

# 含正交排列夹杂和缺陷材料的 等效弹性模量和损伤<sup>1)</sup>

赵爱红 虞吉林

(中国科学技术大学力学和机械工程系, 合肥 230027)

**摘要** 研究含正交排列夹杂和缺陷材料的等效弹性模量和损伤, 推导了以 Eshelby-Mori-Tanaka 方法求解多相各向异性复合材料等效弹性模量的简便计算公式, 针对含三相正交椭球状夹杂的正交各向异性材料, 得到了由细观参量 (夹杂的形状、方位和体积分数) 表示的等效弹性模量的解析表达式. 在此基础上, 提出了一个宏细观结合的正交各向异性损伤模型, 从而建立了以细观量为参量的含损伤材料的应力应变关系. 最后, 对影响材料损伤的细观结构参数进行了分析.

**关键词** 正交异性材料, 等效弹性模量, Eshelby-Mori-Tanaka 方法, 正交异性损伤, 细观损伤参量

## 引 言

含三相正交椭球状夹杂的正交异性材料是一类常见的复合材料, 以三向正交碳纤维增强的环氧树脂复合材料就是一例<sup>[1]</sup>. 建立其等效弹性模量和损伤与材料细观参量的关系, 是进一步进行损伤演化研究和优化设计的理论基础.

确定非均质材料的弹性模量的细观等效方法中, Mori-Tanaka 方法<sup>[2]</sup>是最简单的一种等效场方法, 即设等效力场是均匀的, 等于基体 (不含夹杂) 的体积平均应力. 它间接地考虑了夹杂的相互作用, 因而得到广泛的应用. 文献 [3] 应用该方法推导了含球状夹杂的多相各向异性复合材料的等效弹性模量计算公式, 但是其方法比较复杂, 不便应用于多相夹杂计算.

连续损伤力学和细观损伤力学是研究材料损伤的两条主要途径, 它们的结合将是找到与材料细观结构相联系的、反映损伤机理的宏观破坏规律的可行方法. 但是, 由于损伤状态的描述这个基本问题未能完善解决, 两者的结合未能真正实现. Zheng 和 Betten<sup>[4]</sup> 用张量理论给出了二维弹性损伤的一般描述, 文献 [5] 在此基础上, 提出了宏细观结合的各向同性弹性损伤的双标量描述. 然而, 材料的损伤多是各向异性的. 目前建立各向异性损伤模型的一般方法是把损伤因子和有效应力的概念直接推广到三维情况, 用损伤张量  $D$  描述各向异性损伤. 但是, 由于经典连续损伤理论<sup>[6~8]</sup> 是基于应变 (或余能、应力) 等效假设, 因此所得出的结论有一定局限性<sup>[5]</sup>.

本文应用 Eshelby-Mori-Tanaka 方法, 针对含三相正交夹杂的正交异性材料, 建立了等效弹性模量与夹杂体积分数、方位和形状的解析显式; 对含三相正交孔洞或裂纹的材料, 提出了宏细观结合的正交各向异性损伤模型, 为进一步研究材料的损伤演化和优化设计提供基础.

## 1 多相复合材料的等效弹性模量公式

设复合材料含有  $n$  相椭球状夹杂, 复合材料基体和夹杂均可以是各向异性的. 我们把形

1998-01-04 收到第一稿, 1998-11-04 收到修改稿.

1) 中国科学院“九五”基础研究重大项目资助的课题 (KJ951-1-201).

状、方位和弹性模量相同的夹杂作为一相，定义基体为“0”相，其弹性模量张量为  $L_0$ ，基体的体积分数为  $c_0$ ，第  $r$  相夹杂材料的弹性模量张量为  $L_r$ ，其占材料总体积的比例为  $c_r$ ，则

$$\sum_{r=0}^n c_r = 1 \quad (1)$$

设复合材料在其边界受到远场均匀的应力  $\bar{\sigma}$  的作用，其体积平均应变为  $\bar{\varepsilon}$ ，则

$$\bar{\varepsilon} = C\bar{\sigma} \quad \text{或} \quad \bar{\sigma} = L\bar{\varepsilon} \quad (2)$$

