9.3 生成贴体网格的代数方法

胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin
/

humaobin@ustc.edu.cn

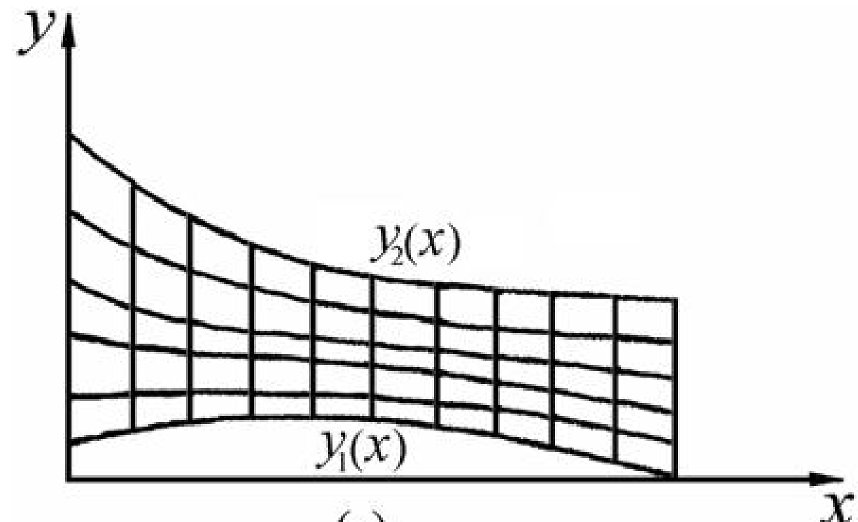
概　述

- 代数方法生成贴体网格：通过一些代数关系式来实现贴体坐标转换，生成贴体网格
- 边界规范化法：采用一些简单的初等函数变换生成贴体网格，变换关系式因具体问题而异
- 插值法：利用已知的边界值进行中间插值来生成网格

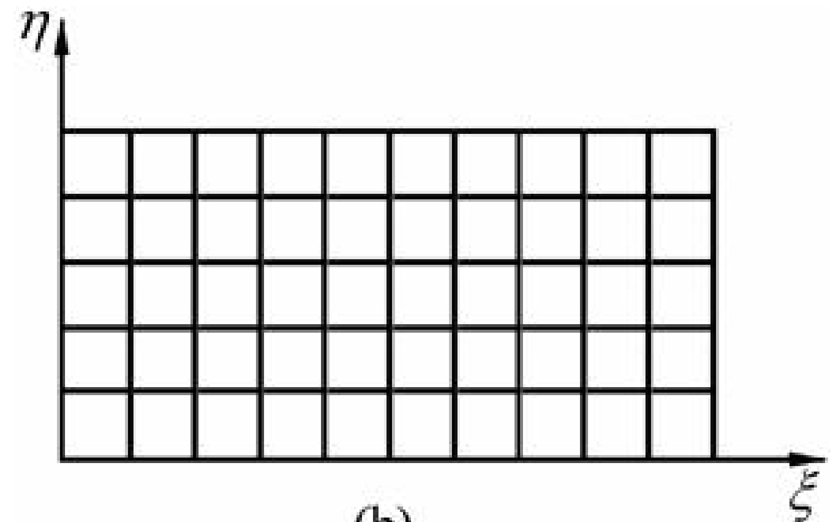
9.3.1 边界规范化方法

1. 二维曲边形通道

$$\begin{cases} \xi = ax \\ \eta = b\dfrac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} \end{cases}$$



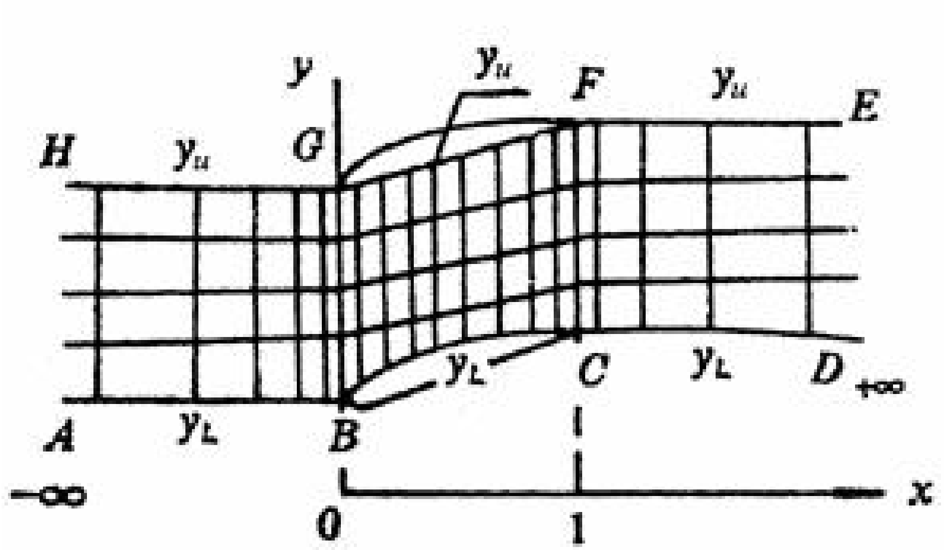
(a)



