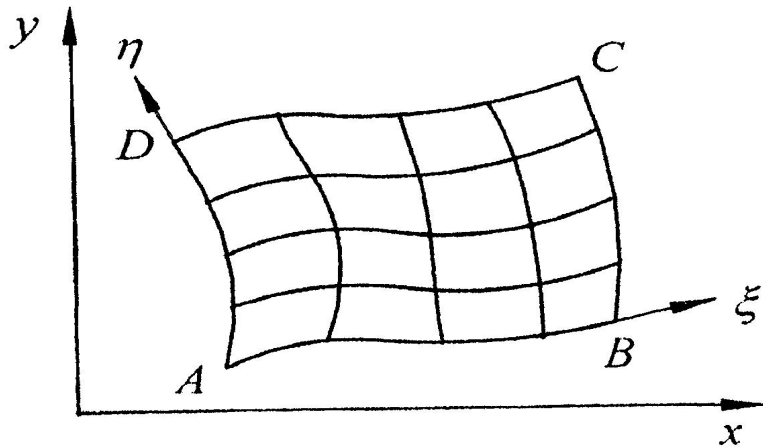


9.4 生成贴体网格的 微分方程法

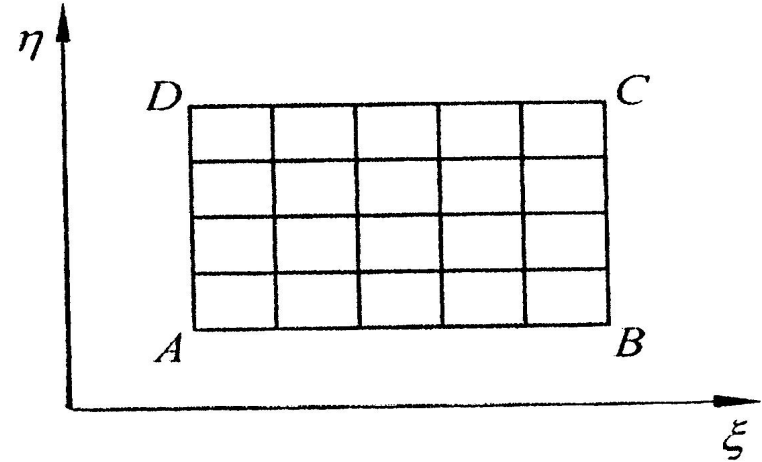
胡 茂 彬

<http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin/>
humaobin@ustc.edu.cn

贴体坐标生成过程



(a) x - y 物理平面



(b) ξ - η 计算平面

- 计算平面边界节点 $\rightarrow$ 物理平面边界节点：已知
- 待求：内部对应节点的关系
- 这是一个典型的边值问题

椭圆型方程方法

- 椭圆型偏微分方程：恰是有效处理边值问题的一类方程
- 其解单值、连续、光滑，且易于调节。
- 求解椭圆方程生成贴体网格：最早发展的微分方程方法 (1974年)

9.4.1 椭圆型微分方程生成网格 的数学提法和物理比拟

1 数学提法(a) – 正变换

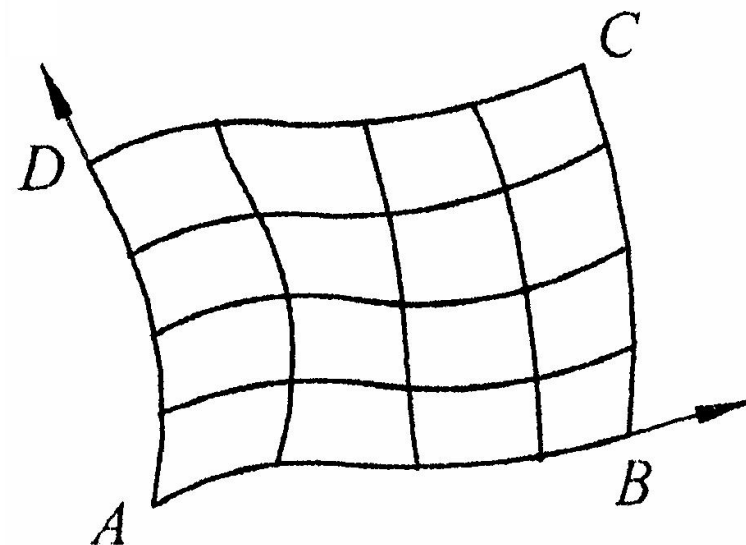
从物理平面出发考虑，把 ξ, η 看成是物理平面上 Laplace 方程或 Poisson 方程的解

$$\left. \begin{array}{l} \text{Laplace 方程} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \\ \nabla^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Poisson 方程} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \nabla^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{正变换}$$

要求：在物理平面的区域边界上规定函数 $\xi(x, y)$ $\eta(x, y)$ 的值（即给定边界条件）

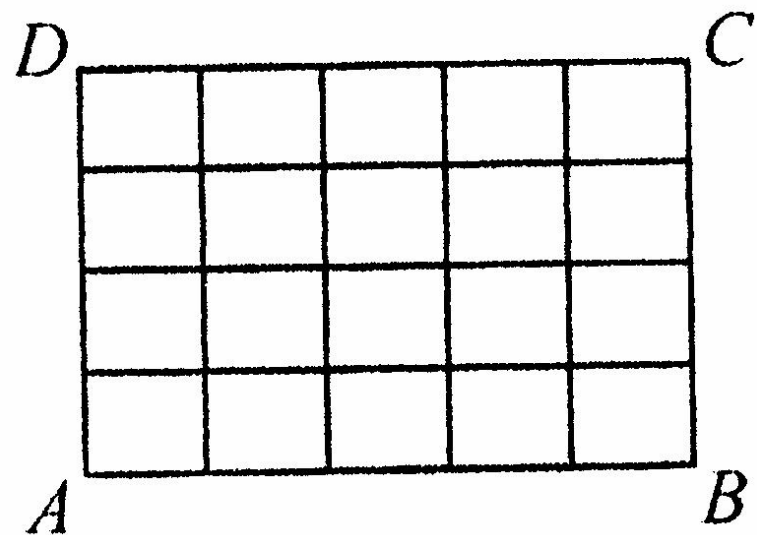
正变换实施时的问题

- 物理平面区域不规则：如何划分边界网格？
- 如何找到计算平面坐标平行线对应的网格？

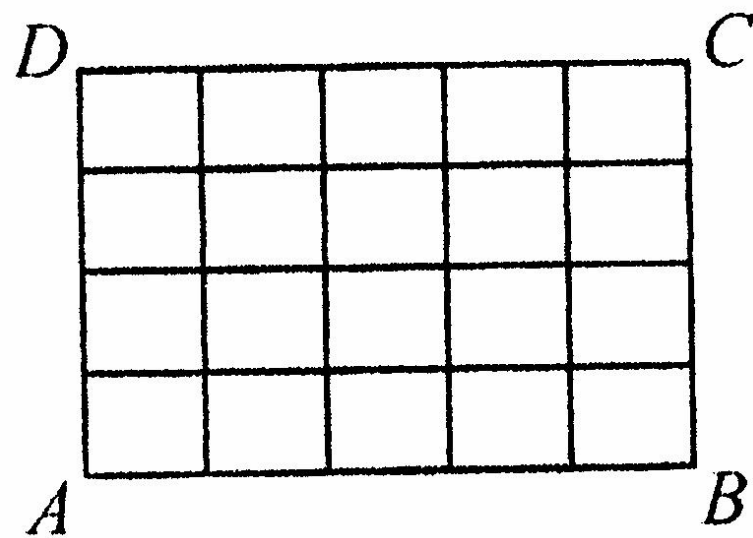
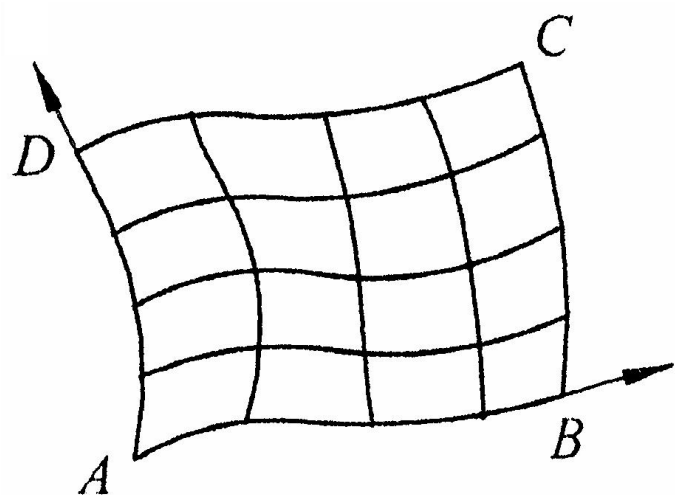


数学提法(b) – 反变换

- 从计算平面出发进行考虑：在计算平面均分网格，容易实现
- 从计算平面反推物理平面：“反变换”



反变换 比 正变换
更为适用！



Laplace 算子在计算平面表达式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{J^2} \left[\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \tau \frac{\partial}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial}{\partial \eta} \right]$$

代入 ξ, η 作为因变量:

$$\begin{cases} \nabla^2 \xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} = \tau / J^2 \\ \nabla^2 \eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} = \sigma / J^2 \end{cases}$$

Laplace 算子表达式

$$\tau = (x_\eta D_y - y_\eta D_x) / J, \quad \sigma = (y_\xi D_x - x_\xi D_y) / J$$

其中: $D_x = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}, \quad D_y = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}$

$$\begin{cases} x_\eta (\overset{\text{Dy}}{\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}}) - y_\eta (\overset{\text{Dx}}{\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}}) = J^3 P(\xi, \eta) \\ y_\xi (\overset{\text{Dx}}{\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}}) - x_\xi (\overset{\text{Dy}}{\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}}) = J^3 Q(\xi, \eta) \end{cases}$$

反变换方程

$$\begin{cases} \text{Dx} = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 [x_{\xi}P(\xi, \eta) + x_{\eta}Q(\xi, \eta)] \\ \text{Dy} = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 [y_{\xi}P(\xi, \eta) + y_{\eta}Q(\xi, \eta)] \end{cases}$$

Poisson方程：有源

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \end{cases}$$

Laplace方程：无源

反变换方程的特性

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 [x_{\xi}P(\xi, \eta) + x_{\eta}Q(\xi, \eta)] \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 [y_{\xi}P(\xi, \eta) + y_{\eta}Q(\xi, \eta)] \end{cases}$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