其中  $C$  为复合材料的弹性柔度张量， $L$  为相应的弹性模量张量。注意到

$$\bar{\varepsilon} = c_0\bar{\varepsilon}^{(0)} + \sum_{r=1}^n c_r\bar{\varepsilon}^{(r)}, \quad \bar{\sigma} = c_0\bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{r=1}^n c_r\bar{\sigma}^{(r)} \quad (3)$$

其中， $\bar{\sigma}^{(0)}$  和  $\bar{\varepsilon}^{(0)}$  分别为基体的体积平均应力和应变， $\bar{\sigma}^{(r)}$  和  $\bar{\varepsilon}^{(r)}$  为第  $r$  相夹杂的体积平均应力和应变，由 Eshelby 等效变换理论<sup>[9]</sup> 可得

$$\bar{\sigma}^{(r)} = L_r\bar{\varepsilon}^{(r)} = L_r(\bar{\varepsilon}^{(0)} + \varepsilon_r^{pt}) = L_0(\varepsilon^{(0)} + \varepsilon_r^{pt} - \varepsilon_r^*) \quad (4)$$

其中  $\sigma_r^{pt}$  与  $\varepsilon_r^{pt}$  分别为第  $r$  相夹杂的由等效本征应变  $\varepsilon_r^*$  引起的与基体应力和应变的差值，一般称为扰动应力和应变。

在与夹杂椭球体的主轴相重合的局部坐标下，

$$\varepsilon_r^{pt} = S_r\varepsilon_r^* \quad (5)$$

其中， $S_r$  为第  $r$  相夹杂的  $S$  张量，其分量表达式可见文献 [10]。由此可得

$$\varepsilon_r^* = [(L_r - L_0)S_r]^{-1}(L_0 - L_r)\bar{\varepsilon}^{(0)} \quad (6)$$

代入式 (4)，得

$$\bar{\varepsilon}^{(r)} = \bar{\varepsilon}^{(0)} + \varepsilon_r^{pt} = \bar{\varepsilon}^{(0)} + S_r\varepsilon_r^* = A_r\bar{\varepsilon}^{(0)} \quad (7)$$

其中，

$$A_r = I + S_r[(L_r - L_0)S_r + L_0]^{-1}(L_0 - L_r) \quad (8)$$

$I$  为四阶单位张量。把式 (7) 代入式 (3)，则有

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{r=0}^n c_r A_r \bar{\varepsilon}^{(0)}, \quad \bar{\sigma} = \sum_{r=0}^n c_r L_r A_r \bar{\varepsilon}^{(0)} \quad (9)$$

其中  $A_0 = I$ 。因此，由式 (2)，我们得到

$$L = \left[ \sum_{r=0}^n c_r L_r A_r \right] \left[ \sum_{r=0}^n c_r A_r \right]^{-1} \quad (10)$$

对应的复合材料的柔度张量  $C$  为

$$C = \left[ \sum_{r=0}^n c_r L_r A_r \right]^{-1} \left[ \sum_{r=0}^n c_r A_r \right] \quad (11)$$

特别地, 当令式 (10) 和 (11) 中的夹杂的弹性模量为零 ( $L_r = 0, r = 1, \dots, n$ ) 时, 得含孔洞材料的弹性模量. 此时

$$A_r = I + S_r[I - S_r]^{-1} \quad (12)$$

式 (10) 和式 (11) 即为多相复合材料的等效弹性模量张量的简便公式. 我们可以把它们转换成矩阵, 从而求出各弹性常数.

文献 [3] 采用了另一种方法, 其优点是推导过程明显说明了每相夹杂的相互作用. 但它必须首先求出各相的本征应变, 每增加一相就必须加入一相的张量方程, 计算非常繁杂, 而欲求出各工程弹性系数还必须一一分别加力. 文献 [11, 12] 等均采用这种办法, 其复杂的程度仅从文献 [11] 就可见一斑, 那里仅求得含单向排列的椭球夹杂的复合材料的等效弹性模量.

与文献 [3] 的方法相比较, 本文方法每增加一相夹杂并不引起大的计算量, 推导过程要简捷得多.

## 2 含三维正交夹杂的材料等效弹性模量

### 2.1 推导方法

这里仅讨论当基体和夹杂均为各向同性材料时的情形. 计算模型是一个含有三相旋转椭球夹杂的材料, 椭球的三个半轴  $a_i (i = 1, 2, 3)$  分别沿三个主轴方向, 三相椭球夹杂的体积分数分别为  $c_1, c_2, c_3$ . 对体积分数为  $c_1$  的夹杂,  $a_1 \neq a_2 = a_3$ , 其长径比为  $\alpha = a_1/a_3$ , 其余类推.