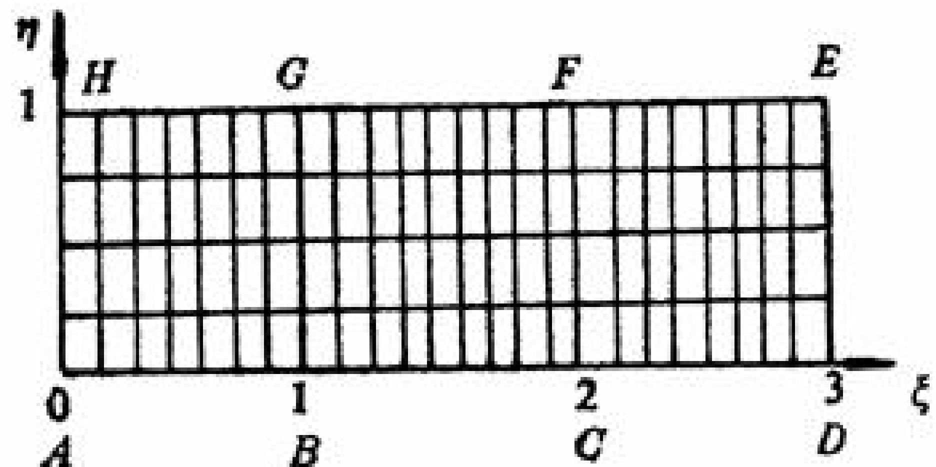
(b)

2. 二维叶栅绕流

$$\xi = \xi(x) = \begin{cases} e^{x} & x < 0 \\ 1 + x & 0 \le x \le 1 \\ 3 - e^{1-x} & x > 1 \end{cases}$$



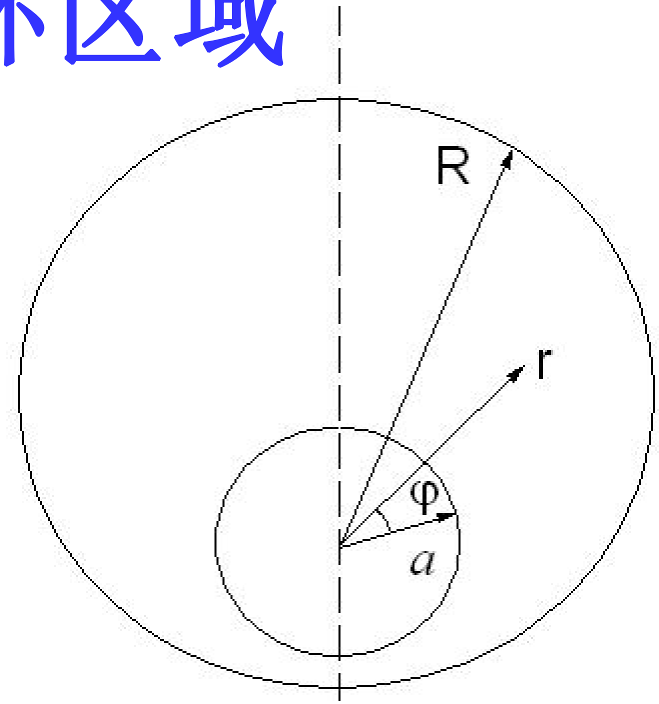
$$\eta = \eta(y) = \frac{y - y_l}{y_u - y_l}$$

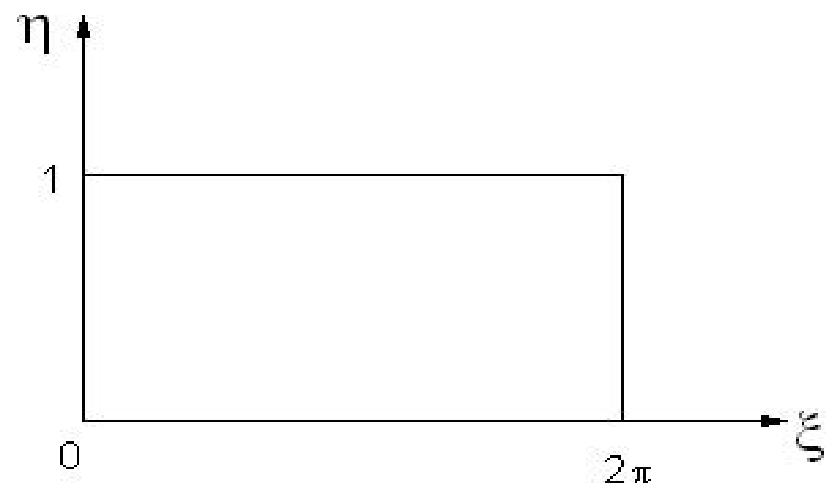


3. 偏心圆环区域

$$\xi = \varphi$$

$$\eta = \frac{r-a}{R-a}$$





9.3.2 插值方法

1 常用的插值方法

- 利用已知的边界值进行中间插值

- 常用的插值方式：

1) Lagrange插值： 只需插值点函数值

2) 二重Hermite插值：既要插值点函数值，又要其一阶导数值

Lagrange插值方法

已知边界各点的函数值： $\xi = \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N \quad (0 \le \xi \le L)$

$$\boldsymbol{r}(\xi_{\mathrm{i}}) \quad (1 \le i \le N)$$

则内部范围内任意点的函数值为：

$$\boldsymbol{r}(\xi) = \sum_{i=1}^{N} L_i(\xi)\, \boldsymbol{r}(\xi_i)$$

其中Lagrange插值函数：

$$L_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = \frac{(\xi - \xi_1)\cdots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\cdots(\xi - \xi_N)}{(\xi_i - \xi_1)\cdots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\cdots(\xi_i - \xi_N)}$$

