

SAT 问题简介

吉建民

USTC

`jianmin@ustc.edu.cn`

2025 年 3 月 11 日

Used Materials

Disclaimer: 本课件采用部分网络博客内容

Table of Contents

SAT 问题

SAT 求解方法

一些 SAT Solvers

SAT 应用举例 – Hardware Verification

SAT 扩展

小结

SAT 问题基本定义

- ▶ SAT 问题 (Boolean satisfiability problem, 布尔可满足性问题, SAT):
 - ▶ 给定布尔 (Boolean) 表达式 (由 AND, OR, NOT, 变量, 和括号构成), 是否存在对变量 TRUE 或 FALSE 的赋值, 使得整个表达式真。

$$(x + y\bar{z})(x + y + z)(\bar{y} + \bar{z})$$

- ▶ SAT 问题 (Propositional satisfiability problem, 命题可满足问题, SAT):
 - ▶ 给定命题逻辑公式 (propositional formula), 是否可满足 (存在一个模型)。

$$(\neg(x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3))$$

- ▶ 任意布尔表达式和命题逻辑公式都可以等价转换为合取范式。

SAT 问题基本定义 (cont'd)

- ▶ SAT 问题: 合取范式 (conjunctive normal form, CNF) 的可满足问题。
 - ▶ 一个合取范式形如: $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$, 子句 C_i ($1 \leq i \leq n$) 形如: $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k$, 其中, l_i 称为文字, 为某一布尔变量或该布尔变量的非。

$$(\neg a_1 \vee a_2) \wedge (\neg a_1 \vee a_3 \vee a_4) \wedge (a_1 \vee \neg a_2 \vee a_3 \vee \neg a_4)$$

- ▶ SAT 问题是指, 是否存在一组对所有布尔变量 TRUE 或 FALSE 的赋值, 使得整个合取范式取值为真。
- ▶ k -SAT 问题: 若合取范式 F 中每个子句 C 中所包含的文字数目均为 k , 则称为 k -SAT 问题。
 - ▶ 2-SAT 问题: $k = 2$ 。
 - ▶ 3-SAT 问题: $k = 3$ 。任何 k -CNF 公式都可以转换为 3-CNF。

$$(\neg a_1 \vee a_2 \vee x_1) \wedge (\neg a_1 \vee a_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg a_1 \vee a_3 \vee a_4) \wedge \\ (a_1 \vee \neg a_2 \vee x_2) \wedge (a_3 \vee \neg a_4 \vee \neg x_2)$$

- ▶ SAT 问题从 1960 年就开始不断研究。

问题复杂性

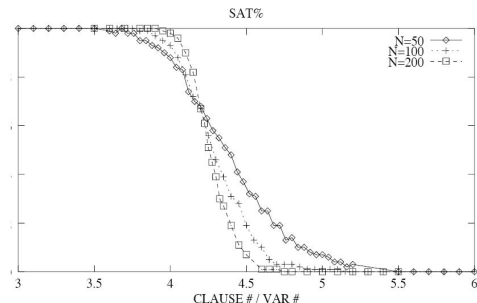
- ▶ SAT 问题是第一个被证明为 NP-complete 的问题: 库克定理 (Cook's theorem, Cook-Levin theorem)。 [▶ details](#)
- ▶ 3-SAT 问题是 NP-complete。
- ▶ 2-SAT 问题可以在多项式时间解决, 是 NL-complete (非确定图灵机对数空间可解问题的完全类)。
- ▶ Horn-SAT 问题, 每个子句必须是 Horn 子句 (每个子句至多有一个真文字), 是 P-complete。

SAT 相变 (Phase transition)

- ▶ 对一个 k -SAT 问题, 基于 N 个变量, 有 L 个子句。增加 L/N , 从 100% 可满足, 转变到 100% 不可满足。
- ▶ 给定 L 和 N 随机生成 k -SAT 问题, 记为 $R_k(N, L)$ 。当 N 趋近于无穷时, $R_k(N, L)$ 可满足的概率有如下性质:

