马尔可夫决策过程

吉建民

USTC
jianmin@ustc.edu.cn

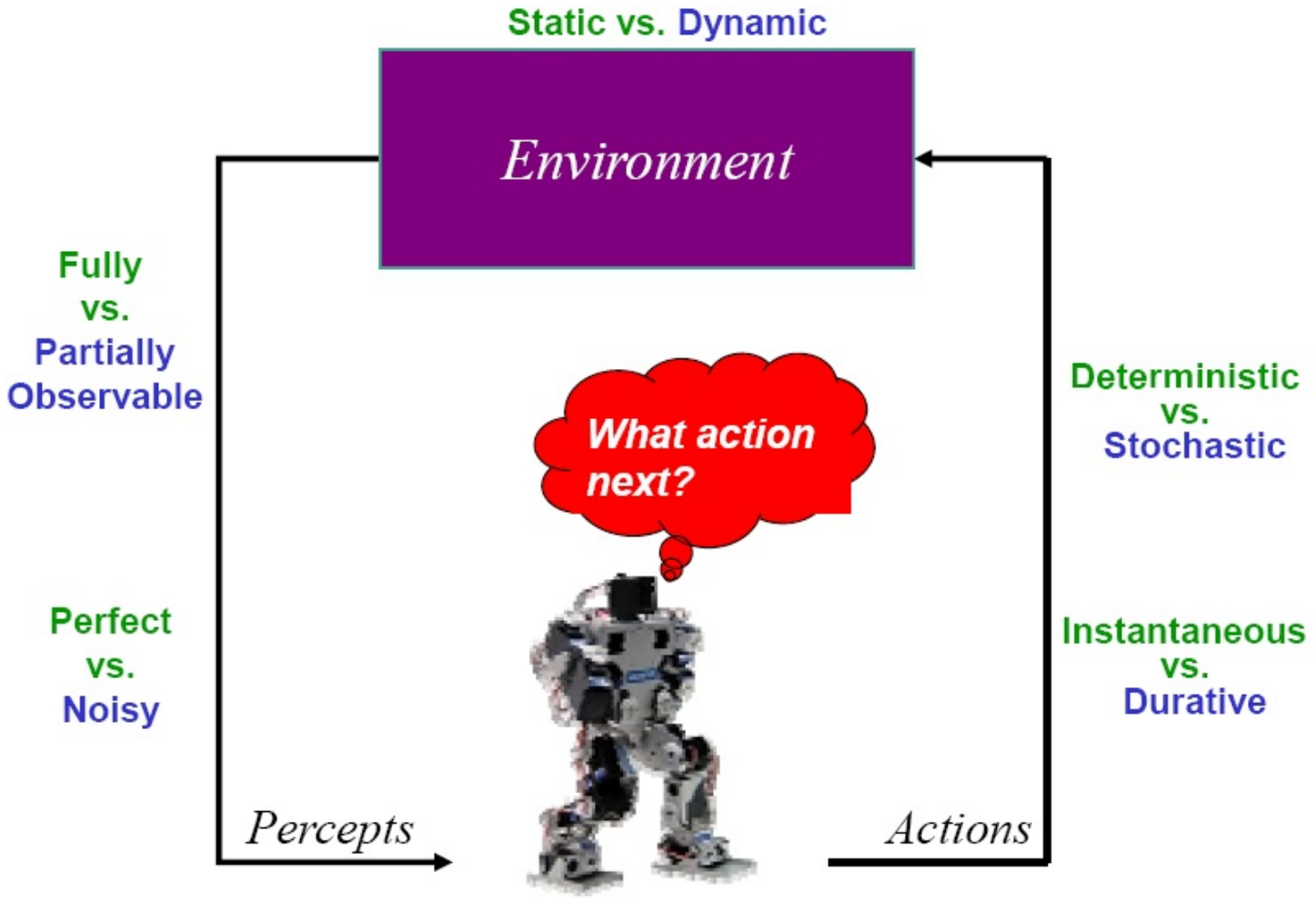
2021 年 5 月 20 日

Used Materials

Disclaimer: 本课件大量采用了 Rich Sutton's RL class, David Silver's Deep RL tutorial 和其他网络课程课件，也采用了 GitHub 中开源代码，以及部分网络博客内容

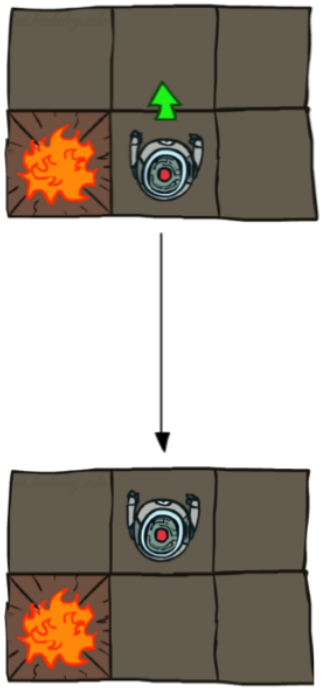
Table of Contents

智能体决策

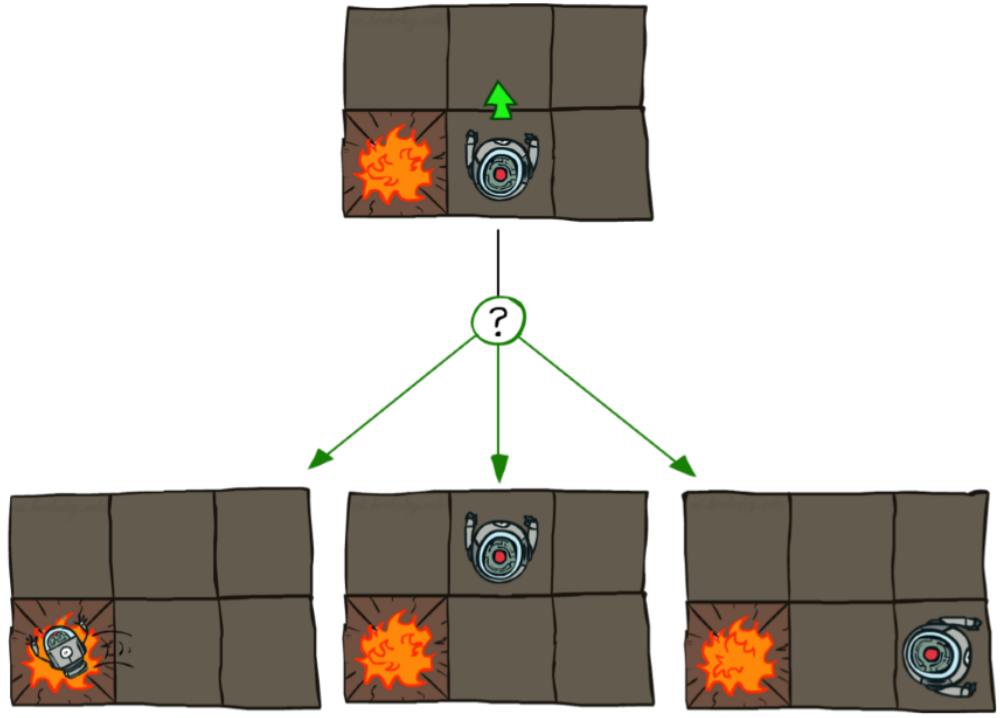

Static vs. Dynamic
Environment
Fully
vs.
Partially
Observable
What action
next?
Deterministic
vs.
Stochastic
Perfect
vs.
Noisy
Instantaneous
vs.
Durative
Percepts
Actions

环境的不确定性

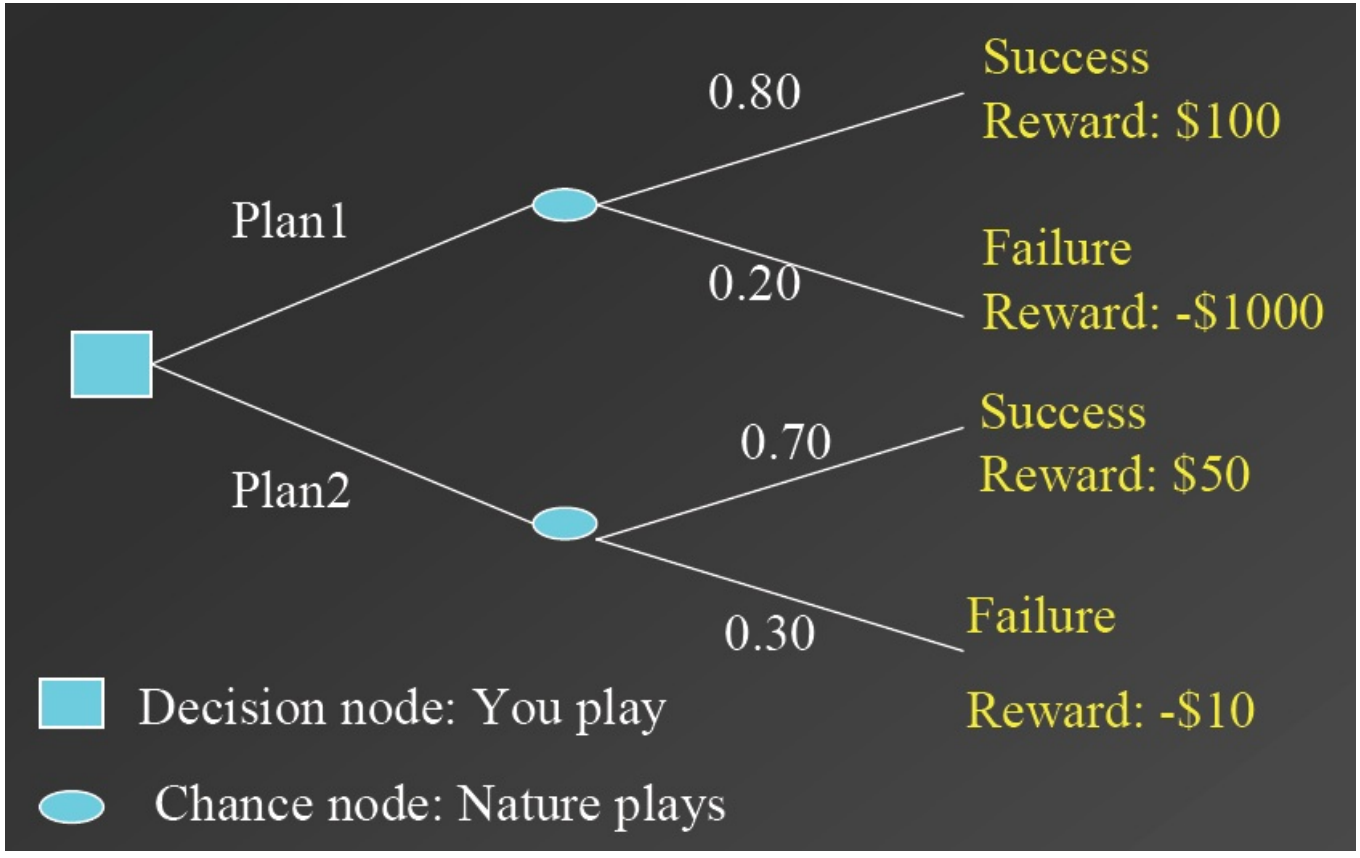
确定性的环境



不确定性的环境



决策树



- Plan1 的期望效用：
  $EU(Plan1) = 100 \times 0.80 - 1000 \times 0.20 = -120$
- Plan2 的期望效用：$EU(Plan2) = 50 \times 0.70 - 10 \times 0.30 = 32$
- 最大期望效用（MEU）：选择行动 A_i 使得期望效用最大