为了利用在局部坐标下的 Eshelby 的  $S_{ijkl}$  张量, 可以记在整体坐标下的  $S$ -张量变换为在局部坐标下的  $S$ -张量. 在编程计算时, 可以一律改用矩阵表示张量. 本文运用 Mathematica 软件推导出了各弹性常数的解析表达式.

### 2.2 结果

这里按椭球体的长径比  $\alpha$  总结含特殊形状夹杂材料的等效弹性模量公式. 记第  $r$  相夹杂的拉伸弹性模量、剪切弹性模量和泊松比分别为  $E_r, G_r$  和  $\nu_r$ , 基体的拉伸弹性模量、剪切弹性模量和泊松比分别  $E_0, G_0$  和  $\nu_0$ .

#### 2.2.1 含单向排列各种形状夹杂的复合材料 ( $c_1 \neq 0, c_2 = c_3 = 0$ )

设夹杂沿 1 方向排列. 则复合材料是横观各向同性的, 有 5 个独立的弹性常数,  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{G}_{12}, \tilde{\nu}_{12}, \tilde{G}_{23}$ .

##### 1) 含单向片状颗粒 ( $\alpha \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_0 E_1 [c_1 E_1 (1 - \nu_0) + c_0 E_0 (1 - \nu_1)] / \\ &\quad \{E_0 E_1 (1 - \nu_1) + c_1^2 [E_0 (1 + \nu_1) - E_1 (1 + \nu_0)] (E_1 - E_0 + 2\nu_1 E_0 - 2\nu_0 E_1) + \\ &\quad c_1 [E_1^2 (1 - \nu_0 - 2\nu_0^2) - 2E_0 E_1 (1 - \nu_1 - 2\nu_0 \nu_1) + E_0^2 (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)] \} \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{[c_1 E_1 (\nu_0 + 1) + c_0 E_0 (\nu_1 + 1)] [c_1 E_1 (\nu_0 - 1) + E_0 (\nu_1 - c_0 - c_1 \nu_1)]}{c_1 E_1 (\nu_0^2 - 1) + c_0 E_0 (\nu_1^2 - 1)}$$

$$\tilde{G}_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{c_0 E_0}{\nu_0 + 1} + \frac{c_1 E_1}{\nu_1 + 1} \right)$$

$$\tilde{G}_{13} = \frac{E_0 E_1}{2 \{E_1 + E_1 \nu_0 + c_1 [E_0 (\nu_1 + 1) - E_1 (\nu_0 + 1)] \}}$$

$$\tilde{\nu}_{13} = \{E_0 E_1 [c_1 \nu_1 - \nu_0 (\nu_1 - c_0)] \} /$$

$$\{ -E_0 E_1 (\nu_1 - 1) + c_1^2 [ -E_1 (1 + \nu_0) + E_0 (1 + \nu_1) (E_1 - 2E_1 \nu_0 + E_0 (2\nu_1 - 1)) + c_1 ( -E_1^2 (2\nu_0^2 + \nu_0 - 1) + 2E_0 E_1 (2\nu_0 + \nu_1 - 1) - E_0^2 (2\nu_0^2 + \nu_0 - 1)) ] \}$$

2) 含单向圆截面纤维 ( $\alpha \rightarrow \infty$ )