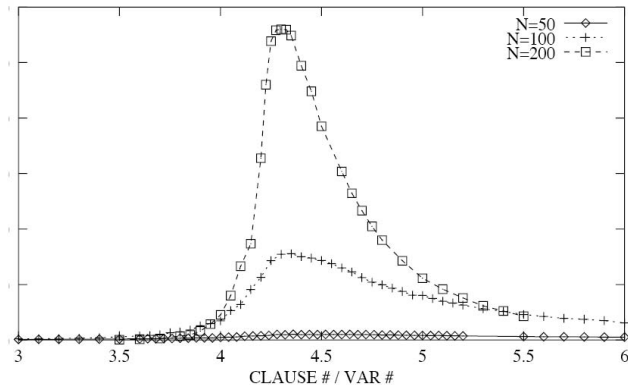
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}(\text{sat}, R_k(N, c \cdot N)) = \begin{cases} 0 & \text{for } c > c_k \\ 1 & \text{for } c < c_k \end{cases}$$

可以证明 $c_2 = 1$ 且 $3.003 < c_3 < 4.81$, 实验表明 $c_3 \approx 4.28$ 。



SAT 相变 (Phase transition) (cont'd)

- ▶ 随着 L/N 的增长, SAT 问题呈现 “easy-hard-easy” 的样式。一般的 NP 问题都有类似的情况。
- ▶ 用 DPLL 来求解 3-SAT 问题, 问题在 $L/N \approx 4.28$ 时显得困难。



SAT 问题应用

- ▶ 在很多应用中, 把 SAT 作为中间域建立通用问题求解框架。即把待求解的问题转换为 SAT 问题进行求解, 将求得的解转换到原问题域从而得到原问题的解。
 - ▶ SAT 问题是 NP-complete 的, 每个 NP 问题可以在多项式时间内归约到 SAT 问题, SAT 作为中间语言具有足够的表达能力;
 - ▶ SAT 的语法和语义简单, 设计和评价 SAT 算法比较方便。
- ▶ 对 SAT 的研究不仅具有重要的理论意义, 而且在
 - ▶ EDA (Electronic Design Automation): Combinational Equivalence Checking、Automatic Test Pattern Generation、计算机辅助设计、计算机辅助制造、集成电路设计自动化、计算机结构设计、以及计算机网络设计等;
 - ▶ AI (Artificial Intelligence): 规划、逻辑程序、自动推理等;
 - ▶ 有界模型检测 (Bounded Model Checking)都有着直接的应用。

Table of Contents

SAT 问题

SAT 求解方法

一些 SAT Solvers

SAT 应用举例 – Hardware Verification

SAT 扩展

小结

An overview

主要有两类求解 SAT 问题的高效算法:

- ▶ Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL or DLL, 1962) 算法的各种变形。
 - ▶ 基于回溯的搜索算法,
 - ▶ 当代大多数 SAT solver 的基础,
 - ▶ 在此基础上可以分为: “conflict-driven” 和 “look-ahead” 形式。
- ▶ 随机局部搜索算法 (GSAT 1992, WalkSAT 1993)。
 - ▶ 无法证明不可满足性, 但很多时候可以很快找到满足的解,
 - ▶ 主要基于局部搜索和爬山算法。

Unit Clauses 和 Pure Literals

- ▶ 只含有一个文字的子句是 **unit clause**
 - ▶ Unit propagation: unit clauses $\{l\}$
 - 1 every clause containing l is removed;
 - 2 in every clause that contains $\neg l$ this literal is deleted.
- ▶ 只在公式中正出现或负出现的文字是 **pure literal**
 - ▶ Pure literal elimination: delete all clauses containing pure literals.

例

考虑 CNF: $(p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge p \wedge (q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (r \vee p) \wedge t$

- ▶ p 和 $\neg s$ 是 pure literals;
- ▶ 子句 $\{p\}$ 和 $\{t\}$ 是 unit clauses。

DPLL 算法

```
function DPLL( $\phi$ ,  $\mu$ )  
  if  $\phi$  is empty  
    then return TRUE;  
  if  $\phi$  contains an empty clause  
    then return FALSE;  
  if  $l$  is a unit clause in  $\phi$   
    then return DPLL(assign( $l$ ,  $\phi$ ),  $\mu \wedge l$ );  
  if  $l$  is a pure literal in  $\phi$   
    then return DPLL(assign( $l$ ,  $\phi$ ),  $\mu \wedge l$ );  
   $l := \text{choose-literal}(\phi)$ ;  
  return DPLL(assign( $l$ ,  $\phi$ ),  $\mu \wedge l$ ) or  
    DPLL(assign( $\neg l$ ,  $\phi$ ),  $\mu \wedge \neg l$ ).
```

