

## 8.3 迭代解法的收敛性

胡 茂 彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin>

/

[humaobin@ustc.edu.cn](mailto:humaobin@ustc.edu.cn)

## 8.3.1 迭代格式的一般构成方式

# 代数方程组求解

$$AX=b$$

分解:  $A = M - N$  

$$MX = NX + b$$

迭代求解格式:  $MX^{(n+1)} = NX^{(n)} + b$

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$$

迭代矩阵

# 迭代收敛参量

- 迭代误差:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \text{未知} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^{(n)}$$

- 两次迭代的函数差:

$$\boldsymbol{\delta}^{(n+1)} = \boldsymbol{X}^{(n+1)} - \boldsymbol{X}^{(n)}$$

- 迭代后的方程余量:

$$\boldsymbol{r}^{(n)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(n)}$$

## 8.3.2 迭代法的 收敛速度

# 迭代误差的演化

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)} = \mathbf{N}\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$$

- 收敛要求:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = 0$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)} = \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{N} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \boldsymbol{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$$

迭代矩阵

收敛速度与迭代矩阵的**结构特性**相关

关键：特征值和**特征向量**



# 迭代矩阵的特征分析

$$H\mathbf{g}_k = \lambda_k \mathbf{g}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

特征值      特征向量

- 完备向量：该函数空间里的任意函数都可以用此向量分量的线性组合来表示

# 迭代误差的演化

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{g}_k$$



经过n层迭代:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}^{(n-1)} = \mathbf{H}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(n-2)} = \dots = \mathbf{H}^n\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$$



即:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \sum_{k=1}^N \alpha_k (\lambda_k)^n \mathbf{g}_k$$

# 迭代收敛条件

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \sum_{k=1}^N \alpha_k (\lambda_k)^n \mathbf{g}_k$$

特征值

- 迭代收敛条件:  $|\lambda_k| < 1$
- 谱半径: 特征值绝对值最大者  $\rho(\mathbf{H}) = |\lambda_1|$

# 误差主导项

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \approx \alpha_1 (\lambda_1)^n \mathbf{g}_1$$

特征值最大值

- 要求收敛误差小于某个值  $\varepsilon_0$

$$\alpha_1 (|\lambda_1|)^n = \alpha_1 (\rho(\mathbf{H}))^n \approx \varepsilon_0$$

# 收敛所需要迭代层数n

$$n \approx \frac{\ln(\varepsilon_0 / \alpha_1)}{\ln |\lambda_1|} = \frac{\ln(\varepsilon_0 / \alpha_1)}{\ln \rho(\mathbf{H})} = \frac{-\ln(\varepsilon_0 / \alpha_1)}{-\ln \rho(\mathbf{H})}$$

- 收敛速率:

$$(-\ln \rho(\mathbf{H}))$$

# 谱半径计算的替代方法

迭代误差

$$\delta^{(n+1)} = X^{(n+1)} - X^{(n)} = (X^{(n+1)} - X) - (X^{(n)} - X) = -\varepsilon^{(n+1)} + \varepsilon^{(n)}$$

迭代函数差

$$\varepsilon^{(n)} \approx \alpha_1 (\lambda_1)^n \mathbf{g}_1$$

• 得到:

$$\left. \begin{aligned} \delta^{(n+1)} &\approx (1 - \lambda_1) (\lambda_1)^n \alpha_1 \mathbf{g}_1 \\ \delta^{(n)} &\approx (1 - \lambda_1) (\lambda_1)^{n-1} \alpha_1 \mathbf{g}_1 \end{aligned} \right\} \rho(H) = |\lambda_1| \approx \frac{\|\delta^{(n+1)}\|}{\|\delta^{(n)}\|}$$

- 迭代误差:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^{(n)} \approx \frac{\boldsymbol{\delta}^{(n+1)}}{1 - \lambda_1}$$

- 迭代次数:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}\| \approx \frac{\|\boldsymbol{\delta}^{(n+1)}\|}{1 - \rho(\boldsymbol{H})}$$

### 8.3.3 判断迭代收敛 的常用做法



# 迭代收敛的含义

- 迭代误差意义上的定义：

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(n)}\| \leq \varepsilon_0$$

问题：此值  
并不知道

# 严格做法

- 首先估算谱半径:

$$\rho(\mathbf{H}) = |\lambda_1| \approx \frac{\|\boldsymbol{\delta}^{(n+1)}\|}{\|\boldsymbol{\delta}^{(n)}\|}$$

- 估算n层迭代后误差:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}\| \approx \frac{\|\boldsymbol{\delta}^{(n+1)}\|}{1 - \rho(\mathbf{H})}$$

# 常用做法(1)

- 要求相邻迭代函数之差小于某个值:

$$\|\boldsymbol{\delta}^{(n+1)}\| = \|\boldsymbol{X}^{(n+1)} - \boldsymbol{X}^{(n)}\|$$

- 相对差:

$$\frac{\|\boldsymbol{X}^{(n+1)} - \boldsymbol{X}^{(n)}\|}{\|\boldsymbol{X}^{(n)}\|}$$

# 问题

- 没有考虑到迭代矩阵谱半径的影响，有时不能真实反映迭代收敛程度
- 当谱半径与1相近时，虽然相邻两次迭代解差值已经很小，迭代误差却仍然很大
- 迭代收敛慢时，很容易误判为迭代已收敛

## 常用做法(2)

- 要求迭代后的方程余量小于一个小量:

$$\| \mathbf{r}^{(n)} \| = \| \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)} \|$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)}$$

# 余量衰减法

- 余量衰减法综合考虑了各种因素，较准确
- 内迭代：要求余量下降1-2个数量级即可认为代数方程迭代已收敛；
- 外迭代：应要求余量下降3-5个数量级

## 8.3.4 影响迭代收敛 速度的因素

# 1 边界条件传入内部的范围和快慢

- **Jacobi点迭代**：每一轮，边界影响仅能传到与边界相邻的节点，传入范围**仅限一个**网格，且收敛速度与扫描方向无关
- **Gauss-Seidel点迭代**：从左至右扫描，则每轮迭代，**左边界影响**会传到整个计算域，但其它边界影响只能传入**一个网格**



# 1 边界条件传入内部的范围和快慢

- **G-S线迭代**：自左向右扫描，不仅左边界影响逐步传入，且在每列直接求解中，上、下端点影响也全部传入。一轮迭代完成，除右边界影响只传入一个网格外，其余边界影响都全部传入计算区
- **ADI的G-S迭代**：包含两个不同方向的线扫描，完成一次迭代，即把全部边界影响传入，相应的收敛速度又提高一步

# 新发展

- **强隐过程迭代法(Strong Implicit Procedure):** 比ADI方法隐式关联性更强，直接解法比例更高。
- **共轭梯度算法(Conjugate Gradient):** 每次迭代都是一个直接求解过程，不需选择松弛因子参数，而迭代收敛速度不低于松弛迭代

## 2 迭代方法使计算区域满足物理守恒的程度和快慢

- 准确解：必在求解区域任意容积满足物理量守恒
- 而迭代解：收敛前都偏离这个基本要求
- 块修正技术：使守恒量在计算域内尽快达到平衡

### 3 迭代误差中不同波长分量 衰减过程的影响

- 误差的长波分量：在稠密网格上衰减慢
- 误差的短波分量：在稀疏网格上衰减慢
- 多重网格法：促使不同波长误差分量能协调一致衰减