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_1 &= c_1 E_1^2 [\nu_0 + 1 - c_1 (2\nu_0^2 + \nu_0 - 1)] + E_0^2 c_0^2 (2\nu_1^2 + \nu_1 - 1) - E_0 c_0 (2\nu_1^2 + \nu_1 - 1) - \\ &\quad c_0 E_0 E_1 [c_1 (4\nu_0 \nu_1 + \nu_0 + \nu_1 - 2) - \nu_0 - 1] / E_1 [\nu_0 + 1 - c_1 (2\nu_0^2 + \nu_0 - 1)] \\ \tilde{E}_2 &= \{ E_0 [ -E_1 (3 + c_1 - 4\nu_0) (1 + \nu_0) - c_0 E_0 (1 + \nu_1) ] [c_1 E_1^2 (1 + \nu_0) (-1 + c_1 (2\nu_0 - 1)) - \\ &\quad c_0^2 E_0^2 (-1 + \nu_1 + 2\nu_1^2) - c_0 E_0 E_1 (1 + \nu_0 - c_1 (-2 + \nu_0 + \nu_1 + 4\nu_0 \nu_1))] \} / \\ &\quad \{ c_0 c_1 E_1^3 (\nu_0 - 1) (1 + \nu_0)^3 [-3 - 2c_1 + 4(c_1 + 1)\nu_0] - c_0^2 E_0^3 [-1 + 2c_1 (\nu_0^2 - 1)] \cdot \\ &\quad (1 + \nu_1)^2 (2\nu_1 - 1) + c_0 E_0^2 E_1 (1 + \nu_0) (1 + \nu_1) [4 - 6\nu_1 + 4\nu_0 (2\nu_1 - 1) + \\ &\quad c_1 (1 + \nu_1 + \nu_0 (-1 + \nu_1 - 4\nu_0 \nu_1)) + 6c_1^2 (\nu_0 - 1) (-1 + \nu_1 + 2\nu_0 \nu_1)] + \\ &\quad E_0 E_1^2 (1 + \nu_0)^2 [3 - 4\nu_0 - 2c_1 [\nu_1 + \nu_0 (2 - 3\nu_1 + \nu_0 (-3 + 2\nu_1))] + \\ &\quad c_1^2 [-1 + 2\nu_1 + 2\nu_0 (2 + 3\nu_1 - 2\nu_0 (1 + 2\nu_1))] + 6c_1^3 (\nu_0 - 1) (-1 + \nu_0 + 2\nu_0 \nu_1) \} \\ \tilde{G}_{23} &= - \frac{E_0 [E_1 (c_1 + 3 - 4\nu_0) (\nu_0 + 1) + E_0 (\nu_1 + 1) c_0]}{2(\nu_0 + 1) \{ E_1 c_0 (4\nu_0^2 + \nu_0 - 3) + E_0 (\nu_1 + 1) [c_1 (\nu_0 - 3) - 1] \}} \\ \tilde{G}_{13} &= \frac{E_0 [E_1 (\nu_0 + 1) (c_1 + 1) + E_0 (\nu_1 + 1) c_0]}{2(\nu_0 + 1) [E_1 (\nu_0 + 1) c_0 + E_0 (\nu_1 + 1) (c_1 + 1)]} \\ \tilde{\nu}_{13} &= \frac{E_1 (\nu_0 + 1) [-\nu_0 c_0 + 2c_1 \nu_1 (-1 + \nu_0)] + E_0 \nu_0 c_0 (2\nu_1^2 + \nu_1 - 1)}{E_1 (\nu_0 + 1) [c_1 (2\nu_0 - 1) - 1] + E_0 c_0 (\nu_1 + 1) (2\nu_1 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

### 2.2.2 含正交孔洞或裂纹材料

把式 (12) 代入 (11), 即可得到含有三相正交孔洞或裂纹的等效弹性模量的显式表达式. 本文推出了椭球状孔、币状孔 ( $\alpha \ll 1$ )、针状孔 ( $\alpha \rightarrow \infty$ )、球状孔 ( $\alpha = 1$ ) 和裂纹 ( $\alpha \rightarrow 0$ ) 在三相正交排列时材料的弹性模量的解析式, 由于篇幅所限, 这里仅列出表达式较简单的含三相币状孔、针状孔和裂纹材料的损伤弹性模量公式.

1) 含有三相正交币状孔材料的弹性模量 ( $\alpha \ll 1$ )

