + \underbrace{\frac{c_1 \varepsilon}{k}\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{\text{产生项}} - \underbrace{c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{消失项}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho k}{\partial t}}_{\text{非稳态项}} + \underbrace{\frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j}}_{\text{对流项}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]}_{\text{扩散项}} + \underbrace{\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{\text{产生项}} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{耗散项}}$$

双方程k- ε 模型的数值解法

- 将湍流输运方程写成对流扩散型统一表达式，就可按照前几章的数值方法计算

广义扩散项

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j\phi)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_{eff}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+S_\phi$$

广义源项

- 各方程的差别仅在于广义扩散系数、广义源项，以及初值边界条件

双方程k- ε 模型的改进

- 非线性k- ε 模型
- 多尺度k- ε 模型
- 重整化群k- ε 模型
- 可实现的k- ε 模型
- 近壁区低Re数k- ε 模型

仍在不断发展中

祝大家在

传热 和 流体 方向上

技术越来越精！

道路越走越宽！

为国家重大国防问题作出贡献！