Hermite插值方法

须已知边界上若干点的函数值和一阶导数值

则内部范围内任意点的函数值为：

$$\boldsymbol{r}(\xi)=\sum_{i=1}^{N}H_i(\xi)\,\boldsymbol{r}(\xi_i)+\sum_{i=1}^{N}\overline{H}_i(\xi)\,\boldsymbol{r}'(\xi_i)$$

函数值插值　　导数值插值

系数：

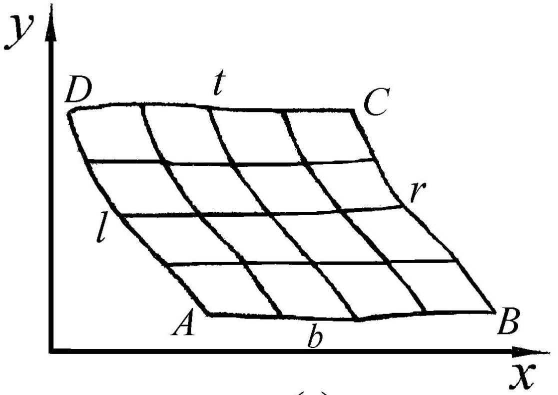
$$\begin{cases}H_i(\xi)=\left[1-2\left(\xi-\xi_i\right)\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\dfrac{1}{\xi_i-\xi_j}\right]L_i^2(\xi)\\ \overline{H}_i(\xi)=\left(\xi-\xi_i\right)L_i^2(\xi)\end{cases}$$

2. 单向插值的双边界法

- 规定一对不直接相连的边界上的坐标对应关系
- 在一个曲线坐标方向上进行插值，生成贴体网格

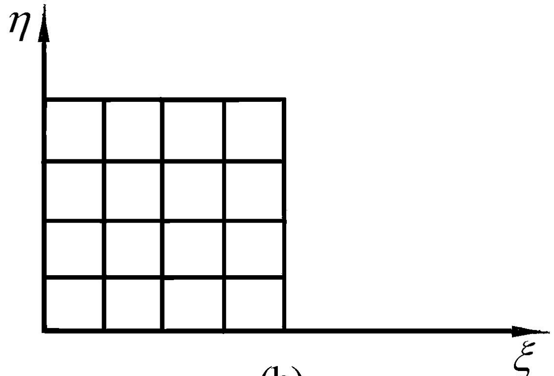
二维单向插值

上、下边界：
$$\begin{cases} x_b = x_b(\xi),\ \ y_b = y_b(\xi) \\ x_t = x_t(\xi),\ \ y_t = y_t(\xi) \end{cases}$$



(a)

计算平面：　$0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \eta \le 1$



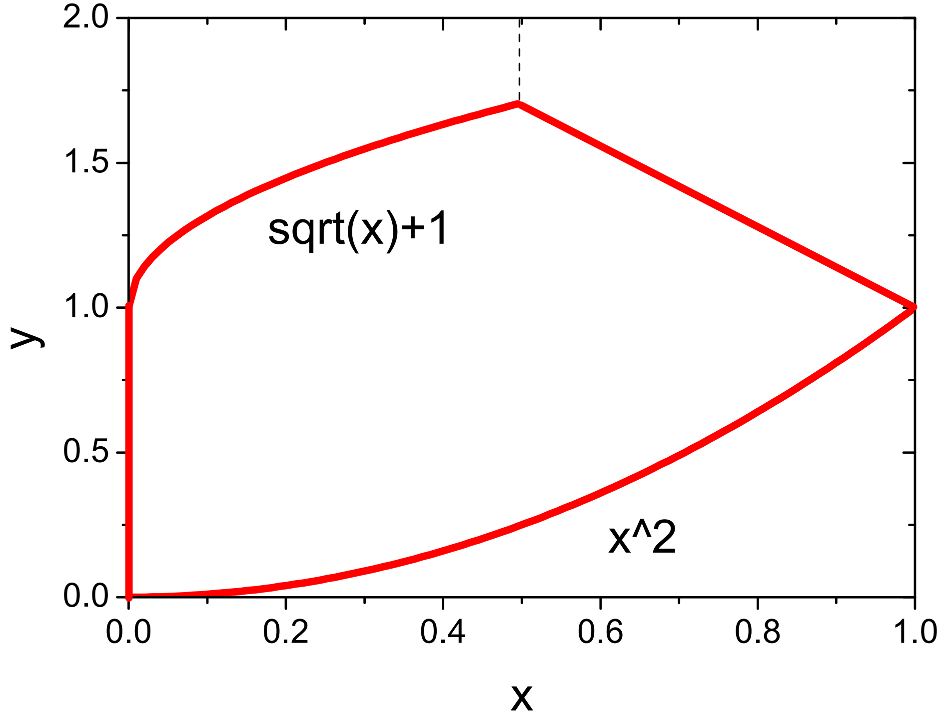
(b)