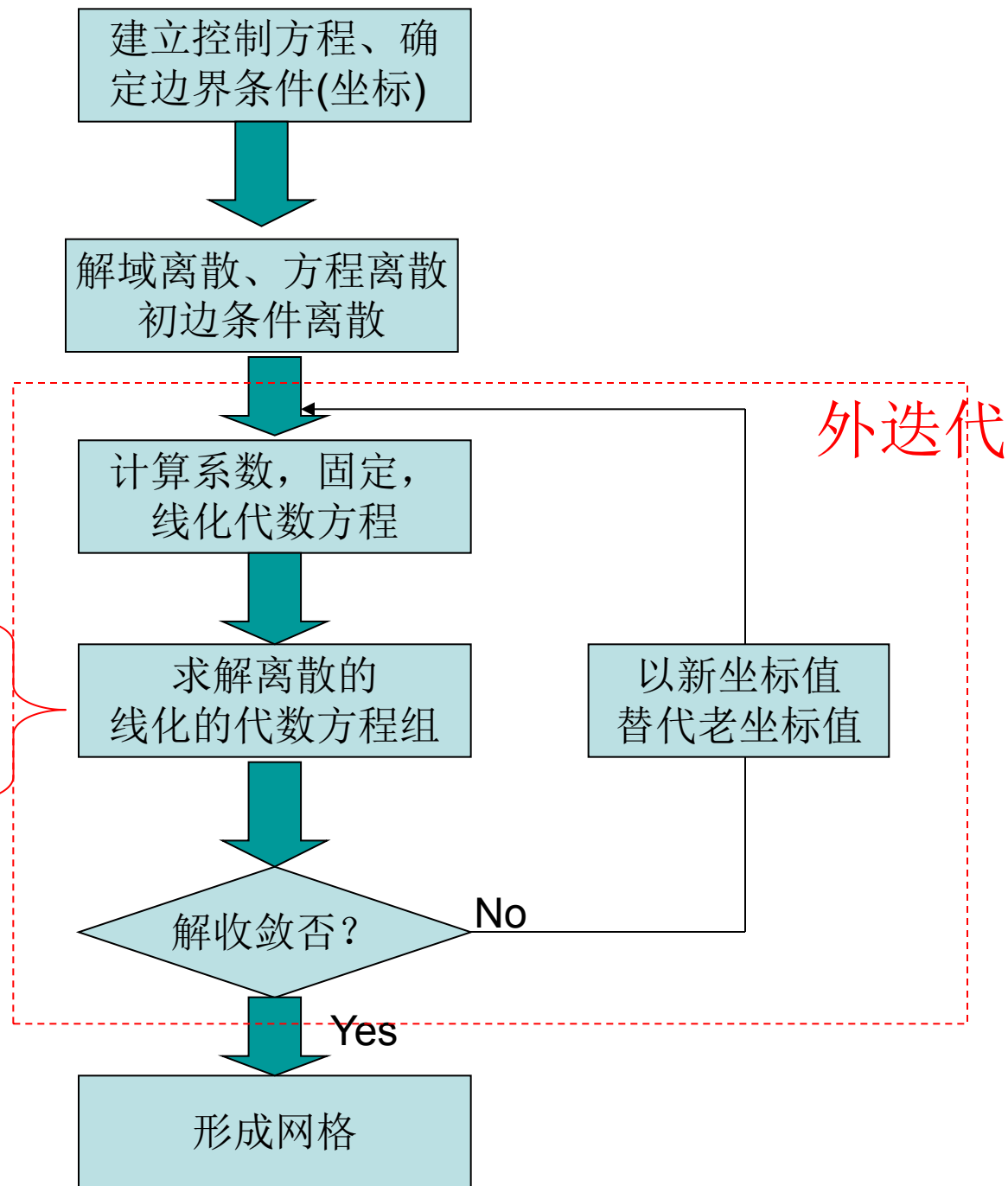
- 是两个具有非常数源项的各向异性扩散问题
- 参数 α , β , γ 把 x, y 耦合在一起: 非线性

反变换非线性方程 求解：

需要迭代： 外迭代+内迭代！

流程图

线化方程
求解
(内迭代)



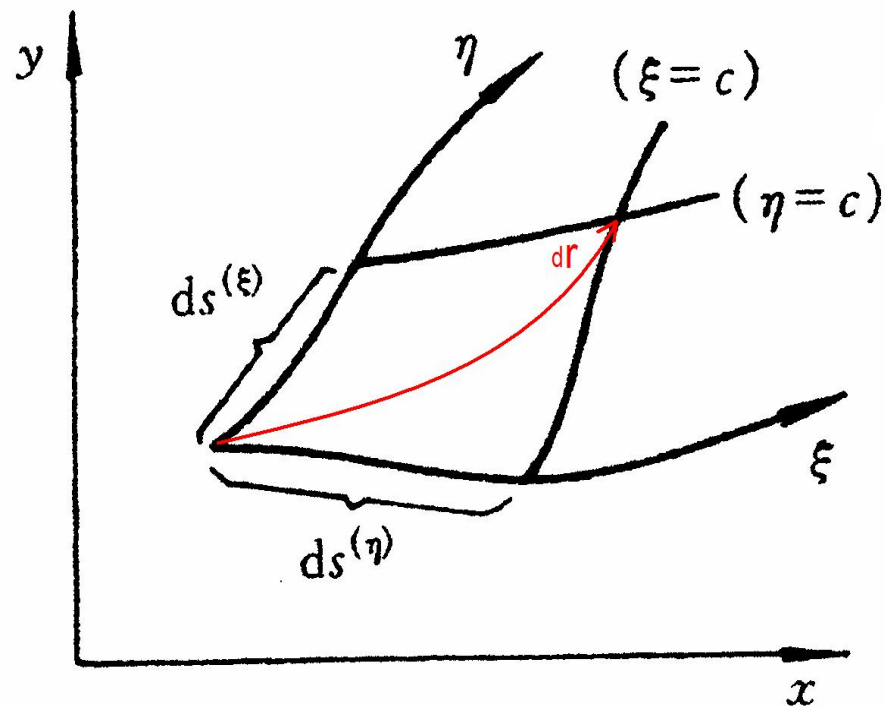
反变换方程参数的几何意义

- β : 物理平面网格线的交角, 局部正交 $\beta = 0$
- α 及 γ 是 η 及 ξ 方向的度规系数:

- 任意弧元 $d\mathbf{r}$ 的分量:

$$dS^{(\xi)} = \sqrt{\alpha} d\eta$$

$$dS^{(\eta)} = \sqrt{\gamma} d\xi$$

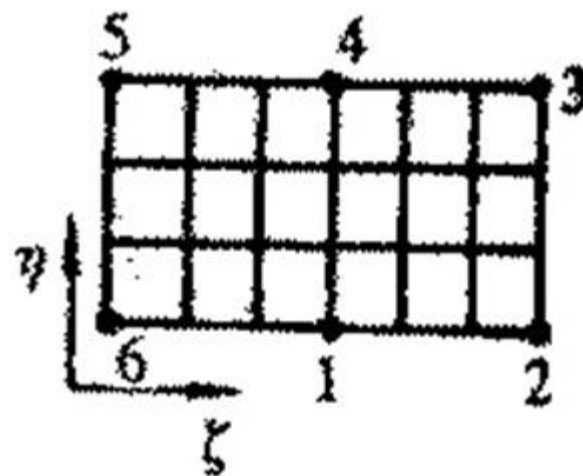
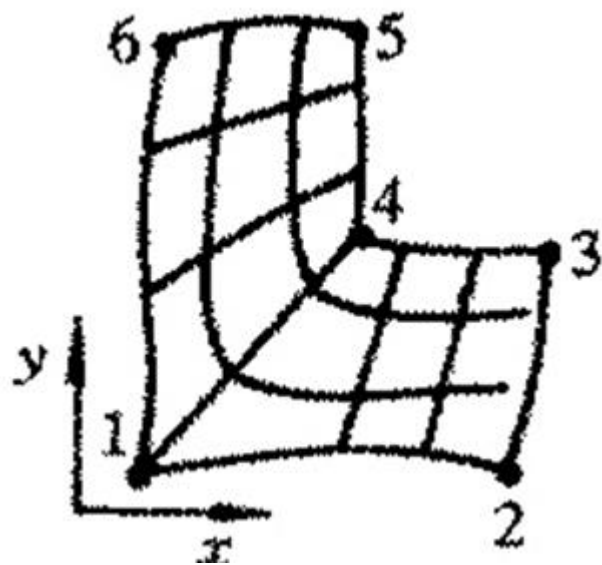
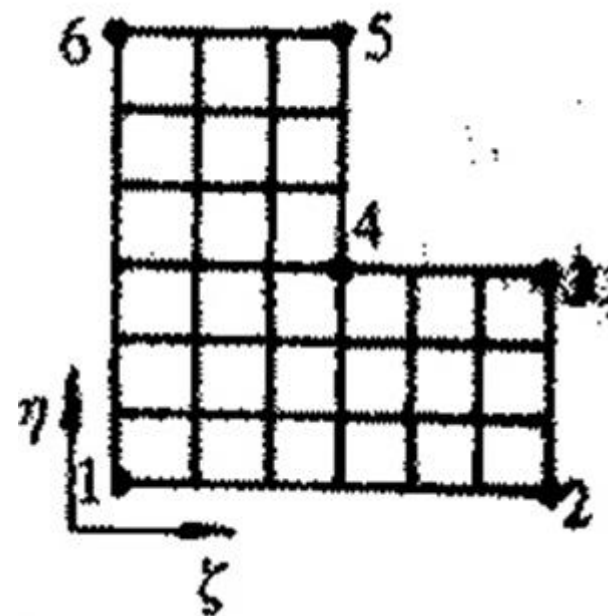
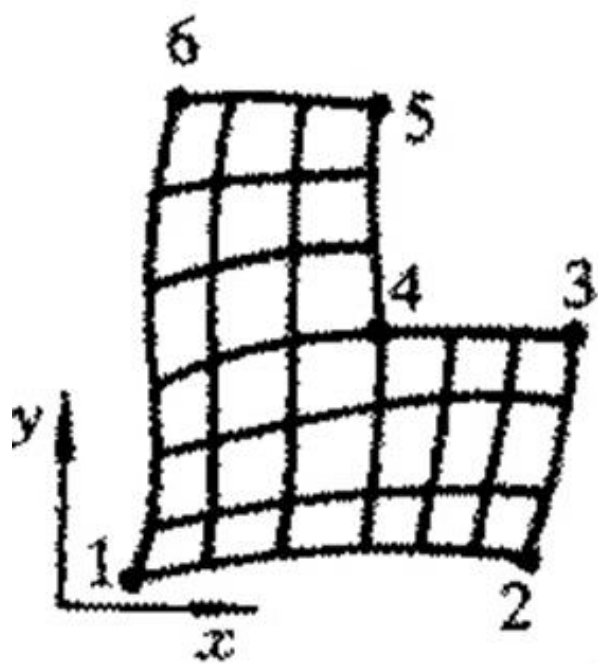


