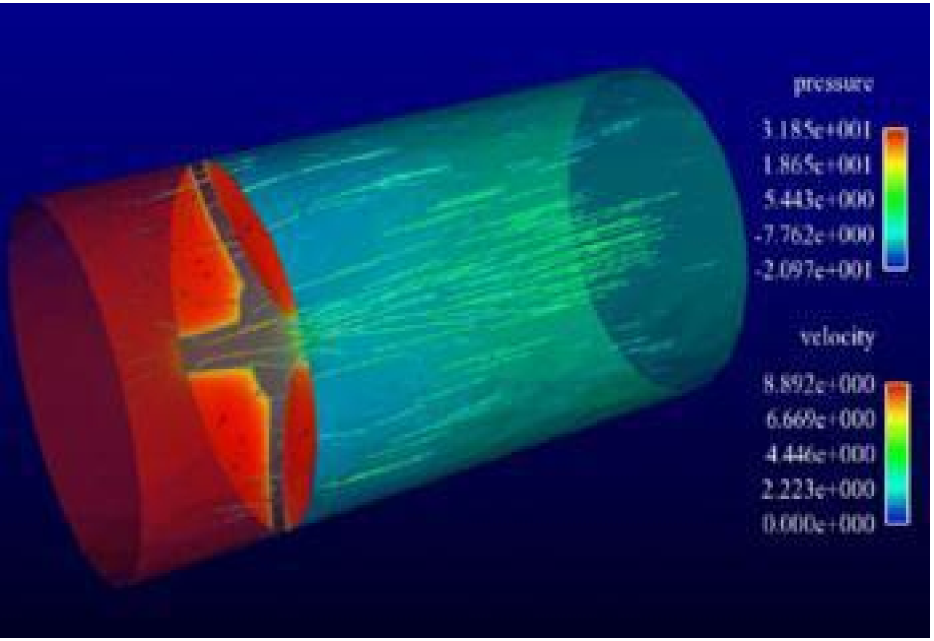
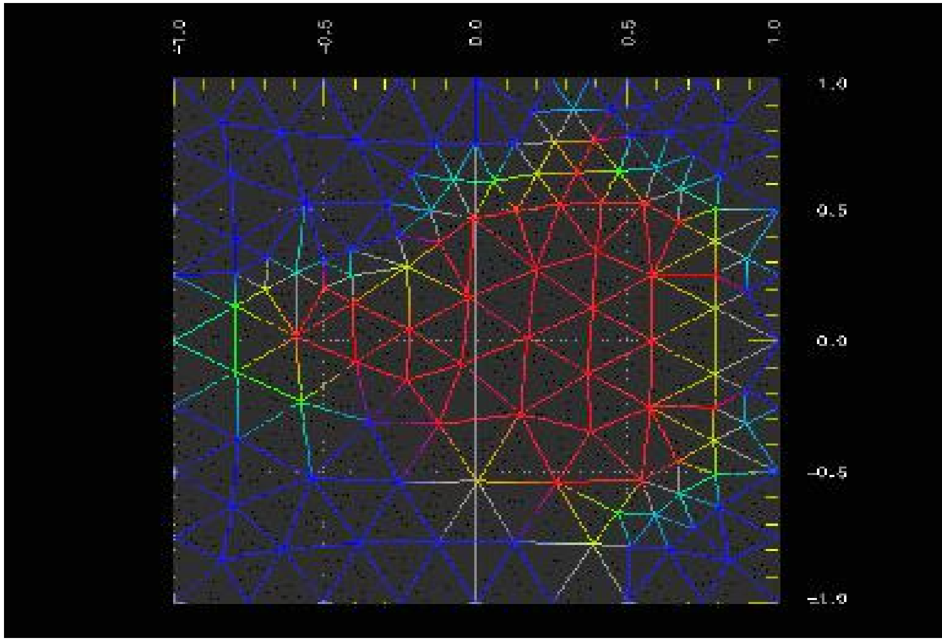
9.5 自适应网格的生成方法





