

## 6.2 在恒定电场作用下电子的运动

- 一. 在  $k$  空间中的运动图象
- 二. 在实空间中的运动图象

见黄昆书5.2节p245

本节以一维紧束缚近似下能带论的结果为例，进一步讨论晶体中电子在恒定外电场作用下的运动规律，以加深对Bloch 电子的理解。

一维紧束缚近似:

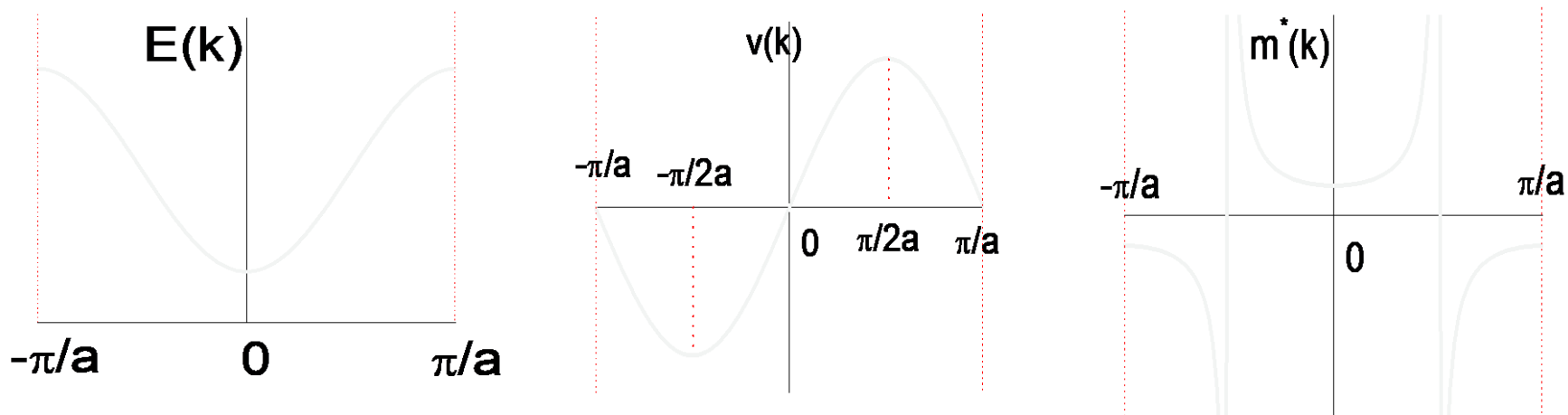
$$E^i(k) = \varepsilon_i - J_0 - 2J_1 \cos ka$$

$\varepsilon_i$  为某原子能级。设  $J_1 > 0$ , 则  $k=0$  点为能带底;  
 $k=\pm\pi/a$  为能带顶。

$$v(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{2aJ_1}{\hbar} \sin ka$$

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk^2}} = \frac{\hbar^2}{2a^2 J_1 \cos ka}$$

在能带底  $k=0$  和能带顶  $k=\pm\pi/a$  处, 电子速度  $v(k)=0$ ;  
而在  $k=\pm\pi/2a$  处,  $v(k)$  分别为极大和极小。



一维紧束缚近似下的  $E(k)$ ,  $v(k)$ ,  $m^*$  随  $k$  值的变化如上图。图中只画出一个能带，且只是绘出第一布里渊区。从图中明显看出在带底和带顶处，电子速度为零。中间有极大和极小值，带底处： $m^* > 0$ ，带顶处： $m^* < 0$ ，中间处  $m^* \rightarrow \pm\infty$ 。

我们从该图出发讨论恒定电场作用下电子的运动。

## 一. 在 $k$ 空间中的运动图象

当有电场加在固体上时，固体中的电子被加速，在  $k$  空间研究它的运动是很方便的。若沿  $-x$  方向加一恒定电场  $\mathcal{E}$ ，则电子受到的力： $F = e\mathcal{E}$  沿  $+x$  方向。

由于： $F = \hbar \frac{dk}{dt} = e\mathcal{E}$ ，得： $\frac{dk}{dt} = \frac{e\mathcal{E}}{\hbar} = \text{const}$

这表明电子在  $k$  空间中做匀速运动。

在准经典运动中，电子在同一能带中运动。因此，稳恒电场作用下，电子在  $k$  空间中的匀速运动意味着电子的能量本征值沿  $E(k)$  函数曲线周期性变化，即电子在  $k$  空间中永无休止的做循环运动。可从下页布里渊区图来理解。