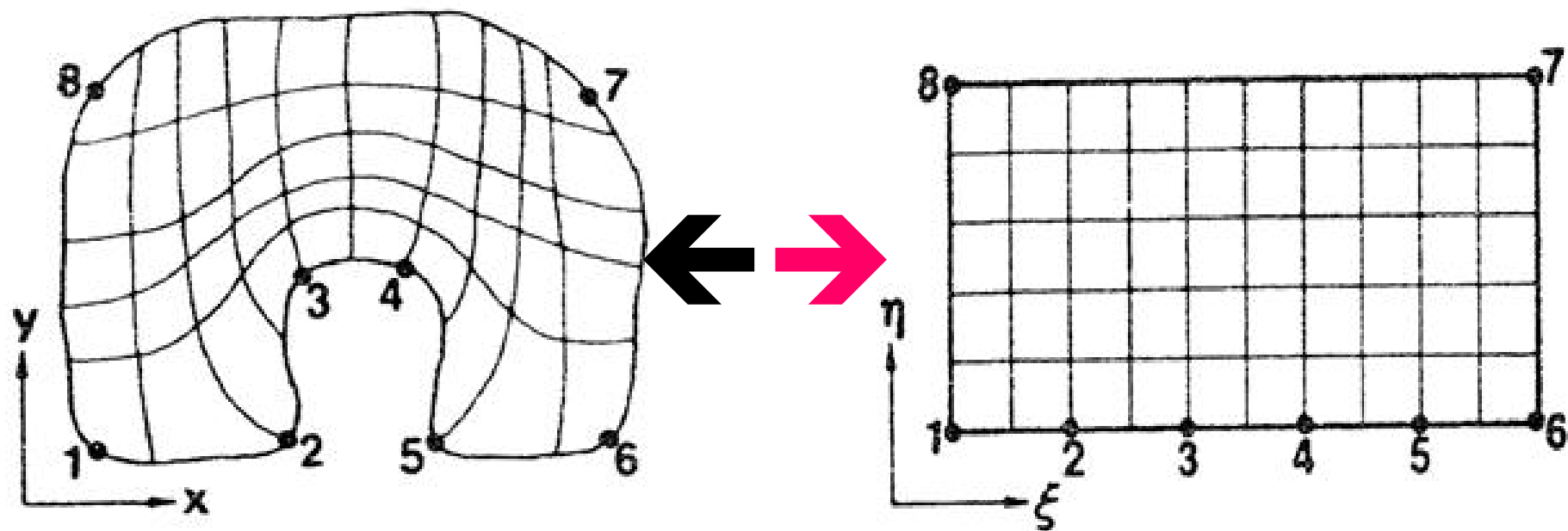
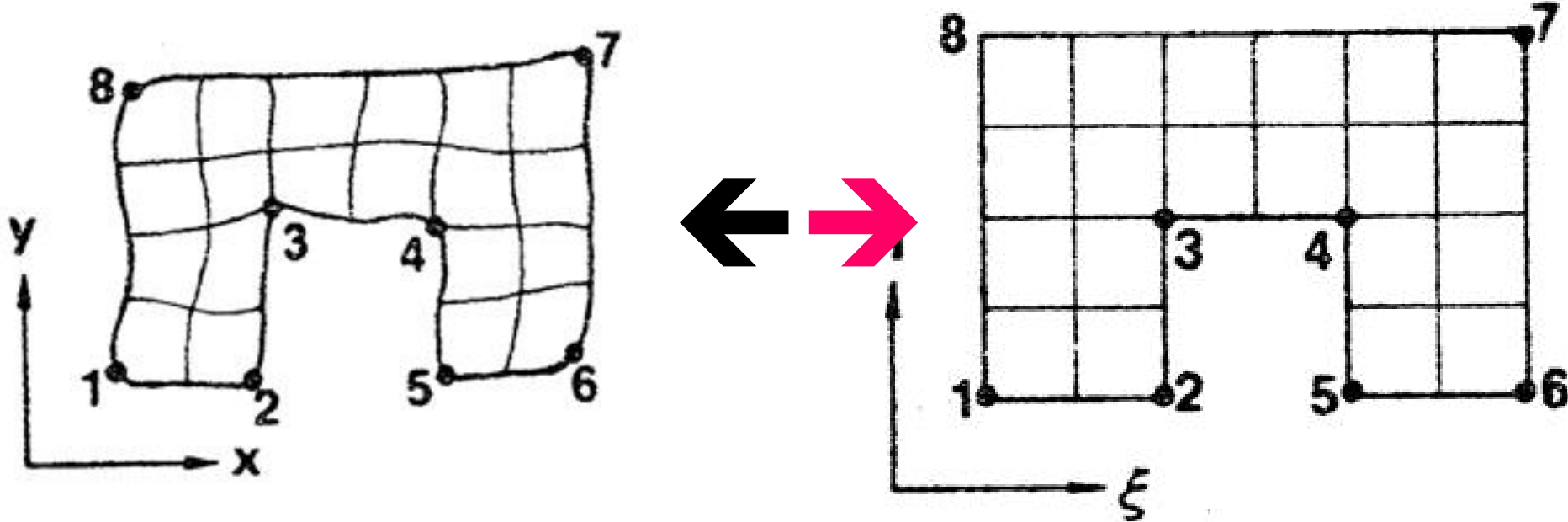
9.4.2 求解区域的拓扑形态和 计算平面解域选取

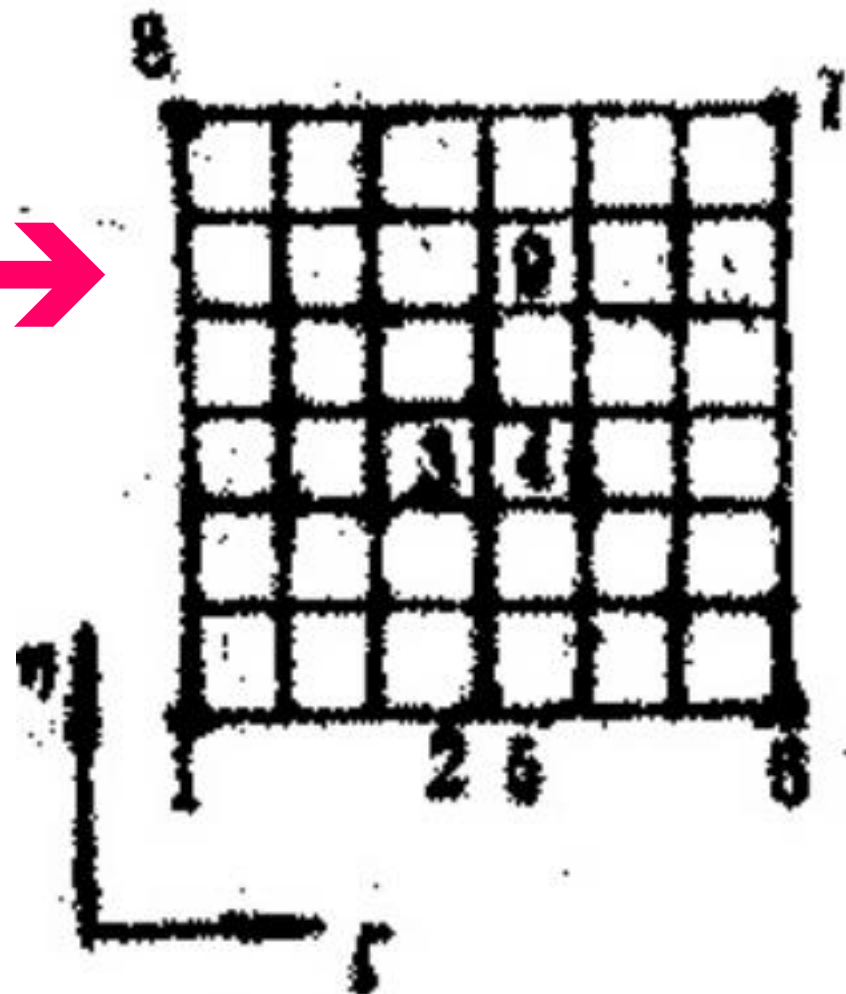
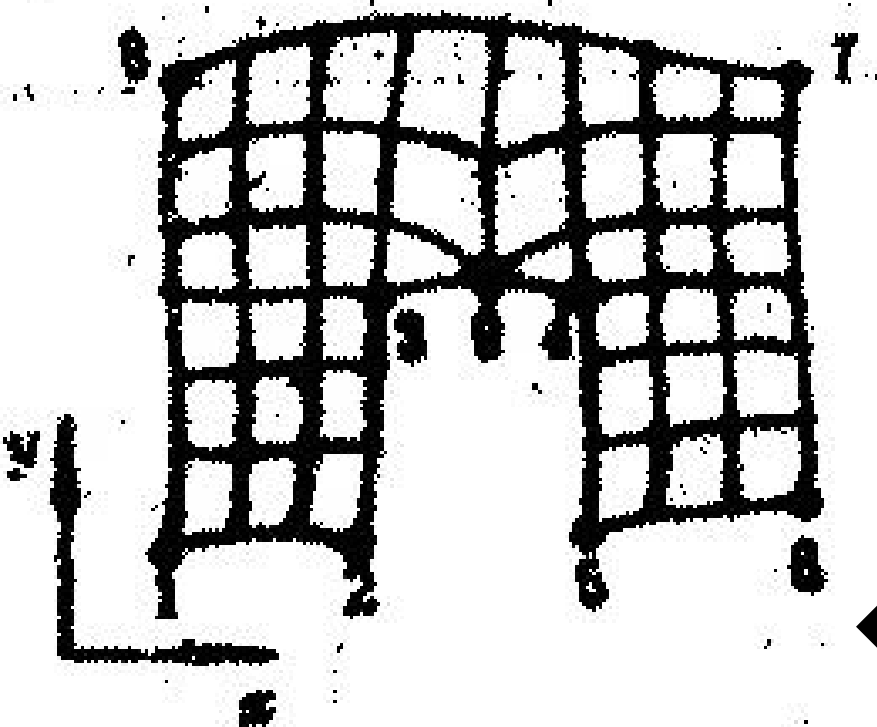
物理区域  计算区域