DPLL 算法特点

- ▶ 二叉分支搜索 (某个变量的 t/f);
- ▶ 在 unit propagation 和 pure literal elimination 基础上, 尽可能晚的推迟分支;
- ▶ 只需要多项式空间;
- ▶ *choose-literal()* 是算法的关键;
- ▶ 几乎是所有精确求解 SAT Solver 的基础。

提高 DPLL 的技术

- ▶ Preprocessing (预处理): 对输入的 CNF 公式作预处理, 使其便于计算。
- ▶ Look-ahead: 更多的利用未知搜索空间的信息。
 - ▶ 加强 unit propagation 和 pure literal elimination;
 - ▶ 用启发式函数 *choose-literal()*。
 - 对 “small but hard” 的问题比较有效
- ▶ Look-back (Conflict-driven): 利用搜索过程中已知的信息, 尤其是 conflict。
 - ▶ Non-chronological backtracking (backjumping): 通过调整搜索顺序来避免无用的搜索。
 - ▶ Conflict driven clause learning: 通过学习得到新的子句来避免无用的搜索。
 - ▶ 其他技术: “two-watched-literals” unit propagation, adaptive branching。
 - 对 “big but simple” 的问题比较有效

预处理

- ▶ Sorting+subsumption:

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \wedge (l_2 \vee l_1) \wedge \varphi_2 \wedge (l_2 \vee l_3 \vee l_1) \wedge \varphi_3 \\ \Downarrow \\ \varphi_1 \wedge (l_1 \vee l_2) \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \end{array}$$

- ▶ 2-simplifying: 利用 binary clauses 化简 CNF。

Repeat:

- 1 根据 CNF 中 binary clauses 构造 implication graph。CNF 中有一个 binary clause $\{\neg l, l'\}$, 则在 implication graph 中存在一条 l 到 l' 的边。
- 2 找出 implication graph 中的强连通分量 (SCC), 将 SCC 中所有文字等价为一个新的文字。
- 3 将 CNF 中所有 SCC 中文字和他们的负, 分别用新文字和它的负替换。
- 4 应用 unit propagation 和 pure literal elimination。

Until 没有新的化简。

“Look-ahead” DPLL

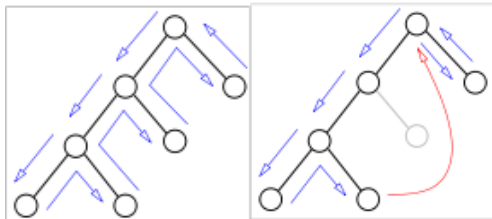
- ▶ *Lookahead()* 函数: 如果加入 l 后, 用 unit propagation 得到矛盾, 则加入 $\neg l$ 。
 - 比 unit propagation 更强大, 推出更多的东西;
 - 但效率损失更大, 不断在实践中被证明, 用 *Lookahead()* 不如简单用 unit propagation。
- ▶ 各种不同的启发函数 *choose-literal()*:
 - ▶ MOM heuristics: 选择在极小子句中最常出现的文字。
 - 简单高效
 - ▶ Jeroslow-Wang: 选择有极大 score 值的文字

$$\text{score}(l) := \sum_{l \in c \wedge c \in \varphi} 2^{-|c|}$$

- 评估 l 对于 CNF φ 满足的贡献
- ▶ Satz: 从待选文字集中, 选择通过 unit propagation 得到最小子句集的文字。
 - 充分利用 unit propagation 得到的结果

“Conflict-driven” DPLL

- ▶ Non-chronological backtracking (backjumping):



- ▶ Idea: 当一个分支失败时
 - 1 找出导致失败的部分赋值 (**conflict set**);
 - 2 回溯到 **conflict set** 中的 **most recent branching point**。
- ▶ Conflict set:
 - ▶ 在已知的部分赋值下, 某个文字成真是由于在某个子句上用 unit propagation, 将此子句称为此文字的原因。例, 在 $\{\neg a, \neg b\}$ 下, 子句 $(a \vee b \vee \neg x)$ 就是文字 $\neg x$ 的原因。
 - ▶ 当出现矛盾时, 存在两个互补的文字, 将这两个文字的原因 (子句) 归结为一个子句, 此子句对应的补文字集为当前矛盾的 **conflict set**。

“Conflict-driven” DPLL (cont'd)