马尔可夫性质

- 当一个随机过程在给定现在状态及所有过去状态情况下，其未来状态的条件概率分布仅依赖于当前状态
- 在给定现在状态时，随机过程与过去状态（历史）是条件独立的

定义

A state s_t is *Markov* if and only if

$$P[s_{t+1} \mid s_t] = P[s_{t+1} \mid s_1, \ldots, s_t]$$

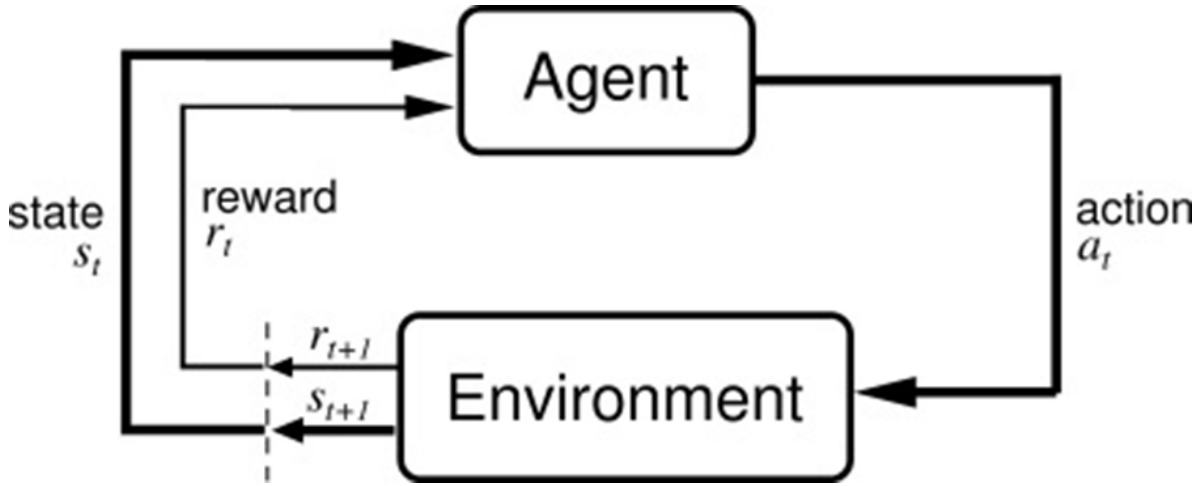
- 状态包含了关于历史的所有信息
- 一旦知道当前状态，过去的历史可以完全抛弃
- 当前状态足够用来预计未来
- 这一性质能够简化问题的表示和求解，但提高了对信息全局性和充分性的要求

MDPs 概述

- 马尔可夫决策过程（Markov Decision Processes, MDPs）
- 人工智能、决策分析、运筹学、控制论和经济学共同关注
- 大量实际问题可以用 MDPs 表达、研究
- MDPs 借助于概率作为刻画不确定性的基本手段
- MDPs 类型：
  - 完全可观察的 MDPs (Full Observable MDPs): FOMDPs
  - 完全不可观察的 MDPs: NOMDPs
  - 部分可观察的 MDPs (Partial Observable MDPs): POMDPs

Table of Contents

MDP 基本框架



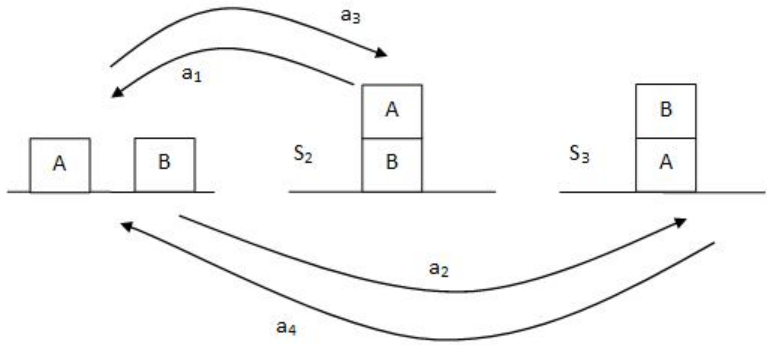
- MDPs 立足于 agent 与环境的直接交互
- 只考虑离散时间，假设 agent 与环境的交互过程可分解为一系列“阶段”，每个阶段由“感知–决策–行动”构成
- 已知环境模型

MDP 模型

- MDP 模型是一个四元组 (S, A, T, R)，其中
  - S 是一个有限集，其中每个元素 $s \in S$ 代表一个状态
  - A 是一个有限集，其中每个元素 $a \in A$ 代表一个行动
  - $T: S \times A \to \Pi(S)$ 称为状态转移函数，将每一对“状态　行动”映射为 S 上的一个概率分布，用记号 $T(s, a, s')$ 表示在状态 s 上执行 a 达到 s' 的概率
  - $R: S \times A \to \mathcal{R}$ 称为回报（reword）函数，$R(s, a)$ 表示在 s 上执行行动 a 所得到的即时回报（直接回报）
- 如何规定一个 MDP 模型是一个具体应用问题，不是 MDPs 本身研究的内容
- MDPs 研究的主题是，给定一个 MDP 模型，如何求最优策略，即期望回报最大的策略

积木世界

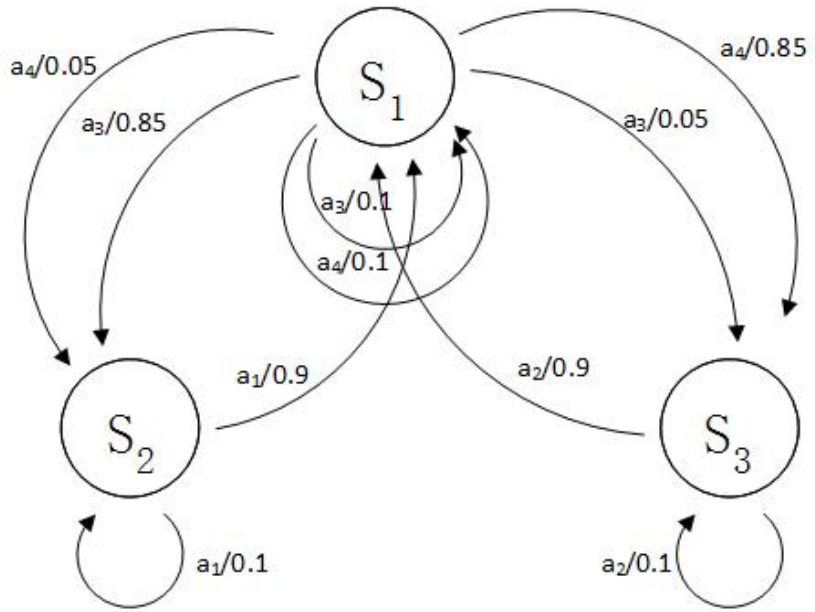
- 积木世界只有两块积木 A 和 B
- $S = \{s_1, s_2, s_3\}$
- $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
  - $a_1 = move(A, B, F)$
  - $a_2 = move(B, A, F)$
  - $a_3 = move(A, F, B)$
  - $a_4 = move(B, F, A)$



积木世界 (con't)

- 规定 T

	a_1			a_2			a_3			a_4		
	s_1	s_2	s_3	s_1	s_2	s_3	s_1	s_2	s_3	s_1	s_2	s_3
s_1	1	0	0	1	0	0	0.1	0.85	0.05	0.1	0.05	0.85
s_2	0.9	0.1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
s_3	0	0	1	0.9	0	0.1	0	0	1	0	0	1



积木世界 (con't)

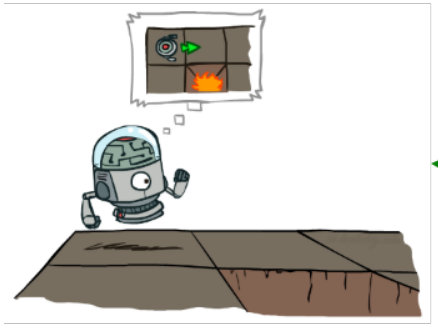
- 规定 R: "达到一个状态获得的回报" 和 "执行一个行动的代价" 的综合
- 假设 s_2 是 "最有益的" 状态，s_3 是 "最有害的"，s_1 是中性的，每个行动都有代价，而且 "放上去" 比 "拿下来" 代价大，R 的值仅仅反映 "档次"

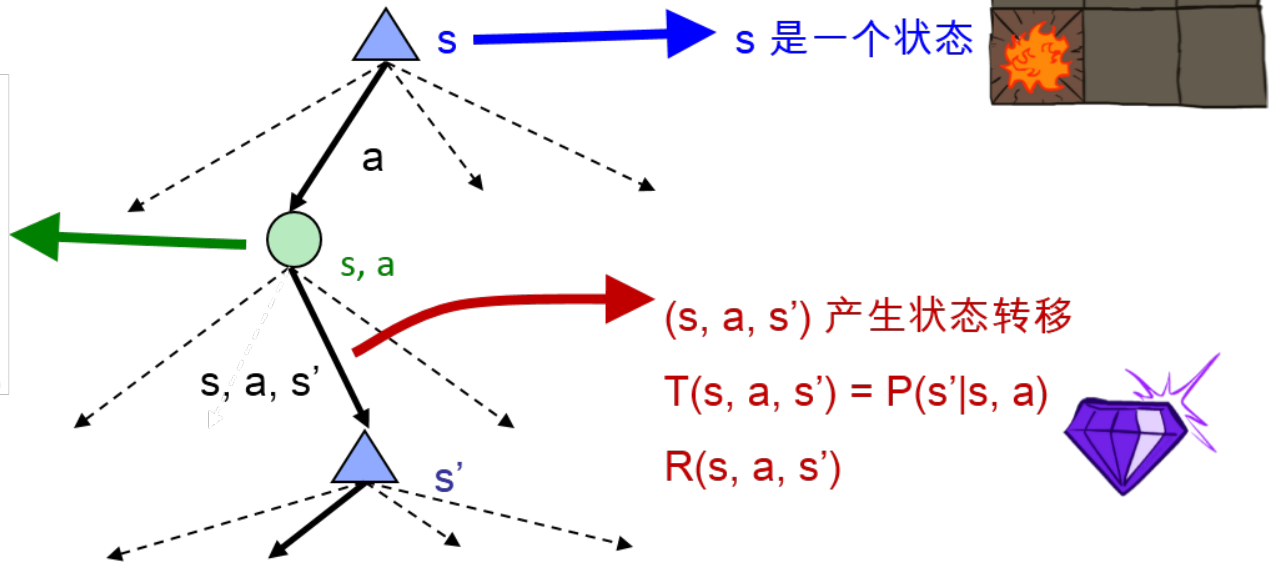
	a_1	a_2	a_3	a_4
s_1	-1	-1	1	-2
s_2	-2	-1	-1	-1
s_3	-1	0	-1	-1

最优策略（Optional Policy）

- “长期”分两类：
  - 无限阶段问题（例如，网络维护）
  - 有限阶段问题
- 策略分为“平稳的（stating）”与“非平稳的（non-stating）”
  - 平稳策略可表示为 $\pi: S \to A$
  - 非平稳策略 $\pi = \{\pi_t, \ldots, \pi_1\}$，每个 π_i 是一个 S 到 A 的映射。最后一次决策用 π_1，产生的行动是 $\pi_1(s)$，第一次用 π_t

