

8.6 强隐过程迭代法

胡 茂 彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/>
humaobin@ustc.edu.cn

8.6 强隐过程迭代法

基于矩阵不完全LU分解

代数方程组求解

$$AX=b$$

分解:

$$A = M - N$$

M是A的近似, 而N是个小矩阵 $NX \approx 0$

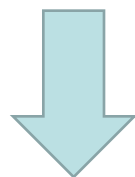
不完全分解

- 将矩阵 M 进行LU分解，且假设为：

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

代数方程组求解

$$AX=b$$



改写:

$$MX = MX + (b - AX)$$

$$(A + N)X = (A + N)X + (b - AX)$$

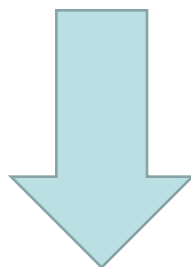
近似迭代格式

$$\mathbf{M}\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{M}\mathbf{X}^{(n)} + \left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)} \right)$$

$$\mathbf{M} \left(\underbrace{\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)}}_{\text{迭代函数差}} \right) = \underbrace{\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)} \right)}_{\text{迭代余量}}$$

$$\mathbf{LU}\boldsymbol{\delta}^{(n+1)} = \mathbf{r}^{(n)}$$

$$\mathbf{LU}\boldsymbol{\delta}^{(n+1)} = \mathbf{r}^{(n)}$$



$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}\boldsymbol{\delta}$$

$$\begin{cases} \mathbf{LZ}^{(n+1)} = \mathbf{r}^{(n)} \\ \mathbf{U}\boldsymbol{\delta}^{(n+1)} = \mathbf{Z}^{(n+1)} \end{cases}$$

思路

- 迭代函数差: $\delta^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)}$
- 由 $\mathbf{X}^{(n)}$ 计算 $\mathbf{X}^{(n+1)}$
- 关键: 找到合适的近似矩阵 $\mathbf{M}$, 并找到它的简化的 LU分解 方法

简化的LU分解方法

- 令 L 和 U 为稀疏三角阵，且非零元素位置与矩阵 A 一致
- 根据矩阵乘积法则，推知 M 的结构形态，及各元素与 L 和 U 中元素的对应关系
- 假定矩阵 N 具有跟 M 一样的结构形态，先得到矩阵 N
- 将矩阵 N 元素与 A 的对应元素相加，就得到 M ，最终得到 L 和 U

强隐过程法的实施

- 每轮迭代更新，全部内节点同时联立求解，各节点间的隐式关联程度远高于一般迭代方法
- 特别适于求解各向异性材料的导热问题和对流换热问题
- 但确定中间量各分量和确定求解量各分量的扫描方向刚好相反，因而不适于非结构网格的计算