略去  $\alpha$  的高阶小量, 当夹杂的体积分数较小时, 有如下简化公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{E}_r}{E_0} &= \frac{4\pi\alpha c_0}{4\pi\alpha + c_r (1 + \nu_0) [16 - 17\pi\alpha + 16(\pi\alpha - 1)\nu_0]} \quad (r = 1, 2, 3) \\ \frac{\tilde{G}_{ts}}{G_0} &= \frac{c_0}{c_0 + \frac{4(c_r + c_s)(\nu_0 - 1)}{\pi(\nu_0 - 2)\alpha} - \frac{16c_t(\nu_0 - 1)}{16 - 7\pi\alpha + 8\nu_0(\pi\alpha - 2)}} \quad (r \neq s \neq t; r, s, t = 1, 2, 3) \\ \frac{\tilde{\nu}_{rs}}{\nu_0} &= \frac{2\pi\alpha [c_r + c_s - (c_r + c_s - 2)\nu_0 - 2(c_r + c_s)\nu_0^2]}{\nu_0 \{ 4\pi\alpha + c_r (1 + \nu_0) [16 - 17\pi\alpha + 16(\pi\alpha - 1)\nu_0] \}} \quad (r \neq s; r, s = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2) 含有三相正交针状孔材料的弹性模量 ( $\alpha \rightarrow \infty$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{E}_r}{E_0} &= \frac{c_0}{1 + 2(c_s + c_t)(1 - \nu_0^2)} \quad (r \neq s \neq t; r, s, t = 1, 2, 3) \\ \frac{\tilde{G}_{rs}}{G_0} &= \frac{c_0}{1 + c_r + c_s + c_t(3 - 4\nu_0)} \quad (r \neq s \neq t; r, s, t = 1, 2, 3) \\ \frac{\tilde{\nu}_{rs}}{\nu_0} &= \frac{\nu_0 - c_t(2\nu_0^2 + \nu_0 - 1)}{\nu_0[1 + 2(c_r + c_s)(1 - \nu_0^2)]} \quad (r \neq s \neq t; r, s, t = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

3) 含有裂纹材料的等效弹性模量

由于裂纹不占有体积，这里采用 Budiansky 和 O'Connell<sup>[13]</sup> 引入的裂纹密度反映裂纹的数量，其定义为

$$\eta = Nd^3/V \quad (17)$$

式中  $N$  是体积  $V$  内裂纹总数， $d$  是裂纹直径。  $\eta$  为无量纲量。 设  $t$  为裂纹厚度，  $\alpha = t/d$ ， 则第  $r$  相裂纹体积分数为

$$c_r = 4\pi d^2 t N_r / 3V = 4\pi\alpha\eta_r / 3 \quad (r = 1, 2, 3) \quad (18)$$

在币状孔洞材料的等效弹性模量公式 (16) 中， 令  $\alpha \rightarrow 0$ ， 即得到含三相正交裂纹材料的等效弹性模量

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{E}_r}{E_0} &= \frac{1}{1 + \frac{16}{3}(1 - \nu_0^2)\eta_r} \quad (r = 1, 2, 3) \\ \frac{\tilde{G}_{rs}}{G_0} &= \frac{1}{1 + \frac{16}{3} \frac{1 - \nu_0}{2 - \nu_0} (\eta_r + \eta_s)} \quad (r \neq s; r, s = 1, 2, 3) \\ \frac{\tilde{\nu}_{rs}}{\nu_0} &= \frac{1}{1 + \frac{16}{3}(1 - \nu_0^2)\eta_r} \quad (r \neq s; r, s = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由上式得

$$\frac{\tilde{\nu}_{12}}{\tilde{E}_1} = \frac{\tilde{\nu}_{23}}{\tilde{E}_2} = \frac{\tilde{\nu}_{31}}{\tilde{E}_3} = \frac{\nu_0}{E_0} \quad (20)$$

从式 (19) 可见， 与仅含单向裂纹的材料 ( $\eta_2 = \eta_3 = 0$ ) 相比，  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  的同时存在使材料的剪切弹性模量衰减加快， 但对材料的拉伸弹性模量  $\tilde{E}_1$  和  $\tilde{\nu}_{12}$  无影响。

由于所讨论的材料基体中仅含有三相不同的夹杂， 由式 (19) 和 (20) 可见， 9 个等效弹性模量中， 仅有 3 个是独立的， 相应地存在 3 个独立的损伤因子。 它们在细观上是三个正交方向裂纹的密度  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  的函数， 故在细观上可以用三个独立的变量  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  来描述材料的损伤。

2.2.3 含正交片状颗粒材料的弹性模量 ( $\alpha \rightarrow 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 = 0$ )

我们也得到了含正交片状颗粒夹杂材料的等效弹性模量的解析显式。 当三维体 1, 2 方向的夹杂不为零时， 复合材料是三向正交各向异性的， 有 9 个独立的弹性常数。 然而， 由于在几何上模型在 1, 2 方向是对称的， 故在 1 方向的弹性常数的表达式中， 交换 1, 2 方向的夹杂体积分数和夹杂的弹性常数， 即可得到 2 方向相应的弹性常数表达式。 限于篇幅， 具体表达式从略。