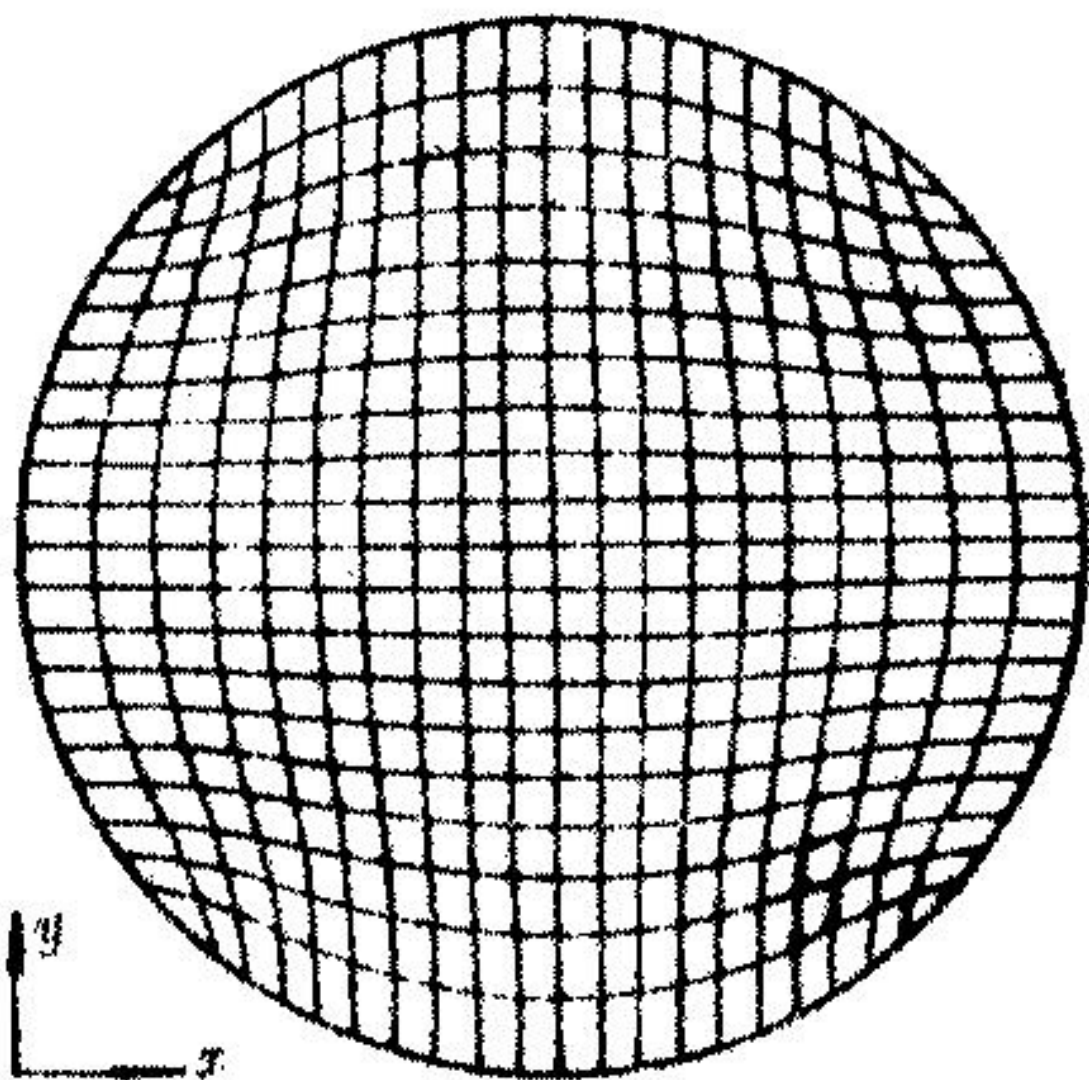
1 单连通域

- 求解区域边界线内**不包含**非求解区域的计算域，称为单连通域 → 即没有**洞**的区域
- (1) 4条相交的曲线所构成的单连通域：均在计算平面上取正方形或矩形
- (2) 多于4条相交曲线构成的单连通域：在计算平面可取单一矩形或连通的组合矩形







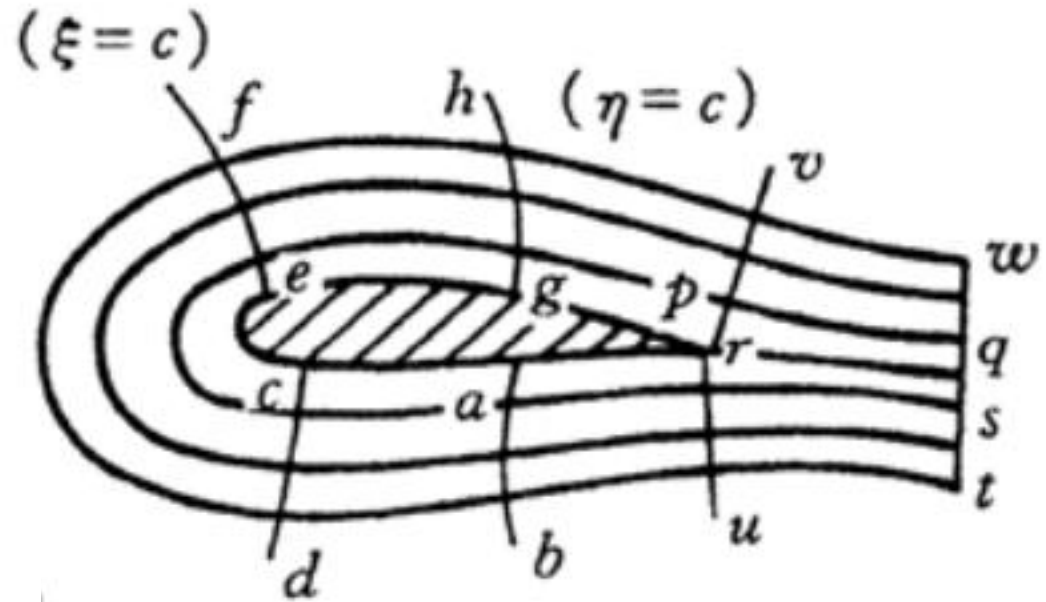
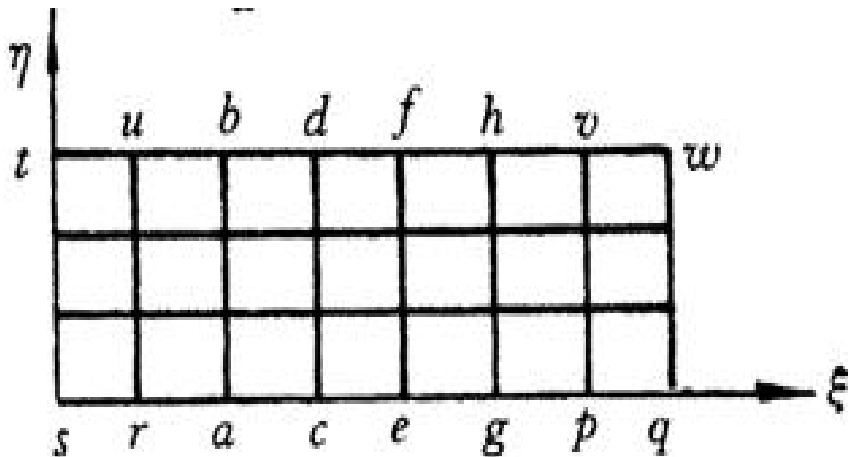


2 多连通域

- 求解区域内包含有非求解区域的物理域

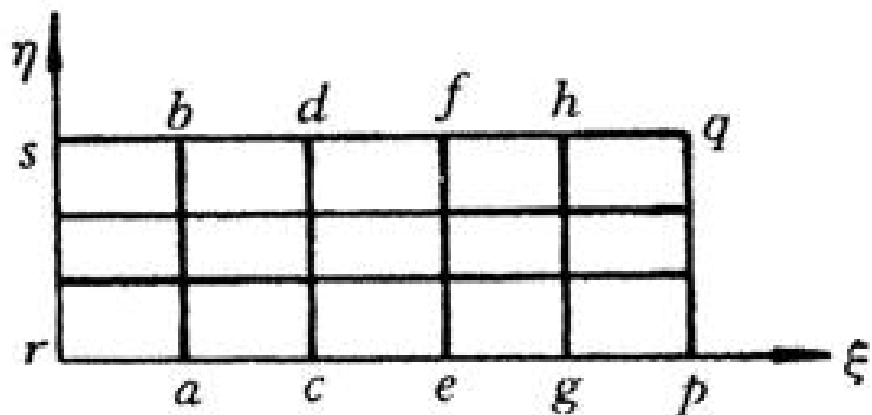
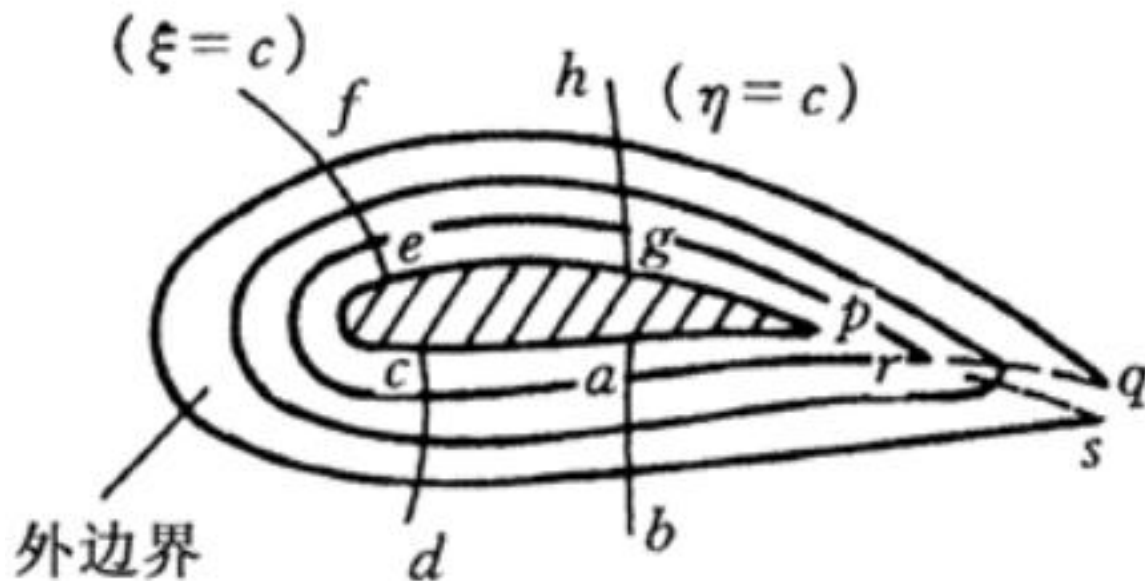
- 绕流问题:

C型网格



绕流问题的O型网格

- 绕流问题:

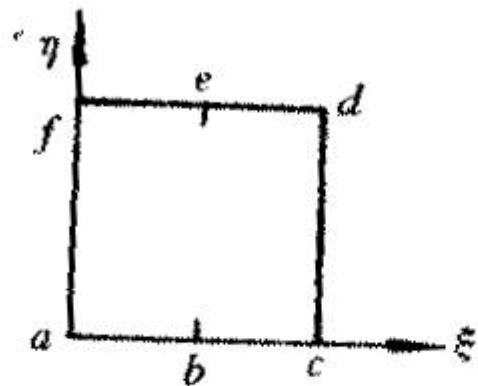


物理区域 计算区域

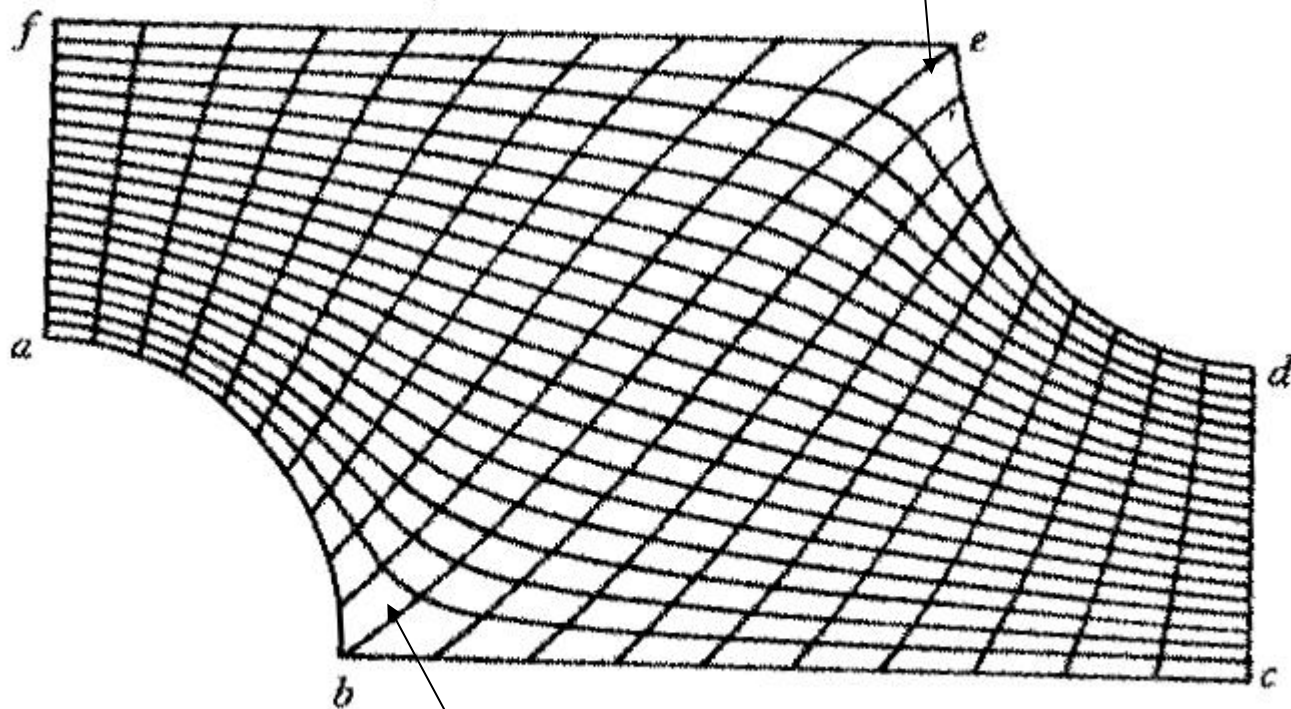
- 在计算平面上选择何种形式的区域与之相对应，是有一定自由度的
- 选择原则：所生成的网格要适用于所计算的问题

9.4.3 网格分布特性的控制方法

- 1、控制边界附近的网格疏密
- 2、控制某些点附近的网格疏密
- 3、控制边界上网格的正交性

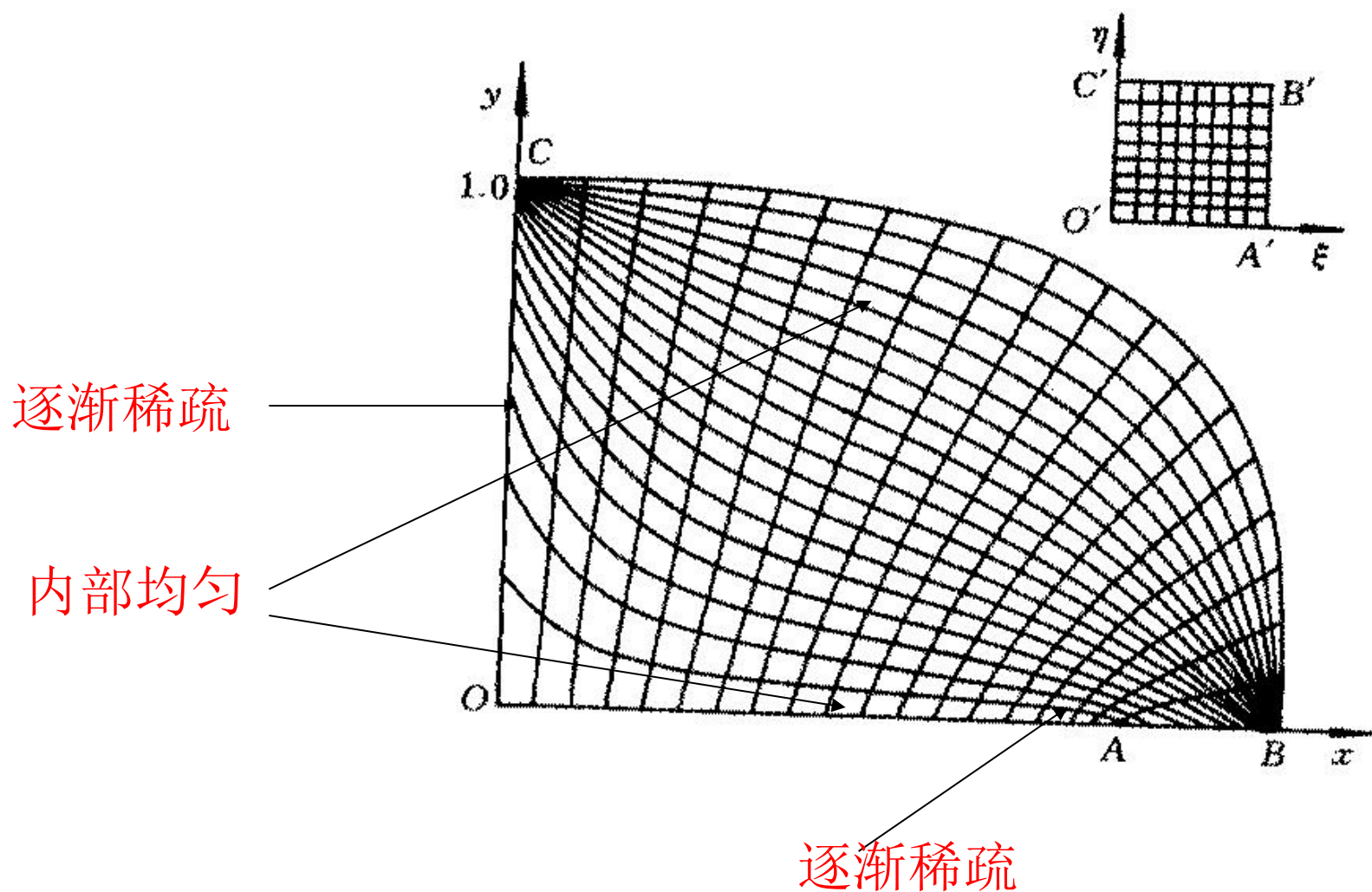


距离大，不利于
提高固体边界附
近的计算精度



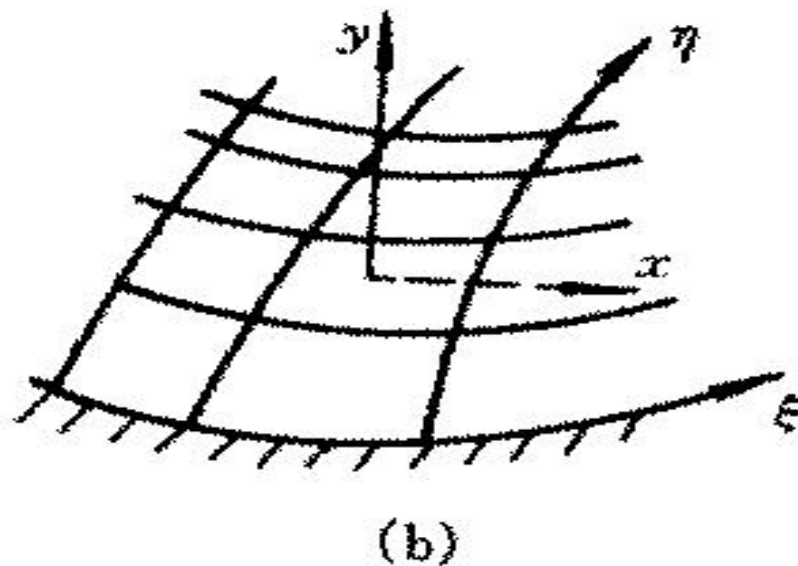
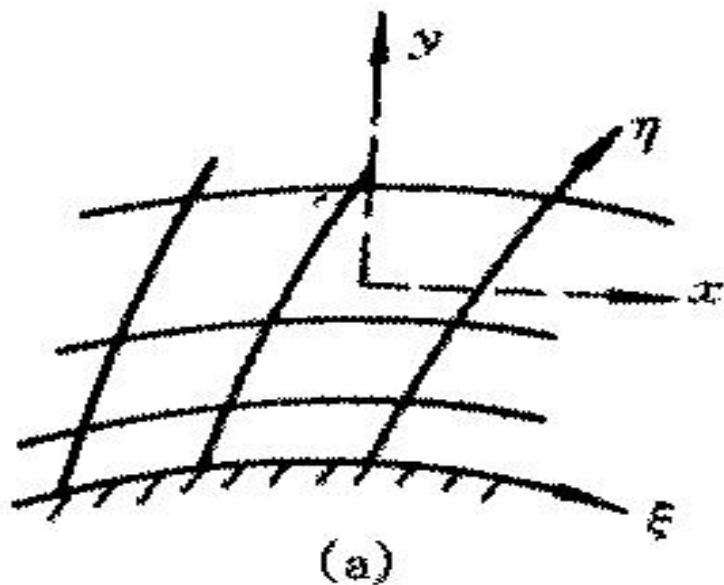
距离大，不利于
提高固体边界附
近的计算精度