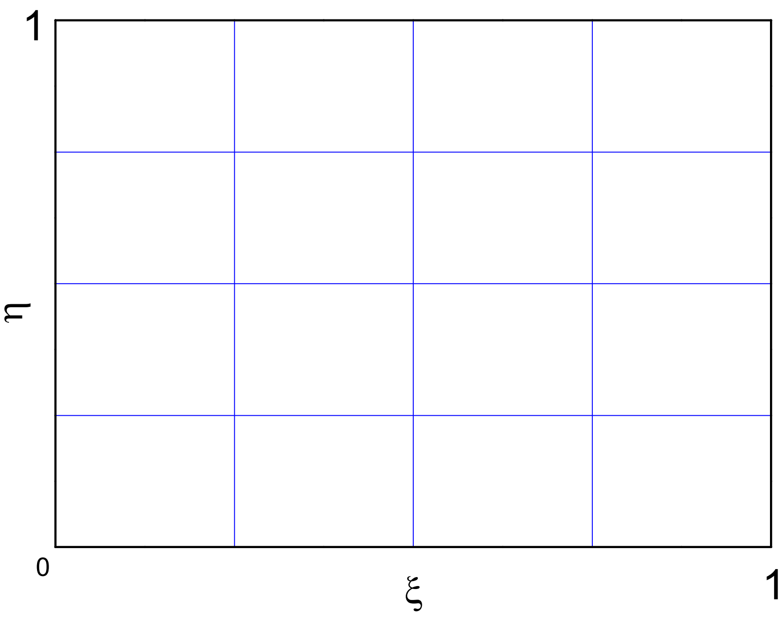
$$\begin{cases} x_b = x(\xi,0),\ \ y_b = y(\xi,0) \\ x_t = x(\xi,1),\ \ y_t = y(\xi,1) \end{cases}$$

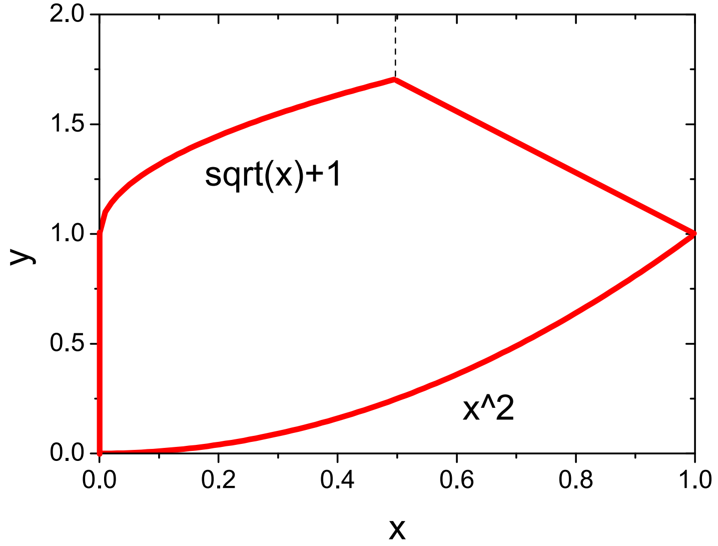
η 方向的Lagrange线性插值

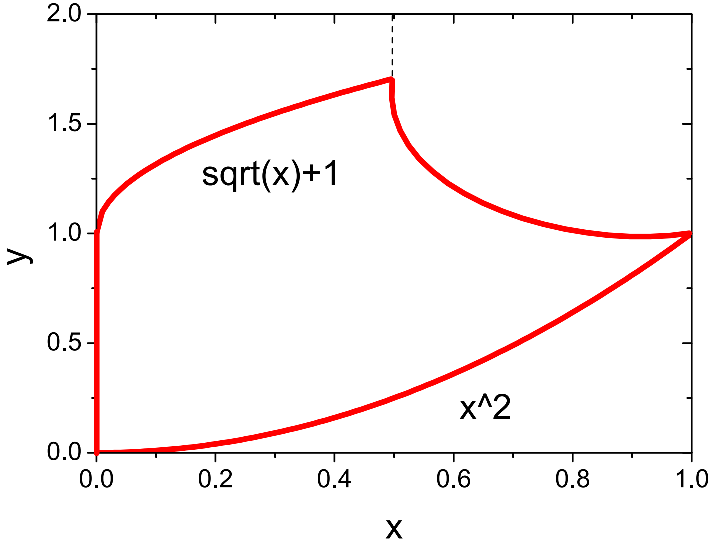
$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = x(\xi,0)L_b(\eta) + x(\xi,1)L_t(\eta) \\ y(\xi,\eta) = y(\xi,0)L_b(\eta) + y(\xi,1)L_t(\eta) \end{cases}$$

其中$\begin{cases} L_b(\eta) = 1-\eta \\ L_t(\eta) = \eta \end{cases}$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
sqrt(x)+1
x^2


1
η
0
ξ
1





双边界法仅用到了两个不相邻边界的信息

线性插值情况，仅适用于另两条边为直线的情形

3 无限插值法

同时规定四条不规则边界的对应关系，双方向进行插值

采用多步算法：

1) 首先在一个方向进行全域单向插值；

2) 进而在另一方向对该方向给定的值与前一方向所插得的值之差进行全域单向插值；若三维问题，则再按同样方式在第三个方向作全域单向插值

3) 最后将不同方向插值结果求和

二维问题的无限插值

1) 选择某一方向，作全域范围单向插值：

$$\boldsymbol{F}_1(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(\xi)\,\boldsymbol{r}(\xi_i,\eta)$$