MDP 的求解





问题：给定一个MDP模型，如何求解出最优策略？

值函数

- 任给策略 π，计算预期（长期）回报，用值函数 (value function) 度量预期回报
- 令 $V_{\pi,t}(s)$ 表示从 s 开始，执行策略 π 共 t 个阶段所获得的预期累计回报
  - 当 $t = 1$ 时

$$V_{\pi,1}(s) = R(s, \pi_1(s))$$

  - 当 $t = 2$ 时

$$V_{\pi,2}(s) = R(s, \pi_2(s)) + \Sigma_{s'} T(s, \pi_2(s), s') \cdot R(s', \pi_1(s'))$$

  - 多步情况

$$V_{\pi,t}(s) = R(s, \pi_t(s)) + \Sigma_{s'} T(s, \pi_t(s), s') \cdot V_{\pi,t-1}(s')$$

值函数（con't）

- 有时采用“折扣准则”：折扣因子 γ (< 1)（在无限阶段中更有必要用，保证收敛）

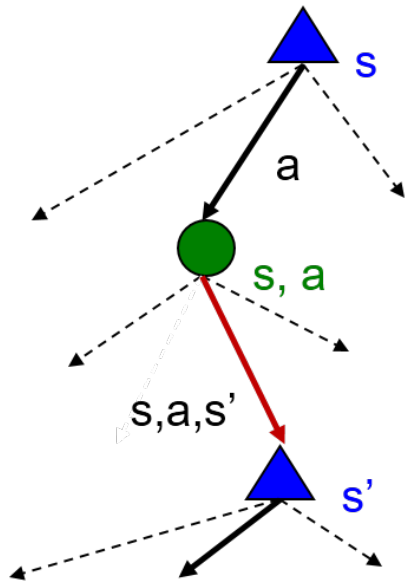
$$V_{\pi,t}(s) = R(s, \pi_t(s)) + \gamma \Sigma_{s'} T(s, \pi_t(s), s') \cdot V_{\pi,t-1}(s')$$

- 给定一个 MDP 模型和一个策略 π，由此可得 $V_{\pi,t}$，所有 π 中，$V_{\pi,t}$ 最大的 π 称为最优策略，记为 π^*，对应的值函数记为 V_t^*，反过来，如果知道了 V_t^*，也可得到 π^*

$$\pi_t^*(s) = argmax_a \left[R(s, a) + \gamma \Sigma_{s'} T(s, a, s') V_{t-1}^*(s') \right]$$

最优依据

- 定义1：状态s的最优值函数V*(s)为，以s为初始状态，执行最优策略获得的期望收益值
- 定义2：元组(s, a)的最优Q函数Q*(s, a)为，以s为初始状态，执行动作a后，按最优策略执行获得的期望收益值
- 定义3：最优策略π*为执行过程中最大化期望收益值的策略



s 是一状态

(s, a) 是一Q元组

(s, a, s') 是一状态转移

贝尔曼等式

- 利用贝尔曼等式，可以用递归的方式来计算状态的期望收益值：

Richard Bellman
(1920 - 1984)

$$V^*(s) = \max_a Q^*(s,a)$$

$$Q^*(s,a) = \sum_{s'} T(s,a,s') \left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s') \right]$$

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} T(s,a,s') \left[R(s,a,s') + \gamma V^*(s') \right]$$

最优值函数的计算

值迭代算法

- 值迭代（value iteration）算法求 V_t^* 序列，借助于辅助 $Q_t^a(s)$，其直观含义为：在 s 执行 a，然后执行 $t-1$ 步的最优策略所产生的预期回报

对所有 $s \in S$, $V_0(s) := 0$; $t := 0$;

loop

$t := t + 1$;

loop 对所有 $s \in S$

loop 对所有 $a \in A$

$Q_t^a(s) := R(s,a) + \gamma \Sigma_{s'} T(s,a,s') V_{t-1}(s')$

end loop

$V_t(s) := max_a\, Q_t^a(s)$ (Bellman equation)

end loop

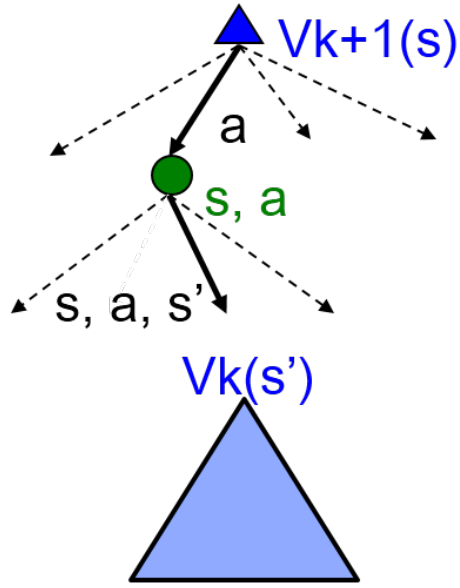
until $|V_t(s) - V_{t-1}(s)| < \epsilon$ 对所有 $s \in S$ 成立

值迭代算法 (con't)

1. 对所有状态s，初始化 $V_0(s) = 0$
2. 给定一组$V_k(s)$的值，对所有的状态进行下列迭代更新：

$$V_{k+1}(s) \leftarrow \max_a \sum_{s'} T(s,a,s') \left[R(s,a,s') + \gamma V_k(s') \right]$$

3. 不断重复步骤2，直到收敛



本质上是一种动态规划的方法

值迭代算法的一些结论

- 每一步值迭代的计算复杂度是 $O(|A||S|^2)$
- 根据不动点理论，算法将最终收敛到最优值
  - 收敛到最优值所需的迭代次数为：

    poly(|S|, |A|, 1/(1-γ))

策略迭代算法

- 策略迭代算法
  1. 先给定初始策略 π，求解线性方程，计算出 π 相应的值函数 V

$$V(s) = R(s, \pi(s)) + \gamma \sum_{s'} T(s, a, s') V(s').$$

  2. 基于计算出的值函数 V，按下式更新策略

$$\pi(s) \leftarrow argmax_a \left\{ R(s, a) + \gamma \sum_{s'} T(s, a, s') V(s') \right\}$$

  3. 不断重复步骤 1, 2，直到收敛
- 策略迭代算法最终收敛到最优值
  - 收敛到最优值所需的迭代不大于 $|A|^{|S|}$（确定性策略的总数目）

讨论

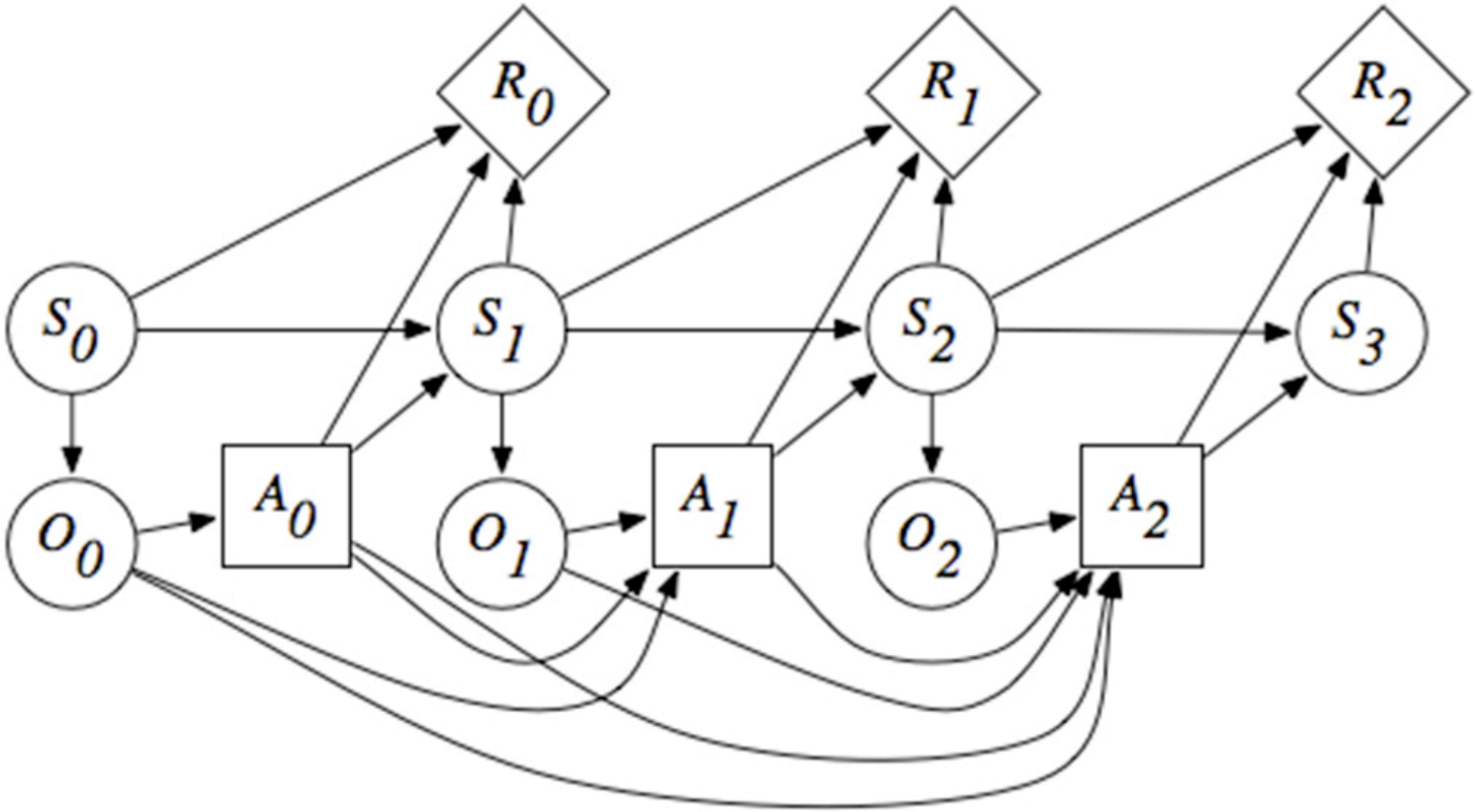
- 一个具体的 MDP 模型刻画了一个具体实际问题，即提供了该问题的一个数学模型
- MDPs 问题归结为最优策略的求解问题，三个要点：
  - 将 agents 的行动归结为策略的执行
  - 将 agents 的决策问题归结为求最优策略
  - 以“效用最大化”作为“最优”的基本标准
- 经典规划与 MDPs 的联系（异同）
  - 行动效果确定 vs. 不确定
  - 经典规划实际上假定环境是完全不可观察
  - 经典规划是以达到目标状态为“成功”标准，没有其他区别；而 MDPs 以效用最大化为“成功”标准，它的框架允许精华的，也可以通过优化途径求 π^*
- 一个经典规划问题可以描述为一个特殊的 NOMDP 问题，每个目标状态 s 上，定义一个“驻留行动”使得 $T(s, a, s) = 1$