Laplace方程生成的网格的特点



Laplace 方程特点

- Laplace 方程描述稳态扩散过程，而扩散会抹平空间不均匀的场
- 变化剧烈 → 网格线密
- 变化平缓 → 网格线稀疏
- 即使边界上规定疏密不同的分布，传递到区域内部时已逐渐被抹平



- 1 相同热流量下，**导热面积大**的地方温度梯度小，网格变稀
- 2 在**凸面**附近随着离壁面距离增加网格逐渐变稀(a)，而在**凹面**附近则反之(b)
- 3 如果想较好分辨固体表面附近变量的剧烈变化，(a)的变化趋向是有利的，(b)不利

调节网格的疏密

- 稳态导热问题：生成计算网格的疏密与等温线的疏密一致
- 等温线分布：是由给定的边界条件及源项所确定
- 用椭圆型方程生成贴体网格，为了生成高质量的网格，应通过调整边界条件的设置和选择合适的源项函数形式来控制网格的疏密分布
- 采用Poisson方程来生成网格，正是基于这种需要

1、控制边界附近网格疏密的源函数

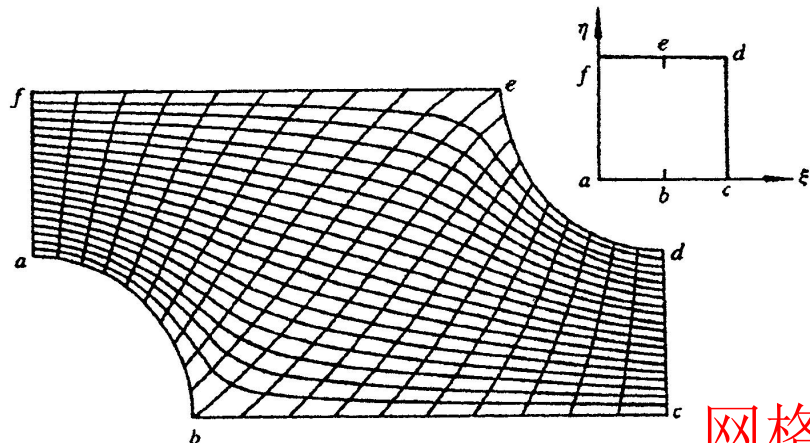
$$P(\xi) = - \sum_{i=1}^{M+1} a \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|} e^{-b|\xi - \xi_i|}$$

ξ 方向

$$Q(\eta) = - \sum_{i=1}^{N+1} \bar{a} \frac{\eta - \eta_i}{|\eta - \eta_i|} e^{-\bar{b}|\eta - \eta_i|}$$

η 方向

- 特点：使中间区域热源接近于0，而边界附近热源较大，形成边界温度梯度大，网格密



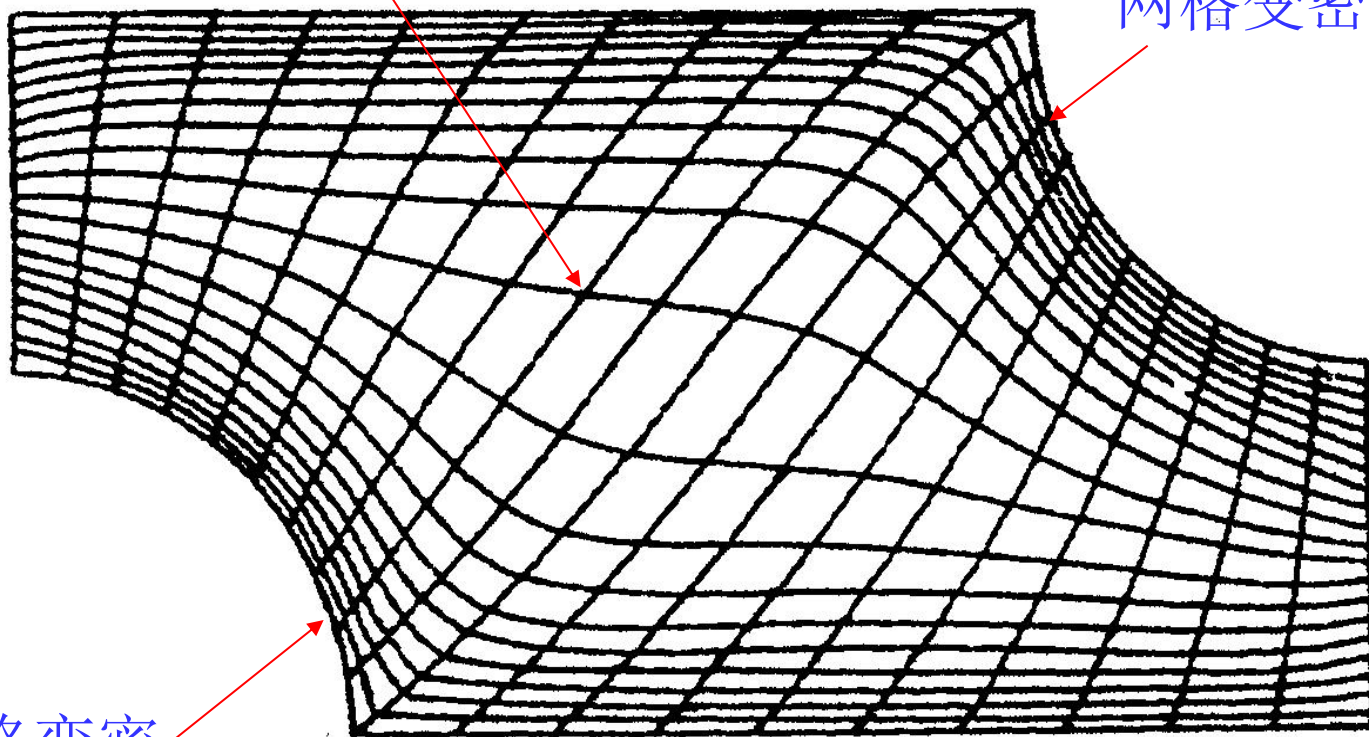
增加源项控制

取 $P=0$, $Q \neq 0$

网格变疏
(太稀疏)

网格变密

网格变密



2、控制某些点附近疏密的源函数

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{m=1}^{M+1} a_m \frac{\xi - \xi_m}{|\xi - \xi_m|} e^{-b_m |\xi - \xi_m|}$$

边界附近表达式同前

$$- \sum_{i=1}^I c_i \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|} e^{-d_i \left[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 \right]^{1/2}}$$

增加节点附近源项

ξ 方向

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^{N+1} a_n \frac{\eta - \eta_n}{|\eta - \eta_n|} e^{-b_n |\eta - \eta_n|}$$

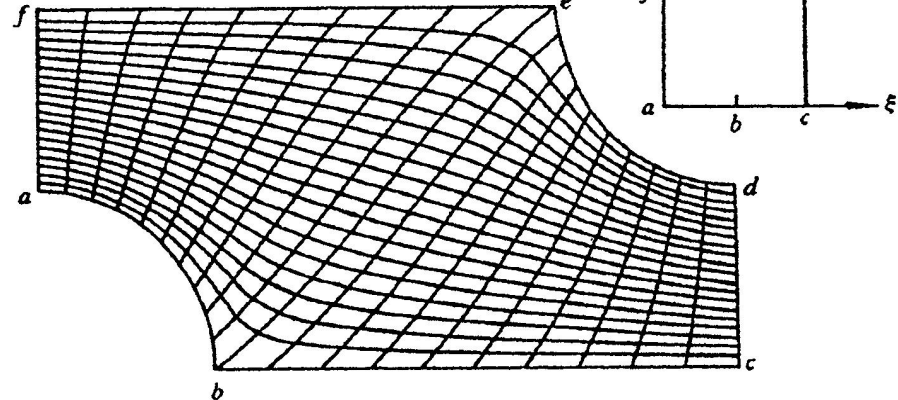
边界附近表达式同前

$$- \sum_{i=1}^I c_i \frac{\eta - \eta_i}{|\eta - \eta_i|} e^{-d_i \left[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 \right]^{1/2}}$$

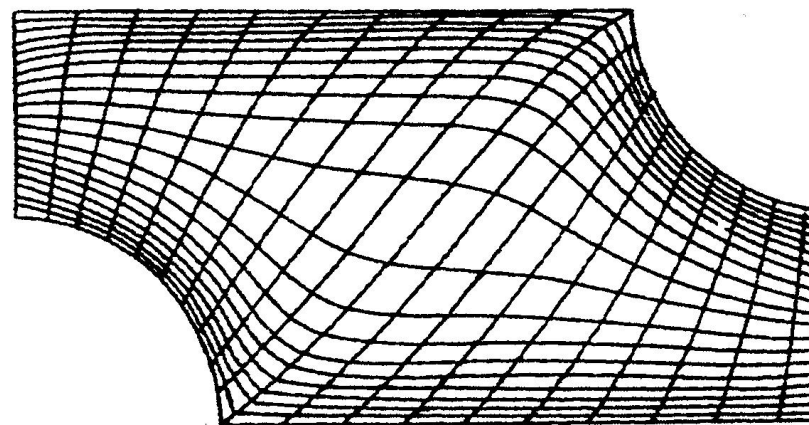
增加节点附近源项

η 方向

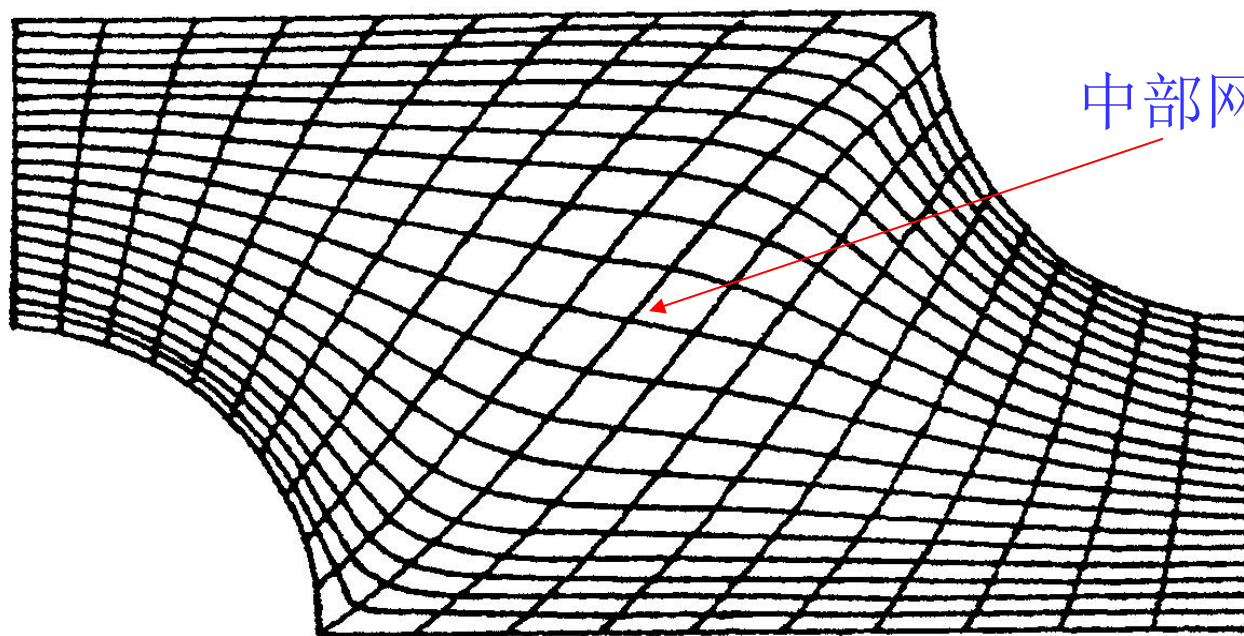
- 特点：使这些点附近热源增大，网格密



增加边界源项



再增加中部节点源项



中部网格变密集!