### 3 含三相正交的微空洞或微裂纹的材料损伤模型

#### 3.1 损伤因子

如前所述, 损伤描述最重要的和首要的一步就是选择适当的损伤变量. 本文选择材料的等效弹性模量来定义损伤变量. 其优点是等效弹性模量与原子尺度上的原子键和细观层次上的微缺陷分布直接相关, 宏观上易测, 与结构的尺寸无关, 直接可用于细观和宏观力学计算.

设正交异性损伤的独立的损伤弹性模量为 9 个:  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{\nu}_{12}, \tilde{\nu}_{23}, \tilde{\nu}_{31}, \tilde{G}_{12}, \tilde{G}_{23}, \tilde{G}_{31}$ , 则定义损伤变量

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= 1 - \frac{\tilde{E}_1}{E_0}, & D_{22} &= 1 - \frac{\tilde{E}_2}{E_0}, & D_{33} &= 1 - \frac{\tilde{E}_3}{E_0}, \\ D_{12} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_{12}}{\nu_0}, & D_{23} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_{23}}{\nu_0}, & D_{31} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_{31}}{\nu_0}, \\ D_{44} &= 1 - \frac{\tilde{G}_{23}}{G_0}, & D_{55} &= 1 - \frac{\tilde{G}_{31}}{G_0}, & D_{66} &= 1 - \frac{\tilde{G}_{12}}{G_0} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中  $E_0, \nu_0, G_0$  分别为未损伤材料的拉伸弹性模量、泊松比和剪切弹性模量. 材料未损伤时, 损伤变量的值皆为 0, 随着材料损伤的发展, 损伤变量一般逐渐增大,  $D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}, D_{55}$  和  $D_{66}$  的损伤极限值为 1, 但  $D_{12}, D_{13}$  和  $D_{23}$  的变化比较复杂, 与微缺陷的形状有关. 事实上, 本文的分析仅适用于微缺陷密度较低的情况, 也没有考虑损伤局部化现象. 实际应用时, 损伤变量的临界值应根据实验确定.

#### 3.2 损伤应力应变关系

材料损伤后的应力应变关系的张量形式为

$$\sigma_{ij} = \tilde{L}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{或} \quad \varepsilon_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (22)$$

其中  $\tilde{C}_{ijkl}$  和  $\tilde{L}_{ijkl}$  分别是损伤柔度张量分量和它的逆张量分量, 可以通过式 (21) 以损伤变量来表示, 或像上一节所做的那样, 以细观参数来表示. 这样就避免了前述基于应变 (或余能、应力) 等效假设的经典连续损伤理论的局限性.

### 4 细观参数对三向正交材料弹性模量与损伤的影响

对于含夹杂和缺陷的材料, 影响其等效弹性模量的因素可分为两类, 一类是复合材料中每一组份材料的材料弹性常数. 另一类是复合材料内部的微结构特征, 它包括夹杂的形状、几何尺寸、在基体中的分布和夹杂间的相互作用. 这里仅以含正交微孔洞的材料为例, 讨论夹杂体积比、各增强相形状、基体与各相增强材料的弹性常数的匹配对损伤的影响.

**例 1** 比较三种材料的三向正交损伤, 其基体均为  $E_0 = 2.76 \text{ GPa}$ ,  $\nu_0 = 0.35$ , 三种材料孔洞的形状 (长径比) 不相同: 材料 1:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$ , 材料 2:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.5$ , 材料 3:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 100$ . 图 1 为三种材料在  $c_2 = c_3 = 0.1$  时损伤因子  $D_{11}$  随  $c_1$  的变化. 可以看出, 不同形状孔洞对损伤因子的影响不同.

**例 2** 比较三种材料的三向正交损伤, 其基体均为  $E_0 = 2.76 \text{ GPa}$ ,  $\nu_0 = 0.35$ , 三种材料所含孔洞的方位不同. 材料 1:  $\alpha_1 = 25, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0.05$ , 材料 2:  $\alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 25, \alpha_3 = 0.5$ , 材料 3:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.05, \alpha_3 = 25$ . 图 2 为三种材料在  $c_2 = c_3 = 0.05$  时损伤因子  $D_{11}$  随  $c_1$  的变化. 可以看出, 不同形状孔洞的方位不同, 对某一损伤因子的影响不同.