胡 茂 彬

http://staff.ustc.edu.cn/~humaobin
/

自适应网格概述

- 动态网格：与求解过程结合起来

- 根据解的分布特性生成网格：解的梯度大的地方网格自动加密，解的梯度小的地方网格自动变疏

- 优点：改进计算精度，并使数值误差分布均匀

网格自适应化的方法

- 网格细化法 (*h*型方法)：通过网格的进一步细化来实现自适应目标
- 重新分布法 （*r*型方法）：保持单元或节点数不变，而通过重新分布节点位置实现

（1）均匀分布法

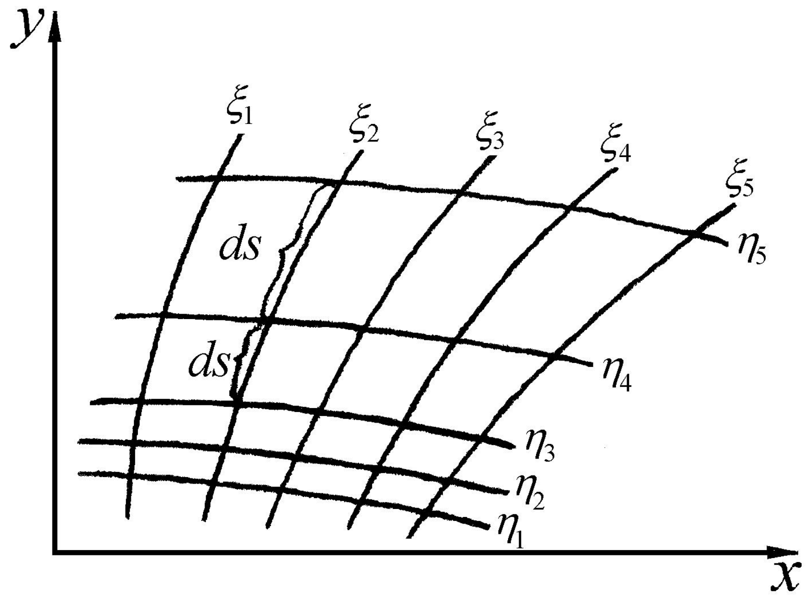
（2）变分法

9.5.1 均匀分布法

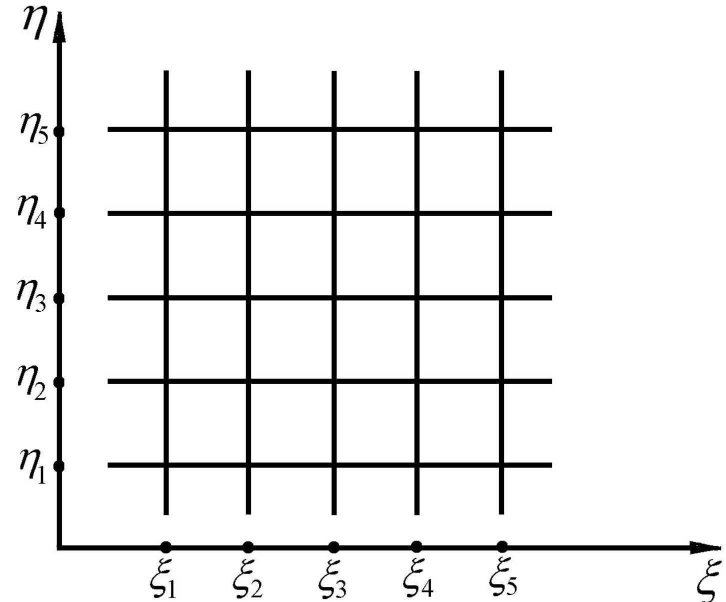
1 基本思想

- 根据解的分布，调整物理平面上网格点的位置，不改变节点数量

- 使网格线间的差值 $d\eta$，以及求解变量的差值 $d\phi$ 同时保持均匀



(a)



(b)

- 函数梯度：　　$\partial\phi/\partial s$
- 函数的变化：　　$d\phi = (\partial\phi/\partial s)\cdot ds$