3、控制边界网格正交性的源函数

$$\begin{cases} P(\xi, \eta) = \phi(\xi, \eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2) & \xi \text{ 方向} \\ Q(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2) & \eta \text{ 方向} \end{cases}$$

$(\xi_x^2 + \xi_y^2)$ 和 $(\eta_x^2 + \eta_y^2)$ 起着把边界上设定的网格线分布密度向区域内部传递的作用

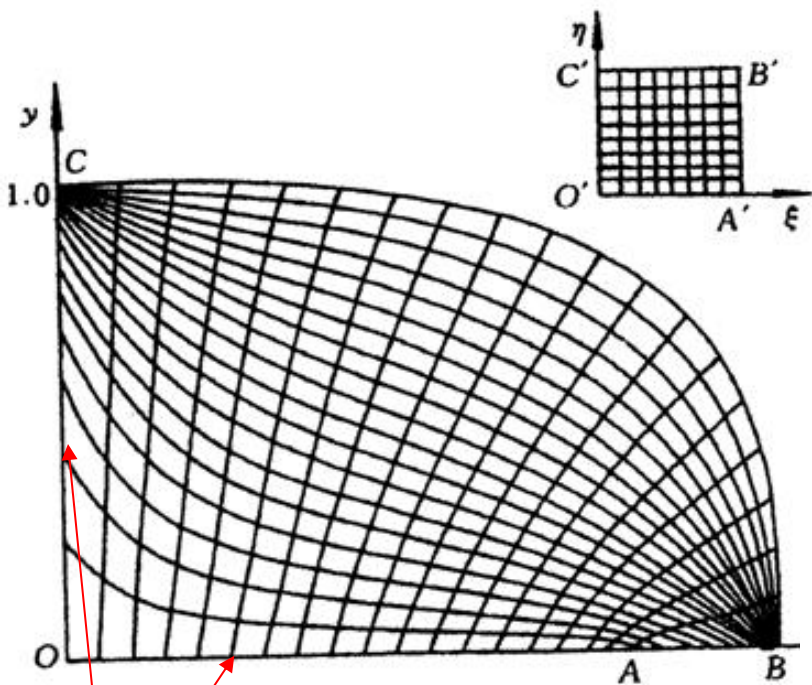
待定系数函数形式

1 先确定边界上的
的正交特性：

$$\phi = -\frac{y_{\xi}y_{\xi\xi} + x_{\xi}x_{\xi\xi}}{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}$$

$$\psi = -\frac{y_{\eta}y_{\eta\eta} + x_{\eta}x_{\eta\eta}}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2}$$

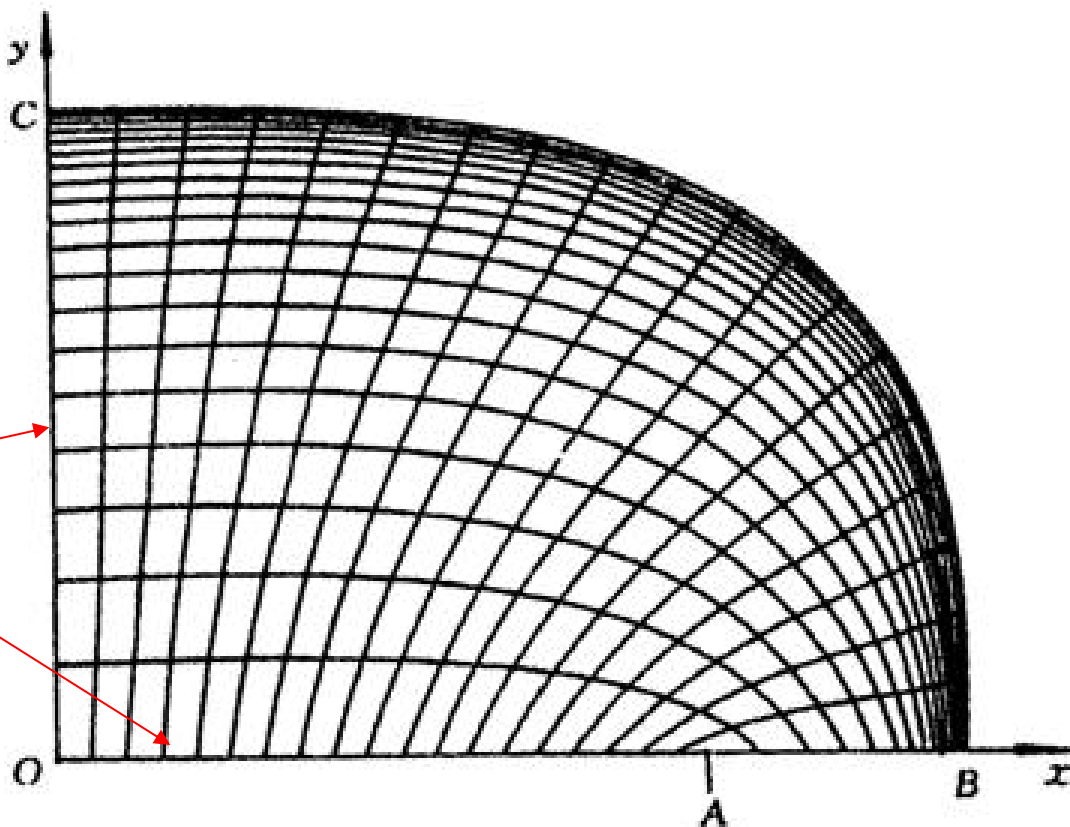
2 再对内部进行线性插值



斜交!

增加正交源项

正交性
变好!



9.4.4 椭圆型反变换方程 的其他选择方案

- 1、线性椭圆方程方法
- 2、4阶调和方程方法

文章编号: 1000-4874(2000)02-0254-04

线性椭圆型方程的数值网格 生成方法

李传亮, 孔祥言

(中国科学技术大学力学系, 安徽合肥 230027)

摘 要: 用椭圆型方程生成的数值网格是一种贴体网格; 传统的网格生成方法需求解一组非线性的椭圆型偏微分方程; 非线性椭圆型方程的求解非常困难且精度受到影响, 本文对此进行了深入的理论研究, 提出了“用求解线性的椭圆型方程直接生成贴体网格”的新方法; 新方法简单且易于实现, 并从理论上克服了传统方法存在的不足, 因此, 它对计算流体力学的发展具有一定的理论意义和实用价值。

关 键 词: 椭圆型方程; 数值计算; 贴体网格

中图分类号: O351.2 **文献标识码:** A

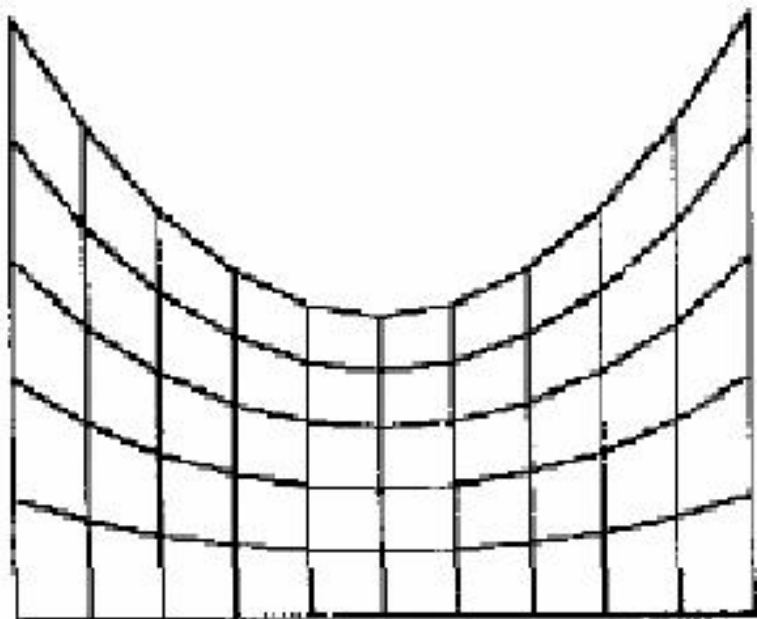
解线性方程新方法的提出

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 [x_{\xi}P(\xi, \eta) + x_{\eta}Q(\xi, \eta)] \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 [y_{\xi}P(\xi, \eta) + y_{\eta}Q(\xi, \eta)] \end{cases}$$

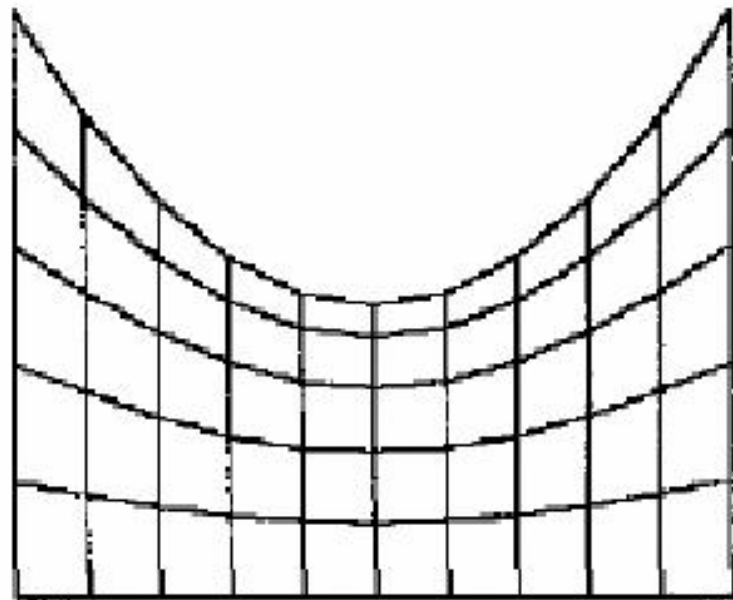
相对于 Poisson 方程而言, 方程 (5) 是一个极其复杂的非线性椭圆型方程, 求解起来相当困难。然而, 仔细分析上述方法便不难发现, 求解问题的过程多走了一步, 先由 D 正变换到 D^* , 再由 D^* 逆变换到 D 。事实上, 问题的核心是: 在边界条件一一对应的情况下, 如何将 D^* 上的均匀网格贴体放到 D 域上去。这本身就是一个边值问题。况且, 所谓的正、逆变换系由人为规定, 由 D^* 到 D 的变换亦可规定为正变换。在这种情况下, 可直接选用 Poisson 方程作为控制方程:

$$\left. \begin{aligned} x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} &= P \\ y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} &= Q \end{aligned} \right\}$$