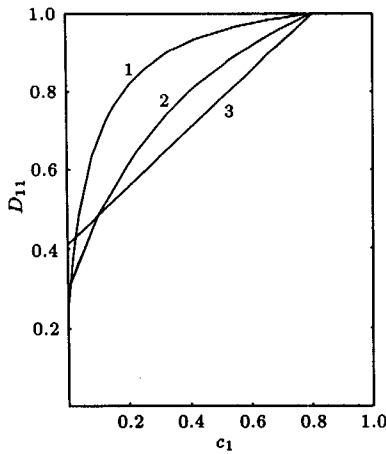


图 1 损伤因子  $D_{11}$  随孔洞体积分数的变化  
Fig.1 Variation of  $D_{11}$  with the volume fraction of the void

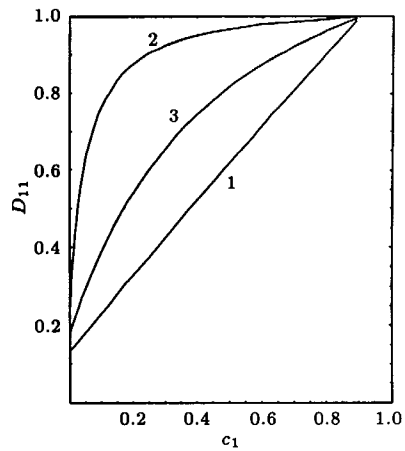


图 2 损伤因子  $D_{11}$  随孔洞体积分数的变化  
Fig.2 Variation of  $D_{11}$  with the volume fraction of the void

例 3 比较基体的泊松比对材料损伤的影响。基体的弹性模量  $E_0 = 2.76 \text{ GPa}$ ，三相正交夹杂的体积分相等， $c_1 = c_2 = c_3 = 0.1$ ，三相孔洞的形状相同， $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$ 。则  $D_{11} = D_{22} = D_{33}$ ， $D_{44} = D_{55} = D_{66}$ ， $D_{12} = D_{13} = D_{23}$ ，它们随基体的泊松比  $\nu_0$  的变化如图 3，其中，拉伸损伤因子和剪切损伤因子随  $\nu_0$  的变化是略成线性的。由图 3 可见， $D_{12}, D_{13}, D_{23}$  随  $\nu_0$  变化较大，其余损伤因子变化不大。但实际上，从图 4 可见， $\nu_0$  对各等效弹性模量的影响都不大，其中，拉伸等效弹性模量和剪切等效弹性模量随  $\nu_0$  的变化也是略成线性的，等效泊松比随  $\nu_0$  的变化是线性的。

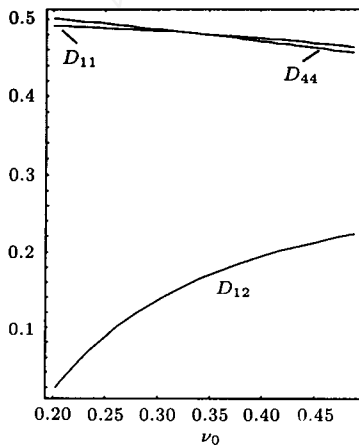


图 3 损伤因子随基体泊松比  $\nu_0$  的变化  
Fig.3 Variation of the damage variables with  $\nu_0$

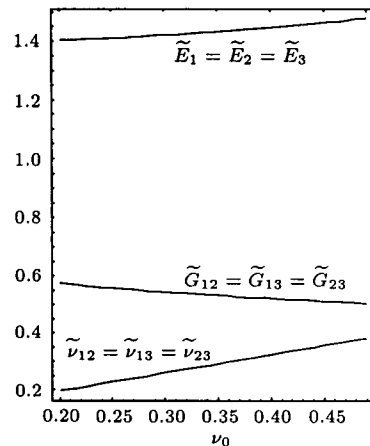


图 4 等效弹性模量随基体泊松比  $\nu_0$  的变化  
Fig.4 Variation of the effective elastic constants with  $\nu_0$

## 5 结论与讨论

1) 以 Eshelby-Mori-Tanaka 方法基础，提出了多相各向异性复合材料的等效模量的简便计算公式；推导出含三簇相互正交椭圆状夹杂的正交异性复合材料的等效弹性模量。得出了含三

相正交片状夹杂、圆截面纤维、孔洞和裂纹等的材料的等效弹性常数的显式表达式;

2) 提出了正交异性材料的损伤描述的一个模型. 建立了含细观参量的损伤应力与应变关系. 该理论未依靠任何等效假设, 从而避免了基于等效应变或等效余能假设的经典损伤理论的局限性.