- 梯度大➔要求弧长小；梯度小➔弧长大
- 同时要满足计算平面内网格均匀

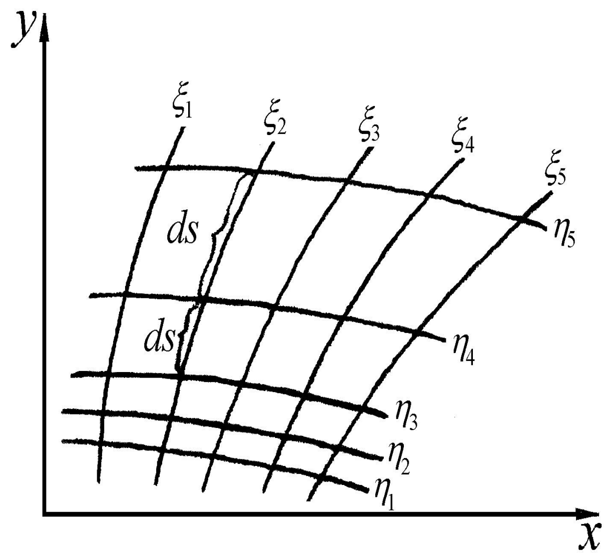
$$\frac{d\phi}{d\eta}$$

自适应网格要求

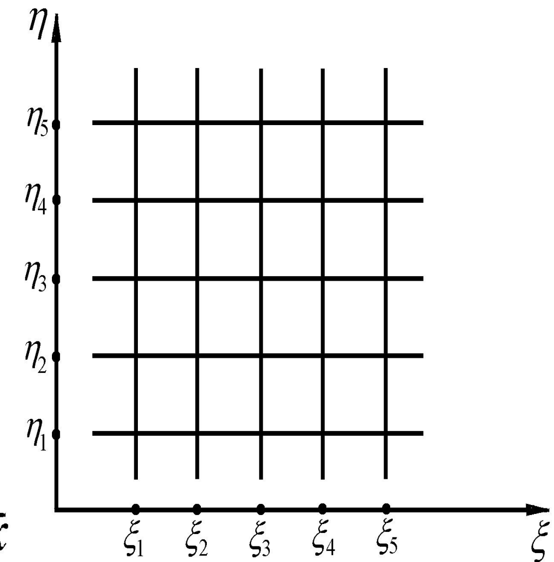
$$d\eta \propto \left|\frac{\partial \phi}{\partial s}\right| \cdot ds = const$$

普通网格：

$$d\eta \propto ds$$



(a)



(b)

考虑一般情况

$$d\eta = \left(1 + b\left|\frac{\partial \phi}{\partial s}\right|\right) \cdot ds = const$$

权函数：

$$W(s)$$

两个方向都进行自适应调整

- 要求：

$$d\eta = W(s)\cdot ds = const$$

$$d\xi = W(s)\cdot ds = const$$

2 权函数的选取

(1) 取关键求解变量的梯度型函数

$$W(s) = 1 + b\left|\frac{\partial \phi}{\partial s}\right|$$

Dwyer H A, Kee R J, Sandert B R, Adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer, AIAA J. 18(10): 1205-1210 (1980).

（2）取关键求解变量的一阶导数与二阶导数的线性组合

$$W(s) = 1 + b\left|\frac{\partial \phi}{\partial s}\right| + c\left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}\right|$$

Dwyer H A, Grid adaption for problem in fluid dynamics. AIAA J 22(2): 1705-1712 (1984).

（3）取变量一阶导数的线性组合，并取各向异性权函数

- 流场计算时，网格取权函数：

ξ方向：

$$W_1(s) = 1 + \left|\frac{\partial p}{\partial s}\right|$$

η方向：

$$W_2(s) = 1 + \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|$$

Shyy W, An ataptive grid method for Navier-Stokes flow computation. Appl. Math. Comput. 21, 201-219 (1987).

3 均匀分布法的实施

自适应网格要求：

$$d\xi = W(s) \cdot ds = const$$

$$ds = \frac{d\xi}{W_1(s)}$$

关键是根据 权重 调整 弧长

弧长的计算

起点处： $\xi = 0 \qquad s = 0$

由起点出发作定积分：

$$\frac{s}{s_{\max}} = \frac{\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{W_1(s)}}{\int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{W_1(s)}}$$

根据上式确定 $\xi = const$ 线上的弧长和位置

另一方向的定积分

确定 $\eta = const$ 线上的 弧长 和 位置

$$\frac{s}{s_{\max}} = \frac{\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{W_2(s)}}{\int_0^{\eta_{\max}} \frac{d\eta}{W_2(s)}}$$