其周期为：
$$T = \frac{2\pi\hbar}{ae\mathcal{E}}$$

电子在  $k$  空间的匀速运动，意味着电子的本征能量沿  $E(k)$  函数曲线周期性变化，当电子运动到布里渊区边界  $k = \frac{\pi}{a}$  处，由于  $k = -\frac{\pi}{a}$  和  $k = \frac{\pi}{a}$  相差一个倒格矢  $\frac{2\pi}{a}$ ，实际代表同一状态，所以电子从  $k = \frac{\pi}{a}$  移出等于又从  $k = -\frac{\pi}{a}$  移进来。形成循环运动。

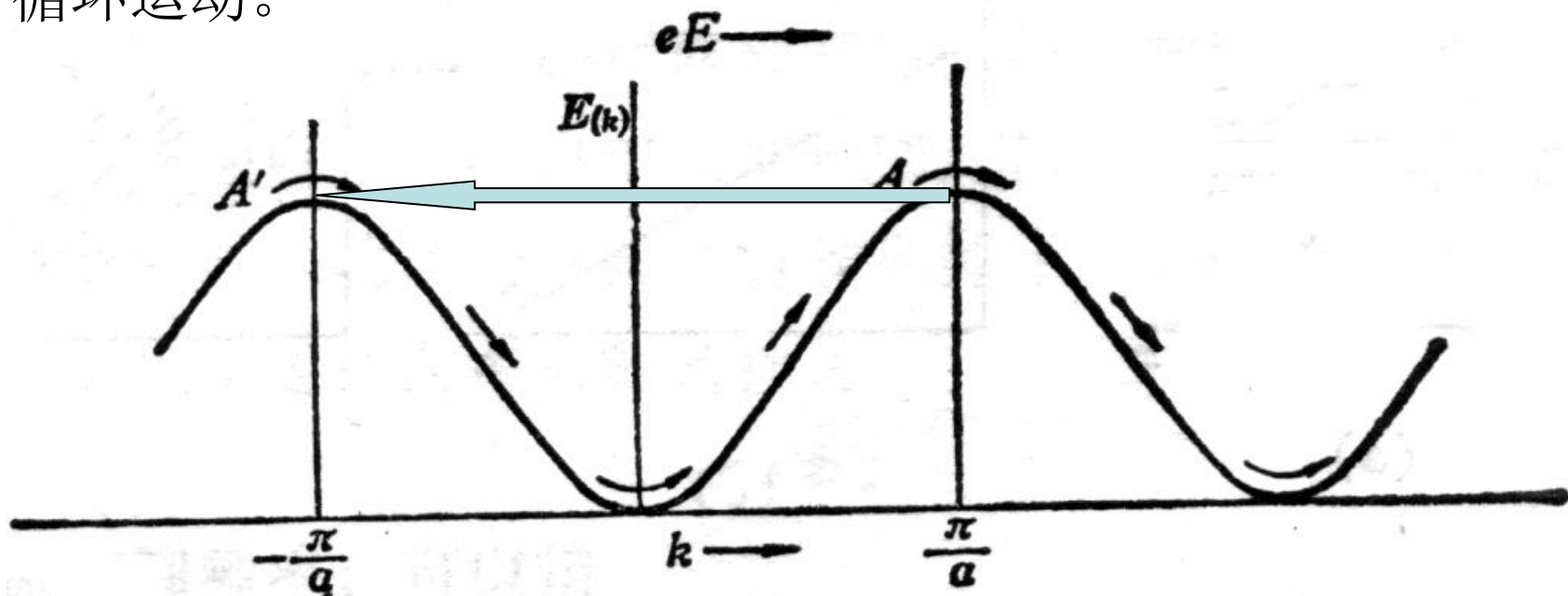
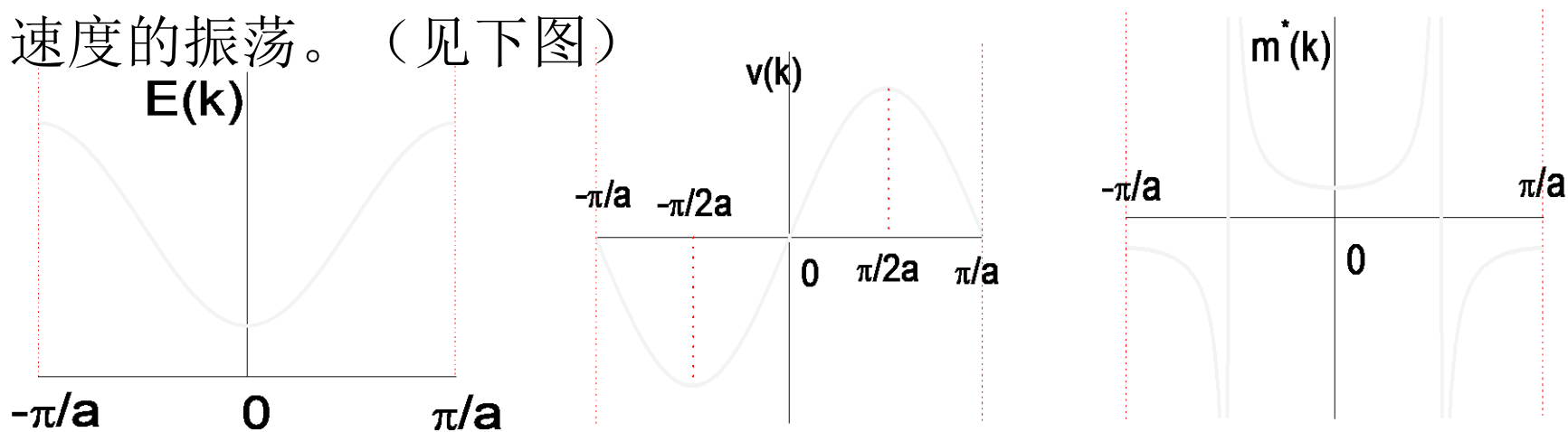
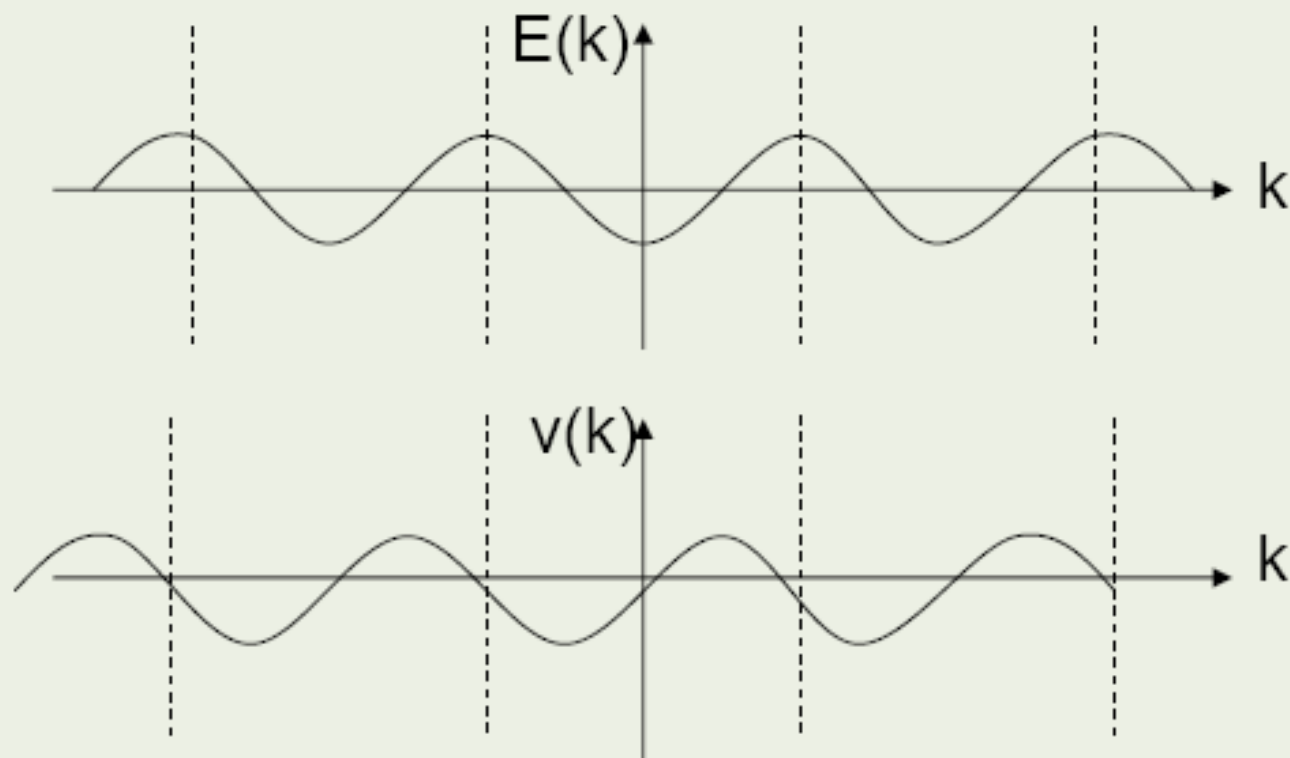