Table of Contents

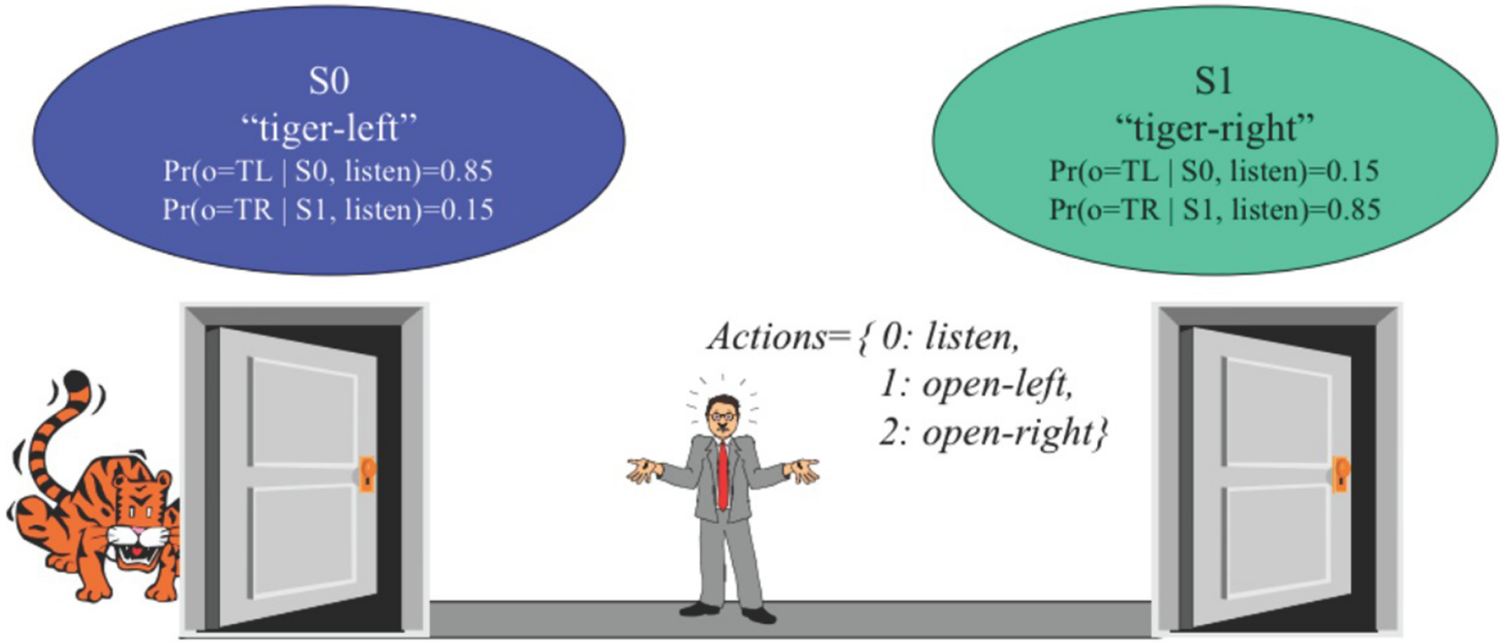
POMDPs 基本定义

- MDPs 刻画了行动的不确定性：事先不知道，事后知道；观察是确定的，知道行动的效果
- 一般情况下，行动和观察都是不确定的
- 一个 POMDP 模型是一个六元组 (S, A, T, R, Ω, O)，其中 S, A, T, R 的定义与 MDP 模型相同；Ω 是一个有限集，其中元素称为“观察”；$O: S \times A \to \Pi(\Omega)$ 称为观察函数，有时记为 $O(s', a, o)$，a 代表执行的行动，s' 是 a 达到的结果状态，o 在上述条件下出现的观察，$O(s', a, o)$ 是执行 a 达到 s' 观察到 o 的概率 $P_r(o \mid s', a)$
- 在 POMDP 问题中，“环境”被看成一个“黑箱”，一个状态是黑箱某个时期的内部情况，观察是这个黑箱的“输出”

POMDPs



老虎问题



Reward Function

- *Penalty for wrong opening: -100*
- *Reward for correct opening: +10*
- *Cost for listening action: -1*

Observations

- *to hear the tiger on the left (TL)*
- *to hear the tiger on the right(TR)*

信念状态

- 令 $B = \Pi(S)$ 为 S 上所有状态分布的集合，$b \in B$ 称为一个“信念状态”（belief state）
- 假设 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$，则 $\forall i:\ 0 \leq b(s_i) \leq 1,\ \Sigma_{i=1}^{n} b(s_i) = 1$
  $b = (b(s_1), \ldots, b(s_n))$，$b(s_i)$ 表示环境处于 s_i 状态的概率
- 当 $|S|$ 有穷时，$\pi(S)$ 是无穷的

信念状态 (con't)

- 给定一个 POMDP 模型，一个 $b \in B$，一个 $a \in A$ 和一个 $o \in \Omega$，可以计算（估计）在 b 下执行 a 得到 o 时，环境处于状态 $s' \in S$ 的概率：

$$
\begin{aligned}
b'(s') = P_r(s' \mid o, a, b) &= \frac{P_r(o \mid s', a, b)\, P_r(s' \mid a, b)}{P_r(o \mid a, b)} \\
&= \frac{P_r(o \mid s', a)\, \Sigma_s P_r(s' \mid a, b, s) P_r(s \mid a, b)}{P_r(o \mid a, b)} \\
&= \frac{O(s', a, o)\, \Sigma_s T(s, a, s') b(s)}{P_r(o \mid a, b)}
\end{aligned}
$$

b' 是 o, a, b 的函数，记为 $b' = SE(b, a, o)$，称为“状态估计函数”

信念状态 (con't)

- 对 $b'(s')$ 中分母推导：

$$\begin{aligned} P_r(o \mid a, b) &= \Sigma_{s'} O(s', a, o) P_r(s' \mid a, b) \\ &= \Sigma_{s'} O(s', a, o) \Sigma_s T(s, a, s') b(s) \end{aligned}$$

  是给定 a, b 下出现 o 的“平均概率”
- $b'(s')$ 中分子是 a, b, s' 下出现 o 的概率
- $P_r(o \mid a, b)$ 是保证 $\Sigma_{s'} b'(s') = 1$ 的“正规化因子”
- $\Sigma_s T(s, a, s') b(s) = P_r(s' \mid a, b)$ 是不考虑观察而得到的下一状态为 s' 的概率，而 $b'(s')$ 是考虑了观察 $O(s', a, o)$ 所得出的下一状态的概率。两者关系：

$$b'(s') = \frac{O(s', a, o)}{P_r(o \mid a, b)} \cdot P_r(s' \mid a, b)$$

- 若 $O(s', a, o) > P_r(o \mid a, b)$，则 $b'(s') > P_r(s' \mid a, b)$。在 s' 下出现 o 的概率，高于出现 o 的平均概率

信念状态 (con't)

- b' 包含了观察和模型的全部信息：
  1. 上一时刻的全部信息 b;
  2. 模型信息 T;
  3. 观察信息 $O(s', a, o)$, $s' \in S$
- 因此，在 POMDP 问题中，B 的作用相当于 MDP 中的 S

积木世界续

- 考虑积木世界的 POMDP 模型，其中 S, A, T, R 与前例相同，$\Omega = \{o_1, o_2\}$，假定 agent 的观察能力与行动无关，而且不能区分 s_2 与 s_3
- 定义 O: $\forall a$

$$O(s_1, a, o_1) = 1,\ O(s_2, a, o_1) = 0,\ O(s_3, a, o_1) = 0$$
$$O(s_1, a, o_2) = 0,\ O(s_2, a, o_2) = 1,\ O(s_3, a, o_2) = 1$$

- 设初始信念状态 $b = (0.9, 0, 0.1)$，执行 $a_3 = move(A, F, B)$，观察为 o_2

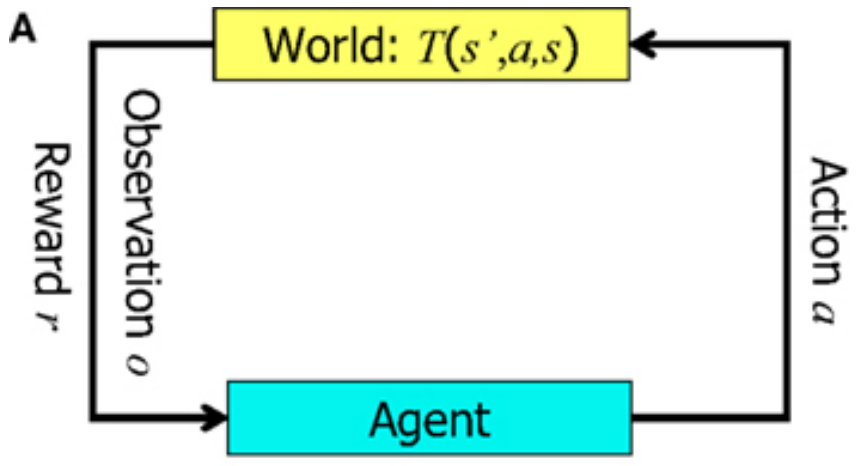
积木世界续 (con't)

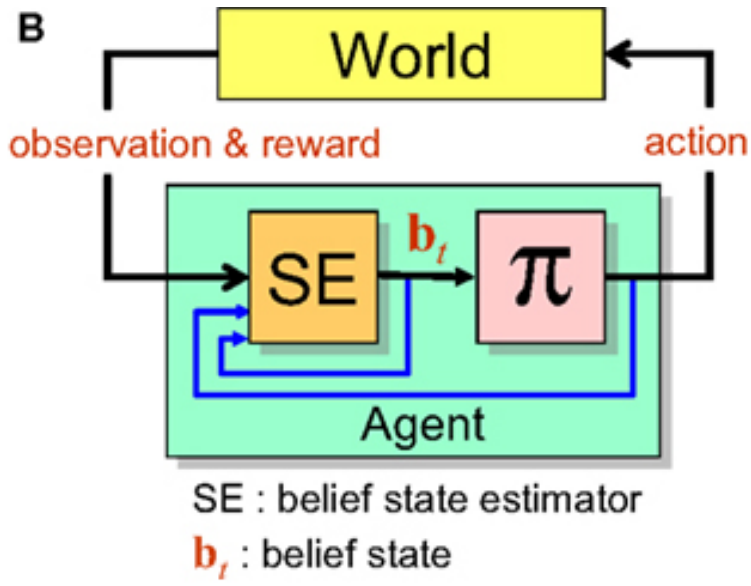
计算下一时刻信念状态：

$$
\begin{aligned}
P_r(o_2 \mid a_3, b) &= \Sigma_{s'} O(s', a_3, o_2) P_r(s' \mid a_3, b) \\
&= P_r(s_2 \mid a_3, b) + P_r(s_3 \mid a_3, b) \\
&= \Sigma_s T(s, a_3, s_2) b(s) + \Sigma_s T(s, a_3, s_3) b(s) \\
&= (0.9 \times 0.85 + 0.1 \times 0) + (0.9 \times 0.05 + 1 \times 0.1) \\
&= 0.765 + 0.145 = 0.81
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b'(s_1) &= 0 \\
b'(s_2) &= \frac{0.765}{0.81} = 0.841 \\
b'(s_3) &= \frac{0.145}{0.81} = 0.159
\end{aligned}
$$

MDP vs. POMDP


A
World: $T(s',a,s)$
Observation o
Reward r
Action a
Agent


B
World
observation & reward
action
SE
b_t
π
Agent
SE : belief state estimator
b_t : belief state

POMDP to MDP

- B 在 POMDPs 中相当于 MDPs 中 S 的作用，设法将一个 POMDP 问题转化为一个变形的 MDP 问题，使得相应的 MDP 模型为 (B, A, τ, ρ), $\tau: B \times A \to \Pi(B)$, $\rho: B \times A \to \mathcal{R}$

$$\tau(b, a, b') =_{df} P_r(b' \mid b, a) = \Sigma_o P_r(b' \mid a, b, o) P_r(o \mid a, b)$$