- ▶ Conflict driven clause learning:
 - ▶ Idea: C 是一个 conflict set, 则 $\neg C$ 可以加到原始子句集里面。
 - 保证包含 C 的赋值不成立, 在 DPLL 的搜索过程中避免了类似的赋值。
 - ▶ 例, 当前部分赋值 $\{\neg p, q, r, \neg t, s\}$, 子句 $(x \vee p \vee \neg q)$ 是 x 成立的原因, 子句 $(\neg x \vee \neg r \vee t)$ 是 $\neg x$ 成立的原因。
则 $C = \{\neg p, q, r, \neg t\}$ 是相应的 conflict set。我们可以把子句 $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee t)$ 加入原始子句中。
 - ▶ Problem: 可能导致空间膨胀。
 - 用其他技术来控制 learning, 并且在需要时丢掉学到的子句。

局部搜索算法

- ▶ 不是构造解，而是通过修改完整赋值来不断满足更多的子句。
- ▶ 不能证明公式的不可满足性。
- ▶ 主要包括 GSAT 和 WalkSAT，也有其他的局部搜索方法：
 - ▶ Simulated annealing, 模拟退火法
 - ▶ Tabu search, 禁忌搜索
 - ▶ Genetic algorithms, 遗传算法
 - ▶ Hybrid methods, 杂合方法: 结合 DPLL 方法和局部搜索的优势。
- ▶ 一般需要多项式空间。
- ▶ 对一些 (可满足的) 问题非常有效。

GSAT

- ▶ GSAT 算法结构:

- Repeat MAX-TRIES times or until clauses satisfied

- $T :=$ random truth assignment

- Repeat MAX-FLIPS times or until clauses satisfied

- $v :=$ variable which flipping maximizes number of SAT clauses

- $T := T$ with v 's value flipped

- ▶ 可以加入 restarts 和 greediness。
- ▶ 贪心搜索, 寻找较好的 “neighbor”。

WalkSAT

- ▶ WalkSAT 算法结构:

- Repeat MAX-TRIES times or until clauses satisfied

- $T :=$ random truth assignment

- Repeat MAX-FLIPS times or until clauses satisfied

- $c :=$ unsat clause chosen at random

- $v :=$ var in c chosen either greedily or at random

- $T := T$ with v 's value flipped

- ▶ 关注于没有满足的子句。

Table of Contents

SAT 问题

SAT 求解方法

一些 SAT Solvers

SAT 应用举例 – Hardware Verification

SAT 扩展

小结

An overview

- ▶ GRAPS
 - ▶ João Marques Silva (葡萄牙人), 1996.
 - ▶ 最早的 “conflict-driven” DPLL SAT solver, 最早使用 backjumping 和 clause learning。
- ▶ zChaff
 - ▶ Lintao Zhang (中国人, 微软研究院), 2001–2007.
 - ▶ “conflict-driven” DPLL SAT solver, 同时使用了很多高效技术: 2-literal watching, restarts, VSIDS 作为启发函数, ...
 - ▶ 公认较快的 SAT solver, 在 “SAT Competition” 2003, 2004, 2005 表现优异。
- ▶ MiniSAT
 - ▶ Niklas Eén, Niklas Sörensson, 2003–2007.
 - ▶ “conflict-driven” DPLL SAT solver, 类似 zChaff, 同时增加 Conflict clause minimization。
 - ▶ 公认较快的 SAT solver, 在 “SAT Competition” 2005, 2007 表现优异。
- ▶ mach_dl
 - ▶ Marijn Heule, Hans van Maaren, 1999.
 - ▶ “look-ahead” DPLL SAT solver, 同时使用其他高效技术。
 - ▶ 在 “SAT Competition” 2004, 2005, 2007 表现不错。

The Timeline

- ▶ 从 2002 年开始，持续举办 SAT 竞赛，每年一届。
<http://www.satcompetition.org/>
- ▶ 较强的 SAT solvers: Chaff (2001), MiniSAT (2003), zChaff (2004)