图 5-4 电子在恒定电场作用下的运动 见黄昆书p247

电子在  $k$  空间的循环运动，表现在电子速度上是  $v$  随时间的振荡变化，假设  $t = 0$  时，电子处在带底， $k = 0$ ， $m^* > 0$ ，外力作用使电子加速， $v$  增大，当到达  $k = \pi/2a$  时， $m^* \rightarrow \infty$ ，速度  $v$  到达极大， $k$  超过该点后， $m^* < 0$ ，外力作用使电子减速，直至  $k = \pi/a$  时，速度为零，这时电子处于带顶， $m^* < 0$ ，外力使电子反向运动，并在  $k = -\pi/2a$  达到反向速度的极大值， $k$  超过该值后， $m^* > 0$ ，使反向速度减小，直至  $k = 0$  处， $v = 0$ 。这就是在恒定外场作用下速度的振荡。（见下图）

速度的振荡。（见下图）

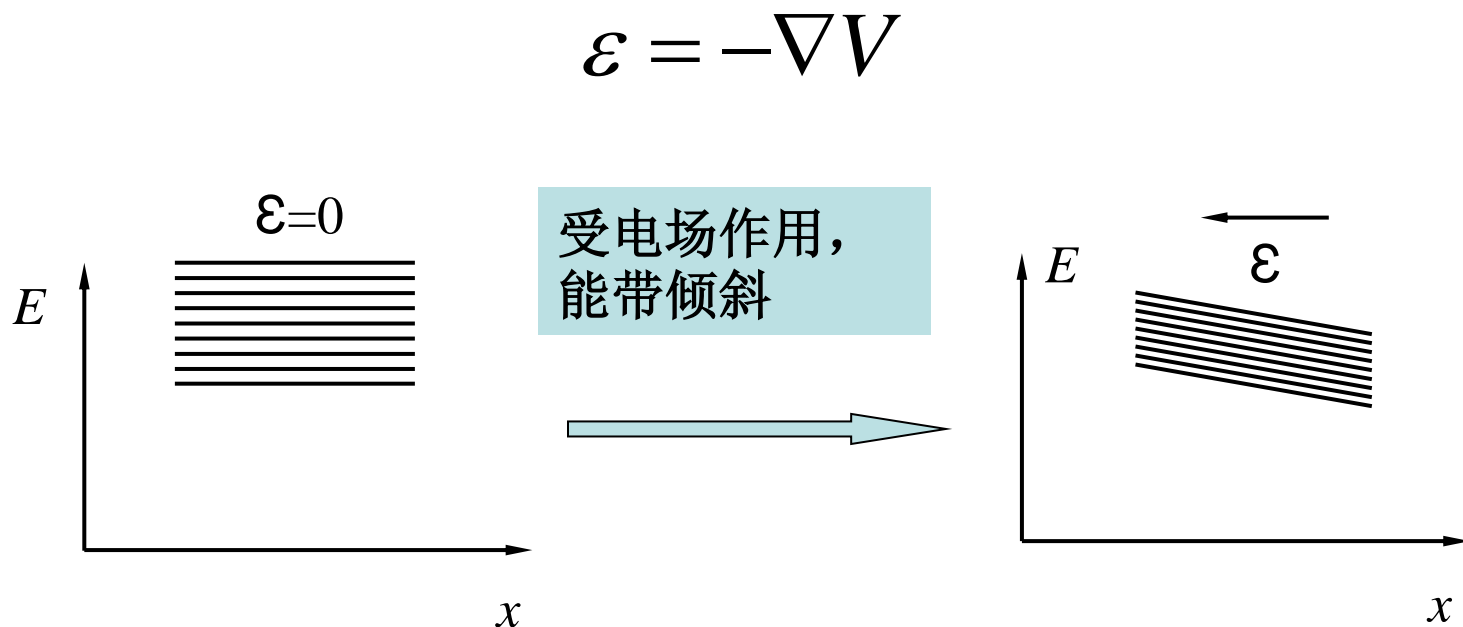




In a **DC** electric field, the electrons decelerate and reverse its motion at the BZ boundary!  
A DC bias produces an AC current!! (**Bloch oscillation**)