$\boldsymbol{r}_i$ 为矢量，具有两个分量：

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}(\xi_i,\eta)=\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(\xi_i,\eta)\\ y(\xi_i,\eta)\end{pmatrix}$$

错位，需要进行修正

2) $\eta = \eta_j$ 线上的差值： $\left(\boldsymbol{r}(\xi,\eta_j) - \boldsymbol{F}(\xi,\eta_j)\right)$

对错位在全域范围内进行 η 方向的插值修正

$$\boldsymbol{F}_2(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{2} \beta_j(\eta) \left(\boldsymbol{r}(\xi,\eta_j) - \boldsymbol{F}_1(\xi,\eta_j)\right)$$

3) 两步结果求和

$$\boldsymbol{F}(\xi,\eta) = \boldsymbol{F}_1(\xi,\eta) + \boldsymbol{F}_2(\xi,\eta)$$

混合函数(Blending Function)

无限插值在不同方向的插值函数

$$\boldsymbol{F}_1(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(\xi)\,\boldsymbol{r}(\xi_i,\eta)$$

$$\boldsymbol{F}_2(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{2}\beta_j(\eta)\,\big(\boldsymbol{r}(\xi,\eta_j)-\boldsymbol{F}_1(\xi,\eta_j)\big)$$

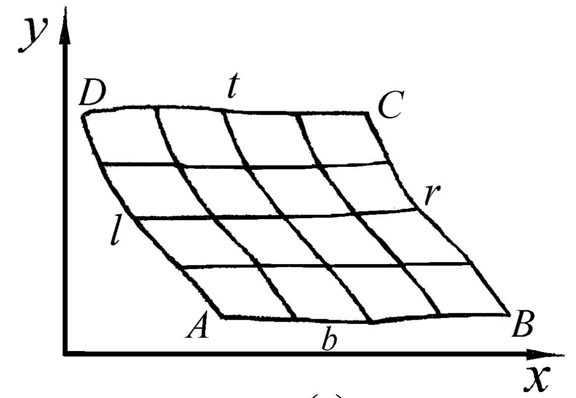
称为混合函数(blending function)，可有不同形式，其好坏对生成网格的质量有重要作用。

二维无限插值

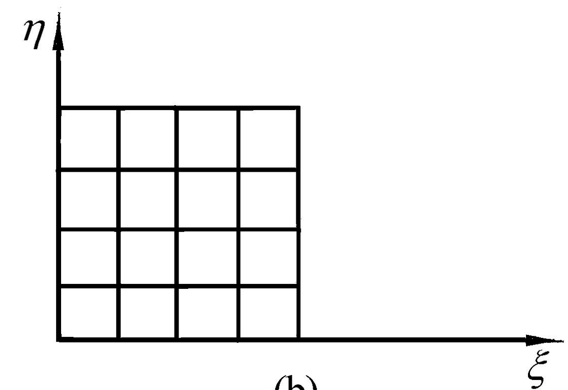
给定四条边界在两坐标系下的离散对应关系

$$\begin{cases} x_b = x_b(\xi) = x(\xi,0), & y_b = y_b(\xi) = y(\xi,0) \\ x_t = x_t(\xi) = x(\xi,1), & y_t = y_t(\xi) = y(\xi,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_l = x_l(\eta) = x(0,\eta), & y_l = y_l(\eta) = y(0,\eta) \\ x_r = x_r(\eta) = x(1,\eta), & y_r = y_r(\eta) = y(1,\eta) \end{cases}$$



(a)



(b)

1) 作 ξ 方向 Lagrange 线性插值：

$$F_{1x}(\xi,\eta)=\left(1-\xi\right)x_l(\eta)+\xi x_r(\eta)$$

$$F_{1y}(\xi,\eta)=\left(1-\xi\right)y_l(\eta)+\xi y_r(\eta)$$

2) 进行 η 方向插值：

$$F_{2x}(\xi,\eta)=\left(1-\eta\right)x_b(\xi)+\eta x_t(\xi)$$
$$-\left[(1-\eta)(1-\xi)x_l(0)+\eta(1-\xi)x_l(1)+(1-\eta)\xi x_r(0)+\eta\xi x_r(1)\right]$$

$$F_{2y}(\xi,\eta)=\left(1-\eta\right)y_b(\xi)+\eta y_t(\xi)$$
$$-\left[(1-\eta)(1-\xi)y_l(0)+\eta(1-\xi)y_l(1)+(1-\eta)\xi y_r(0)+\eta\xi y_r(1)\right]$$