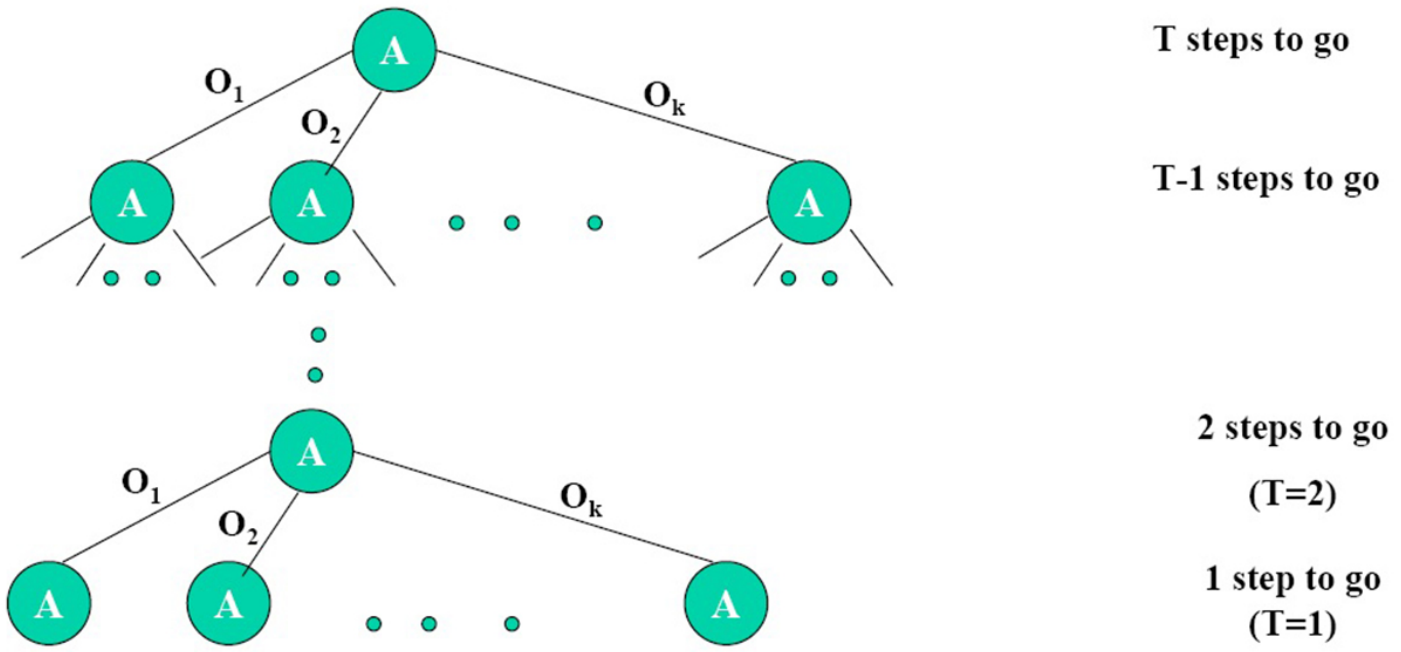
$$P_r(b' \mid a, b, o) = \begin{cases} 1, & \text{if } SE(b, a, o) = b' \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\rho(b, a) =_{df} \Sigma_s b(s) R(s, a)$$

- 由于 B 是无穷的，很难直接用值迭代算法求解

POMDPs 的策略表示

- POMDPs 的策略表示
  - $B \to A$（单步），多步的用 $\pi = (\pi_t, \ldots, \pi_1)$，但 B 是无穷的
  - 策略树：一个 t 层策略树（policy tree）共有 t 层节点，根节点上标记代表第一个行动，它的分枝代表执行该行动后得到的观察，...，是一种“有穷表示”



POMDPs 的值函数

- 采用策略树表示，令 p 是一个 t 步策略树，$V_p(s)$ 是在 s 上执行 p 的预期效用（扔采用折扣准则）：

$$
\begin{aligned}
V_p(s) &= R(s, a(p)) + \gamma \times \text{后 } t-1 \text{ 步的预期效用} \\
&= R(s, a(p)) + \gamma \Sigma_{s'} P_r(s' \mid s, a(p)) \Sigma_{o_i} P_r(o_i \mid s', a(p)) V_{o_i(P)}(s') \\
&= R(s, a(p)) + \gamma \Sigma_{s'} T(s, a(p), s') \Sigma_{o_i} O(s', a(p), o_i) V_{o_i(P)}(s')
\end{aligned}
$$

  $o_i(p)$ 是 p 的由分枝 o_i 引出的 $t-1$ 步子树

- 对任意 $b \in B$，定义 $V_p(b) = \Sigma_s b(s) V_p(s)$ 为在 b 上执行 p 的预期效用
- 令 P_t 为所有 t 步策略树的集合，P_t 有穷，b 上最优 t 阶段效用定义为

$$V_t(b) = max_{p \in P_t} V_p(b)$$

  使 $V_p(b) = V_t(b)$ 的 p 是 b 上的最佳策略

POMDPs 的值函数 (con't)

- 考虑在整个 B 上的最佳策略，一般要用策略树集来表示（因为，B 无穷、连续分布）
- $P \subseteq P_t$，满足 $\forall b \in B, \exists p \in P$ 使得 $V_p(b) \geq V_{p'}(b), \forall p' \in P_t$
- $|P_t|$ 是有穷的，

$$|P_t| = |A|^{\frac{|\Omega|^t - 1}{|\Omega| - 1}} = |A|^{|\Omega|^{t-1}}$$

- 若 $|A| = |\Omega| = t = 10$, $|P_t| \approx 10^{10^9}$，而深蓝才 10^{22}.

POMDPs 的值函数 (con't)

- S 是固定的、有穷的，B 是无穷的
- 设 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $b = \{b(s_1), \ldots, b(s_n)\}$, $0 \leq b(s_i) \leq 1$, $\Sigma_i b(s_i) = 1$，“变化的”不是 s，而是 b

$$V_p(b) = \Sigma_s b(s) V_p(s) = b(s_1) V_p(s_1) + \cdots + b(s_n) V_p(s_n)$$

$V_p(b)$ 是 $b(s_1), \ldots, b(s_n)$ 的一个线性函数。$V_p(s_i)$ 与 b 无关

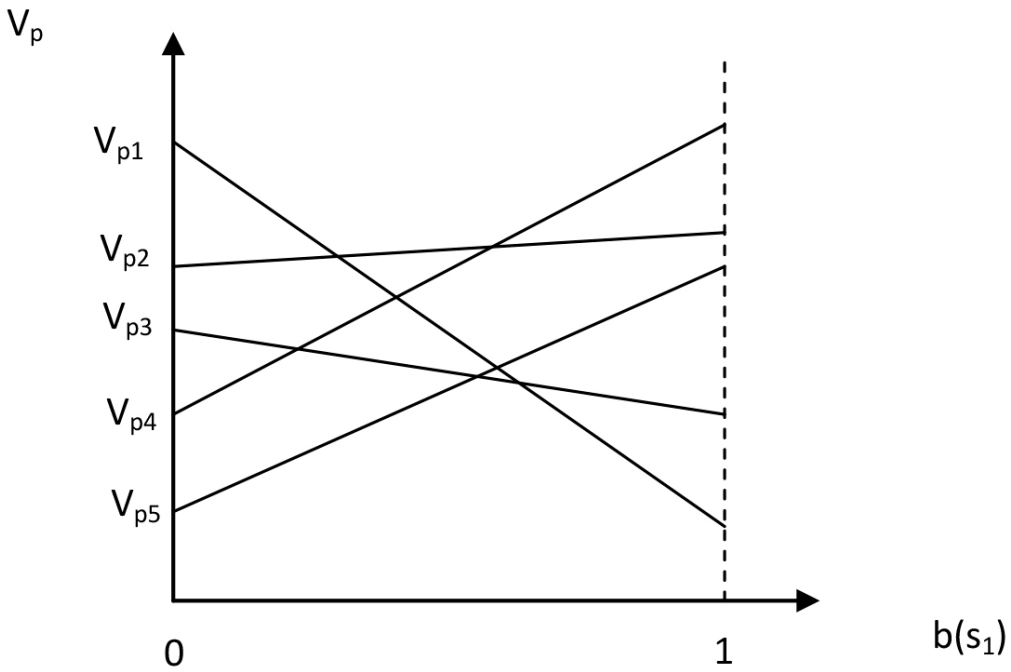
- 例：考虑 $|S| = 2$

$$\begin{aligned} V_p(b) &= b(s_1) V_p(s_1) + b(s_2) V_p(s_2) \\ &= V_p(s_1) b(s_1) + V_p(s_2)(1 - b(s_1)) \\ &= (V_p(s_1) - V_p(s_2)) b(s_1) + V_p(s_2) \end{aligned}$$

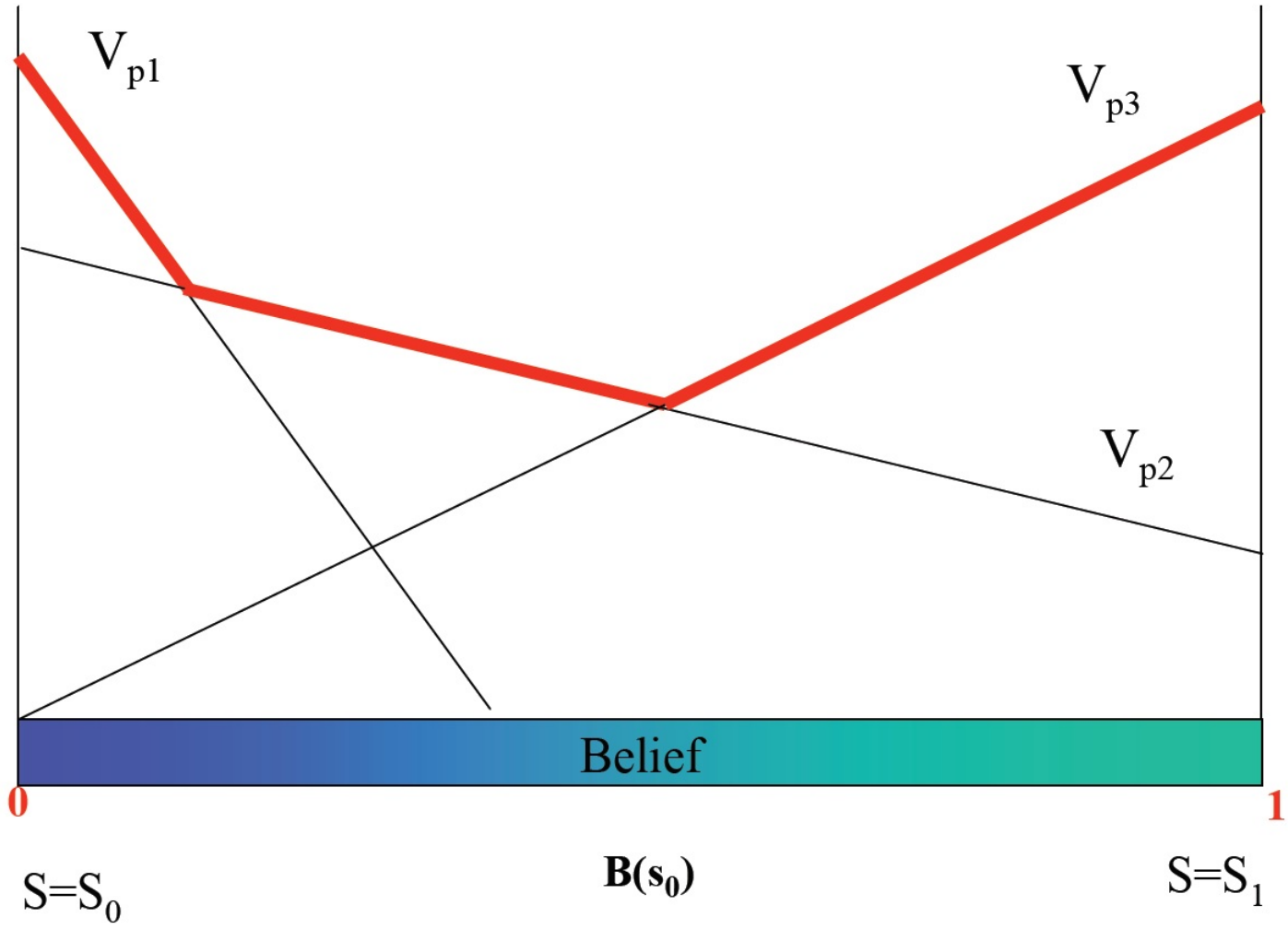
对不同的 p 有不同的 $V_p(s_1)$, $V_p(s_2)$，对应不同的线段