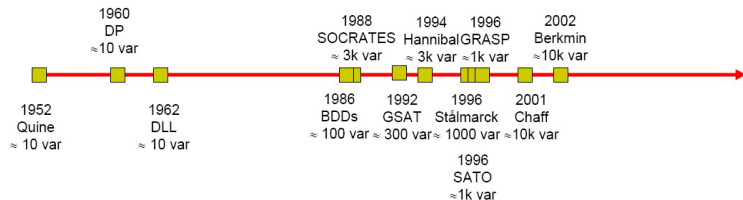


Table of Contents

SAT 问题

SAT 求解方法

一些 SAT Solvers

SAT 应用举例 – Hardware Verification

SAT 扩展

小结

Hardware Verification

- ▶ 如何验证硬件设计的正确性? Model Checking
 - 1 将硬件设计描述为一个有限状态机 M (初始状态 + 状态转移关系);
 - 2 将需要满足的性质 P 用时序逻辑描述出来;
 - 3 判断 M 是否是 P 的一个模型, 即, $M \models P$.
- ▶ 一般需要满足的性质有如下形式:
 - ▶ 安全性性质: “ x always holds”, 从初始状态出发, 任何可达的状态上都性质 x 成立。 x 一般是命题公式。
 - ▶ 活性性质: “there will be a point in time when x holds”。例如, 请求被回答。
- ▶ Bounded Model Checking (BMC): 判断性质 “always p ” 是否在长度小于等于 k 的运行周期内成立。
 - ▶ BMC 问题, 可以很容易转化为一个 SAT 问题: 是否存在一条长度小于等于 k 的路径, 从初始状态到一个 p 不成立的状态。

BMC as SAT

- ▶ 用谓词 $I(s)$ 来刻画初始状态, 每个状态 $s = (x_1, \dots, x_n)$ 是变量的集合; 用谓词 $\tau(s, s')$ 表达状态 s 的后继状态是 s' 。
- ▶ BMC 问题等价于下面公式是否可满足:

$$I(s_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} \tau(s_i, s_{i+1}) \wedge \bigvee_{i=0}^k \neg p(s_i).$$

- ▶ 如果此公式可满足, 则存在一条这样的路径, 此时我们找到一个 “always p ” 的反例。
- ▶ 如果此公式不可满足, 则不存在长度小于等于 k 的这样的路径, 我们可以增加 k 再验证。

BMC Example

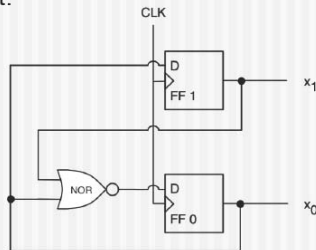
- ▶ 考虑一个二进制加法器, 不断循环地从 $c = 0$ 加到 $c = 2$ 。证明如果 initially $c \neq 3$ 则 always $c \neq 3$ 。
- ▶ 状态用二进制数位表示: $s_i = (x'_1, x'_0)$, 计数器 $c = 2 \cdot x'_1 + x'_0$
- ▶ 初始状态条件: $I(s_0) = \neg(x'_0 \wedge x'_1)$ (i.e., $c_0 \neq 3$)

Transition relation:

S_i		S_{i+1}	
x_1	x_0	x'_1	x'_0
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	DC	DC

$$x'_1 = x_0, x'_0 = \neg(x_0 \vee x_1)$$

Circuit:



BMC Example (cont'd)

- ▶ 状态转移关系, $\tau(s, s')$:

$$\tau(s_i, s_{i+1}) = (x_1^{i+1} \equiv x_0^i) \wedge (x_0^{i+1} \equiv \neg(x_1^i \vee x_0^i))$$

- ▶ 性质, $p(s)$:

$$p(s_i) = \neg(x_1^i \wedge x_0^i)$$

- ▶ SAT solver 可以证明对任意 k , BMC 对应公式都不可满足, 所以 always p 总成立。

Table of Contents

SAT 问题

SAT 求解方法

一些 SAT Solvers

SAT 应用举例 – Hardware Verification

SAT 扩展

小结

- ▶ Satisfiability Modulo Theories (SMT): 对函数词和谓词有特殊解释的一阶公式是否可满足的判定问题。例如: 判断下面公式是否可满足

$$(\sin(x)^3 = \cos(\log(y) \cdot x) \vee b \vee -x^2 \geq 2.3y) \\ \wedge (\neg b \vee y < -34.4 \vee \exp(x) > \frac{y}{x}).$$

- ▶ SAT solver 效率很高, 但 SAT 不能处理数字运算, 线性约束等各种不同的约束。SMT 可以处理这类问题。
- ▶ SMT solver 本质上是一个高效的 SAT solver 不断调用一个处理特殊约束的求解器。将子句中的原子看作普通的命题原子调用普通的 SAT solver 来处理, 需要时再调用特殊约束的求解器来判断原子的真假。
- ▶ SMT 问题一般是 NP-complete。

QBF

- ▶ Quantified Boolean Formula problem (QBF): 对于容许 “for all” 和 “there exists” 出现的布尔表达式是否可满足的判定问题。例如: 判断下面公式是否可满足

$$\forall x \exists y \exists z. (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