最终的无限插值结果

$$x(\xi,\eta) = F_{1x}(\xi,\eta) + F_{2x}(\xi,\eta)$$

$$y(\xi,\eta) = F_{1y}(\xi,\eta) + F_{2y}(\xi,\eta)$$

4 多面法

- 基本思想

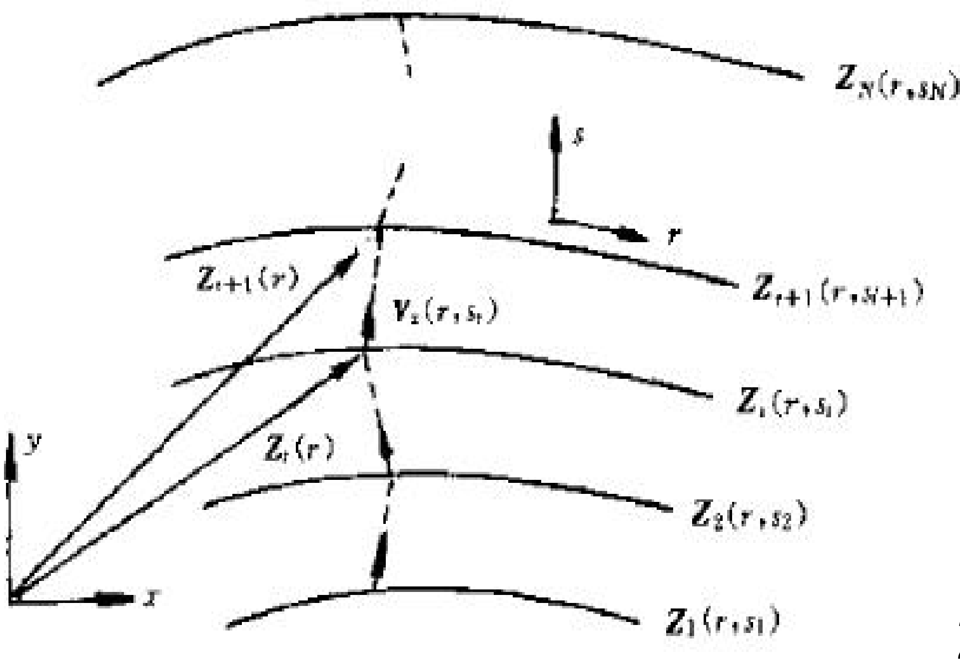
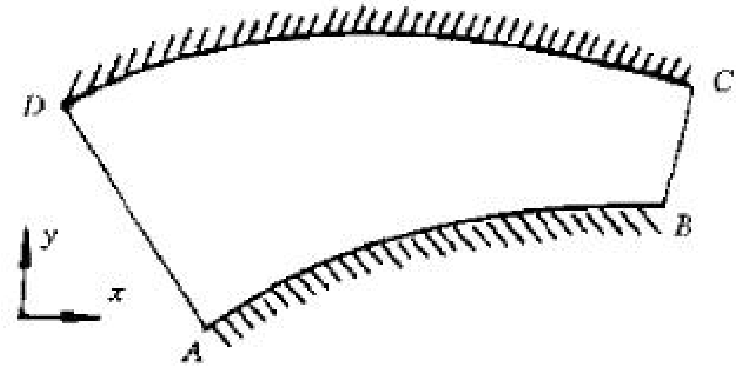


图 2-8 说明多面法的图示



1. 生成一系列辅助表面

$Z_2(r,s_2)$, $Z_3(r,s_3)$,……

每表面上 r 均从 0 变到 1

2. 把相邻表面上r相等的点连成直线，形成虚线所示的连续折线

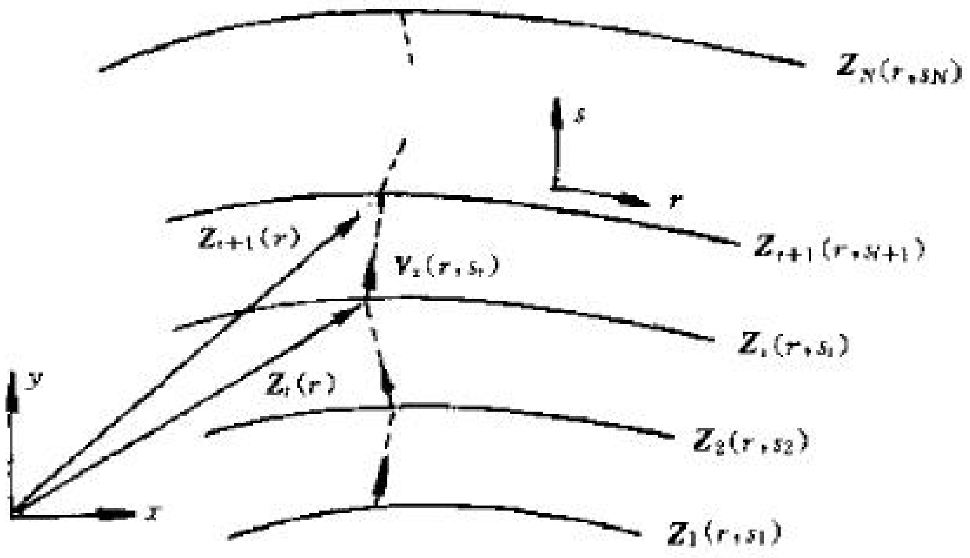


图 2-8　说明多面法的图示

定义矢量 $V_i(r) = A_i[Z_{i+1}(r) – Z_i(r)]$，$A_i$为待确定的参数

矢量簇V是半离散的，因为在r方向r可以连续地从0变化到1，但在s方向则只有有限个辅助表面

插值，从这一簇半离散的V矢量生成一个对r及s均连续的矢量场

$$V(r,s)=\sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i(s)V_i(r)$$

φ_i 为插值函数

建立连续的矢量场V(r,s)：获得物理平面上网格节点位置矢量Z(r,s)。当r与s分别由0变化到1时，矢量Z(r,s)就确定了整个计算区域内网格节点的位置。

根据$V_i(r)$的构成方式，有

$$\frac{\partial Z(r,s)}{\partial s}=V(r,s)\ =\sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i(s)V_i(r)$$