最大期望效用函数

- 由所有 $p \in P_t$ 产生的 $V_p(b)$ 的“上表面”可以得到 $V_t(b)$，整个 B 上最优策略集合，以及每个最优策略的“最优区域”，用线性规划可确定
- 对任意 $|S|$，情况类似，$V_t(b)$ 是一个“分块线性的凸函数”



最大期望效用函数 (con't)



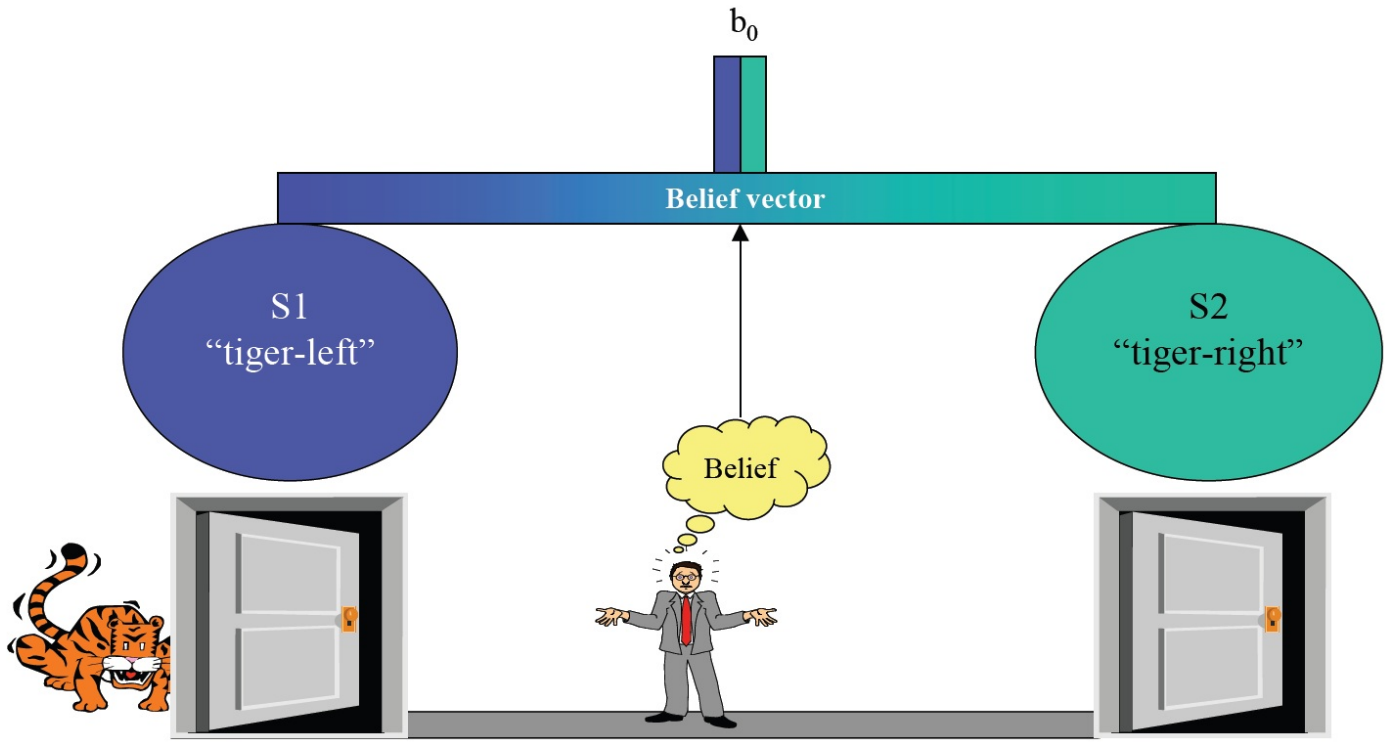
最大期望效用函数 (con't)

- 由 $V_p(b)$ 构成“上表面”的所有 p 组成的集合（代表 $V_t(b)$），称为最大期望效用函数/最佳值函数 $V_t(b)$ 的“最简表示”，记为 PV_t，每个 $p \in PV_t$ 是 B 的某个区域上的最优策略树，p 的“最优区域”是

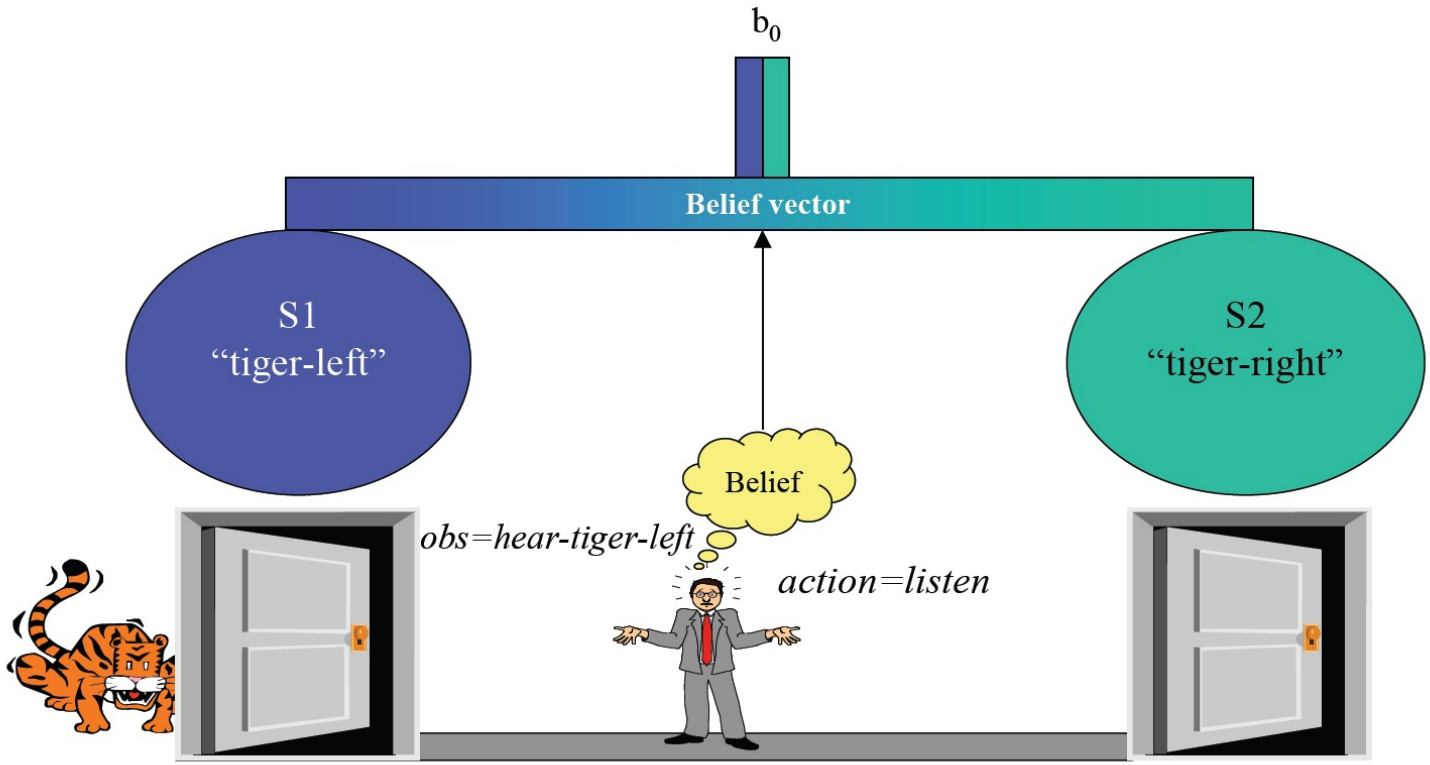
$$\{b \in B \mid \forall p' \in PV_t \setminus \{p\}, \Sigma_s b(s) V_p(s) > \Sigma_s b(s) V_{p'}(s)\}$$

  可以用线性规划方便求出
- PV_t 的任何真子集都无法表达 $V_t(b)$，称为不完备的，与“上表面”有共同点的所有 $p \in P_t$ 的集合记为 P^+V_t，称为“次简表示”
  - $PV_t \subseteq P^+V_t$;
  - $\forall p \in P^+V_t, \exists b \in B, \forall p' \in P_t$: $V_p(b) \geq V_{p'}(b)$;
  - 使用 PV_t/P^+V_t 的动机是，通常它们远远小于 P_t

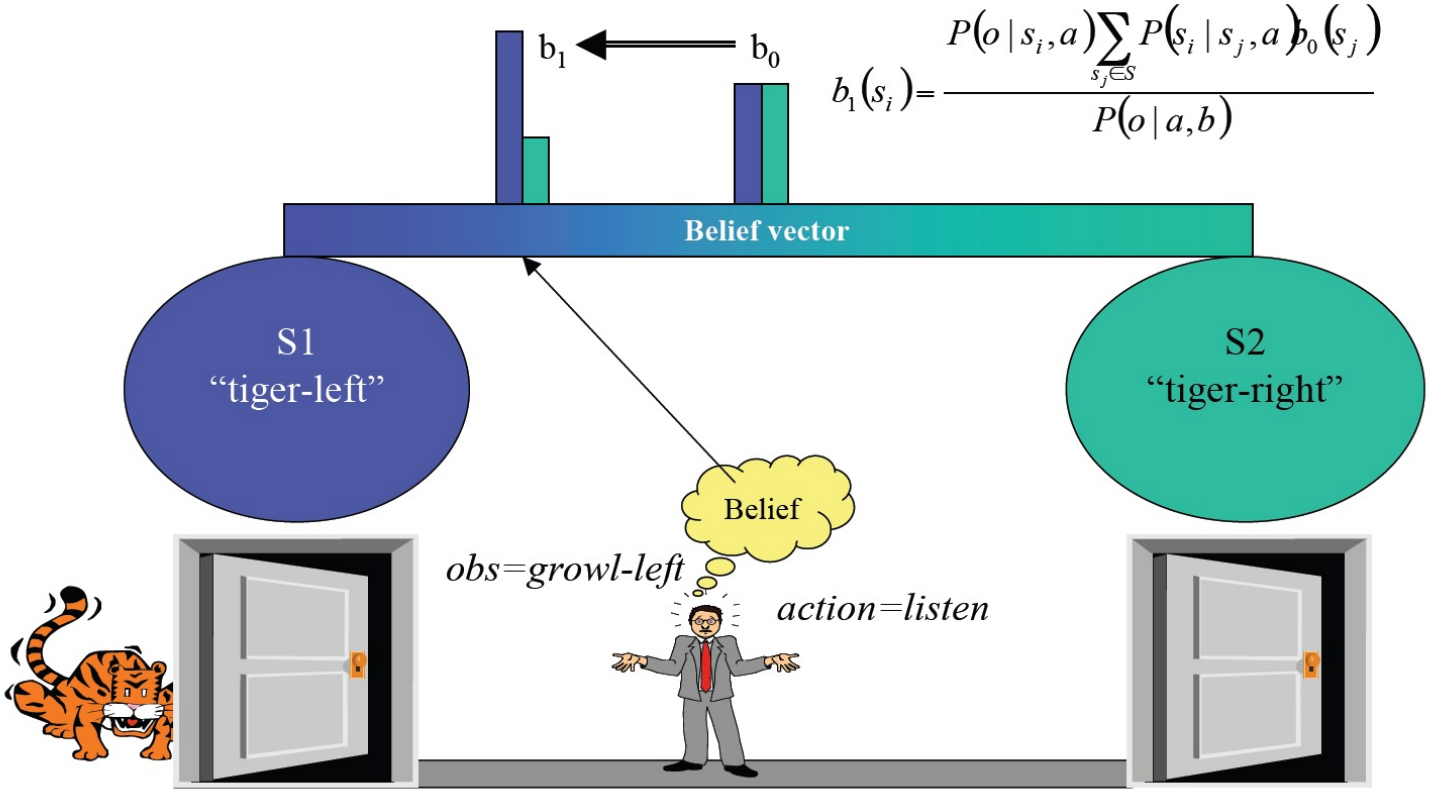
老虎问题 (con't)