3) 对正交复合材料等效弹性模量的细观影响因素进行了研究. 对增强相的体积分数、形状、方位及基体与各相增强材料的弹性常数匹配进行了计算比较.

4) 本文仅研究了含细观损伤材料的应力应变关系, 并没有涉及损伤的演化. 后者必须考虑微缺陷的形核、长大、连接等现象及其物理机制, 需要进一步研究. 只有同时建立损伤演化方程, 才能得到材料损伤行为的完整模型.

致谢 作者感谢中科院力学研究所王自强研究员对这一工作的鼓励和有益的讨论.

### 参 考 文 献

- 1 Ji M, Ishikawa H, Anahara M et al. The estimation of fracture resistance of orthogonal three-dimensional fiber-reinforced composite by DCB testing. *JSME Int J*, 1997, Series A, 10(1): 37~43
- 2 Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metal*, 1973, 21: 571~574
- 3 Weng GJ. Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing special inclusions. *Int J Engng Sci*, 1984, 22(7): 845~856
- 4 Zheng QS, Betten J. On damage effective stress and equivalence hypothesis. *Int J Damage Mech*, 1996, 5: 219~240
- 5 高蕴昕, 郑泉水, 余寿文. 各向同性弹性损伤的双标量描述. *力学学报*, 1996, 5: 543~549 (Gao Yunxin, Zheng Quanshui, Yu Shouwen. Double-scalar formulation of isotropic elastic damage. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 5: 543~549 (in Chinese))
- 6 Kachanov LM. Time of the rupture process under creep condition. *Izv Akad Nauk USSR Otd Tekhn Nauk*, 1958, 8: 26~31
- 7 Lamaitre J. Local approach of fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 1986, 25: 523~537
- 8 Chaboche JL. Continuum damage mechanics, Part I and Part II. *J Appl Mech*, 1989, 55: 59~72
- 9 Eshelby JD. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc Roy Soc*, A241, 1957. 376
- 10 Mura T. *Micromechanics of Defects in Solids*. 2nd ed. Martinus Nijhoff, publishers, 1987
- 11 Tandon GP, Wang GJ. The effective of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composite. *Polymer Composite*, 1984, 5(4): 327~333
- 12 Tandon GP, Wang GJ. Average stress in the matrix and effective moduli of randomly oriented composites. *Comp Sci Tech*, 1986, 27: 111~132
- 13 Budiansky B, O'Connell RJ. Elastic moduli of a cracked solid. *Int J Solids & Struct*, 1976, 12: 81~97



# THE OVERALL ELASTIC MODULI AND DAMAGE OF THE MATERIALS CONTAINING ORTHOGONAL INCLUSIONS AND DEFECTS <sup>1)</sup>

Zhao Aihong     Yu Jilin

(*University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China*)

**Abstract** The effective elastic moduli and damage of materials containing orthogonal inclusions or defects are investigated in this paper. Based on Eshelby-Mori-Tanaka's theory, a simplified formula of the effective moduli for a multiphase, anisotropic composite is developed. The explicit expressions of the effective elastic compliance tensor of an orthotropic composite reinforced by three mutually perpendicular families of ellipsoidal inclusions are then derived. These expressions contain the micro-structural parameters (shape, orientation and volume fraction of the inclusions) of the composite. A model of orthotropic damage of materials that combines macroscopic mechanical properties with micro-structural parameters of the material is proposed. The stress and strain relation with micro-structural parameters is presented. Furthermore, the effects of the micro-structural parameters on the damage of material are analyzed.

**Key words** orthotropic material, effective elastic moduli, Eshelby-Mori-Tanaka's method, orthotropic damage, micro-structural parameters

Received 4 January 1998, revised 4 November 1998.

1) Supported by the Major Project in Fundamental Research of the Chinese Academy of Sciences (KJ951-1-201).