将上式对s由0到1作积分，并记$Z(r,0)=Z_1(r)$，则有

$$Z(r,s)=Z_1(r)+\sum_{i=1}^{N-1}A_iG_i(s)[Z_{i+1}(r)-Z_i(r)]$$

其中 $G_i(s)=\int_0^s \varphi_i(s')ds'$ 参数A_i的取值应使得上式满足

$s=1$时 $Z(r,s)=Z_N(r)$。故此$A_iG_i(1)=1$

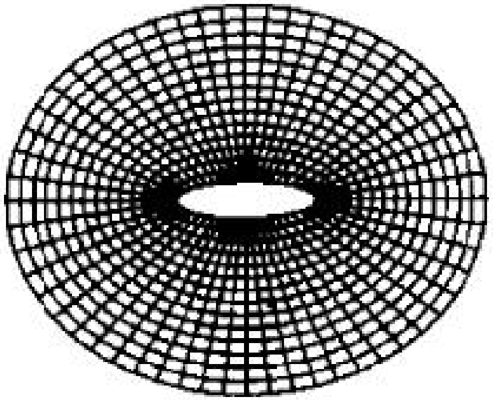
$$Z(r,s)=Z_1(r)+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{G_i(s)}{G_i(1)}[Z_{i+1}(r)-Z_i(r)]$$