两种方法比较



非线性椭圆方程生成



线性椭圆方程生成

边界节点对应关系的选择

- 在计算平面边界上规定 $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$ 的取值(第一类边界条件)
- 在计算平面部分边界上规定 x, y 对 ξ, η 的导数值(第二类边界条件)，就可能在物理平面上使网格线与这部分边界正交，但此时这部分边界上网格线与边界的交点就由计算确定

4阶双调和方程

- **Laplace**方程求解时，计算平面边界上，不能同时规定 x, y 函数值和导数值。因而，在规定了 x, y 的地方无法控制正交性，而规定了正交性的边界上又不能得到节点的位置
- 采用**4阶**的椭圆型方程(即**双调和方程**)：解决了这一矛盾。可以在边界上同时规定函数值及其一阶导数值，这样可同时控制物理平面求解区域边界上的**节点位置**及网格线与边界线的**交角**

正变换

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} = 0 \\ \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} = 0 \end{array} \right.$$

分解为:

$$\nabla^2 \xi = p, \nabla^2 p = 0$$

$$\nabla^2 \eta = q, \nabla^2 q = 0$$

反变换

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(px_\xi + qx_\eta)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(py_\xi + qy_\eta)$$

$$\alpha p_{\xi\xi} - 2\beta p_{\xi\eta} + \gamma p_{\eta\eta} = 0$$

$$\alpha q_{\xi\xi} - 2\beta q_{\xi\eta} + \gamma q_{\eta\eta} = 0$$

9.4.5 其他类型的微分方程法 生成贴体网格

- 1、双曲方程方法
- 2、抛物方程方法

1 双曲型方程法

- 椭圆型方程生成网格方法的缺点是计算工作量大，而用双曲型方程生成网格则要快得多，它是从一条已知节点分布的边界出发，采用步进法而逐渐走向对边的
- 采用双曲型方程生成网格的速度一般要比椭圆型方程快1-2个数量级
- 同时它又能保证在整个计算区域中较好的正交性

步进法

从一条已知节点分布的边界出发：

1 假设以(j-1)作为步进的起始边，其节点设置均已给定

2 下一步计算获得 (j) 这条边上的节点位置

两步循环交替进行，逐步走向对边

双曲方程例子

$$x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = 0$$

$$x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} = J$$

上式可保证整个计算区域中网格**正交性**。数值实施时由于截断误差影响，只能做到基本正交

反映网格几何尺度的**Jacobian**因子 (当 $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ 时即为控制容积的体积)，应在生成网格前在全场范围内预先选定

Steger JL, Chaussee DS, Generation of body-fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations. SIAM J.Sci.Stat.Comp 1(4), 431-437 (1980).

双曲方程线化求解过程

$$x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} = 0$$

$$x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} = J$$

两个非线性的偏微分方程，数值求解时需作线化处理。

试从某个给定的点出发，该点的位置为 $\tilde{x}, \tilde{y}$

线化:

$$\begin{aligned} x_{\xi} x_{\eta} &= [\tilde{x} + (x - \tilde{x})]_{\xi} [\tilde{y} + (y - \tilde{y})]_{\eta} \\ &= \tilde{x}_{\xi} \tilde{y}_{\eta} + \tilde{y}_{\eta} (x_{\xi} - \tilde{x}_{\xi}) + \tilde{x}_{\xi} (y_{\eta} - \tilde{y}_{\eta}) + O(\Delta^2) \\ &= -\tilde{x}_{\xi} \tilde{y}_{\eta} + \tilde{y}_{\eta} x_{\xi} + \tilde{x}_{\xi} y_{\eta} + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

其中 Δ 表示网格步长

对所有非线性项都线化处理后，可得：

$$A \begin{bmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} x_\xi \\ y_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J + J^n \end{bmatrix}$$

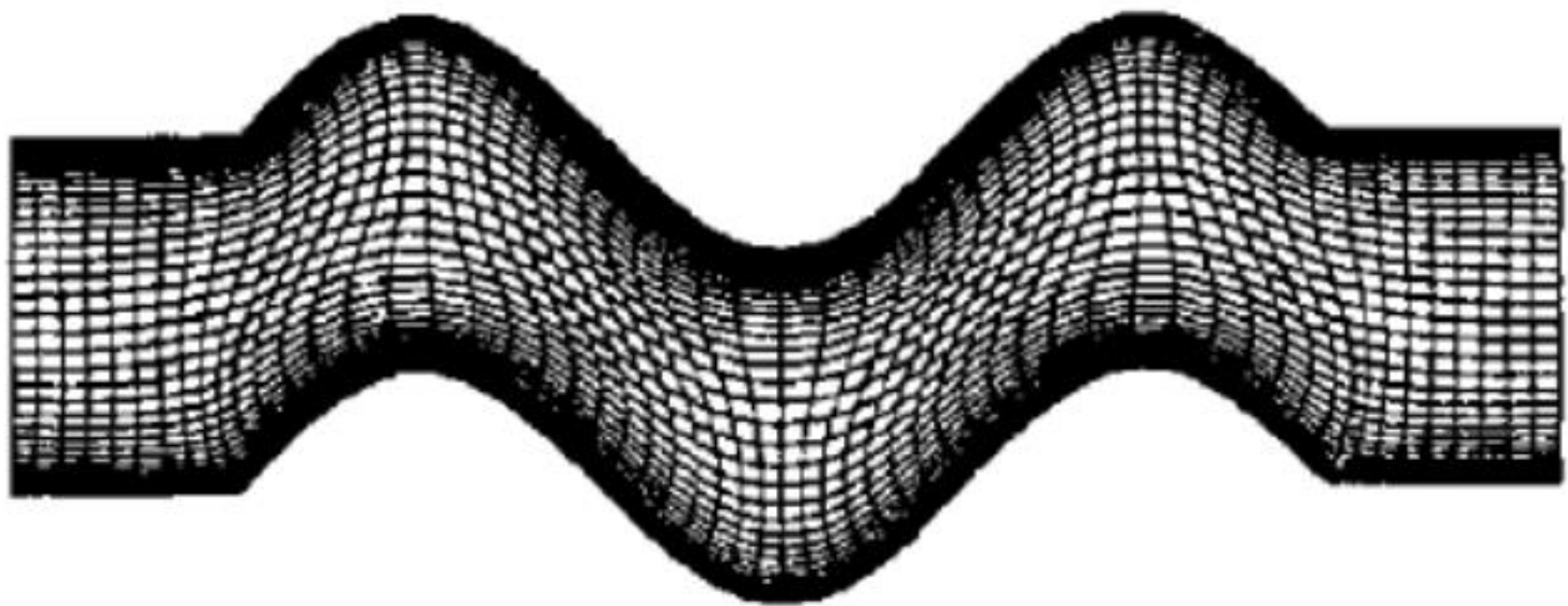
系数矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} x_\xi^n & y_\xi^n \\ -y_\xi^n & x_\xi^n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x_\eta^n & y_\eta^n \\ y_\eta^n & -x_\eta^n \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}, \tilde{y} \Rightarrow x^n, y^n$ 用步进法生成网格过程中已知的
第 n_Δ η 步上的值

$$\begin{bmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{bmatrix} + A^{-1} B \begin{bmatrix} x_\xi \\ y_\xi \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ J + J^n \end{bmatrix}$$

用双曲方程生成的内流网格



(59 × 10)

图 2-17 用双曲型方程生成的内流网格

双曲方程法的网格振荡问题

- 引入四阶的耗散项：对振荡起阻尼作用

Thompson JF et al., Numerical grid generation, foundations and applications. New York, North-Holland, 1985

- 预测-校正两步法：将椭圆型方程生成网格的技术与双曲型方程的方法结合起来

Jeng YN, Shu YL, Grid generation for internal flow problems by methods using hyperbolic equations. Numer.Heat.Transfer Part B 27, 43-61, 1995.

2 抛物型方程法

从Laplace或者Poisson方程出发，对决定方程椭圆性的那一项作特殊处理

处理结果：使之能采用步进法，从给定节点布置的初始边界(设为 $\eta=0$)出发，在 $\xi=0$ 及 $\xi=1$ 的两边界上按设定的边界条件(即节点布置)，一步一步地向 $\eta=1$ 的方向前进

Nakamura S, Marching grid generation using parabolic partial differential equations. In: Thompson JF ed. Numerical grid generation. New York, Elsevier, 1982

基于Laplace 方程

- 以 η 方向为步进方向，则 η 方向的二阶导数 $\frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2}$ (r 代表 x, y)，采用中心差分离散：

$$(r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1}) / \Delta \eta^2$$

须对此项做特殊处理：

- (1) 假设以(j-1)作为步进的起始边，其节点设置均已给定
- (2) 要想直接计算 (j) 这条边上的节点位置，必须对 $r_{(j+1)}$ 值做出假设：

可用j方向最外边界上的r值代替 $r_{(j+1)}$ ，每推进一层都这样处理，就把椭圆型方程以步进法进行了数值求解

带源项的抛物方程

$$Rr_{\eta} = r_{\xi\xi} + Pr_{\xi} + S$$

η 为步进方向， R 为光顺参数， P 为节点控制参数， S 为源项

Hodge JK et al., Noniterative parabolic grid generation for parabolized equations. AIAA J. 25(4), 542-549, 1987.

基于带源项的Poisson方程

$$\alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi}) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \varphi x_{\eta}) = 0$$

$$\alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_{\xi}) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \varphi y_{\eta}) = 0$$

$r_{\eta\eta}$ 及 $r_{\xi\eta}$ 的离散格式中的 (j+1) 项需做特殊处理

先用代数法或双曲方程法生成一个参考网格，用于确定 (j+1) 项的 r 值

Noack RW, Anderson DA, Solution adaptive generation using parabolic partial differential equations. AIAA paper 88-0315, 1988

抛物型方程虽然不会产生网格振荡，但参考网格的生成，及步进步长的选取等比较费时