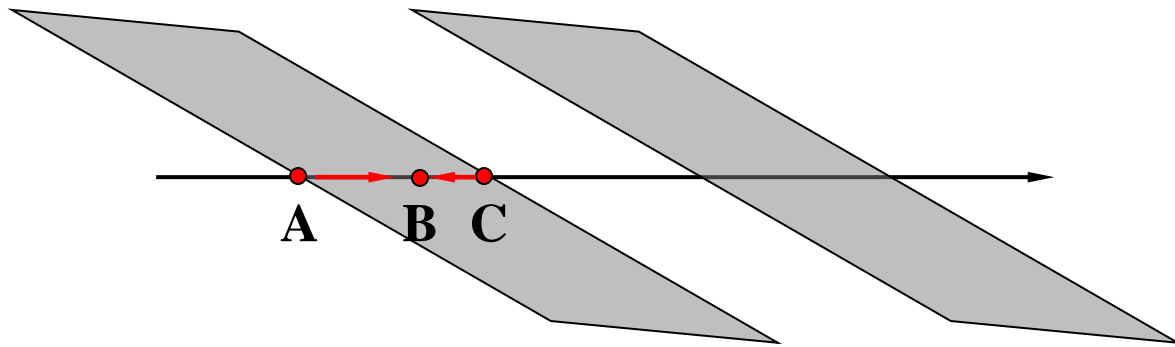
## 二. 在实空间中的运动图象

电子速度的振荡，意味着电子在实空间（坐标空间）的振荡，因为  $E(k)$  表示的是电子在周期场中的能量本征值，当有外电场时，会附加一个静电位能  $eV$ ，使能带发生倾斜，如图所示。





电场作用下，电子在实空间的运动示意图（黄昆书p248）



**电子速度的周期性振荡也就是电子在实空间中的振荡。** 设  $t = 0$  时电子在较低的能带底 A 点，在电场力的作用下，电子从（能带底） $A \rightarrow B \rightarrow C$ （能带顶），对应于电子从  $k = 0$  运动到  $k = \frac{\pi}{a}$ 。在 C 点电子遇到能隙，相当于存在一个势垒。在准经典运动中，**电子被限制在同一能带中运动，因此电子遇到势垒后将全部被反射回来**，电子从  $C \rightarrow B \rightarrow A$ ，对应于  $k = -\pi/a$  到  $k = 0$  的运动，完成一次振荡过程。

有两点必须指出：

1. 上述的振荡现象实际上很难观察到。由于电子在运动过程中不断受到声子、杂质和缺陷的散射，若相邻两次散射（碰撞）间的平均时间间隔为 $\tau$ ，如果 $\tau$ 很小，电子还来不及完成一次振荡过程就已被散射。而电子完成一次振荡所需的时间为：

$$T = \frac{\text{简约区的宽度}}{\text{电子在}\mathbf{k}\text{空间的速度}} = \frac{2\pi/a}{e\varepsilon/\hbar} = \frac{2\pi\hbar}{e\varepsilon a}$$

为了观察到电子的振荡过程，要求  $\tau \approx T$ 。

在晶体中， $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ ， $a \approx 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，由此可估算出若要观察到振荡现象，需加的电场 $\varepsilon \sim 2 \times 10^5 \text{ V/cm}$ 。对金属，无法实现高电场；对绝缘体，将被击穿。

注：一般情况  $T \sim 10^{-5} \text{ s}$ ， $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ ，一个周期内碰撞  $10^9$ 次！？

振荡现象完全被“冲掉”了

- Why this oscillation is not observed in ordinary crystals?

To complete a cycle ( $a$  is the lattice constant),

$$eET/\hbar = 2\pi/a \rightarrow T = \hbar/eEa$$

For  $E=10^4$  V/cm, and  $a=1$  Å,  $T=10^{-10}$  sec

But electron collisions take only about  $10^{-14}$  sec.