- ▶ QBF 问题是 PSPACE-complete, 比 SAT 问题更复杂, 还没有可以实用的 QBF solver。

Table of Contents

SAT 问题

SAT 求解方法

一些 SAT Solvers

SAT 应用举例 – Hardware Verification

SAT 扩展

小结

小结

- ▶ SAT 问题是布尔表达式可满足性问题, 一般以 CNF 公式作为其标准输入。
- ▶ SAT 问题是 NP-complete。
- ▶ SAT 在设计自动化, AI 等领域有广泛应用。
- ▶ 求解 SAT 问题的方法, 一般是基于 DPLL 的搜索算法, 或者是随机局部搜索算法。
- ▶ 现代的 SAT solver 已经达到实用程度, 主要基于 DPLL 算法。

Table of Contents

计算复杂性简介

“容易”与“困难”的问题

- ▶ 一个问题需要指数时间才可以计算出结果, 称为“困难”的。

例 (货郎担问题, Traveling Sales Person problem, TSP)

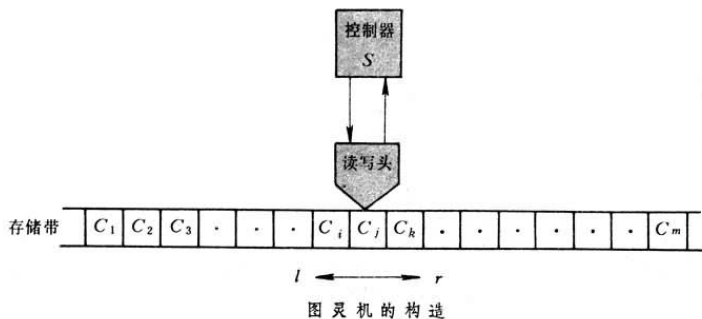
某售货员要到若干个村庄售货, 各村庄之间的路程是已知的, 为了提高效率, 售货员决定从所在商店出发, 到每个村庄售一次货然后返回商店, 问他应选择一条什么路线才能使所走的总路程最短?

求取具有最小成本的周游路线。

- ▶ 一个问题用多项式时间就可以计算出结果, 称为“容易”的。
 - ▶ 多项式时间是 $O(n^k)$, 其中 k 是常数, n 是问题输入的规模。
 - ▶ 这里的“容易”是相对的, 实际计算中 $O(n^{100})$ 就可以很困难。

计算复杂性理论基本定义

- ▶ 什么是计算？计算模型。
- ▶ 图灵机模型：



- ▶ 图灵机模型是计算机的计算能力的极限，目前还没有计算模型超越图灵机模型。

确定性与非确定性图灵机

- ▶ 确定性图灵机 (Deterministic Turing Machine): 图灵机状态转移函数是单值的, 每种格局有确定的转移方式。

$$\delta : Q \times T \rightarrow Q \times T \times \{L, R\}$$

- ▶ 非确定图灵机 (Nondeterministic Turing Machine): 图灵机状态转移函数有不确定性, 有多种转移方式进行选择。

$$\delta : Q \times T \rightarrow \mathcal{P}(Q \times T \times \{L, R\})$$

- ▶ 猜想阶段
- ▶ 验证阶段

P 类和 NP 类问题

- ▶ P 类问题:
 - ▶ 在确定性图灵机上多项式时间可解的问题。
- ▶ NP 类问题:
 - ▶ 在非确定性图灵机上多项式时间可解的问题;
 - ▶ 在确定性图灵机上多项式时间可验证的问题。
- ▶ $P \subseteq NP$
- ▶ $P \neq NP$: 大多数计算机科学家认为 NP 类包含了不属于 P 类的问题, 即 $P \neq NP$ 。
- ▶ 直观上看, P 类问题是确定性计算模型下的易解问题类, 而 NP 类问题是非确定性计算模型下的易验证问题类。

NP-hard 和 NP-complete 问题

- ▶ 问题 Q 是 NP-hard 问题, 如果:
 - ▶ 每个 NP 问题都可以在多项式时间归约为问题 Q 。
- ▶ 问题 Q 是 NP-complete 问题, 如果:
 - ▶ 它是 NP 问题, 同时它还是 NP-hard 问题。
- ▶ NP-complete 问题的性质:
 - ▶ 所有 NP-complete 问题, 相对于多项式时间归约关系, 是自反, 对称和传递的, 即构成一个等价类。
 - ▶ 如果能找到一个 NP-complete 问题的多项式算法, 则 $P = NP$ 。

▶ back