老虎问题 (con't)

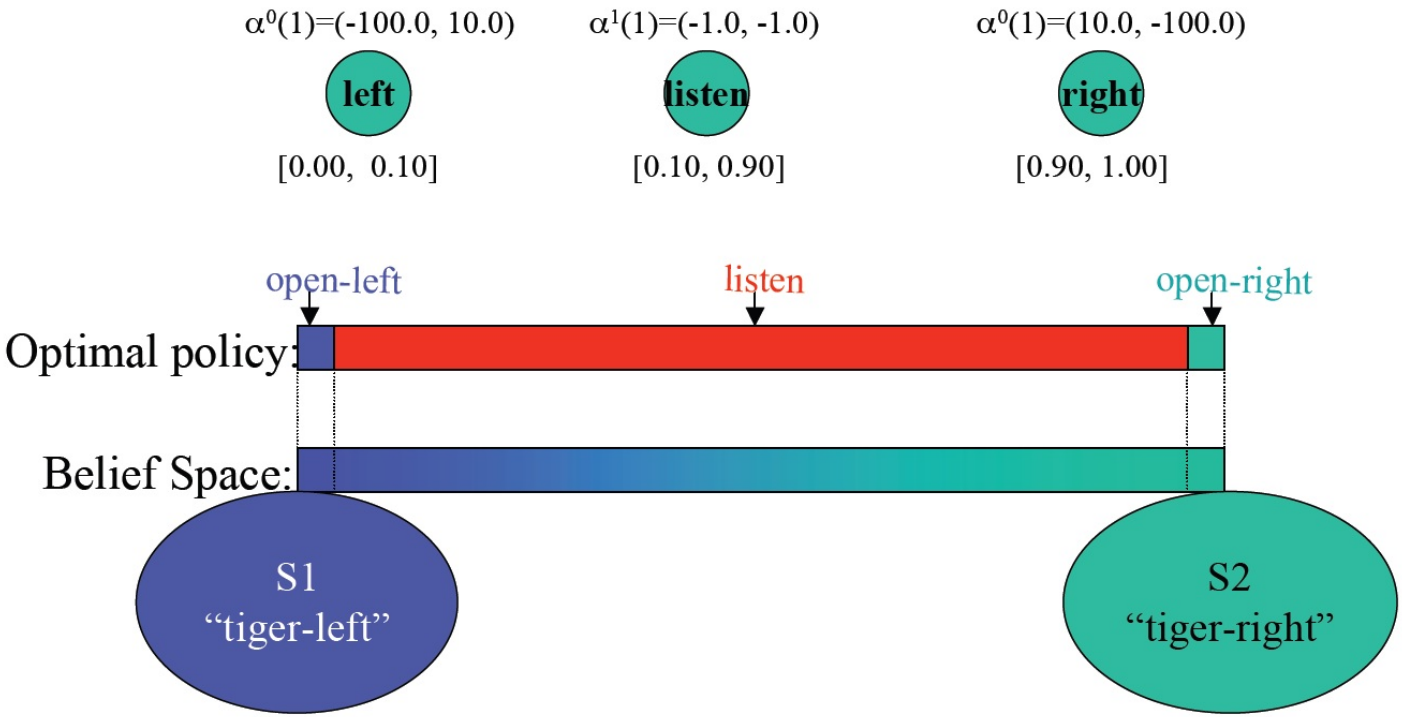

b_0
Belief vector
S1
"tiger-left"
S2
"tiger-right"
Belief
obs=hear-tiger-left
action=listen

老虎问题 (con't)


$b_1(s_i) = \frac{P(o \mid s_i, a) \sum_{s_j \in S} P(s_i \mid s_j, a) b_0(s_j)}{P(o \mid a, b)}$
b1
b0
Belief vector
S1
"tiger-left"
S2
"tiger-right"
Belief
obs=growl-left
action=listen

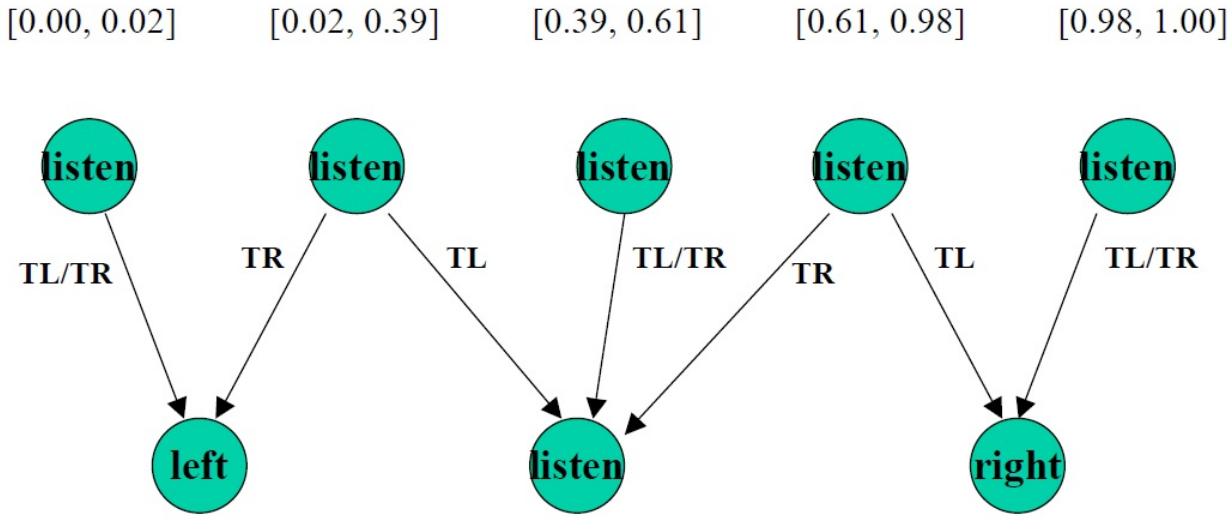
老虎问题 (con't)

- Optimal Policy for t=1



老虎问题 (con't)

- For t=2



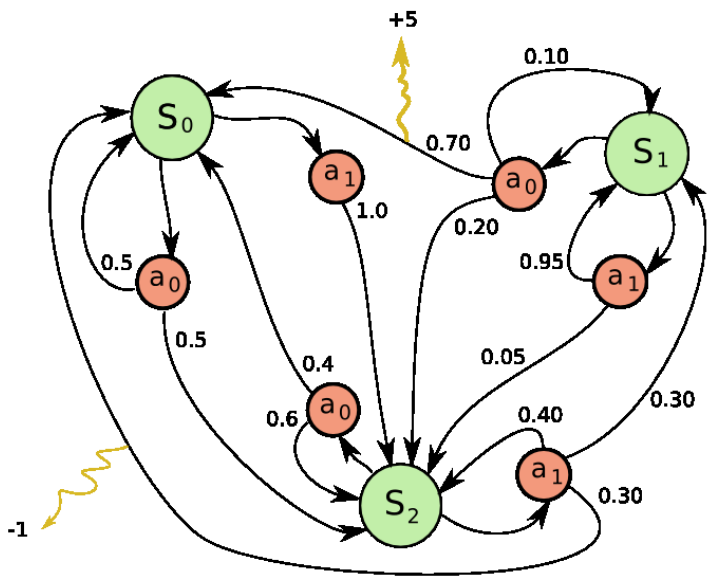
小结

- MDP 刻画了行动的不确定性，考虑概率和效用结合的最大期望效用
- MDP 模型为四元组 (S, A, T, R)
- MDP 可以用值迭代算法计算最优策略，计算复杂性为 P-complete
- POMDP 在 MDP 基础上刻画观察的不确定性，同样计算最大期望效用
- POMDP 模型为六元组 (S, A, T, R, Ω, O)
- POMDP 可以看做一个基于无穷信念状态的 MDP
- POMDP 的策略可以通过策略树表示
- POMDP 的最优策略的计算复杂性为 PSPACE-complete

Table of Contents

Markov Decision Processes

- MDP 模型是一个四元组 $\langle S, A, T, R \rangle$
  - Markov Property: $P(s_{t+1} \mid s_1, \ldots, s_t) = P(s_{t+1} \mid s_t)$
  - $T(s, a, s') = P(s' \mid s, a)$
  - Policy: $\pi : S \times A \to [0, 1]$, $\pi(a \mid s)$
- 已知 MDP 模型
  - Prediction: 给定 MDP 和 policy π，计算值函数 V_π 或 Q_π
  - Control: 给定 MDP，计算最优策略 π^* 或最优值函数 V^* 或 Q^*



State-Value Function and Action-Value Function

- 回报（return）：回报 G_t 是从时刻 t 开始的总折扣奖励：

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

- 状态值函数（state-value function）：状态值函数 $V_\pi(s)$ 是从状态 s 出发，按照策略 π 采取行为得到的期望回报：

$$\begin{aligned} V_\pi(s) &= E_\pi\left(G_t \mid S_t = s\right) \\ &= E_\pi\left(R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s\right) \\ &= E_\pi\left(R_{t+1} + \gamma V_\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s\right) \end{aligned}$$

- 行动值函数（action-value function, action-state-value function）：行为值函数 $Q_\pi(s, a)$ 是从状态 s 出发，采取行为 a 后，然后按照策略 π 采取行为得到的期望回报：

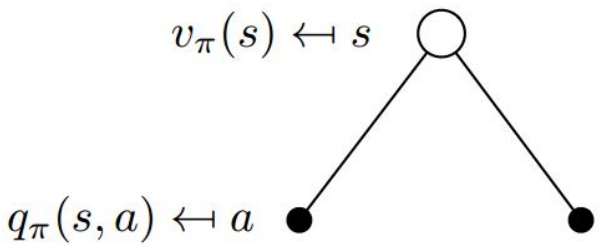
$$\begin{aligned} Q_\pi(s, a) &= E_\pi\left(G_t \mid S_t = s, A_t = a\right) \\ &= E_\pi\left(R_{t+1} + \gamma Q_\pi(S_{t+1}, A_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a\right) \end{aligned}$$