∴ the Bloch electron cannot get to the zone boundary

To observe it, need

- stronger E field → but only up to about  $10^6$  V/cm
- larger  $a$  → use superlattice (eg.  $a = 100$  Å)
- reduce collision time → use high quality sample

(Mendez et al, PRL, 1988)

prl 60, 2426 (1988)

- Bloch oscillator generates THz microwave:

frequency  $\approx 10^{12-13}$ , wave length  $\lambda \approx 0.01$  mm - 0.1mm

(Waschke et al, PRL, 1993)

2. 在准经典运动中，当电子运动到能隙时，将全部被反射回来。而根据量子力学，电子遇到势垒时，将有一定几率穿透势垒，而部分被反射回来。电子穿透势垒的几率与势垒的高度（即能隙 $E_g$ ）和势垒的长度（由外场决定）有关。

$$\text{穿透几率} \propto \varepsilon \exp \left[ -\frac{\pi^2}{\hbar} \left( \frac{E_g}{e\varepsilon} \right) \sqrt{2mE_g} \right]$$

对于绝缘体或导电很差的半导体，材料内部会建立很强的电场，导致电子的带间隧穿，称为电击穿，或者齐纳击穿

相应于电场产生电击穿，强磁场也会造成磁击穿。

## 齐纳击穿由来

---

C·M·齐纳(1905-1993), 美国物理学家。他研究了半导体PN结的击穿理论, 发现除雪崩击穿(电子碰撞引起的击穿, 硅器件击穿电压6V以上的比较明显)还有一种场效应引起的击穿, 称为齐纳击穿(硅器件击穿电压6V以下的比较明显), 当环境温度增高使空间电荷区变窄, 碰撞机会减少, 雪崩效应减弱, 击穿电压就要增高, 但由电压引起的场效应增强, 所以由齐纳效应引起的击穿电压就会减小, 6V左右时两种效应互补, 温度对击穿电压的影响最弱, 故这时稳压管稳压值的温度系数最小。因为最初是由齐纳提出来解释电介质击穿现象的, 故叫齐纳击穿

## 齐纳击穿简介

---

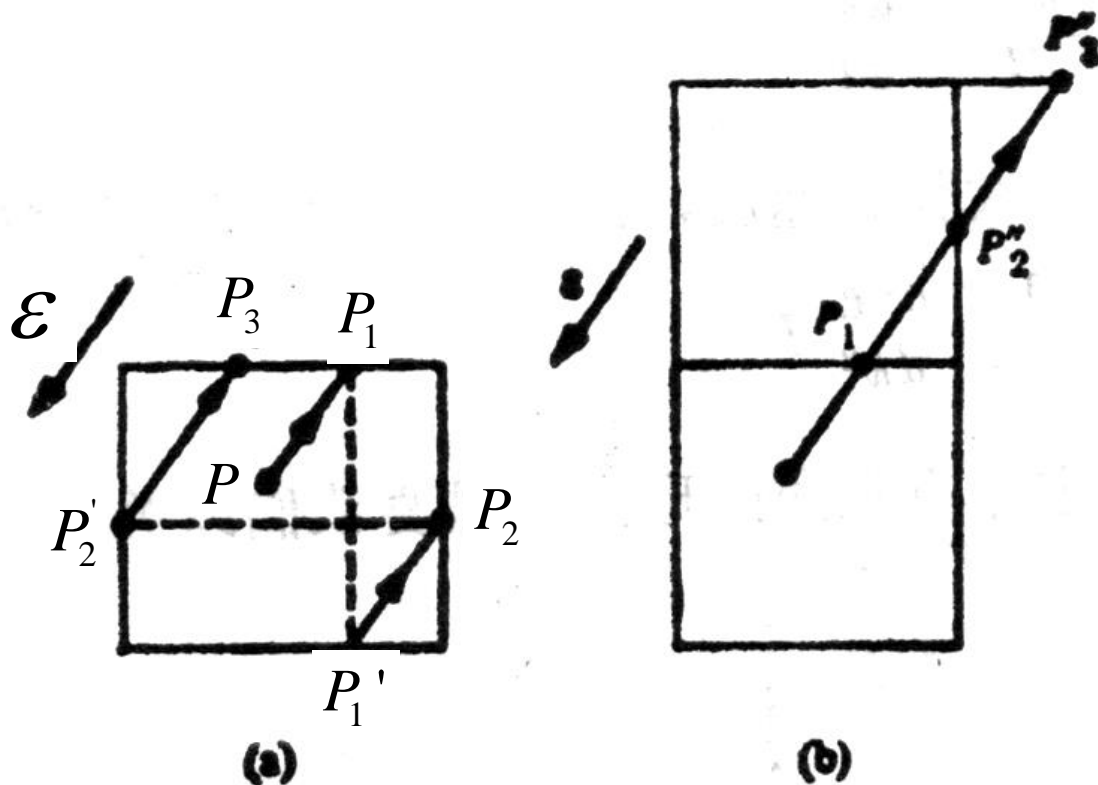
当反向电压增大到一定程度时, 空间电荷区内就会建立一个很强的电场。这个强电场能把价电子从共价键中拉出来, 从而在空间电荷区产生大量电子-空穴对。这些电子-空穴对产生后, 空穴被强电场驱到P区, 电子被强电场驱到N区, 使反向电流猛增。这种由于强电场的作用, 直接产生大量电子-空穴对而使反向电流剧增的现象叫做齐纳击穿。