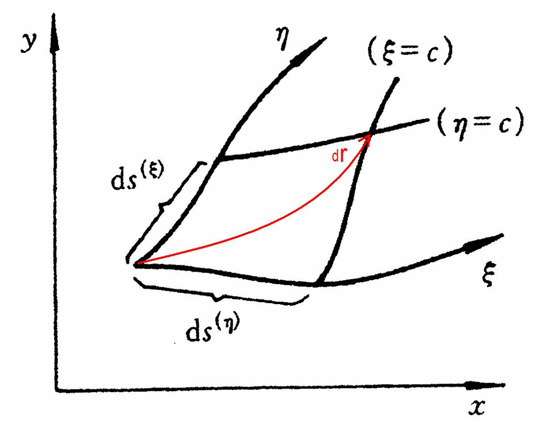
具体实施步骤

- 在计算平面上取 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$
- 映射到物理平面上得到弧长增量 $\Delta s_1 \quad \Delta s_2$

- 物理平面上网格点位置的变动：

$$\Delta x = \frac{x_\xi}{s_\xi}\Delta s_1 + \frac{x_\eta}{s_\eta}\Delta s_2, \qquad \Delta y == \frac{y_\xi}{s_\xi}\Delta s_1 + \frac{y_\eta}{s_\eta}\Delta s_2$$

$$s_\xi = \sqrt{\gamma} = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}, \quad s_\eta = \sqrt{\alpha} = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$$



9.5.2 生成自适网格的变分法

光顺、正交、网格加密

Brackbill J U, Coordinate system control: adaptive meshes. In: Thompson J F, ed. Numerical grid generation. Elsevier, NY, 277-294 (1982).

Jacobi 因子的特点

- J：坐标转换的物理平面与计算平面面积的比值（3D情况是体积比）

$$dxdy = |J|\,d\xi d\eta$$

- J 的值反映物理空间中控制容积的变化，|J| 反映物理空间网格密集程度

反映网格分布疏密度的度量参数

- Density Index

$$I_D = \iint_D W(x,y) \cdot J \cdot dxdy$$

权函数

网格均匀性及光顺性的度量参数

- Smooth Index

$$I_S = \iint_D \left[(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2 \right] dxdy$$

ξ 方向均匀性

η 方向均匀性

网格正交性的度量参数

网格正交时： $\nabla\xi\cdot\nabla\eta=0$

Orthogonal Index

$$I_O=\iint_D\left(\nabla\xi\cdot\nabla\eta\right)^2\cdot J^3\cdot dxdy$$

综合考虑网格疏密、光顺、正交

Smooth Orthogonal Density

$$I = \lambda_S I_S + \lambda_O I_O + \lambda_D I_D$$

Index ➔ 泛函

变分方法

- 泛函：是函数的函数

$$I = \lambda_S I_S + \lambda_O I_O + \lambda_D I_D$$

- 变分法：是 泛函 取 极值 的方法

计算平面内计算三个Index

- Smooth: $$I_S = \iint_{D^*} \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta$$
- Orthogonal: $$I_O = \iint_{D^*} \left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \right)^2 d\xi d\eta$$
- Density: $$I_D = \iint_{D^*} W \cdot J^2 \cdot d\xi d\eta$$

该泛函取极值的Euler方程

$$b_1 x_{\xi\xi} + b_2 x_{\xi\eta} + b_3 x_{\eta\eta} + a_1 y_{\xi\xi} + a_2 y_{\xi\eta} + a_3 y_{\eta\eta} = -J^2 \frac{\lambda_D}{2} W \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$a_1 x_{\xi\xi} + a_2 x_{\xi\eta} + a_3 x_{\eta\eta} + c_1 y_{\xi\xi} + c_2 y_{\xi\eta} + c_3 y_{\eta\eta} = -J^2 \frac{\lambda_D}{2} W \frac{\partial W}{\partial y}$$

Thompson J F, Warsi Z U A, Mastin C W, Numerical grid generation, foundation and applications. North-Holland, NY (1985).

变分法生成自适应网格

- 有坚实的数学基础，理论严格
- 计算工作量大