此即多面法中网格生成的通用表达式

- 辅助表面不必是内部网格节点所在的平面，它的作用主要在于生成一簇半离散的矢量

- 插值是对一簇半离散的矢量进行的，而不像其它代数法中那样是对节点坐标进行的。这种插值方法的好处是，可以利用中间表面来加强对网格正交性与分布的控制。

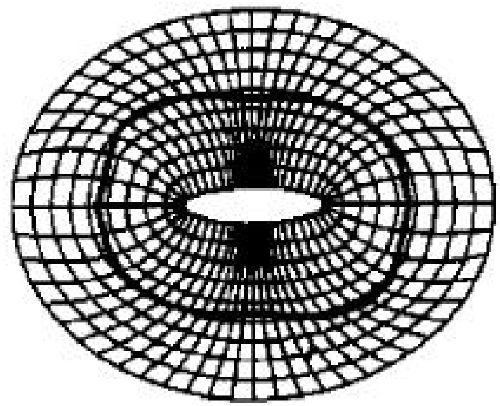
多面法生成网格



$Z_1: x^2/1^2+y^2/0.25^2=1$

$Z_2: x^2/3.4^2+y^2/2.65^2=1$

图 2-9　$N=2$ 时用多面法生成的网格

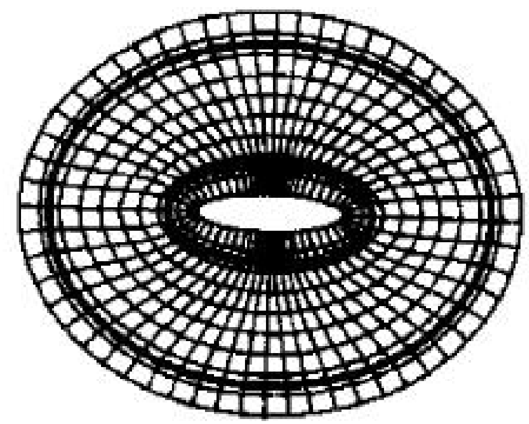


Z_1：同图 2-9

$Z_2: x^2/2.2^2+y^2/1.45^2=1$

Z_3：同图 2-9Z_2

图 2-10　$N=3$ 时用多面法生成的网格



Z_1：同图 2-9

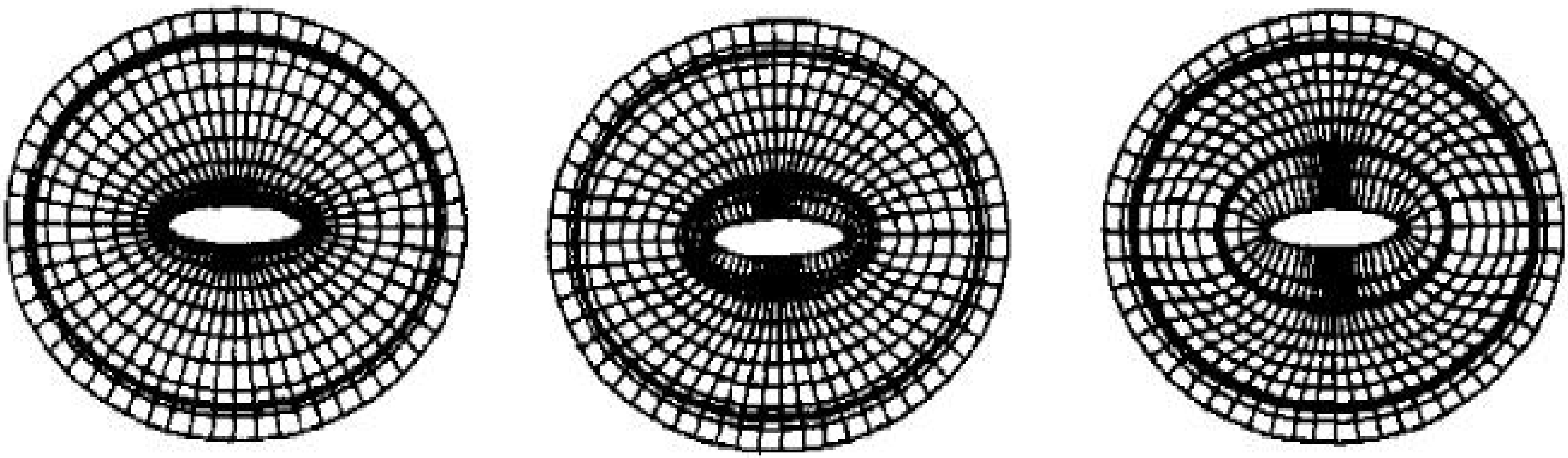
$Z_2: x^2/1.4^2+y^2/0.65^2=1$

$Z_3: x^2/3.0^2+y^2/2.25^2=1$

Z_4：同图 2-9 的 Z_2

图 2-11　$N=4$ 的多面法网格生成

中间界面位置的影响



(a)　　(b)　　(c)

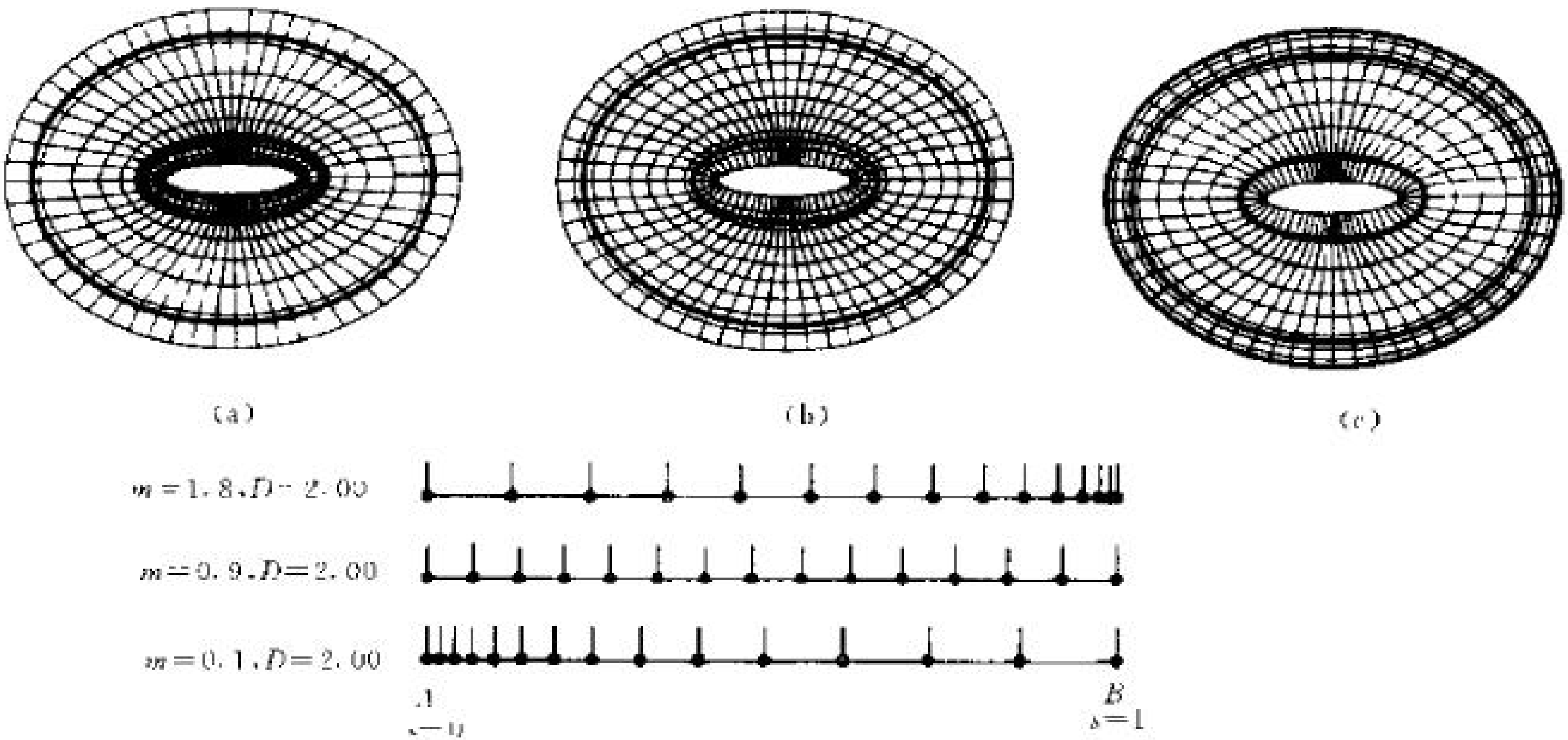
Z_1、Z_4 同图 2-11；Z_3：$x^2/3.0^2+y^2/2.25^2=1$（粗线），参数 $s_2=0.5$；

Z_2 有以下三种位置：(a) $x^2/1.1^2+y^2/0.35^2=1$；(b) $x^2/1.4^2+y^2/0.65^2=1$；

(c) $x^2/1.7^2+y^2/0.95=1$（均为粗线）

图 2-13　中间界面位置的影响

分布函数选择的影响



m=0.1,D=2.0

m=1.0,D=2.0　　m=1.8,D=2.0

图2-11　分布函数选择的影响