齐纳击穿常发生在掺杂浓度比较高的PN结中, 因为此时空间电荷层比较薄, 一个很小的反向电压就可以在空间电荷区内建立一个很强的电场(通常高达 $10^8$  V/cm)。

当温度升高时, 电子热运动加剧, 较小的反向电压就能把价电子从共价键中拉出来, 所以温度上升时, 击穿电压下降, 也就是说, 齐纳击穿具有负的温度系数。

在有静电场存在时，**Bloch**电子在真实空间做周期性振荡，完全与自由电子不同，这是晶体中电子动力学的一个惊人结论。下面给出二维情况的简要描述：

开始电子处于任意点  $P$ ，受电场作用，它在  $k$  空间做直线运动，遇到边界回到对称点，重新开始。



在有电场存在时，二维晶格中电子的运动。

(a) 按简约区作图。(b) 按广延区作图。

## 关于振荡的补充说明：

假设在  $k = 0$  附近的电子，在电场  $E$  作用下被加速，波矢  $k$  就会如自由电子论中一样按  $\Delta k = -\frac{eE\tau}{\hbar}$  一样变化。当  $k$  值达到拐点、电子平均速度到达最大值以后，会出现负的微分电导。但由于电子会受到声子和晶格缺陷等散射，平均自由运动时间  $\tau$  并不大 ( $\sim 10^{-14}\text{s}$ )；考虑到晶体在高电场下可能会被击穿的因素，电场  $E$  数值也不会很大等因素，**一般情况下晶体中的电子是很难被加速到高速甚至负阻区的**。不过近来超晶格材料的出现，使晶格周期提高几十甚至几百倍，布里渊区尺寸大为减小，就容易将电子加速到高速区，甚至负阻区，可望制成高速电子器件。

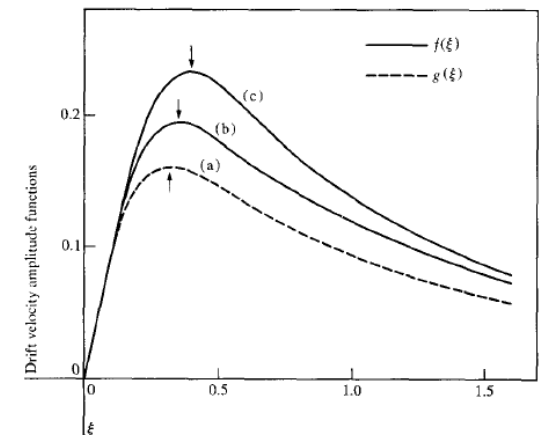


Leo Esaki  
1973 Nobel Prize

L. Esaki  
R. Tsu

## Superlattice and Negative Differential Conductivity in Semiconductors\*

**Abstract:** We consider a one-dimensional periodic potential, or "superlattice," in monocrystalline semiconductors formed by a periodic variation of alloy composition or of impurity density introduced during epitaxial growth. If the period of a superlattice, of the order of  $100\text{\AA}$ , is shorter than the electron mean free path, a series of narrow allowed and forbidden bands is expected due to the subdivision of the Brillouin zone into a series of minizones. If the scattering time of electrons meets a threshold condition, the combined effect of the narrow energy band and the narrow wave-vector zone makes it possible for electrons to be excited with moderate electric fields to an energy and momentum beyond an inflection point in the  $E$ - $k$  relation; this results in a negative differential conductance in the direction of the superlattice. The study of superlattices and observations of quantum mechanical effects on a new physical scale may provide a valuable area of investigation in the field of semiconductors.



IBM Journal of Research and Development 14, 61 (1970)