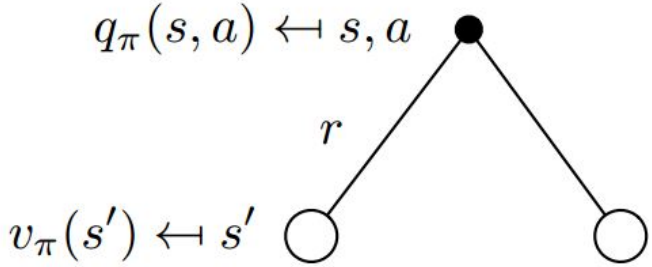
State-Value Function and Action-Value Function (con't)

- $V_\pi(s)$ 与 $Q_\pi(s,a)$ 之间的关系

$$V_\pi(s) = \sum_{a \in A} \pi(a \mid s) Q_\pi(s,a)$$

$$Q_\pi(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') V_\pi(s')$$





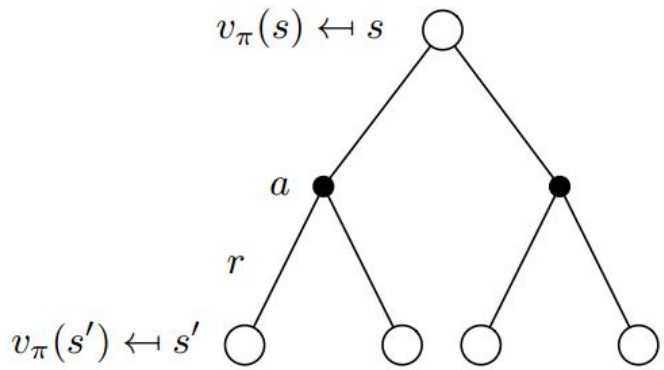
Bellman Equations

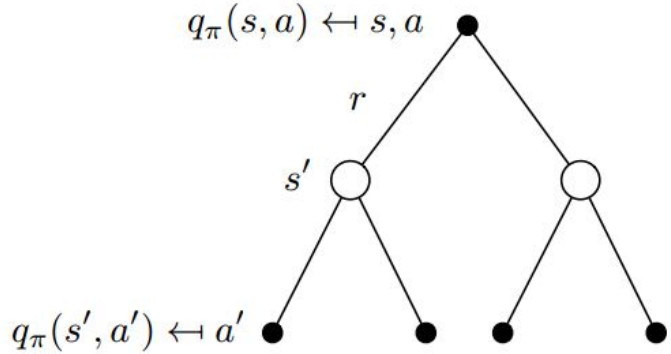
- V_π 自身的递推关系：

$$V_\pi(s) = \sum_{a \in A} \pi(a \mid s) \left(R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') V_\pi(s') \right)$$

- Q_π 自身的递推关系：

$$Q_\pi(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') \sum_{a' \in A} \pi(a' \mid s') Q_\pi(s',a')$$





Bellman Equations (con't)

- 最优状态值函数：最优值函数 $V^*(s)$ 是在所有策略上的最大值函数：

$$V^*(s) = \max_{\pi} V_\pi(s)$$

- 最优行为值函数：最优行为值函数 $Q^*(s, a)$ 是在所有策略上的最大行为值函数

$$Q^*(s, a) = \max_{\pi} Q_\pi(s, a)$$

- $V^*(s)$ 与 $Q^*(s, a)$ 之间的关系

$$\begin{aligned} V^*(s) &= \max_{\pi} V_\pi(s) \\ &= \max_{\pi} \sum_{a \in A} \pi(a \mid s) Q_\pi(s, a) \\ &= \max_{a \in A} Q^*(s, a) \end{aligned}$$

因为：MDP 的 optimal policy 是 deterministic policy, *i.e.*, $\pi^*(s) = a$

Bellman Equations (con't)

- $V^*(s)$ 与 $Q^*(s,a)$ 之间的关系

$$\begin{aligned} Q^*(s,a) &= \max_\pi Q_\pi(s,a) \\ &= \max_\pi \left(R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') V_\pi(s') \right) \\ &= R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') V^*(s') \end{aligned}$$

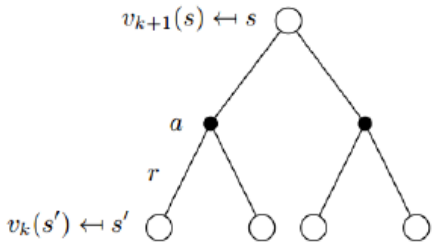
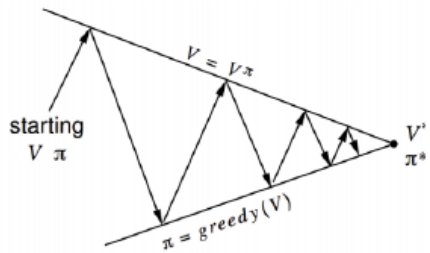
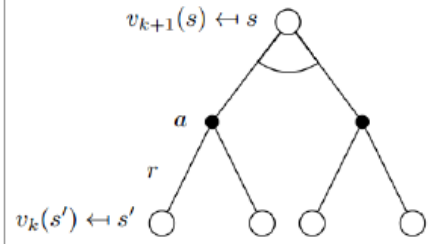
- $V^*(s)$ 自身的递推关系

$$V^*(s) = \max_{a \in A} \left(R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') V^*(s') \right)$$

- $Q^*(s,a)$ 自身的递推关系

$$Q^*(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} T(s,a,s') \max_{a' \in A} Q^*(s',a')$$

Dynamic Programming

Algorithm	*Iterative Policy Evaluation*	*Policy Iteration*	*Value Iteration*
			
Bellman Equation	Bellman Expectation Equation	Bellman Expectation Equation Policy Iteration + Greedy Policy Improvement	Bellman Optimality Equation
Problem	Prediction	Control	Control

Deterministic Policy and Stochastic Policy

- Deterministic Policy: $\pi : S \to A$, $\pi(s) = a$
- Stochastic Policy: $\pi : S \times A \to [0, 1]$, $\pi(a \mid s) \in [0, 1]$
- Dynamic programming algorithms 初始输入可以是 stochastic policy 但返回总是一个 deterministic policy
- 有没有可能存在 optimal policy π^*，它是 stochastic policy，并且对所有 deterministic policy π'，$V_{\pi^*} > V_{\pi'}$?
  - "Markov Decision Process – Discrete Stochastic Dynamic Programming" by Martin L. Puterman (John Wilson and Sons Ed.). It is proved that if the reward function is deterministic, the optimal policy exists and is also deterministic.
  - 反证法，假定一个 stochastic policy π^* 是最优的，并且不存在 deterministic policy 大于等于它的期望效用。当 π^* 在用概率选择两个行动时，总可以选后续效用较大的那个行动；当两者后续效用相等，就固定的选一个

Table of Contents

Stochastic Game

- Multiple-state / Multiple-agent environment. Like an extension of MDPs and Normal-Form Games.
- Markovian but not from each player's point of view.
- A stochastic game is a tuple $(n, S, A_{1,\ldots,n}, T, R_{1,\ldots,n})$ where:
  - n represents the number of agents
  - S the state set
  - A_i the action set of agent i and $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ the joint action set
  - $T : S \times A \times S \to [0, 1]$ is a transition function which depends on the actions of all players
  - $R : S \times A \times S \to \mathbb{R}$ is a reward function representing the expected value of the next reward, which also depends on the actions of all players.
- Each agent i selects policy $\pi_i : S \to PD(A_i)$ (probability $\pi_i(a_i \mid s)$)
- Joint policy $\pi = \langle \pi_i, \pi_{-i} \rangle$

Optimality Concepts in Stochastic Games

Optimality Concepts in Stochastic Games:

- The discounted reward over time is usually considered, as in MDPs:

$$V_i^{\pi}(s) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r^j_{t+k+1} \mid s_t = s, \pi\right]$$
$$= \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} T(s,a,s') \left(R_i(s,a,s') + \gamma V_i^{\pi}(s')\right)$$
$$Q_i^{\pi}(s,a) = \sum_{s'} T(s,a,s') \left(R_i(s,a,s') + \gamma V_i^{\pi}(s')\right)$$

- Best-response function: defined for policies with the state values as reference.

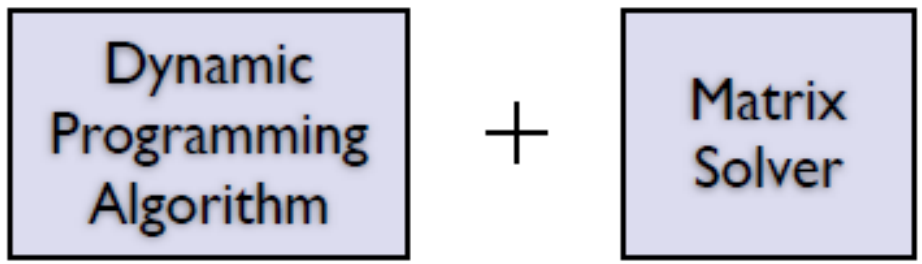
$$\pi_i^* \in BR_i(\pi_{-i}) \quad \text{iff}$$
$$\forall \pi_i \in S \times PD(A_i), \forall s \in S \quad V_i^{\langle \pi_i^*, \pi_{-i} \rangle}(s) \geq V_i^{\langle \pi_i, \pi_{-i} \rangle}(s)$$

- Nash equilibria: All players are using best-response policy.

$$\forall i = 1 \ldots n \quad \pi_i \in BR_i(\pi_{-i})$$

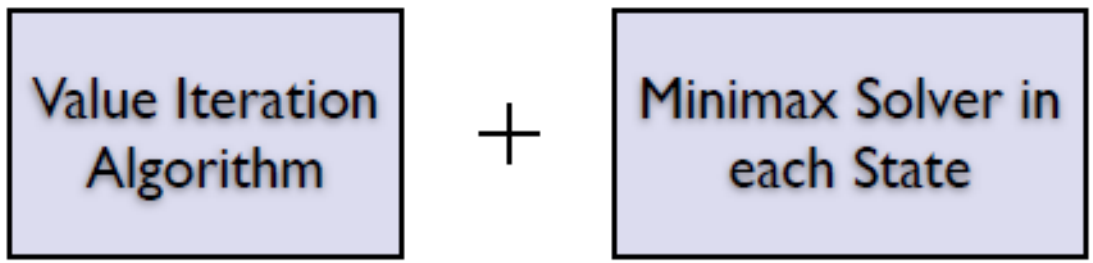
Solving Stochastic Games

- Usually, each algorithm solves one type of game.
- A common approach:



Minimax Value Iteration

- Suitable for (two-person) zero-sum stochastic games.



- Algorithm expression (based on the Bellman optimality equation for the zero-sum SG)

$$V^{k+1}(s) \leftarrow \max_{\pi \in PD(A)} \min_{o \in O} \sum_{a \in A} \pi(a) Q^{k+1}(s,a,o)$$

$$Q^{k+1}(s,a,o) \leftarrow \sum_{s'} R(s,a,o,s') + \gamma T(s,a,o,s') V^{k}(s')$$

Stationary Opponents（固定对手）

- The game reduces to an MDP with:

$$S^{MDP} = S^{SG}$$

$$A^{MDP} = A_i^{SG}$$

$$T^{MDP}(s, a_i, s') = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}^{SG}} \pi_{-i}(s, a_{-i})\, T^{SG}(s, \langle a_i, a_{-i} \rangle, s')$$

$$R^{MDP}(s, a_i, s') = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}^{SG}} \pi_{-i}(s, a_{-i})\, T^{SG}(s, \langle a_i, a_{-i} \rangle, s')\, R^{SG}(s, \langle a_i, a_{-i} \rangle, s')$$